G. HERTZ

LEHRBUCH DER KERNPHYSIK

II

PHYSIK DER ATOMKERNE

1958

LEHRBUCH DER KERNPHYSIK

BAND II

PHYSIK DER ATOMKERNE

Herausgegeben von

PROF. DR. G. HERTZ

Direktor des Physikalischen Instituts der Karl-Marx-Universität Leipzig

Mit Beiträgen von

Dr. K. F. Alexander, Dresden · Dr. D. Geißler, Leipzig · Dr. K. Lanius, Berlin
Prof. Dr. A. Lösche, Leipzig · Dr. D. Lyons, Berlin · Prof. Dr. G. Richter, Berlin
Prof. Dr. J. Schintlmeister, Dresden · Prof. Dr. C. F. Weiß, Leipzig
Dr. S. Wohlrab, Berlin

sowie einem Tabellenanhang, zusammengestellt von Dipl.-Phys. W. Lohmann, Leipzig

Mit 328 Abbildungen

EDITION LEIPZIG

VERLAG WERNER DAUSIEN · HANAU/MAIN

VORWORT

Mit dem zweiten Bande wird das Hauptstück unseres Lehrbuches vorgelegt, denn dieser Band enthält die eigentliche Kernphysik. Bei seiner Abfassung hatten die Verfasser die schwierige Aufgabe, aus der ungeheuren Fülle der Tatsachen die richtige Auswahl zu treffen. Entsprechend dem Zwecke des Lehrbuches, als Hilfsmittel bei der Ausbildung von Kernphysikern zu dienen, sind in erster Linie diejenigen Tatsachen und Gesetzmäßigkeiten behandelt worden, welche als gesicherte Grundlagen der weiteren Entwicklung gelten können und dem selbständig arbeitenden Kernphysiker bekannt sein müssen.

Die Darstellung beginnt mit einer Behandlung der Eigenschaften der stabilen Kerne. Hier wird in der Hauptsache das Tatsachenmaterial dargestellt, ohne daß schon eine genauere Kenntnis der erst später zu behandelnden Theorie vorausgesetzt wird. Als Hauptteil folgen dann die Kapitel über die Kernumwandlungen. Dem einleitenden Abschnitt über den radioaktiven Zerfall ist eine historische Darstellung vorangestellt. Dies schien zweckmäßig, da sich die Kernphysik geschichtlich aus der Lehre vom radioaktiven Zerfall entwickelt hat.

Das Kapitel über Kernreaktionen und Kernspaltung bringt eine zusammenfassende Darstellung des gesamten Beobachtungsmaterials auf dem Gebiete der Kernreaktionen bei niederen Energien. Hiermit sind solche Energien gemeint, bei denen noch keine neuen schweren Teilchen wie Mesonen usw. entstehen. Eine übersichtliche Darstellung dieses ungeheuer vielfältigen Gebietes ist ohne Eingehen auf die Theorie der Kernreaktionen nicht möglich. In einem Schlußabschnitt werden daher die wesentlichsten Ergebnisse dieser Theorie in möglichst einfacher und physikalisch verständlicher Weise abgeleitet.

In dem darauffolgenden Kapitel über Kernprozesse bei extrem hohen Energien wurde der Nachdruck auf die Darstellung der experimentellen Ergebnisse gelegt, weil es im Rahmen eines Lehrbuches nicht möglich ist, theoretische Entwicklungen zu behandeln, welche noch so stark im Flusse sind, wie die hier in Frage kommenden.

Ohne Kenntnis der Theorie der Atomkerne ist eine Übersicht über die Tatsachen der Kernphysik und ein selbständiges Arbeiten auf diesem Gebiete nicht möglich. Aus diesem Grunde enthält unser Lehrbuch in den theoretischen Kapiteln eine einführende Darstellung dieser Theorie. Auf dem Gebiete der Kernmodelle wird die durch den Erfolg des Schalenmodells ausgelöste neuere Entwicklung zum kollektiven und optischen Modell in ihren Hauptzügen dargestellt, obwohl hier manche Dinge noch im Flusse sind. Um den Charakter einer einführenden Darstellung zu wahren, ist die Verwendung der Quantenmechanik möglichst eingeschränkt worden; ein gewisses Maß an Vorkenntnissen auf diesem Gebiete ist zum Verständnis aber unerläßlich.

Im letzten Kapitel wird die Neutronenphysik behandelt, also ein Gegenstand, welcher für fast alle Anwendungen der Kernphysik von entscheidender Bedeutung ist. Bei dem großen Umfang dieses Gebietes war eine vollständige Behandlung nicht möglich. Es wurde vielmehr eine ausführliche Darstellung charakteristischer und wichtiger Teilgebiete angestrebt. Bei der Besprechung der experimentellen Methoden werden diejenigen hervorgehoben, welche sich besonders charakteristisch von den im ersten Band behandelten Verfahren unterscheiden. Ausführlich wird die Bewegung der Neutronen in kompakter Materie behandelt, deren Kenntnis für das Verständnis der Vorgänge im Reaktor eine wichtige Voraussetzung ist.
Am Schluß des Bandes befinden sich zwei ausführliche Kerntabellen, welche die wichtigsten Daten für die Anfang 1959 bekannten, etwa 1500 Kerne enthalten. Bei der Aufstellung der Tabellen wurde, besonders bei den neueren Werten, weitgehend die Originalliteratur zugrunde gelegt. Die beigegebene, farbige Kerntafel stellt die Lage der stabilen und bis Sommer 1959 bekannten instabilen Kerne in dem aus ihrer Protonenzahl Z und Neutronenzahl N gebildeten Koordinatensystem dar. Außerdem kann man der Tafel entnehmen: Die Art der Umwandlung, das Auftreten von metastabilen Zuständen, evtl. auftretenden doppelten β-Zerfall usw. Die Symbole der Kerntafel sind so gewählt, daß sie sich möglichst einprägen oder von selbst verstehen, so daß die Benutzung der Tafel sehr einfach ist.
Wir hoffen, daß die Beigabe dieser ausführlichen Tabellen dazu beitragen wird, unser Lehrbuch nicht nur für den Lernenden, sondern auch für solche Leser nützlich zu machen, welche schon selbständig mit kernphysikalischen Arbeiten beschäftigt sind.
Für seine freundliche Mitwirkung bei der Bearbeitung der theoretischen Abschnitte sage ich Herrn Prof. Dr. B. Kockel meinen besten Dank.

Leipzig, im Juli 1959 DER HERAUSGEBER

INHALT

A. Eigenschaften der stabilen Kerne

B. Kernumwandlungen

C. Theorie der Atomkerne

D. Neutronenphysik *(Dr. K. F. Alexander)*

Anhang I

Anhang II *(Dipl.-Phys. W. Lohmann)*

A. EIGENSCHAFTEN DER STABILEN KERNE

I. Aufbau und Systematik

§ 1. Die Kernbausteine

Im Anfangsstadium der Kernphysik wurde vermutet, daß ein Kern mit der Massenzahl A auch A Protonen enthält, deren Ladung zum Teil durch Elektronen kompensiert wird (*Protonen-Elektronen-Hypothese*). Der Überschuß der Protonen über die Elektronen sollte die Kernladungszahl ergeben.

Mit der Entdeckung des Neutrons wurde diese erste Hypothese über den Bau der Atomkerne aufgegeben. Unsere heutigen Vorstellungen fassen den Kern *als einen Verband von Neutronen und Protonen* auf.

Damit wurden auch die Schwierigkeiten, die mit der Elektronenhypothese verbunden sind, behoben. Die hauptsächlichen Unstimmigkeiten betreffen die *Platzfrage*, den *Spin* und das *magnetische Dipolmoment* der Kerne.

Soll ein Elektron im Kern lokalisiert sein, so darf bei Kreisbewegung seine de Broglie-Wellenlänge λ nicht größer sein als der Kernumfang,

$$2\pi R \geq \lambda = \frac{h}{p},$$

um einen in sich geschlossenen Wellenzug zu erhalten. R bedeutet hier den Kernradius und h das Plancksche Wirkungsquantum. Da sich herausstellen wird, daß die Geschwindigkeit des Elektrons die Lichtgeschwindigkeit c fast erreicht, setzen wir für den Impuls p seine relativistische Größe

$$p = \frac{E_{\text{kin}}}{c}$$

ein. Es müßte dann bei einem Kernradius von $3 \cdot 10^{-13}$ cm ($A = 10$) die kinetische Energie des Elektrons — relativistisch gerechnet — mindestens 60 MeV betragen, ein Wert, der zu groß ist, um durch elektrostatische Kräfte Bindung zu erhalten. Andere Kräfte sind schon wegen der Existenz der Elektronenhülle nicht anzunehmen.

Berechnen wir jedoch die de Broglie-Wellenlänge für ein Neutron oder Proton, so erhalten wir nach der Gleichung

$$2\pi R \geq \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 M E_{\text{kin}}}} \tag{1.1}$$

mit $R = 3 \cdot 10^{-13}$ cm eine kinetische Energie von

$$E_{\text{kin}} \geq \frac{\hbar^2}{2 M R^2} = 2{,}0 \,\text{MeV}$$

(M ist die Teilchenmasse, $\hbar$ die durch 2π dividierte Plancksche Konstante). Einen Wert dieser Größe haben wir zu erwarten. Die Umrechnung von Impuls in kinetische Energie erfolgte in diesem Falle nach den Gesetzen der klassischen Mechanik. Das Ergebnis rechtfertigt dies, denn eine Energie von 2,0 MeV ist erheblich kleiner als das Energieäquivalent der Ruhemasse eines Nukleons, welches $1836 \cdot m_0 c^2 = 938{,}7$ MeV beträgt (m_0 ist die Ruhemasse des Elektrons).
Statt mit der de Broglie-Wellenlänge zu rechnen, können wir zur Abschätzung des Platzbedarfes eines Nukleons auch die Heisenbergsche Unschärferelation heranziehen. Die Ortsunschärfe eines Nukleons können wir gleich dem Einheitsradius R_0 annehmen. Die Umrechnung der Impulsunschärfe in Energieunschärfe gibt $\Delta p = \sqrt{2 M \Delta E_{\text{kin}}}$, so daß wir also

$$\Delta E_{\text{kin}} \simeq \frac{\hbar^2}{2 M R_0{}^2} = 8{,}5 \,\text{MeV}$$

erhalten. Für Elektronen ergeben sich auch in diesem Falle viel zu große Werte.
Die Rechnung liefert die wellenmechanische Nullpunktsenergie. Die potentielle Energie der Bindung des letzten Teilchens muß größer sein, damit es im Kernverband bleibt. Bei Experimenten tritt als Bindungsenergie der Unterschied zwischen dieser potentiellen Energie und der größten kinetischen Nullpunktsenergie des letzten Teilchens (der Fermi-Grenzenergie) in Erscheinung.
Als zweiter Grund gegen die Protonen-Elektronen-Hypothese sei angeführt, daß sie einen unrichtigen Spin für den Stickstoffkern $_7N^{14}$ liefert. Das Proton wie das Elektron haben halbzahligen Spin. Denkt man sich den Kern $_7N^{14}$ aus 14 Protonen und 7 Elektronen aufgebaut, so sind dies 21 Teilchen. Ein System, das aus einer ungeraden Zahl von Teilchen mit halbzahligem Spin besteht, muß aber halbzahligen Gesamtspin besitzen, denn die Quantenzahlen der Eigendrehimpulse lassen sich nicht zu einem ganzzahligen Wert kombinieren, und die Quantenzahlen der Bahndrehimpulse sind bekanntlich ganzzahlig. Experimentell ergab sich für $_7N^{14}$ ganzzahliger Spin. Der Nachweis konnte durch den Intensitätswechsel aufeinanderfolgender Linien im Bandenspektrum des Stickstoffmoleküls leicht erbracht werden. Nach der Entdeckung des Neutrons im Jahre 1932 hat D. D. Iwanenko sogleich darauf aufmerksam gemacht, daß die Annahme, der Stickstoffkern bestehe aus 7 Protonen und 7 Neutronen, diese Schwierigkeit behebt. Die Gesamtzahl der Bausteine beträgt dann 14, ist also geradzahlig und hat ganzzahligen Spin zur Folge.
Eine weitere Schwierigkeit für die Protonen-Elektronen-Hypothese ist die Größenordnung der magnetischen Dipolmomente der Kerne, die experimentell durchweg von der Größenordnung des Kernmagnetons

$$\mu_K = \frac{e}{M_p c} \frac{\hbar}{2} = 5{,}050 \cdot 10^{-24} \,\text{erg/Gauß}$$

gefunden werden. Dies spricht gegen die Anwesenheit von Elektronen im Kerne, da dann die magnetischen Dipolmomente der Kerne in der Größenordnung des Bohrschen Magnetons

$$\mu_B = \frac{e}{m_0 c} \frac{\hbar}{2} = 9{,}273 \cdot 10^{-21} \text{ erg/Gauß}$$

liegen sollten.

§ 2. Charakteristische meßbare Eigenschaften eines stabilen Kernes

Wir wollen nun nach den Eigenschaften eines stabilen Kernes fragen, die der Messung zugänglich sind und die ihn charakterisieren. Die *Ordnungs-* oder *Kernladungszahl* Z bestimmt den Charakter des chemischen Elementes und ist gleich der Zahl der Protonen im Kern. Die *Massenzahl* A entspricht der Summe der Protonen und Neutronen. Sie kann massenspektroskopisch ermittelt werden. Die Differenz $A - Z$ ist gleich der *Neutronenzahl*. Auch der *Neutronenüberschuß* $N - Z = A - 2Z$ ist eine häufig verwendete Kenngröße. Die *Bindungsenergie* der Kerne erreicht eine solche Größe, daß ihr Massenäquivalent $\frac{E}{c^2}$ gewichtsmäßig als *Massendefekt* erfaßbar wird. Differenzen der Bindungsenergie stellen die sog. *Q-Werte* bei Kernumwandlungen dar. Schließlich kann noch der *Kernradius* bestimmt werden (Bd. I), der auch nach der Gleichung $R = R_0 A^{1/3}$ aus der Massenzahl A berechnet werden kann.

Die aufgezählten Größen geben die allgemeine Zusammensetzung des Kernes an. Feinere Züge des Kernbaues werden durch weitere Kernmerkmale erfaßt. Von diesen ist an erster Stelle der *mechanische Drehimpuls* oder der *Spin* zu nennen. In Systemen, in denen quantenmechanische Gesetze gelten, können die Drehimpulse nicht beliebige Werte annehmen, sondern sind in Vielfachen von $\frac{\hbar}{2}$ gequantelt. Elektron, Proton, Neutron haben einen Eigendrehimpuls der Größe $\frac{1}{2}\hbar$. Es ist üblich, das Größenmaß $\hbar$ wegzulassen und somit nur zu sagen: *Der Spin des Protons wie des Neutrons ist* $\frac{1}{2}$.

Kerne mit einem unpaarigen Proton oder Neutron besitzen erfahrungsgemäß immer halbzahligen Spin. Solche Kerne haben *ungerade* Massenzahl A. Dies gilt sowohl für den Grundzustand wie auch für die angeregten Zustände. Die halbzahligen Eigendrehimpulse der Nukleonen setzen sich nämlich bei gerader Teilchenzahl zu einem ganzzahligen Spin oder dem Spin Null zusammen. Der halbzahlige Eigendrehimpuls des letzten unpaarigen Nukleons bleibt unkompensiert. Weil nun Bahndrehimpulse ganzzahligen Spin haben, so ist der Gesamtspin halbzahlig. Kerne mit *gerader* Massenzahl haben ganzzahligen Spin oder den Spin Null. Bemerkenswert ist die Regel, daß der Spin im Grundzustand aller Kerne mit gerader Neutronen- sowie gerader Protonenzahl Null ist. Eine Ausnahme von dieser Regel ist nicht bekannt.

Haben die Kerne einen von Null verschiedenen Spin, so besitzen sie ein *magnetisches Dipolmoment*, das in Vielfachen des Kernmagnetons angegeben wird

(s. Bd. I S. 82). Je nach der Richtung des magnetischen Dipolmomentes zur Spinachse trägt es positives oder negatives Vorzeichen.
Eine weitere Kenngröße ist das *elektrische Quadrupolmoment,* das die Abweichung der Ladungsverteilung von der Kugelsymmetrie zahlenmäßig ausdrückt. Das Quadrupolmoment ist positiv bei einer in die Länge gestreckten Ladungsverteilung, wie sie in Abb. 1 a dargestellt ist, und negativ, wenn die Ladungsverteilung einem abgeplatteten Rotationsellipsoid nach Abb. 1 b entspricht. Der Name rührt davon her, daß man sich diese Ladungsverteilung durch zwei Dipole hervorgerufen denken kann, wie es Abb. 1 c für ein positives Quadrupolmoment zeigt. Nach Bd. I, S. 84, Gl. (76) trägt eine Punktladung e, deren Abstand vom Koordinatenursprung d beträgt und mit der z-Achse den Winkel ϑ einschließt, zum Quadrupolmoment den Betrag q bei:

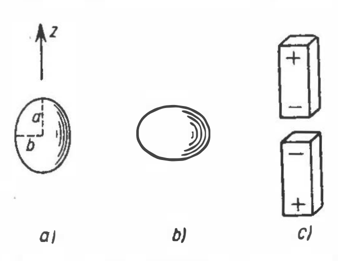


Abb. 1. Ladungsverteilung bei a) positivem und bei b) negativem Quadrupolmoment. Das Ersatzblid für einen Quadrupol mit positivem Quadrupolmoment zeigt c)

$$q = d^2(3\cos^2\vartheta - 1).$$

Hat der Atomkern eine Ladungsverteilung gemäß einem Rotationsellipsoid, so erhalten wir aus dieser Gleichung sein Quadrupolmoment Q, wenn wir statt der Ladung e die Ladungsdichte ϱ eines Volumenelements dv einführen und über alle Volumenelemente integrieren. Bezeichnen wir die Halbachse des Rotationsellipsoides, die in z-Richtung weist, mit a, die zum Äquator gerichtete Halbachse mit b und die Kernladung mit Z, so wird

$$\varrho = \frac{eZ}{\int dv} = \frac{3\,eZ}{4\pi a^2 b}\,.$$

Da $\cos\vartheta = \frac{z}{d}$ ist, erhalten wir also

$$Q = \frac{\varrho}{e}\int(3\,z^2 - d^2)\,dv = \tfrac{2}{5}Z\,(b^2 - a^2)\,.$$

Führen wir den Kernradius R als Mittelwert der beiden Halbachsen,

$$R = \frac{a+b}{2},$$

und ε als Maß für die Abweichung von der Kugelform,

$$\varepsilon = \frac{b-a}{R} \simeq \frac{b}{a} - 1,$$

ein, dann kann man Q auf die Form

$$Q = \varepsilon\,\tfrac{4}{5}ZR^2 \tag{2.1}$$

bringen, die es ermöglicht, ε und damit das Verhältnis der beiden Halbachsen zu berechnen. Man hat nun zu unterscheiden zwischen *Quadrupolmoment* und *innerem (intrinsic) Quadrupolmoment.* Nur das letztgenannte Moment legt die geo-

metrische Figur des Kernes fest. Ist der Spin I des Kernes 0 oder $\frac{1}{2}$, so wird nämlich durch die Präzession der Figurenachse die Ladungsverteilung im Zeitmittel kugelsymmetrisch ausgeglichen. Der Kern hat dann $Q = 0$, auch wenn der Kern selbst von der Kugelform abweicht, sein inneres Quadrupolmoment Q_i also von Null verschieden ist

$$Q = Q_i \frac{I}{I+1} \frac{2I-1}{2I+3}$$

(s. Bd. I, S. 85). Die experimentell bestimmten Werte von ε haben i. allg. die Größe von einigen Hundertsteln, d.h., die Abweichung der Ladungsverteilung von der Kugelform beträgt einige Prozent. Die größten Abweichungen wurden bei Er^{167} mit $\approx 50\%$ und Np^{237} mit $\approx 30\%$ festgestellt (vgl. Abb. 20).

In einigen Fällen konnte auch ein *magnetisches Oktupolmoment* des Kernes gemessen werden.

Zur vollständigen Beschreibung des Grundzustandes eines stabilen Kernes gehört ferner die Angabe seines *Isospins* T.

Der Begriff des Isospins wurde 1937 von WIGNER geprägt.[1]) Im Jahre 1952 erkannte R. ADAIR, daß Kernreaktionen mit schweren Teilchen, bei denen der Isospin erhalten bleibt, bevorzugt auftreten. Seitdem ist dieser Begriff von immer größerer Bedeutung in der Kernphysik geworden (vgl. Kap. VII). Er spielt insbesondere in der Theorie der angeregten Niveaus der leichten Kerne, vor allem der Spiegelkerne, eine entscheidende Rolle (vgl. Kap. VIII und IX). Der Isospin tritt als Eigenschaft des Kernes auf, weil die Kernkräfte näherungsweise ladungsunabhängig sind, so daß man Proton und Neutron als zwei Zustände eines Teilchens „Nukleon" auffassen kann, wie in Kap. IX A gezeigt wird. Dort werden die Eigenschaften des Isospins ausführlich besprochen; hier wollen wir seine Bedeutung nur kurz qualitativ skizzieren. Dazu betrachten wir als einfaches Beispiel einen Kern, der aus vier Nukleonen besteht, die sich auf zwei Niveaus verteilen.

Sind diese *vier Nukleonen sämtlich gleichartig*, also sämtlich Neutronen oder sämtlich Protonen, so gibt es wegen des Pauli-Verbotes bei zwei vorhandenen Niveaus nur eine einzige Besetzungsmöglichkeit, nämlich zwei Nukleonen auf dem unteren und zwei auf dem oberen Niveau mit jeweils entgegengesetzt gerichtetem Spin. In Abb. 2 ist diese Verteilung in den Spalten $4n$ und $4p$ dargestellt. Neutronen sind dabei als volle Kreise und Protonen als leere Kreise gezeichnet. Der Gesamtspin J des Systems ist Null. Er ist in der linken Spalte eingetragen.

Ist *ein Teilchen verschieden von den drei anderen*, so können, ohne dem Pauli-Prinzip zu widersprechen, auf dem unteren Niveau drei Teilchen sitzen. Es gibt dann — je nach der Spinorientierung der zwei unpaarigen Teilchen — vier Kombinationen, von denen zwei den Gesamtspin 0 und zwei den Gesamtspin 1 auf-

---

[1]) Die Bezeichnung „Spin" führt diese Quantenzahl, weil deren Theorie der Theorie des gewöhnlichen Spin formal analog ist. Insbesonders bedient sie sich der Paulischen Spin-Matrizen. Ursprünglich hieß die Quantenzahl „Isotopenspin" oder auch „Isobarenspin", um anzudeuten, daß sie sich auf die Charakteristik von Atomkernen bezieht (vgl. auch die Wortbildung „Isotopenkatalog"). Sie hat aber unmittelbar weder mit dem Begriff der „Isotopen" noch der „Isobaren" etwas zu tun; daher wurde ihr schließlich der Name „Isospin" gegeben.

weisen. Diese vier Zustände liegen energetisch tiefer als der Zustand der Systeme $4n$ und $4p$. Sie sind daher in Abb. 2 in den Spalten $3n + p$ und $n + 3p$ niedriger eingezeichnet. Die zwei Zustände mit dem Spin 0 können wir als „ausgeglichenere" Zustände auffassen, die energetisch etwas tiefer liegen als die Zustände mit dem Spin 1. Sie sind daher in der Abbildung zuunterst eingetragen.

Abb. 2. Alle Möglichkeiten der Verteilung von vier Nukleonen auf zwei Niveaus. Neutronen sind als volle, Protonen als leere Kreise bezeichnet. Die Pfeile bedeuten die Spinorientierung. (Nach B. S. DZHELEPOV)

Wenn zwei Teilchen auf dem unteren, zwei auf dem oberen Niveau sitzen und der Spin 0 ist, kann die Verteilung auf vier verschiedene Arten erfolgen. Diese vier möglichen Zustände sind untereinander und mit dem Zustand des Systems $4n$ und $4p$ wegen der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte energetisch gleichwertig. Um dies anzudeuten, sind sie in gleicher Höhe gezeichnet. Wir nennen diese Verteilungen — hier wie in analogen Fällen — „gleichartige Besetzungen". Die Zustände, bei denen zwei Teilchen auf dem unteren und zwei auf dem oberen Niveaus sitzen, bei denen jedoch der Gesamtspin 1 ist, liegen wiederum energetisch höher als die zuvor besprochenen. Hier werden wir energetisch zu unterscheiden haben, ob die Teilchen mit parallelem Spin auf dem unteren oder auf dem oberen Niveau sitzen. Noch höher liegt eine Gruppe von Zuständen, bei denen ein Teilchen das untere und drei das obere Niveau besetzen, wobei wiederum die Energie der Zustände mit dem Spin 1 über denen mit dem Spin 0 liegt.

Gehen wir nun zu der *symmetrischen Verteilung* $2n + 2p$ über, so treten zwei weitere neue Kombinationsmöglichkeiten auf. Alle vier Teilchen können nunmehr auch auf dem unteren oder auf dem oberen Niveau sitzen.

Der Abb. 2 können wir folgende Gesetzmäßigkeiten entnehmen, die allgemeine Gültigkeit haben:

1. Isobare können Zustände mit gleichartigen Besetzungen der Nukleonen aufweisen. Diese Zustände sind energetisch gleichwertig.

2. Der Grundzustand liegt um so tiefer, je kleiner die Differenz zwischen der Neutronen- und Protonenzahl wird.

3. Je kleiner diese Differenz wird, um so mehr neue energetisch verschiedene Zustände treten auf, die bei weniger symmetrischen Systemen nicht vorkommen.

Wir zählen nun ab, in wieviel Spalten der Abb. 2, also bei wieviel Isobaren, ein bestimmter Zustand vorkommt, und setzen diese Zahl gleich $2T + 1$. Die Größe T führt den Namen Isospin. Der Zustand, in dem zwei Nukleonen mit antiparallelem Spin das untere Niveau besetzen und zwei mit antiparallelem Spin das obere, tritt bei 5 Isobaren auf. Der Isospin dieses Zustandes ist demgemäß 2. Ein Zustand, der nur bei einem Isobar vorkommt, hat den Isospin 0. Der Isospin ist in der rechten Spalte der Abb. 2 angegeben.
Ein System, das nur aus einem Nukleon besteht, hat bei ladungsunabhängigen Kräften zwei energetisch gleichwertige Zustände: Das Nukleon kann ein Proton oder Neutron sein. Daraus folgt $T = \frac{1}{2}$ für Proton und Neutron. Das α-Teilchen im Grundzustand besitzt den Isospin $T = 0$, da nach Abb. 2 der betreffende Zustand nur einmal vorkommt. Auch für das Deuteron ist $T = 0$.
Der Zustand mit $T = 2$ kommt in dem System der Abb. 2 bei 5 Isobaren vor. Wenn wir diese 5 Unterzustände unterscheiden wollen, müssen wir sie numerieren. Der symmetrische Zustand wird mit 0 bezeichnet. Davon ausgehend werden nach rechts und links die Spalten abgezählt. Der Nummer der Spalte entspricht eine neue Größe, die mit T_3 bezeichnet und dritte Komponente des Isospins genannt wird. Der Grund für diese Bezeichnung wird später erörtert. (vgl. Kap. IX, A). Ersichtlicherweise ist T_3 gleich der halben Zahl der Überschußneutronen:

$$T_3 = \frac{N - Z}{2};$$

T_3 ist immer kleiner oder gleich T.

Schließlich ist ein weiteres charakteristisches Merkmal der Grundzustände und auch der angeregten Zustände von Atomkernen die *Parität.* Sie kennzeichnet den Symmetriecharakter der Wellenfunktion, mit denen die Quantentheorie ein System von Teilchen beschreibt. Die Wellenfunktion kann bei Spiegelung der Koordinaten aller Teilchen am Koordinatenursprung (Inversion) ihr Vorzeichen beibehalten oder wechseln. Im erstgenannten Falle wird die Parität des Zustandes mit Plus bezeichnet, im zweiten mit Minus. Auch die Ausdrücke Gerade und Ungerade sind hierfür gebräuchlich. Die Parität von Zuständen kann beispielsweise durch Bestimmung der Multipolordnung von Gammastrahlen festgestellt werden. (Näheres hierüber s. Kap. X.)

§ 3. Einteilung der Kerne und Kerntypen

Für die Klassifizierung der Kerne ist folgende Nomenklatur in Gebrauch: Man bezeichnet mit *Isobaren* Kerne gleicher Massenzahl A, mit *Isotopen* Kerne gleicher Protonenzahl Z und mit *Isotonen* Kerne gleicher Neutronenzahl N. Isotope und Isotone sind vom Standpunkt der Kernphysik aus analoge Begriffe. Wenn also kein stabiler Kern für das Element $Z = 61$ existiert, so ist es in gleicher Weise bemerkenswert, daß auch kein stabiler Kern mit $N = 61$ bekannt ist. *Isodiaphere* sind Kerne mit gleichem Neutronenüberschuß $N - Z = A - 2Z$. Solche Kerne sind beispielsweise Ausgangs- und Endkern beim α-Zerfall. Kerne mit gleichem N und Z, wovon jedoch der eine sich in einem metastabilen Anregungszustand befindet, werden als *Isomere* bezeichnet. Es hat sich der Brauch eingebürgert, nur dann von Isomerie zu sprechen, wenn der metastabile Zustand eine mittlere Lebensdauer größer als 0,1 μsec besitzt. Geht der isomere Kern durch Emission eines Gammastrahles in den Grundzustand über, so wird dieser Vorgang *isomerer Übergang* genannt. Häufig ist der isomere Übergang so unwahrscheinlich, daß der angeregte Kern bereits vorher durch Emission eines β-Teilchens zerfällt. Die Isomerie wurde 1922 von Otto Hahn bei UX_2 (68 sec) und UZ (6,7 h), beides $_{91}Pa^{234}$, entdeckt. Als Isomer im engeren Sinne wird der angeregte Kern bezeichnet. Seiner Massenzahl wird der Buchstabe i beigefügt. $_{91}Pa^{234\,i}$ bedeutet also den Kern $_{91}Pa^{234}$ in seinem metastabilen Zustand.

Zwei isobare Kerne, die durch Auswechseln der Neutronen gegen Protonen und der Protonen gegen Neutronen ineinander übergehen, bezeichnet man als *Spiegelkerne*. Spiegelkerne erster Ordnung sind die Paare $_{Z}M^{2Z+1} \leftrightarrow {}_{Z+1}M^{2Z+1}$. Sie besitzen ungerade Massenzahl, gleiche Anzahl Neutron-Proton-Paare und ein unpaariges Neutron oder Proton. Beispiele sind: $H^3 - He^3$; $N^{15} - O^{15}$. Spiegelkerne zweiter Ordnung haben gerade Massenzahl, ebenfalls eine gleiche Anzahl von n-p-Paaren und zusätzlich 2 Protonen oder 2 Neutronen. Sie sind durch die Beziehung $_{Z-1}M^{2Z} \leftrightarrow {}_{Z+1}M^{2Z}$ gekennzeichnet. Als Beispiele seien genannt $C^{14} - O^{14}$ und $P^{32} - Cl^{32}$.

Spiegelkerne zeigen völlig gleiche Struktur und gleiche Quantencharakteristik der Niveaus. Ihre Bindungsenergie unterscheidet sich nur durch den verschiedenen Anteil der Coulomb-Energie wegen der verschiedenen Protonenzahl. Wir benutzten im Bd. I, S. 44, diesen Umstand, um den Kernradius zu bestimmen. Die völlig symmetrischen Eigenschaften der Spiegelkerne sind durch ein umfangreiches experimentelles Material an 26 solcher Kernpaare festgestellt. Aus dieser Symmetrie folgt u. a. auch die Gleichheit der p-n-, n-n- und p-p-Kräfte (s. Kap. IX, § 93).

Bei den Kernen haben wir *vier Typen* zu unterscheiden, je nachdem die Protonen- und Neutronenzahl gerade oder ungerade ist. Der halbzahlige Spin der Nukleonen bringt es mit sich, daß ein paariges Proton oder Neutron energetisch fester gebunden wird als ein unpaariges. Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl, man bezeichnet sie als Kerne vom Typ g, g, besitzen daher eine größere Bindungsenergie als ihre Isobaren vom Typ u,u mit einem unpaarigen Proton und Neutron.

Der Spin der Kerne vom Typ g,g und u,u ist immer ganzzahlig, die Massenzahl gerade. Der Grundzustand des erstgenannten Typs besitzt erfahrungsgemäß immer den Spin 0. Kerne mit einem unpaarigen Neutron oder Proton stellen die Typen u, g und g, u dar. Der Spin dieser Kerne im Grundzustand und in den angeregten Zuständen ist halbzahlig, die Massenzahl ungerade.

§ 4. Häufigkeit der Kerne

Es sind 267 stabile Kerne bekannt, die ohne Ausnahme in der Erdrinde aufgefunden werden. Alle instabilen Isotope eines Elementes, die den stabilen benachbart sind, zur Zeit (1958) zählt man 1174, wurden durch Kernreaktionen künstlich erzeugt und sind untersucht, so daß nach dem heutigen Stande des Wissens die stabilen Kerne lückenlos erfaßt sind. Die Zahl der stabilen Kerne verteilt sich auf die vier Kerntypen nach der Tabelle 1. Etwa 60 % der stabilen Kerne gehören demnach zum Kerntyp g,g.

Tabelle 1. Häufigkeit der einzelnen Kerntypen

Zahl der Neutronen	Zahl der Protonen	Zahl der stabilen Kerne
gerade	gerade	157
ungerade	gerade	56
gerade	ungerade	48
ungerade	ungerade	6

Die sechs Kerne vom Typ u,u sind: $_1D^2$, $_3Li^6$, $_5B^{10}$, $_7N^{14}$, $_{23}V^{50}$, $_{73}Ta^{180}$. Die beiden letztgenannten sind allerdings vermutlich instabil.
Nur 8 Elemente haben einen Anteil an der Erdmasse, der größer ist als 2 Gewichtsprozente. Sie sind in Tabelle 2 angeführt.

Tabelle 2. Elemente, die mit 2 und mehr als Gew.% am Gewicht der Erdmasse Anteil haben
(Nach Russell)

$_8O$	48 Gew.%	$_{20}Ca$	3,5 Gew.%
$_{14}Si$	26 Gew.%	$_{11}Na$	2,8 Gew.%
$_{13}Al$	8,5 Gew.%	$_{19}K$	2,5 Gew.%
$_{26}Fe$	5,0 Gew.%	$_{12}Mg$	2,0 Gew.%

Die Erde besteht zu 98,3 Gew.% aus diesen Elementen. Von den verbleibenden 1,7 Gew. % nimmt der Wasserstoff der Ozeane nur einen kleinen Teil ein.
Die Zusammensetzung der *Meteorite* deckt sich völlig mit der Häufigkeit der Vorkommen der stabilen Kerne auf der Erde, wenn man von dem Fehlen der Edelgase, des Stickstoffs und des Wasserstoffs absieht. Diese Gase können von den Meteoren nicht festgehalten werden.

Astrophysikalische Beobachtungen brachten das Ergebnis, daß auf der *Sonne* und anderen Fixsternen Wasserstoff und Helium die weitaus häufigsten Elemente sind. Die anderen Elemente kommen mit derselben relativen Häufigkeit wie auf der Erde vor. Unterschiede im Wasserstoff- und Heliumgehalt sowie Abweichungen bei anderen leichten Elementen lassen sich durch die energieliefernden Kernreaktionen im Sterninneren erklären. Von den leichten Elementen abgesehen, besteht also die gesamte Materie des Kosmos aus derselben Mischung von Kernen. In Abb. 3 ist die relative atomare Häufigkeit der Kerne im logarithmischen Maßstab als Ordinate und die Massenzahl als Abszisse aufgetragen. Die Häufigkeit von Silizium ist zu 10000 festgesetzt. Wie ersichtlich, bildet die Häufigkeitsverteilung ein Band, das bei $A \simeq 70$ einen Knick aufweist.

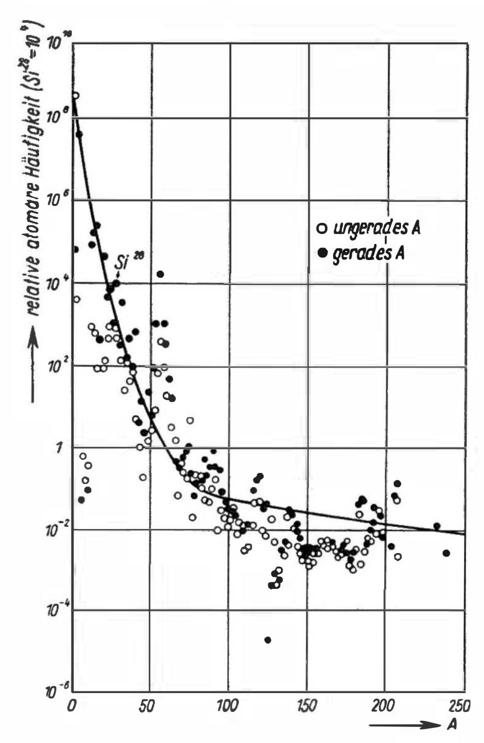


Abb. 3. Relative kosmische Häufigkeit der Kerne (Kreise bedeuten ungerades A, Punkte gerades A). (Nach R. A. ALPHER und R. C. HERMAN)

Die Frage, wie sich diese Häufigkeitsverteilung ausbilden konnte, ist mit dem kosmologischen Problem der Entstehung der Sternsysteme verbunden. Der Zeitpunkt der Entstehung der Elemente des Sonnensystems liegt $(4{,}5 \pm 0{,}3) \cdot 10^9$ Jahre zurück (HOUTERMANS, 1957). Diese Zahlenangabe ist gut fundiert. Die Theorien über den Vorgang zur Elementebildung weisen z. Z. noch stark spekulativen Charakter auf. Die ausgezogene Kurve der Abb. 3 ist unter der probeweisen Annahme berechnet, daß im Zeitpunkt der Entstehung die Materie zu 88% aus freien Neutronen und zu 12% aus freien Protonen bestand mit einer totalen Konzentration dieser Nukleonen von $1{,}07 \cdot 10^{17}$ cm^{-3}, was einer Dichte von $1{,}8 \cdot 10^{-7}$ g/cm^3 entspricht. Die Temperatur dieses Gases wurde zu $1{,}28 \cdot 10^9$ Grad angenommen, so daß die mittlere kinetische Energie der Nukleonen 0,11 MeV betragen hat. Innerhalb von Stunden lagern sich bei diesen Anfangsbedingungen die freien Neutronen an Protonen und leichte Kerne an und bilden so schwerere Kerne, die unter β-Zerfall sich in stabile Kerne umwandeln, welche weitere Neutronen einfangen. Die jetzige Häufigkeitsverteilung soll sich also in sehr kurzer Zeit ausgebildet haben.

§ 5. Kräfte zwischen den Kernbausteinen

a) Wichtige Eigenschaften der Kernkräfte

Wenn die Kerne aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt sind, so erhebt sich die Frage, welche Kräfte zwischen diesen Bausteinen wirken. Diese Kräfte lassen sich durch Versuche über die Streuung von Neutronen und schnellen Protonen an Wasserstoff direkt untersuchen (erste Messungen von M. G. WHITE sowie TUVE, HEYDENBURG und HAFSTAD, 1936). Die Protonen müsssen bei diesen Versuchen allerdings eine Mindestenergie von 1 MeV besitzen, damit sie trotz des abstoßenden Coulomb-Feldes („Rutherford-Streuung") in den Bereich der anziehenden Kernkräfte des Stoßpartners gelangen.

Die Streuversuche ergeben das Resultat, daß die Kernkräfte eine *kurze Reichweite*, von der Größenordnung 10^{-13} cm, haben. Die Kernkräfte wirken überaus *stark*, wie aus der Größe der Bindungsenergie hervorgeht. Ein Nukleon ist mit durchschnittlich 6 bis 8 MeV an den Kern gebunden. Demgegenüber beträgt die Stärke der Bindung eines Valenzelektrons der Hülle 2 bis 3 Elektronenvolt. Die Bindungsenergien stehen also im Verhältnis $10^6:1$, die Kräfte demnach im Verhältnis $\frac{10^6}{10^{-13}\,\text{cm}}:\frac{1}{10^{-8}\text{cm}} = 10^{11}:1$ und die Beschleunigungen wie $\frac{10^{11}}{M_p}:\frac{1}{m_e} \simeq 10^8:1$. Dabei sind M_p die Protonenmasse und m_e die Elektronenmasse. Wenn man die magnetischen Kräfte zwischen den magnetischen Dipolmomenten von Neutron und Proton sowie die Coulomb-Kräfte bei der p-p-Streuung in Rechnung setzt, so ergibt sich das bemerkenswerte Resultat, daß die Kernkräfte zwischen Proton-Proton und Proton-Neutron genau gleich groß sind. Daraus folgt dann, weil z.B. bei den leichten Kernen die Zahl der Protonen gleich der Zahl der Neutronen ist, daß auch zwischen Neutron und Neutron eine Kraft der gleichen Größe wie die Proton-Proton-Kraft wirkt. *Die Kernkräfte sind also unabhängig von der elektrischen Ladung des Kernbausteins.* Diese Ladungsunabhängigkeit wird später (s. Kap. IX, § 93) näher behandelt. Zusammen mit dem Umstand, daß sich Protonen in Neutronen und umgekehrt auch Neutronen in Protonen durch den radioaktiven β-Prozeß umwandeln können, führt dies zu der Vorstellung, daß Neutron und Proton als zwei verschiedene Zustände eines einzigen Teilchens, des Nukleons, aufzufassen sind.

Mit der geringen Reichweite der Kernkräfte hängen eng zwei andere experimentelle Feststellungen zusammen. Die Bindungsenergie eines Kernes ist der Hauptsache nach proportional der Zahl A der Nukleonen (vgl. Abb. 7). Die Entfernung eines Nukleons aus dem Kernverband erfordert also immer ungefähr denselben Arbeitsaufwand, wie groß der Kern auch sei (s. Abb. 9). Weiter ist das Kernvolumen proportional der Zahl der Nukleonen oder der Kernradius R von der Größe $R = R_0 A^{1/3}$(s. Bd. I, S.41). Sowohl die Zahl der Nukleonen in der Volumeneinheit wie auch die Bindungsenergie pro Nukleon sind also annähernd Konstante. Man bezeichnet beide Tatsachen auch als *Sättigung der Teilchendichte* und *Sättigung der Bindungsenergie.* Für beide Eigenschaften liegt eine der Ursachen in der kurzen

Reichweite der Kräfte, die nur zwischen benachbarten Teilchen wirken. Die Kräfte reichen nur bis auf eine Entfernung der Größenordnung des Einheitsradius $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm. Würden sie erheblich weiter reichen, so würde jedes Nukleon auf jedes andere wirken, und die Bindungsenergie des Kerns müßte quadratisch mit der Teilchenzahl zunehmen. Die Teilchendichte sollte dann auch mit steigender Teilchenzahl anwachsen, denn der „Platzbedarf" eines Nukleons wird mit steigender Bindungsenergie kleiner, wie im Vorstehenden gezeigt wurde. (Eine genauere Behandlung der Sättigungserscheinungen findet sich in Kap. IX, § 96.)

Die Sättigung der Bindungsenergie hat ein Analogon bei den Festkörpern und Flüssigkeiten, bei denen auch jedes Teilchen gleich stark gebunden ist.

b) Kernkräfte und Mesonen

Zwei Wasserstoffatome bilden ein H_2-Molekül, weil der gegenseitige Austausch von Hüllenelektronen eine Anziehungskraft und damit eine Bindung zur Folge hat. Bereits HEISENBERG, der das Protonen-Neutronen-Modell des Atomkernes entwickelte, hat die Hypothese aufgestellt, daß die Kernkräfte den Austauschkräften der chemischen Bindung wesensverwandt seien. Das eigentliche Analogon zur Kernbindung ist allerdings nicht die homöopolare Bindung des H_2-Moleküls, sondern die metallische Bindung. Auch sie wird durch Austausch von Elektronen bewirkt, die allerdings „vergesellschaftet" in großer Zahl vorhanden sind.

Die Quantenfeldtheorie zeigt (s. Kap. IX, A), daß auch die Kernkräfte durch einen *Austausch von Teilchen* zustande kommen. Diese Teilchen sind die *π-Mesonen*. Der Austausch ist allerdings nicht genau analog dem Elektronenaustausch der homöopolaren Bindung, da die Mesonen bei diesem Austausch nur „virtuell" auftreten. Damit bezeichnet man die Tatsache, daß die Mesonen nur während der Zeit des Austausches existieren und daß diese Zeit so kurz ist, daß die Mesonen dabei nicht als Teilchen beobachtet werden können.

Die Emission eines π-Mesons aus einem Nukleon ist klassisch nicht möglich, weil das Energieäquivalent $Mc^2 = 140$ MeV der Ruhemasse des Mesons nicht vorhanden ist. Nach der Quantenfeldtheorie kann jedoch der Vorgang stattfinden, wenn das Meson nur während einer sehr kurzen Zeit Δt existiert, d.h. nach deren Ablauf wieder absorbiert wird. Diese Zeit Δt ist durch die *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$\Delta E\, \Delta t \simeq \hbar \qquad (5.1)$$

festgelegt. Hat das Meson eine Geschwindigkeit v, so legt es in der Zeit Δt eine Strecke $b = v\,\Delta t$ zurück. Diese Strecke mißt also die Sphäre um ein Nukleon, innerhalb der Mesonen vorkommen können. Außerhalb dieser Sphäre gibt es keine Mesonen, es fehlt daher auch deren Wirkung. Die Strecke b gibt somit die *Reichweite* der Kernkräfte an. Die Geschwindigkeit v kann die Lichtgeschwindigkeit c nicht übersteigen. Berücksichtigen wir dies, so erhalten wir

$$Mc^2 \leq \Delta E \simeq \frac{\hbar}{\Delta t} \simeq \frac{\hbar v}{b} \leq \frac{\hbar c}{b}.$$

Somit wird

$$b \leq \frac{\hbar}{Mc}.$$

Nehmen wir $v = c$ an, und setzen wir für die Masse M den Wert 273 m_0, das ist die Masse der $\pi\pm$-Mesonen, ein, so erhalten wir

$$b \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{cm},$$

was mit dem Einheitsradius R_0 eines Nukleons sehr gut übereinstimmt.
Das Problem der Kernkräfte ist im übrigen noch nicht völlig geklärt. In Kap. IX wird auf die Schwierigkeiten näher eingegangen.

c) Wirkungen der elektrostatischen Kraft

Das Bestehen von Bindungskräften zwischen den Nukleonen kann man durch das Bild einer Potentialmulde veranschaulichen. In Abb. 4 sind zwei solcher Potentialmulden für die Neutronen (Kreise) und Protonen (Punkte) nebeneinander dargestellt. Proton wie Neutron haben den Spin $\frac{1}{2}$. Es gilt also für sie die *Fermi-Statistik*. Diese besagt, daß ein spezieller Quantenzustand, zu dem auch die Spinorientierung zählt, nur von einem einzigen dieser Teilchen besetzt werden kann. Auf dem untersten Niveau der Mulde können somit nur zwei Teilchen mit antiparalleler Spinorientierung Platz finden. Ein drittes Teilchen würde mit einem der beiden anderen in allen Merkmalen übereinstimmen. Das Pauli-Verbot verlangt also den Einbau des dritten Teilchens auf dem nächst höheren Energieniveau. Das vierte Teilchen findet auf dem gleichen Niveau Platz, nur muß der Spin wiederum entgegengesetzt dem des schon vorhandenen Teilchens orientiert sein. Es werden also paarweise die quantenmechanisch möglichen Energiezustände von den Teilchen gleicher Art besetzt, wenn sich der Kern im Grundzustand befindet. Der Grundzustand der Kerne entspricht thermodynamisch einer Temperatur der Kernmaterie vom absoluten Nullpunkt. Die kinetische Energie der Neutronen und Protonen nach dem Schema der Abb. 4 wird daher als *kinetische Nullpunktsenergie* bezeichnet.

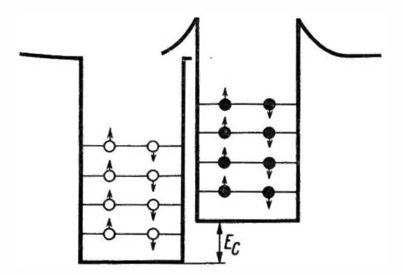


Abb. 4. Potentialmulde für Neutronen (Kreise) und Protonen (Punkte) mit dem Besetzungsschema (E_C=Coulomb-Energie)

Neben der kurzreichenden Kernkraft, die eng mit der Existenz der π-Mesonen und der Möglichkeit der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton und eines Protons in ein Neutron verknüpft ist, wirkt im Atomkern noch die *elektrostatische Abstoßung* zwischen den Protonen. Das Termschema in einem Potentialtopf ist für Neutronen und Protonen völlig gleich. Wegen des abstoßenden Potentials der elektrischen Ladungen ist allerdings das Termschema für die Protonen um den Betrag der Coulomb-Energie E_C gegenüber dem Termschema der Neutronen versetzt. Für eine gleiche Zahl von Protonen und Neutronen liegt deshalb das

oberste besetzte Niveau bei den Protonen um den gleichen Betrag E_C über dem obersten besetzten Energieniveau für Neutronen.

Vereinigen wir die beiden Potentialmulden der Abb. 4, so werden sich so viele Protonen durch einen β^+-Prozeß in Neutronen umwandeln, bis das oberste besetzte Energieniveau für beide Teilchenarten ungefähr denselben Wert erreicht hat. Es ist in Abb. 5 oben gestrichelt gezeichnet. Ein kleiner Unterschied, den wir aber unberücksichtigt lassen wollen, verbleibt wegen der Differenz in der Neutronen- und Protonenmasse. Es stellt sich also in einer Potentialmulde, die Neutronen und Protonen zusammen enthält, ein *Überschuß von Neutronen* ein. Er hängt mit der Coulomb-Energie der Protonen zusammen. Da diese mit Z^2 zunimmt, ist besonders bei den schweren Kernen der Neutronenüberschuß sehr erheblich.

Wir beachten nun, daß gegen den Rand zu die Dichte der Nukleonen nicht plötzlich, sondern allmählich gegen Null abfällt. Dadurch entstehen, wenn man zunächst in nullter Näherung von gleichem Kernradius für die Protonen- und Neutronenverteilung ausgeht, also von den Dichteverteilungen $\varrho_0(N)$ und $\varrho_0(P)$ (Abb. 5 unten), Potentiale (Abb. 5 oben), in denen das Protonenpotential nach oben versetzt erscheint. Beachtet man nun, daß die Lage des höchsten besetzten Energieniveaus für Neutronen und Protonen fast gleich sein muß (gestrichelte Linie), so findet man, daß in diesem Potentialfeld der Radius der Protonenverteilung kleiner als der Radius der Neutronenverteilung wird. Die zugehörige Dichteverteilung $\varrho_1(P)$ der Protonen muß also in erster Näherung kleiner sein als $\varrho_0(P)$. Sieht man diese beiden Schritte als den *Beginn eines Selfconsistent-Verfahrens* an, so bedeutet dies, daß es einen kleineren „Protonenradius" erwarten läßt. In der Tat geben die Experimente (s. Bd. I) diesen Unterschied zwischen „Protonen"- und „Neutronen"-Radien.

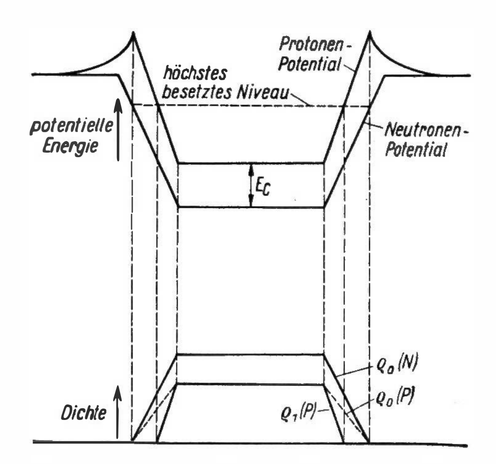


Abb. 5. Neutronen und Protonen in einer Potentialmulde ergeben wegen der Coulomb-Energie E_C der Protonen einen Überschuß der Neutronen

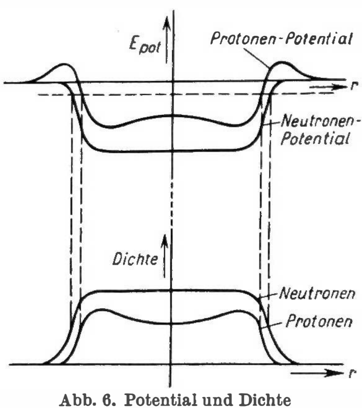


Abb. 6. Potential und Dichte für Protonen und Neutronen im Inneren eines Atomkerns

Runden wir in der schematischen Darstellung der Abb. 5 die scharfen Ecken ab und berücksichtigen, daß die Coulombsche Abstoßung die Protonen so weit als möglich auseinander drängt, so erhalten wir die in Abb. 6 oben dargestellte Potentialverteilung und in Abb. 6 unten die zugehörige Dichteverteilung der Protonen und Neutronen im Kerninnern. Abb. 6 soll allerdings nicht die Vorstellung aufkommen lassen, daß der Atomkern gewissermaßen mit einer Haut aus Neutronen überzogen sei. Auch in dessen Oberflächenschicht finden sich Protonen. Abb. 6 veranschaulicht vielmehr qualitativ, daß die Kernmaterie nicht als eine bis zum Kernrande homogene Mischung von Neutronen und Protonen aufzufassen ist.

II. Massendefekt und Bindungsenergie

§ 6. Bindungsenergie, Massendefekt und Packungsanteil

In der Chemie wird seit alters her $\frac{1}{16}$ des Atomgewichtes des Elementes Sauerstoff als Einheit der Atomgewichtsskala gewählt. Das Element Sauerstoff besteht aber aus einem Gemisch von drei stabilen Isotopen, von denen die Masse des Hauptisotops $O^{16} = 16$ gesetzt in der Physik die Einheit der Atommasse definiert.[1]) Chemische und physikalische Massenskala unterscheiden sich daher. Der Umrechnungsfaktor kann aus der Häufigkeit der Sauerstoffisotope

O^{16}: 99,7587%	Masse:	16 per definitionem,
O^{17}: 0,0374%		17,004537,
O^{18}: 0,2039%		18,004885

berechnet werden. In der physikalischen Skala wird damit das Atomgewicht des Mischelementes 16,004464 (± 7)[2]). Division durch 16 gibt den Umrechnungsfaktor zwischen den beiden Massenskalen.

Es ist somit

$$\text{phys. Atomgewicht} = 1{,}0002790\ (\pm 5) \cdot \text{chem. Atomgewicht}^{3)}$$

Alle Massenangaben in Tabellenwerken beziehen sich immer auf *neutrale Atome*. Zur Berechnung der Kernmassen ist also die Masse der Elektronenhülle abzuziehen. In der physikalischen Skala beträgt die Ruhemasse des Elektrons 0,548771 TME (Tausendstel Masseneinheiten). Korrekturen wegen des Massenäquivalents der Bindungsenergie der Elektronenhülle sind so klein, daß sie meist nicht berücksichtigt werden müssen.

---

[1]) Vgl. aber Anhang II, Erläuterungen zu Tabelle 1, Spalte 4 (Fußnote).
[2]) Mit (± 7) ist der Fehler in Einheiten der letzten Stelle angegeben.
[3]) Vgl. aber Anhang II, Tabelle 3, letzte Fußnote

Die genauen Massenwerte der neutralen Atome liegen auffallend nahe der Massenzahl A. Die Massen des Neutrons und des Wasserstoffatoms sind jedoch um rund 0,8% größer als die Masseneinheit (ME); demnach sollten die neutralen Atome Massen besitzen, die um 0,8% größer sind als die Massenzahl. Der Massendefekt hat seinen Grund in der *Bindungsenergie* der Kerne. Diese ist so groß, daß ihr Massenäquivalent $m = \frac{E}{c^2}$ gewichtsmäßig erfaßbar wird. Da

$$1 \text{ TME} = 0{,}931141 \ (\pm\ 10) \text{ MeV} = 1{,}493 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

ist, beträgt also in grober Annäherung die Energie, mit der ein Baustein im Atomkern gebunden wird, 8 MeV. Den Massendefekt $D = \frac{E_B}{c^2}$ kann man aus der genauen Masse M und den Massen des Wasserstoffs, $M_{\text{H}} = 1{,}0081451$ $(\pm\ 2)$, und des Neutrons, $M_n = 1{,}008983$ (± 2), nach

$$M = Z_{\text{H}} M + N M_n - D = A M_n - Z(M_n - M_{\text{H}}) - D$$
$$= A\left(1 + 0{,}00898 - \frac{Z}{A}\, 0{,}000\,838\right) - D$$

leicht berechnen. Die Umrechnung von Masseneinheiten (Massendefekt) in Energieeinheiten gibt für die stabilen Kerne den in Abb. 7 dargestellten Verlauf der Bindungsenergie E_B in Abhängigkeit von der Massenzahl A.

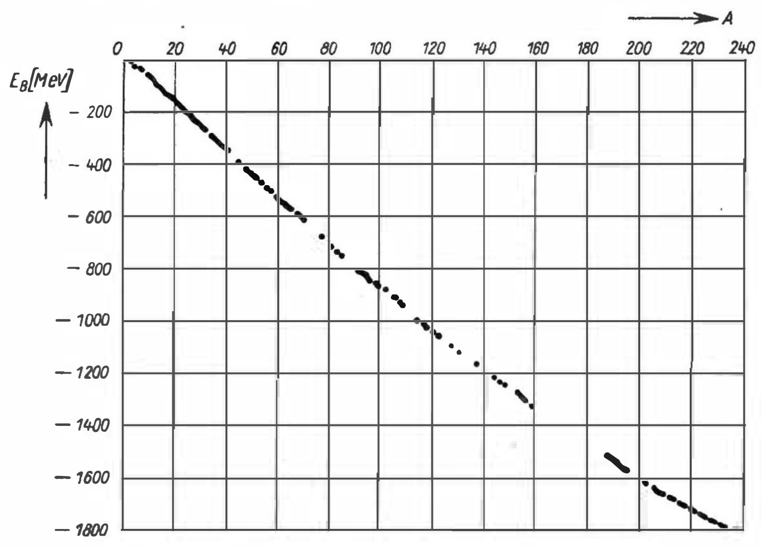


Abb. 7. Bindungsenergie der stabilen Kerne. (Nach W. FINKELNBURG)

Der Beginn der Kurve ist in Abb. 8 in größerem Maßstab nochmals gezeichnet. Da jedes zweite Neutron und Proton besonders fest gebunden ist, hat nach dem Einbau von 4 Bausteinen die Bindungsenergie besonders große Werte, was in der Abb. 8 klar zu sehen ist.

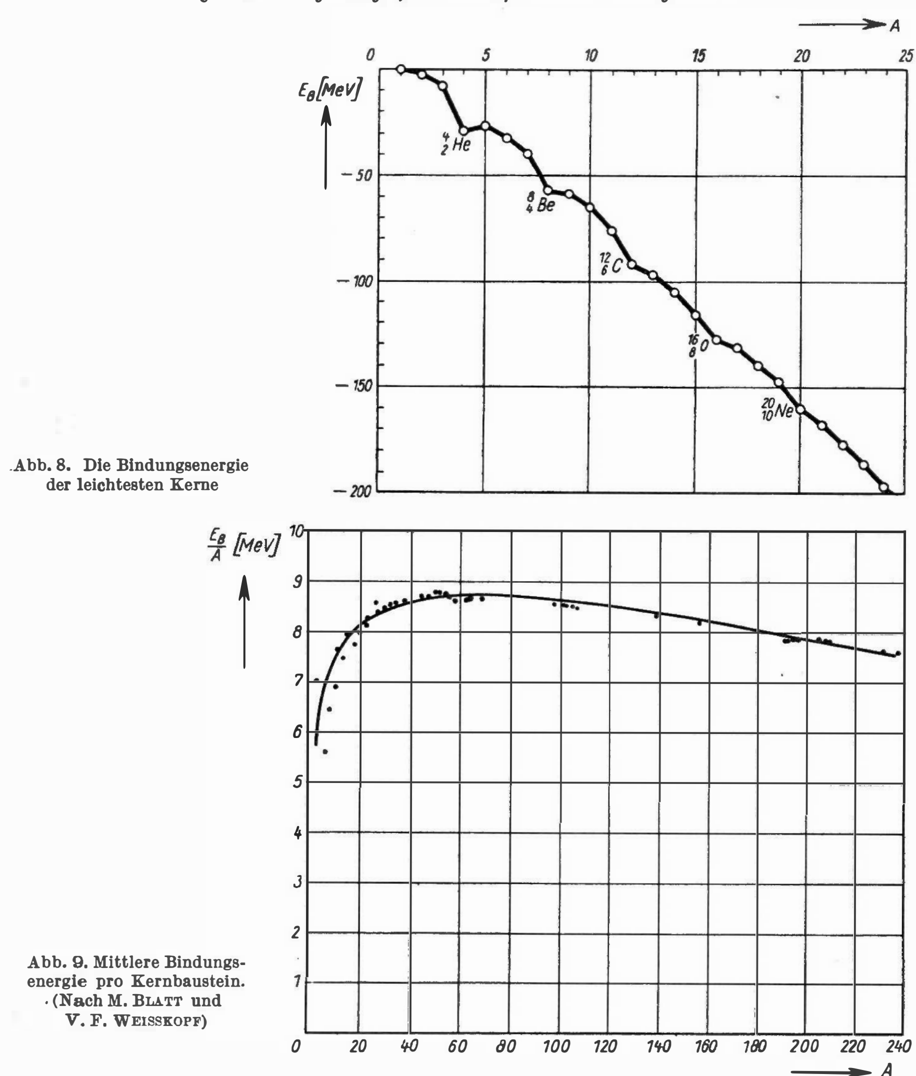


Abb. 8. Die Bindungsenergie der leichtesten Kerne

Abb. 9. Mittlere Bindungsenergie pro Kernbaustein. (Nach M. BLATT und V. F. WEISSKOPF)

In den Abbn. 7 und 8 ist die Bindungsenergie negativ aufgetragen, da sie aufzuwenden ist, soll der Atomkern in seine Bestandteile zerlegt werden. Diese Art der Darstellung ist in der Kernphysik üblich. Der Chemiker rechnet den Energiebetrag, der bei der Bildung einer Verbindung aus den einzelnen Bausteinen frei wird, mit positivem Vorzeichen und würde die Kurven nach aufwärts laufend zeichnen.

Der Verlauf der mittleren Bindungsenergie pro Kernbaustein, $\frac{E_B}{A}$, ist in Abb. 9 dargestellt.

Bei massenspektrometrischen Messungen interessiert die relative Abweichung der Atommasse M von der Ganzzahligkeit. Diese Abweichung

$$f = \frac{M - A}{A} \tag{6.1}$$

führt den Namen *Packungsanteil.* Der Packungsanteil hat keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Seine Dimension ist Masseneinheit pro Nukleon, man kann ihn aber auch als dimensionslose Zahl auffassen. Die Kenntnis der genauen Massen von Neutron und H^1 ist allerdings zu seiner Bestimmung nicht erforderlich. Ist von einem Kern Massenzahl A und Ordnungszahl Z bekannt, so lassen sich Massendefekt D und Packungsanteil f durch die Beziehungen

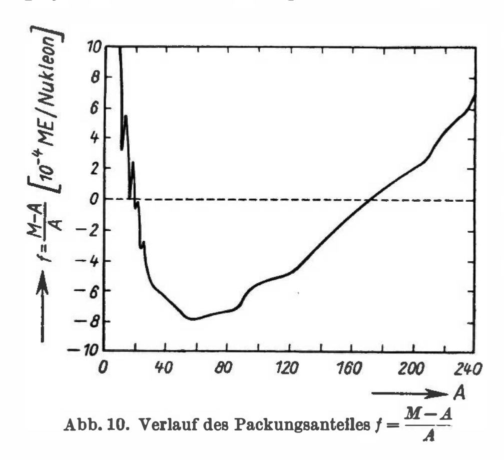


Abb. 10. Verlauf des Packungsanteiles $f = \frac{M-A}{A}$

$$D = A\left(8{,}98 - \frac{Z}{A}\,0{,}84 - f\right),$$

$$f = +\,8{,}98 - \frac{Z}{A}\,0{,}84 - \frac{D}{A}$$

ineinander umrechnen. D ist dabei in TME und f in Einheiten 10^{-3} einzusetzen. Den Verlauf des Packungsanteiles mit A gibt Abb. 10 wieder. Wie ersichtlich, kann f positive und negative Werte annehmen.

§ 7. Die dreifach aufgespaltene Energiefläche

In Abb. 11 sind alle stabilen Kerne sowie die α-Strahler in ein Diagramm mit der Protonenzahl als Abszisse und der Neutronenzahl als Ordinate eingetragen. Die stabilen Kerne liegen auf einem schmalen Streifen, der leicht gekrümmt verläuft, weil mit schwerer werdendem Kern ein immer größerer Neutronenüberschuß für die Stabilität gegen β-Zerfall erforderlich ist. Die Abweichung von der eingezeichneten Geraden $N = Z$ wird also mit steigender Massenzahl immer größer. Die Bindungsenergie entlang der Mitte des Streifens gibt Abb. 7 wieder. Kerne, die in Abb. 11 unterhalb des stabilen Gebietes liegen, wandeln durch β^+-Prozesse solange Protonen in Neutronen um, bis sie das stabile Gebiet erreicht haben. Kerne im oberen Teil haben eine zu große Neutronenzahl, um stabil zu sein, sie führen β^--Umwandlungen durch und gelangen auf diese Weise in das stabile Gebiet.

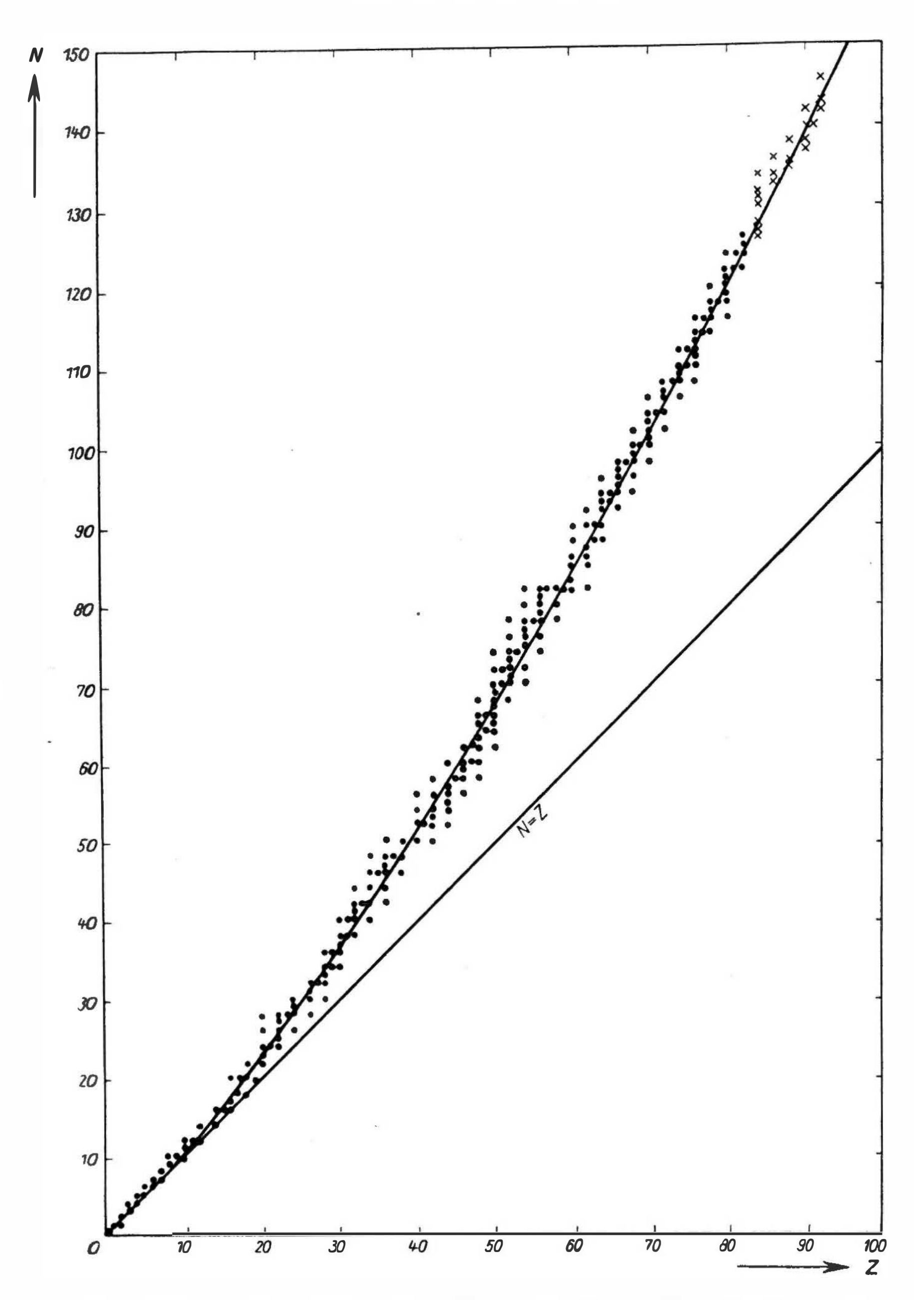


Abb. 11. Protonenzahl und Neutronenzahl der stabilen Kerne (die ausgezogene Kurve ist berechnet)

Diesen experimentellen Sachverhalt kann man sich nach Abb. 12 in einem räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystem veranschaulichen. Stabile wie instabile Kerne liegen auf einer Fläche, die ein Tal oder eine Rinne bildet, dessen Sohle vom Ursprung des Koordinatensystems nach abwärts geneigt ist. Einen Querschnitt durch dieses Tal der Energiefläche stellt die schraffierte Fläche dar, deren Gleichung $N + Z =$ const lautet, auf der also alle isobaren Kerne liegen. Die β-stabilen Kerne sind auf der Sohle des Tales zu finden.

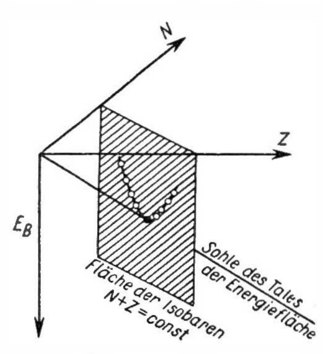


Abb. 12. Räumliche Darstellung des Verlaufes der Bindungsenergie

Der Querschnitt durch die Energiefläche, wie er in Abb. 13 nochmals dargestellt ist, gilt nur für Isobare mit ungerader Massenzahl, also für die Kerne von den Typen g,u und u,g. Es macht also keinen Unterschied, ob das unpaarige Nukleon ein Neutron oder Proton ist. Bei Isobaren mit gerader Massenzahl haben wir zu unterscheiden zwischen (g,g)- und (u,u)-Kernen. Die Energiefläche für die erstgenannten liegt um einen Betrag δ tiefer als die Fläche für (g, u)-Kerne, die für die (u, u)-Kerne um den gleichen Betrag δ höher. Die Isobaren gerader Masse geben somit den in Abb. 14 dargestellten Schnitt durch die Energiefläche. Die Energiefläche ist also *dreifach aufgespalten*, entsprechend den Kerntypen und der festeren Bindung paariger Nukleonen. Die Abbildungen 13 und 14 zeigen anschaulich, daß bei Kernen vom Typ g,u und u,g nur ein einziges Isobar stabil sein kann, daß fast alle (u,u)-Kerne β-instabil sind und daß bei Kernen vom Typ g,g mehrere stabile Isobare vorkommen.

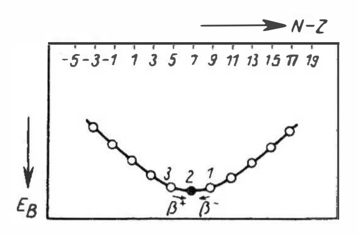


Abb. 13. Querschnitt durch die Energiefläche für Isobare vom Kerntyp g, u (ungerade Massenzahl A)

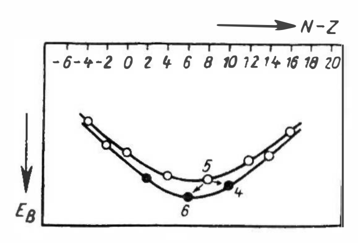


Abb. 14. Querschnitt durch die Energiefläche für Isobare vom Kerntyp g, g und u,u (gerade Massenzahl A)

Es ist nicht schwierig, mittels des Tröpfchenmodells auf halbempirischen Weg den mathematischen Ausdruck für die dreifach aufgespaltene Energiefläche abzuleiten, wie von Weizsäcker sowie Bethe 1935 zeigten.

Beim Verdampfen eines Flüssigkeitströpfchens muß Energie aufgewendet werden, da die Molekularkräfte die Moleküle aneinander binden. Im Inneren des Tröpfchens ist ein Molekül rundum von anderen umgeben, kann also seine Anziehungskraft nach allen Seiten betätigen. Ein Molekül an der Oberfläche hat jedoch nur nach einer Seite Nachbarn.

Die Bindungsenergie des Tröpfchens kann also berechnet werden, indem der Beitrag eines inneren Moleküls mit der Zahl der Molekeln multipliziert und die fehlende Bindungsenergie der Oberflächenteilchen abgezogen wird. Diese Oberflächen-

energie hat die Größe der halben Bindung eines Volumenteilchens, multipliziert mit der Zahl der Oberflächenteilchen.

Die kleinere Bindungsenergie der Oberflächenteilchen führt dazu, daß zur Vergrößerung der Oberfläche Arbeit geleistet werden muß. Bei der kleinsten Oberfläche im Verhältnis zum Volumen hat das Tröpfchen die größte Bindungsenergie, daher nimmt es Kugelform an. Die Oberflächenenergie wird in Einheiten $\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm}^2}$ angegeben. Dies ist äquivalent $\frac{\mathrm{dyn}\cdot\mathrm{cm}}{\mathrm{cm}^2}$ oder $\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}}$. Daher kann das Bestreben der Flüssigkeit, ihre Oberfläche zu verringern, formal der Existenz einer besonderen Kraft, der „Oberflächenspannung", zugeschrieben werden.

Diese Verhältnisse bei einem Flüssigkeitströpfchen lassen sich auf den Atomkern übertragen, weil zwischen Molekeln wie Nukleonen absättigende Kräfte wirken. Bei den Kernen sind allerdings noch die elektrostatische Abstoßungskraft der Kernladung und die Kräfte durch die quantenstatistische Nullpunktsenergie der Nukleonen zu berücksichtigen.

Der zahlenmäßig bedeutendste Anteil der Bindungsenergie E_B eines Kernes rührt von der *Volumenenergie* E_V her. Bezeichnen wir den Beitrag eines Nukleons im Kerninneren zur Bindung mit a_V, so wird die gesamte Volumenenergie $a_V A$.

Davon ist die *Oberflächenenergie* abzuziehen. Ist R der Kernradius und d die Dicke der Oberflächenschicht, so füllen die Oberflächenteilchen das Volumen $4\pi R^2 d$. In der Volumeneinheit befinden sich $\frac{3A}{4\pi R^3}$ Teilchen, so daß die Zahl der Oberflächenteilchen $\frac{3Ad}{R}$ beträgt. Als Oberflächenenergie ist der mit $\frac{a_V}{2}$ multiplizierte Betrag, demnach

$$E_O = \frac{3a_V d}{2R} A = \frac{3a_V d}{2R_0} A^{2/3} = a_O A^{2/3}, \tag{7.1}$$

anzusetzen. Da die Dicke d ungefähr gleich der Reichweite der Kernkräfte ist, diese aber die Größenordnung des Einheitsradius R_0 hat, wird man erwarten, daß die Konstante a_O von annähernd der gleichen Größe wie a_V sein wird.

Die Bindungsenergie wird ferner noch verringert durch die gegenseitige *elektrostatische Abstoßung der Protonen.* Die Größe dieser Coulomb-Energie E_C wurde bereits im Bd. I behandelt (S. 45). Es genügt, die vereinfachte Gleichung

$$E_C = \frac{3}{5}\,\frac{e^2 Z^2}{R} = a_C Z^2 A^{-1/3} \tag{7.2}$$

zu verwenden.

Ein weiterer Beitrag zur Bindungsenergie kommt daher, daß jeder schwere Kern *Überschußneutronen* enthält. Seine Nullpunktsenergie infolge der Fermi-Statistik der Neutronen ist daher größer, als sie bei gleicher Neutronen- und Protonenzahl wäre (s. § 57). Diese Vermehrung muß unabhängig vom Vorzeichen der Differenz sein, denn auch mit Überschußprotonen würde die Nullpunktsenergie anwachsen. Wir haben sie also als quadratische Funktion von $N - Z$ anzusetzen. Außerdem wird die gleiche Zahl von Überschußneutronen bei größerer Massenzahl A

eine geringere Vermehrung der Nullpunktsenergie bewirken als bei kleinerem A, weil das Volumen des Kernes proportional A anwächst. Der Ansatz für diesen Energiebetrag E_N,

$$E_N = a_N \frac{(N - Z^2)}{A} = a_N \frac{(A - 2Z)^2}{A}, \tag{7.3}$$

gibt auch die parabolische Form der Kurven von Abbn. 13 und 14 richtig wieder. Er wird § 57 begründet.

Schließlich ist noch der *Energieunterschied* δ zu berücksichtigen, um den die Fläche für den Kerntyp g, g tiefer und die für den Kerntyp u,u höher liegt als für die Typen g, u und u,g. FERMI hat für δ empirisch die Beziehung

$$\delta = a_P A^{-3/4}$$

gefunden, die für die meisten Zwecke genügend genau ist.

Die *Bindungsenergie der Kerne* beträgt somit

$$-E_B = a_V A - a_O A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_N \frac{(A-2Z)^2}{A} + \begin{cases} -\ \delta \text{ für (u,u)-Kerne,} \\ \ \ 0 \text{ für (g,u)- und(u,g)-Kerne,} \\ +\ \delta \text{ für (g,g)-Kerne.} \end{cases}$$

Die Konstanten werden nun so gewählt, daß die gesamten experimentell bestimmten Werte der Bindungsenergien, β-Zerfallsenergien, Q-Werte von Kernreaktionen usw. am besten wiedergegeben werden. Setzen wir die Zahlenwerte der empirisch ermittelten Konstanten mit ihren Fehlergrenzen ein, so erhalten wir für die Bindungsenergie in MeV die *Weizsäcker-Gleichung*

$$-E_B\,[\text{MeV}] = (14{,}1 \pm 0{,}2)\,A - (13 \pm 1)\,A^{2/3} - (0{,}595 \pm 0{,}02)\frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

$$-(19{,}0 \pm 0{,}9)\frac{(A-2Z)^2}{A} + \begin{cases} -\dfrac{33{,}5}{A^{3/4}} \text{ für (u,u)-Kerne,} \\ \quad 0 \quad \text{für (g,u)- und (u,g)-Kerne,} \\ +\dfrac{33{,}5}{A^{3/4}} \text{ für (g,g)-Kerne.} \end{cases}$$

Der erstaunlich große Anwendungsbereich dieser halbempirischen Formel sei an einigen Beispielen erläutert. Wir wollen zunächst die Mitte des Streifens berechnen, der in Abb. 11 von den stabilen Kernen besetzt ist. Diese Mitte entspricht dem Minimum der Masse der Isobaren. Wir halten also eine bestimmte vorgegebene Massenzahl A fest und suchen die Ladungszahl Z_0, bei der die Kernmasse M den kleinsten Wert hat. Die Durchführung der Minimumsrechnung

$$\left(\frac{\partial M}{\partial Z}\right)_{A=\text{const}} = \left[\frac{\partial}{\partial Z}(Z M_{\text{H}} + (A - Z)\,M_n - E_B)\right]_{A=\text{const}} = 0$$

liefert für Kerne mit ungeradem A, d.h. $\delta = 0$, das Resultat

$$Z_0 = \frac{A}{2}\left\{\frac{1 + \dfrac{M_n - M_H}{4a_N}}{1 + \dfrac{a_C}{4a_N} A^{2/3}}\right\} = \frac{A}{1{,}98 + 0{,}0155\,A^{2/3}}.$$

Damit wird der Neutronenüberschuß $N - Z_0 = A - 2\,Z_0$ im Minimum der Masse der Isobaren bei ungeradem A:

$$N - Z_0 = A\left\{\frac{\dfrac{a_C}{4a_N} A^{2/3} - \dfrac{M_n - M_H}{4a_N}}{1 + \dfrac{a_C}{4a_N} A^{2/3}}\right\}$$

$$= 0{,}0078\,A^{5/3}\left(\frac{1 - \dfrac{1{,}32}{A^{2/3}}}{1 + 0{,}0078\,A^{2/3}}\right) \simeq 0{,}0060\,A^{5/3}\,.$$

Nach dieser Gleichung ist die ausgezogene Kurve in Abb. 11 berechnet.

Als weiteres Beispiel berechnen wir die Anlagerungsenergie eines Neutrons an ${}_{92}U^{235}$. Wir haben die Massenbilanz

$$M({}_{92}U^{235}) + M(n) - M({}_{92}U^{236}) = \Delta M \tag{7.4}$$

zu ziehen. Nach den vorstehenden Gleichungen erhalten wir $\Delta M = 6{,}5$ MeV, was mit dem gemessenen Wert übereinstimmt. Die Anlagerungsenergie eines Neutrons an ${}_{92}U^{238}$ berechnet sich auf die gleiche Weise zu 4,8 MeV.
Die berechneten Zerfallsenergien für β-Prozesse, $E_\beta = {}_Z M^A - {}_{Z\pm1}M^A$, stimmen i. allg. bis auf $\pm 0{,}1$ MeV mit den gemessenen Werten überein.

§ 8. Die magischen Zahlen; die Windungen der Energierinne

Die halbempirische Weizsäcker-Gleichung für die Energiefläche beruht auf allgemeinen Gesetzmäßigkeiten. Die Konstanten sind ausgeglichene Mittelwerte. Es ist daher selbstverständlich, daß die Gleichung individuelle Abweichungen nicht wiedergeben kann. Im N-Z-Diagramm der Abb. 11 sind solche Abweichungen kaum zu bemerken. Sie werden deutlicher, wenn als Ordinate nicht die Neutronenzahl, sondern das Verhältnis $\frac{N}{Z} = \frac{A - Z}{Z}$ gewählt wird, wie es die Abbildungen 15 und 16 zeigen.
Als Abszisse ist in beiden Fällen die Massenzahl aufgetragen. In Abb. 15 sind die stabilen Kerne vom Typ g, g, in Abb. 16 die von den Typen u, g und g, u eingezeichnet. Auffällig treten eine ganze Anzahl Windungen hervor. Bei fortschreitender Massenzahl A werden also einmal mehr und dann wieder weniger Neutronen

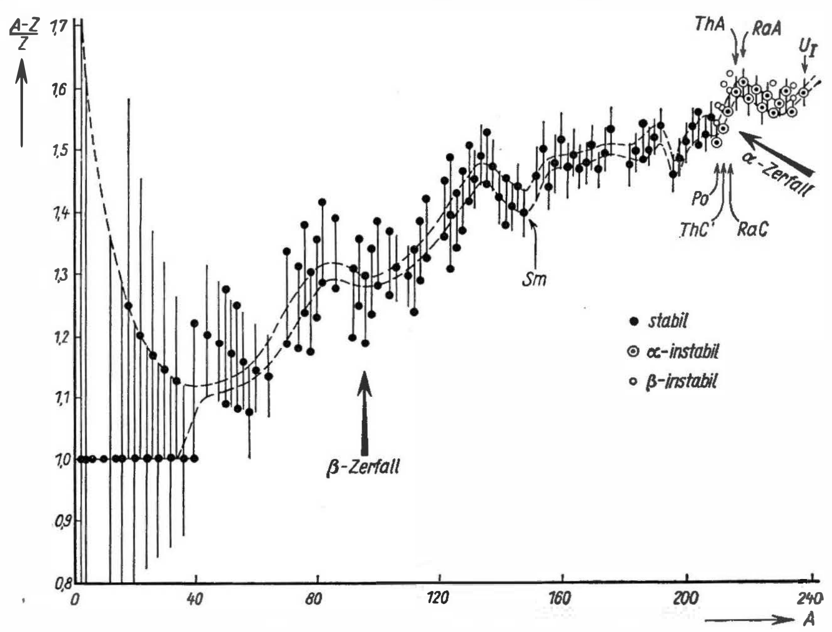


Abb. 15. Die Windungen der Energiefläche für Kerne vom Typ g, g

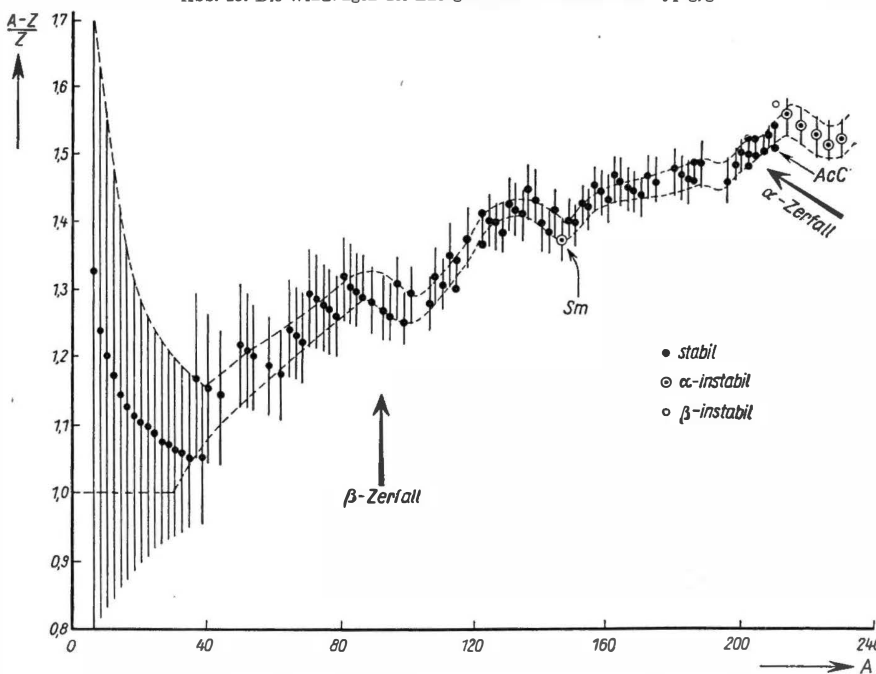


Abb. 16. Die Windungen der Energiefläche für Kerne vom Typ u, g

eingebaut. Die Energierinne verläuft demnach nicht gleichmäßig, sondern sie ist wellenförmig gekrümmt. Diese Wellen sind verbunden mit Neigungsänderungen der Talsohle, wie es Abb. 17 an einem Beispiel zeigt. Hierin ist als Ordinate die Bindungsenergie pro Teilchen aufgetragen, und die Kurve verbindet gemessene Werte für g, g-Kerne. Beim Kern $_{58}Ce^{140}$ ($N = 82$) ist der Beginn einer Neigungsänderung der Kurve zu sehen.

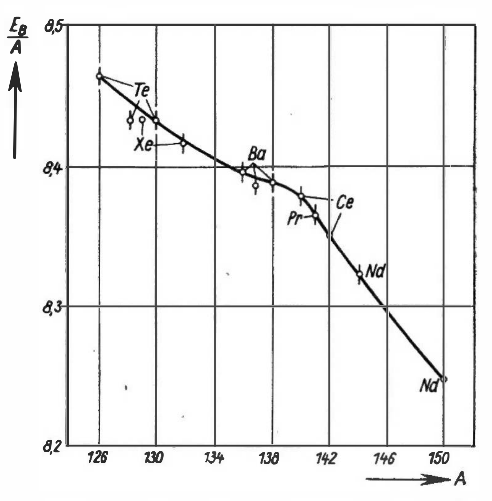


Abb. 17. Änderungen des Verlaufes der Bindungsenergie bei einem Kern mit Schalenabschluß (magischer Kern)

Alle Abweichungen vom ausgeglichenen mittleren Verlauf treten immer bei einer ganz bestimmten Anzahl von Neutronen oder Protonen auf. Diese ausgezeichneten Zahlen sind 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 184. Sie werden *magische Zahlen* genannt. $_{58}Ce^{140}$ mit 82 Neutronen ist ein magischer Kern, dort liegt der Knick in der Kurve der Bindungsenergie.

Differenzen der Bindungsenergie sind bestimmend für die α-Zerfallsenergie. Daher prägt sich die mag sche Protonenzahl $Z = 82$ (Blei) auch in der Systematik der α-Strahler aus (s. Abb. 34).

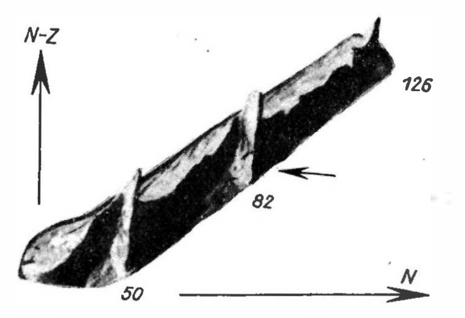


Abb. 18. Relative Häufigkeit stabiler Kerne mit $N \geq 38$. Bei den Neutronenzahlen 50, 82 und 126 treten Maxima in der Häufigkeitsverteilung auf

Nach dem Schalenmodell der Atomkerne (s. Kapitel VI, § 66) wird bei den magischen Zahlen jeweils ein Schalenabschluß erreicht, der sich auf fast alle meßbaren Größen an einem Atomkern auswirkt. Atomkerne mit magischen Zahlen sind beispielsweise häufiger als Nachbarkerne, wie es Abb. 18 veranschaulicht. Stabile Kerne mit 50, 82 und 126 Neutronen kommen mit größerer relativer Häufigkeit in der Natur vor als Kerne mit anderer Neutronenzahl.

Isomere Kernzustände sind nur bei Kernen zu finden, die knapp vor dem Schalenabschluß stehen. Für Kerne mit ungerader Massenzahl existieren drei „Inseln" der Isomerie, wenn nämlich die Zahl der ungeraden Neutronen oder Protonen zwischen 38 und 50 oder zwischen 64 und 82 oder zwischen 100 und 126 liegt. Diese Inseln sind für Kerne mit ungerader Massenzahl in Abb. 19 veranschaulicht. Abszisse in dieser Abbildung ist die Zahl der Protonen oder der Neutronen, die ein Kern enthält.

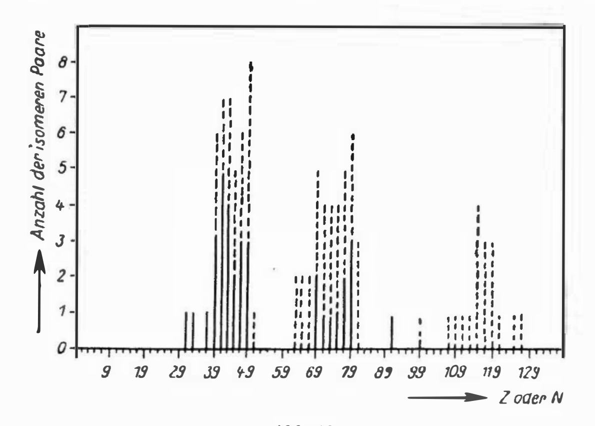


Abb. 19.
Die Verteilung der Isomerie bei Kernen vom Typ g, u und u, g. Die ausgezogenen Linien geben die Zahl der Isomeren bei ungerader Protonenzahl und beliebiger gerader Neutronenzahl an. Für Kerne mit ungerader Neutronenzahl entspricht die Länge der gestrichelten Linien der Zahl der Isomeren

Die ausgezogenen Linien geben die Zahl der Isomeren an, die bei ungerader Protonenzahl vorkommen, die Neutronenzahl des Kernes bleibt dabei unberücksichtigt. Für ungerade Neutronenzahl des Kernes ist die Zahl der Isomeren durch gestrichelte Linien dargestellt. Die Protonenzahl ist dabei ohne Belang. Die Erklärung für das Auftreten der „Inseln" der Isomerie ist recht einfach. Bei vollbesetzten Schalen gehört das oberste Niveau bereits zu einer Niveaugruppe

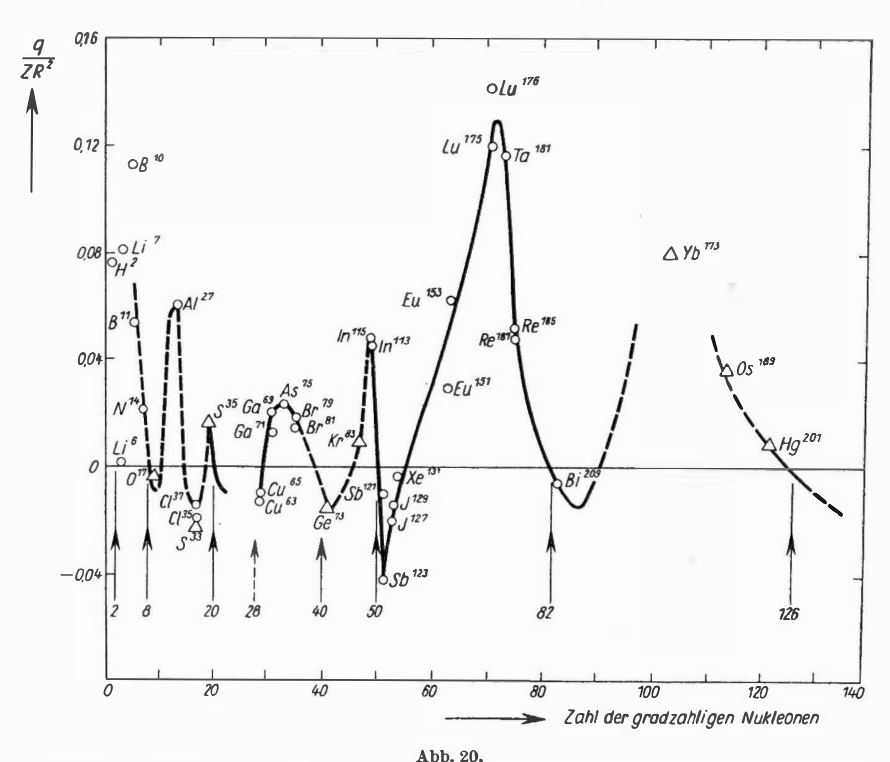


Abb. 20.
Verlauf des elektrischen Quadrupolmomentes q, dividiert durch ZR^2 (elliptische Deformation des Kernes)

mit anderer Hauptquantenzahl. Die Spin-Bahn-Kopplung spaltet nämlich die Niveaus weit auf und drückt eine Komponente des untersten Niveaus der neuen Gruppe energetisch so tief nach unten, daß sie zum obersten Niveau der besetzten Schale wird. Ist dieses Niveau nicht besetzt, reicht also Neutronen- oder Protonenzahl des Kernes nicht zu einem Schalenabschluß, so kann ein Nukleon durch Anregung auf dieses oberste Niveau gehoben werden. Der Übergang zum Grundzustand ist dann mit einer erheblichen Änderung des Spins des Kernes verknüpft. Dies ist aber die Bedingung für eine lange Lebensdauer des angeregten Zustandes, d. h. für Isomerie. (Näheres s. Kap. IX, § 107.)

Bei magischen Protonenzahlen existieren weiter besonders viele stabile Isotope.

Die magischen Zahlen treten auch sehr deutlich hervor in der Abb. 20, die für ungerade Massenzahlen den Verlauf der Abweichung des Kernes von der Kugelgestalt zeigt. Knapp vor Erreichen des Schalenabschlusses sind die Kerne länglich gestreckt, nach dem Schalenabschluß abgeplattet.

Schließlich bringt als letztes Beispiel für die Bedeutung der magischen Zahlen Abb. 21 die Energien des ersten angeregten Zustandes der Kerne vom Typ g, g. Es ist zu ersehen, daß die

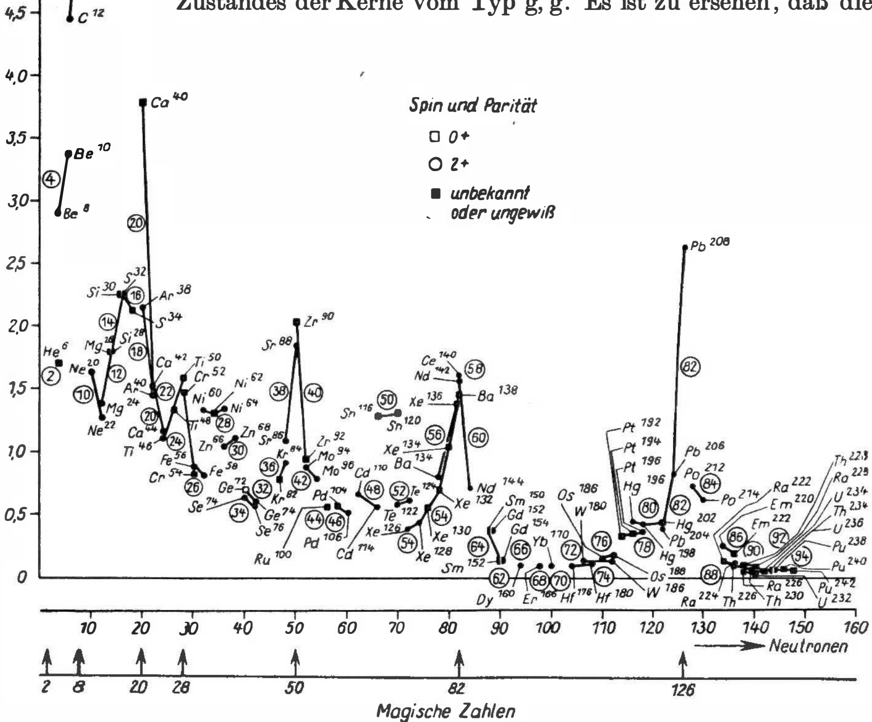


Abb. 21. Energie des ersten angeregten Zustandes bei Kernen vom Typ g, g

Anregungsenergie bei magischen Kernen anomal hoch ist. Die Ursache liegt für Kerne mit $N > 50$ in deren Abweichung von der Kugelgestalt, die in Abb. 20 dargestellt ist. Kerne, die von der Kugelform abweichen, besitzen bei $N > 50$ Rotationsniveaus. Diese Niveaus liegen sehr tief, wenn die Abweichung von der Kugelform stark ist. Bei Kernen, die zwischen den magischen Kernen liegen, ist daher das erste Anregungsniveau ein Rotationsniveau. Bei Annäherung an die Kugelform liegt das 1. Rotationsniveau immer höher, bis es schließlich bei genau kugelförmigem Kern unendlich hoch liegt. Dieses Verhalten folgt aus den gleichen quantenmechanischen Gesetzen, gemäß denen einatomige Gase, z.B. die Edelgase, keine Rotationsenergie besitzen. Bei Kernen mit magischer Neutronen- oder Protonenzahl, die nach Abb. 20 Kugelgestalt haben, ist daher das erste angeregte Niveau kein Rotationsniveau, sondern von anderem Typ. Alle diese anderen Anregungsarten, z.B. Ein- oder Mehrteilchenanregung, Vibrationsschwingungen verschiedener Art usw., geben aber bei kugelförmigen Kernen ein 1. Anregungsniveau, das um ein Mehrfaches höher liegt als das 1. Rotationsniveau der deformierten Kerne. Dies zeigt auch die Abb. 21.

LITERATUR

zu Kapitel I und II

ALPHER, R. A., und R. C. HERMAN, Revs. Mod. Phys. 22, 153 und 406 (1950)
GAMOW, G., und C. L. CRITCHFIELD, Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources, London 1951
GÖPPERT-MAYER, M., und J. H. D. JENSEN, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, New York 1955
KORSUNSKI, M. I., Isomerie der Atomkerne, Berlin 1957
KUNZ, W., u. J. SCHINTLMEISTER, Tabellen der Atomkerne, Teil I (2 Bde), Berlin 1958 u. 1959
SUESS, H. E., und H. C. UREY, Revs. Mod. Phys. 28, 53 (1956)

III. Spin und Momente

§ 9. Experimentelle Ergebnisse

Bei den in Bd. I benutzten Definitionen von Kernspin, Kernmomenten, Kernmagnetonen usw. dienten rein klassische Vorstellungen bzw. Analogien zur Elektronenhülle als Richtschnur. Wir wollen jetzt an Hand der experimentellen Ergebnisse prüfen, wieweit diese Beziehungen gerechtfertigt sind (vgl. hierzu die Tabellen im Anhang). Es lassen sich folgende allgemeine Regeln feststellen:

1. Der *Kernspin* ist halbzahlig, wenn die Massenzahl A ungerade ist, und ganzzahlig, wenn die Massenzahl gerade ist. Ist sowohl die Neutronenzahl N als auch die Protonenzahl Z geradzahlig, dann ist der Kernspin Null.
2. Jeder Kern mit nicht verschwindendem Spin ($I \geq \frac{1}{2}$) besitzt ein *magnetisches Dipolmoment.*
3. *Kernquadrupolmomente* wurden bisher nur für Atomkerne mit $I \geq 1$ festgestellt.

Alle über diese Regeln hinausgehenden Aussagen unserer bisherigen Vorstellungen können jedoch nicht experimentell bestätigt werden. Insbesondere versagen alle Versuche, nach klassischen oder in der Physik der Atomhülle bewährten Modellen die g_I-Faktoren, also praktisch die magnetischen Dipolmomente, aus Kernspin und Kernladung zu berechnen; das gilt bereits für die einfachsten Teilchen, für das Proton und das Neutron. Wir erwarten eigentlich für das Proton ein Moment von 1 μ_K und für das Neutron 0 μ_K; statt dessen ist

$$\mu_p = +2{,}79276\ \mu_K \quad \text{und} \quad \mu_n = -1{,}91314\ \mu_K .$$

Eine alles befriedigende Erklärung dieser Abweichung gibt es noch nicht. Man hat versucht, diese „Anomalien" bei den Elementarteilchen auf einen Mechanismus zurückzuführen, da die Abweichungen von den „Soll"-Werten annähernd gleich groß sind, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen. Danach werden *π^--Mesonen* (beim Neutron) und *π^+-Mesonen* (beim Proton) bzw. deren Wechselwirkung mit äußeren Feldern für diese relativ großen Momente verantwortlich gemacht.

§ 10. Zusammenhänge zwischen μ_I und I; Schmidt-Diagramm

Man kann die Momente von Proton und Neutron als gegeben hinnehmen und versuchen, daraus die der zusammengesetzten Kerne abzuleiten. Dabei stellt man als nächstes fest, daß die *Kernmomente nicht additiv* sind; bereits das Deuteronmoment weicht um etwas mehr als 2% von der Summe aus μ_p und μ_n ab, also um einen bei der heutigen Genauigkeit der Experimente nicht mehr zu vernachlässigenden Beitrag.

Auf ein anderes Ordnungsprinzip der experimentellen Daten wies bereits Schmidt 1937[1]) hin. Die im § 9 unter 1. zusammengefaßten Ergebnisse der Spin-Bestimmungen führen zu der Annahme, daß sich die Spins der Neutronen und Protonen jeweils untereinander *paarweise absättigen.* Das scheint streng erfüllt zu sein bei den Kernen mit gerader Protonen- und Neutronenzahl ($I = 0$). Dann sind für Spin und damit auch für das resultierende Moment nur die unpaarigen Protonen und Neutronen verantwortlich.

Bei Kernen mit ungerader Massenzahl, d.h. mit gerader Protonen- und ungerader Neutronenzahl ((g, u)-Kerne) und umgekehrt ((u, g)-Kerne), führt das auf ein besonders einfaches *Einteilchen-Modell*[2]). Hierauf hat man die Bezeichnungsweise der Physik der Elektronenhülle übertragen: Man schreibt dem übrigbleibenden unpaarigen

---

[1]) Th. Schmidt, Z. f. Physik **106**, 358 (1937).

[2]) Wenn wir in diesem Zusammenhang von Modell sprechen, dann meinen wir lediglich eine Richtschnur zum Einordnen der experimentell bestimmten Kernmomente. Kernmodelle mit allen Konsequenzen für Kernzerfall, Kernreaktion usw. werden gesondert in Kap. IX B behandelt.

Nukleon einen Bahndrehimpuls $\vec{l}$ und einen Eigendrehimpuls $\vec{s}$ zu; beide addieren sich vektoriell zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ (Abb. 22).

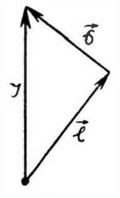


Abb. 22. Vektorielle Addition von Bahn- und Eigendrehimpuls zum Kernspin

Dann ist klassisch

$$\mu_I = \mu_K \,[s g_s \cos(\vec{s}, \mathfrak{J}) + l\, g_l \cos(\vec{l}, \mathfrak{J})]. \tag{10.1}$$

g_s und g_l sind die g-Faktoren für Eigendrehimpuls- und Bahnmoment.

Damit wird

$$g_I = g_s \frac{(\vec{s} \cdot \mathfrak{J})}{\mathfrak{J}^2} + g_l \frac{(\vec{l} \cdot \mathfrak{J})}{\mathfrak{J}^2}. \tag{10.2}$$

Nach dem Kosinus-Satz lassen sich die skalaren Produkte (vgl. Bd. I, S. 82) umformen, und man erhält

$$g_I = g_s \frac{I(I+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2I(I+1)} + g_l \frac{I(I+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2I(I+1)}.$$

Beim Einteilchen-Modell ist $s = \frac{1}{2}$; I kann nur die Werte $I = l + \frac{1}{2}$ und $I = l - \frac{1}{2}$ annehmen. Im ersten Fall wird

$$\mu_I = g_I I \mu_K = (\tfrac{1}{2} g_s + l g_l)\, \mu_K, \tag{10.3}$$

im zweiten

$$\mu_I = \left[-\frac{1}{2} g_s \frac{2l-1}{2l+1} + g_l \frac{(l+1)(2l-1)}{2l+1}\right] \mu_K. \tag{10.4}$$

(10.3) und (10.4) lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{\mu_I}{\mu_K} = I\left[g_l \pm \frac{1}{2l+1}(g_s - g_l)\right]. \tag{10.5}$$

Man kann weiterhin annehmen, daß Bahndrehimpulse von Neutronen keinen Beitrag zum magnetischen Moment liefern, während bei Protonen $g_l = 1$ sein soll. Um in diese Gleichung auch die Momente des einzelnen Protons und Neutrons mit einzubeziehen, setzen wir

für Protonen $g_s = +5{,}5855$, $g_l = 1$,

für Neutronen $g_s = -3{,}8263$, $g_l = 0$.

Für Kernmomente von (u, g)-Kernen gilt demnach

$$\mu_I = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{2}(g_s - 1) + I\right] \mu_K, \\[2ex] \left[\dfrac{-I}{2(I+1)}(g_s - 1) + I\right] \mu_K \end{cases} \tag{10.6}$$

und für (g, u)-Kerne

$$\mu_I = \begin{cases} \dfrac{1}{2} g_s \mu_K, \\[2ex] -\dfrac{-I}{2(I+1)} g_s \mu_K. \end{cases} \tag{10.7}$$

Das gibt im μ_I-I-Diagramm die in Abb. 23 und 24 eingezeichneten Linien, die in der Literatur als *Schmidt-Linien* bezeichnet werden. Der Vergleich mit den eingezeichneten experimentellen Werten zeigt, daß die gemessenen Momente nicht auf diesen Kurven, sondern — bis auf wenige Ausnahmen — zwischen ihnen liegen. Diese Darstellung gibt also nur ein gewisses Ordnungsprinzip, keine Lösung des Kernmomentproblems; es wäre auch überraschend, wenn man das resultierende Moment ohne Berücksichtigung der in dem kleinen Kernvolumen sicher großen Wechselwirkung des „Leuchtnukleons" mit den übrigen Nukleonen beschreiben könnte. BLOCH u. a. nehmen an, daß sich das Moment des einzelnen Nukleons ändert, wenn es in den Kern eintritt, und zwar müßten die g_s-Faktoren für Protonen und Neutronen kleiner werden, wenn die Teilchen dem Kernverband angehören. MIYAZAWA¹) deutete diesen Effekt als Behinderung der virtuellen Emission von π-Mesonen, die zur Erklärung der unerwartet großen Momente für das einzelne Nukleon angenommen wurde. Würde – im Extremfall – das Leuchtnukleon der Dirac-Gleichung gehorchen, dann wäre für das Proton $g_s = 2$ und

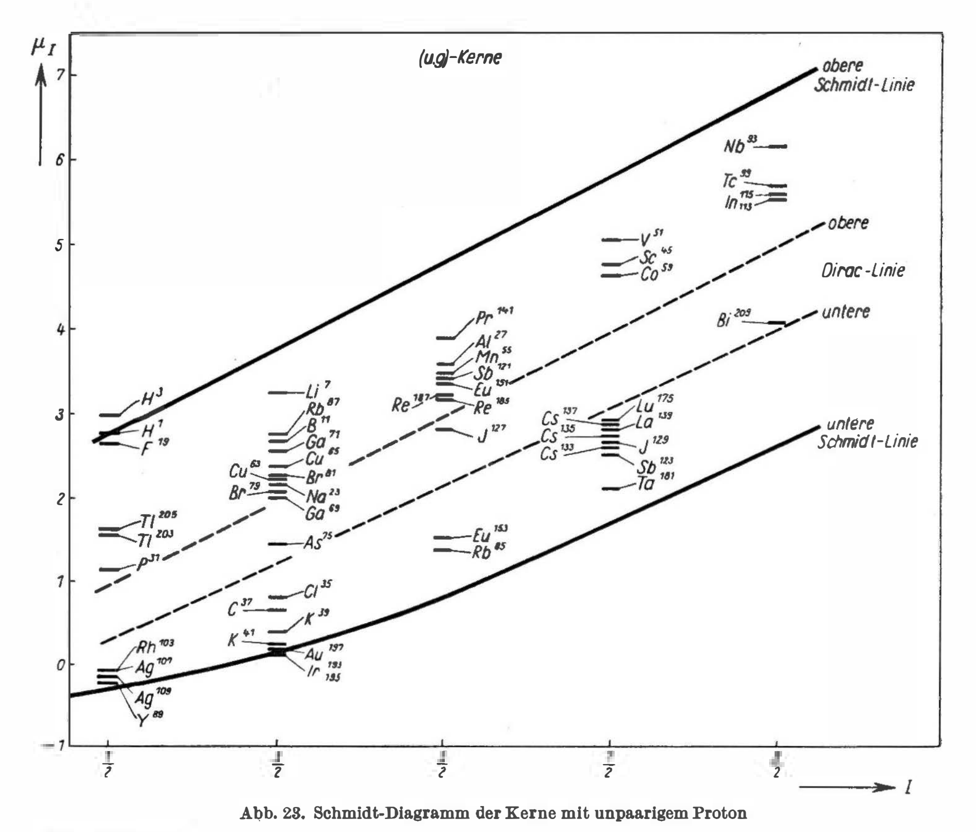


Abb. 23. Schmidt-Diagramm der Kerne mit unpaarigem Proton

¹) M. MIYAZAWA, Progr. Theor. Phys. Japan **6**, 263 und 801 (1950).

für das Neutron $g_s = 0$ zu setzen. Die sich damit aus (10.5) ergebenden Kurven sind in Abbn. 23 und 24 als *Dirac-Linien* eingezeichnet (bei den (g, u)-Kernen fallen sie mit der I-Achse zusammen). Bis auf wenige Ausnahmen liegen die gemessenen Momente zwischen den Schmidt- und den Dirac-Linien, die man demnach nur als zwei extreme Auffassungen des Einteilchen-Modells ansehen kann.

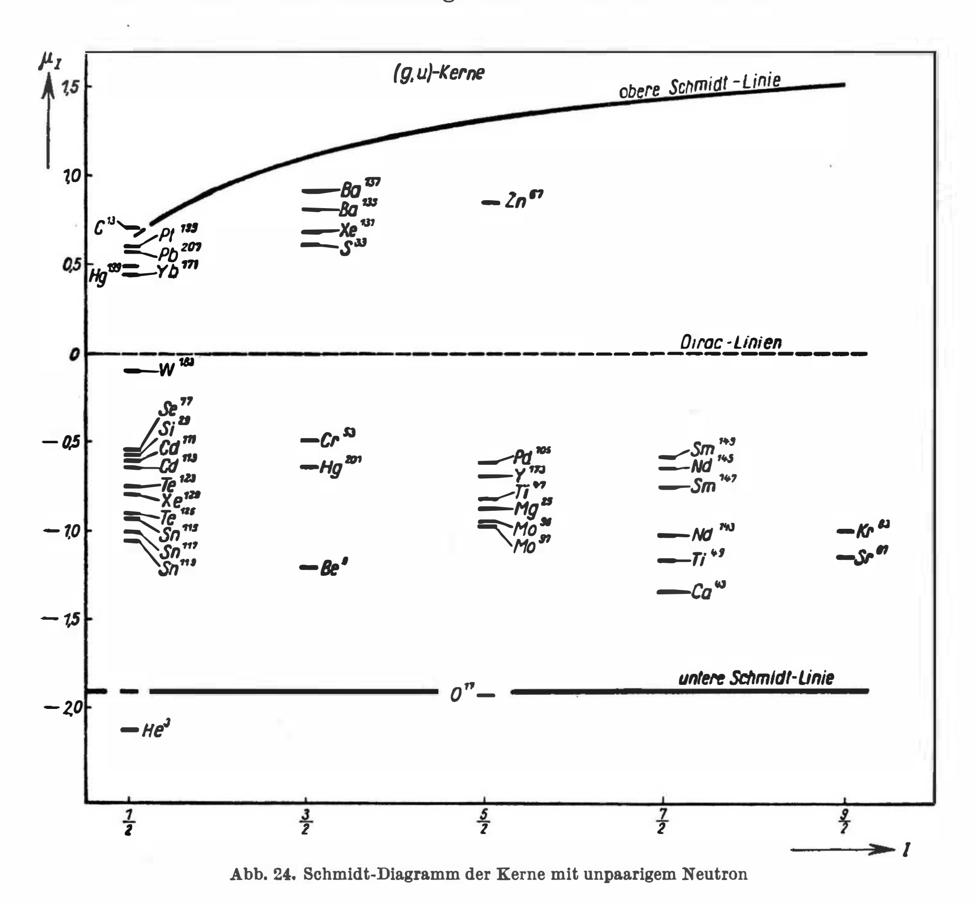


Abb. 24. Schmidt-Diagramm der Kerne mit unpaarigem Neutron

Teilweise wendet man auf die Terme des unpaarigen Nukleons dieselbe Termbezeichnung an, wie sie bei den Elektronentermen üblich sind. Die obere Schmidt-Linie bei (u, g)-Kernen entspricht demnach den Protonenkonfigurationen $s_{1/2}$, $p_{3/2}$, $d_{5/2}$, . . . usw.

Es lassen sich, wenn man Fehler von 10% bis 30% zuläßt, noch weitere Parallelen zwischen einer Schalenstruktur und den Kernmomenten ziehen, die auch für (u, u)-Kerne gelten. Doch darauf wird später (s. Kap. IX B) ausführlich eingegangen werden.

§ 11. Kernquadrupolmomente

Die Quadrupolmomente geben — darauf wurde in Bd. I hingewiesen — ein Maß für die *Elliptizität der Ladungsverteilung* an; man wird sie demnach auch nicht durch ein Leuchtnukleon allein erklären können. Man kann zwar auch hier wieder gewisse Regeln für (u, g)-, (g, u)- und (g, g)-Kerne aufstellen, muß aber noch mehr Ausnahmen zulassen.

Es ist eher anzunehmen, daß Quadrupolmomente mit den Abweichungen vom Einteilchen-Modell in Verbindung stehen. KOPFERMANN[1]) wies darauf hin, daß zwischen den Abweichungen von den Schmidt-Linien zweier Isotope desselben Elementes bei gleichem Spin und dem (genau meßbaren) Verhältnis der Quadrupolmomente annähernd Proportionalität besteht (vgl. Tabelle 3).

Ausnahmen bilden In und K. Viel mehr Kernpaare, bei denen diese Beziehungen nachgeprüft werden können, gibt es nicht.

Wenn es so etwas wie abgeschlossene Schalen gibt, worauf die „magischen Zahlen" hindeuten, dann muß sich das auch in den Quadrupolmomenten bemerkbar machen. Es ist zu erwarten, daß Q bei Nukleonenzahlen, die den magischen Zahlen entsprechen, das Vorzeichen wechselt, also gerade (bzw. annähernd) Null ist.

Tabelle 3. Zum Quadrupolmoment

	$\frac{\delta\mu_1}{\delta\mu_2}$	$\frac{Q_1}{Q_2}$
$\frac{Cu^{63}}{Cu^{65}}$	1,11	1,08
$\frac{Ga^{69}}{Ga^{71}}$	1,44	1,59
$\frac{Br^{79}}{Br^{81}}$	1,10	1,20
$\frac{Cl^{35}}{Cl^{37}}$	1,25	1,27

Tabelle 4. Quadrupolfrequenzen einiger Proben

Probe	Isotop	I	Temperatur der Probe in °K	Übergangsfrequenz ν in MHz	$\frac{\nu_1}{\nu_2}$	B in MHz	
						Kristall	freies Atom oder Molekül
Cl_2	35	$\frac{3}{2}$	77	54,248	1,2688	109,0	109,746
	37	$\frac{3}{2}$		42,751			
$ClCH_3$	35	$\frac{3}{2}$	77	34,029	1,2688	68,1	75,13
	37	$\frac{3}{2}$		26,820			
Br_2	79	$\frac{3}{2}$	83	382,43	1,1970	765	—
	81	$\frac{3}{2}$		319,46			
$BrCH_3$	79	$\frac{3}{2}$	83	264,45	1,1970	529	577,0
	81	$\frac{3}{2}$		220,91			

Nach: KRÜGER, H., und U. MEYER-BERKHOUT, Landolt-Börnstein I/4, Hochfrequenzspektren in Kristallen, 942 (1955).

[1]) H. KOPFERMANN, Naturw. 38, 29 (1951).

Tabelle 5. Quadrupolfrequenzen einiger Kerne

Kern	I	Kristall	$\nu_{1/2-3/2}$ in MHz	$\nu_{3/2-5/2}$ in MHz	$\nu_{5/2-7/2}$ in MHz	$\frac{\varphi_{xx}-\varphi_{yy}}{\varphi_{zz}}$
J^{121}	$\frac{5}{2}$	SnJ_4	204,50	409,00	—	0
Sb^{121}	$\frac{5}{2}$	$SbCl_3$	59,709	114,30	—	0,188
Sb^{123}	$\frac{7}{2}$	$SbCl_3$	39,094	68,648	104,46	0,188

Nach: DEHMELT, H., Z. Phys. 130, 356 (1951); DEHMELT, H., und H. KRÜGER, Z. Phys. 130, 385 (1951).

Tabelle 6. Ergebnisse der Quadrupolresonanzexperimente

Kern	I	Molekülart	B beobachtet in MHz	Q berechnet in 10^{-24} cm²
B^{10}	3	$B(CH_3)_3$	10,36	0,11
B^{11}	$\frac{3}{2}$	$B(C_2H_5)_3$	10,43	0,053
N^{14}	1	JCN	3,40	
		$N_4(CH_2)_6$	4,54	
S^{33}	$\frac{3}{2}$	S_8	45,8	0,053
Cl^{35}	$\frac{3}{2}$	Cl_2	109,0	0,076
Cl^{37}	$\frac{3}{2}$	CCl_4	81,9	0,060
Cu^{63}	$\frac{3}{2}$	Cu_2O	53,4	
Cu^{65}	$\frac{3}{2}$	$K[Cu(CN)_2]$	65,3	
As^{75}	$\frac{3}{2}$	As_4O_6	232,5	
Br^{79}	$\frac{3}{2}$	Br_2	765	0,31
Br^{81}	$\frac{3}{2}$	$BrCH_3$	529	0,26
Sb^{121}	$\frac{5}{2}$	$SbCl_3$	489	
J^{127}	$\frac{5}{2}$	J_2	2153	0,75
J^{129}	$\frac{7}{2}$	SnJ_4	1363	0,53
Hg^{201}	$\frac{3}{2}$	$HgCl_2$	724	0,6
Bi^{209}	$\frac{9}{2}$	$Bi(C_6H_5)_3$	669	

Nach: KRÜGER, H., und U. MEYER-BERKHOUT, in: LANDOLT-BÖRNSTEIN I/4, Hochfrequenzspektren in Kristallen, 942 (1955).

LITERATUR

zu Kap. III (Zusammenfassende Darstellungen)

KOPFERMANN, H., Kernmomente, Frankfurt 1956

RAMSEY, N. F., Nuclear moments, New York 1953

Дорфман, Я. Г., Магнитые свойства атомного ядра (DORFMAN, J. G., Magnetische Eigenschaften der Atomkerne), Moskau 1948

B. KERNUMWANDLUNGEN

IV. Der radioaktive Zerfall

Die natürlich radioaktiven Elemente

§ 12. Historische Einleitung

Die erste Beobachtung eines radioaktiven Zerfalls gelang dem französischen Physiker H. BECQUEREL, und zwar vermöge des merkwürdigen Zufalls, daß sich in seiner Sammlung photolumineszierender Substanzen auch *Kaliumuranylsulfat* befand. BECQUEREL hatte nämlich am Anfang des Jahres 1896 in der Pariser Akademie einem Vortrag über die kurz zuvor entdeckten Röntgenstrahlen beigewohnt und war dadurch zu der heute natürlich seltsam erscheinenden Vermutung eines ursächlichen Zusammenhangs zwischen der grünen Kathodo-Lumineszenz des Glases der Röntgenröhre und der Emission der neuartigen Strahlung gelangt. Er untersuchte daraufhin eine Reihe photolumineszierender Substanzen auf eventuelle ähnliche Strahlungswirkungen nach erfolgter Belichtung und entdeckte dabei, daß das genannte Urankaliumdoppelsalz imstande war, lichtdicht verpackte photographische Platten zu schwärzen. Sehr schnell erkannte er indessen, daß die neue Erscheinung nichts mit der Photolumineszenz der Verbindung zu tun hatte, sondern daß es eine Eigenschaft des Urans ist, eine durchdringende Strahlung zu emittieren. Die anschließende Beobachtung der ionisierenden Wirkung dieser Strahlung und die meßtechnische Verwertung dieses Effektes gestatteten den genauen Nachweis, daß alle Uranverbindungen strahlen, daß die Strahlungsintensität dem Urangehalt proportional ist und daß die Vorgänge durch physikalische und chemische Eingriffe nicht zu beeinflussen sind. Die in der Folgezeit mit radioaktiv bezeichneten Effekte stellten also etwas völlig Neuartiges dar, sie sind spontane Erscheinungen und unterscheiden sich prinzipiell z.B. von dem lichtelektrischen oder glühelektrischen Effekt, die sich als Folge einer vorangegangenen physikalischen Einwirkung ergeben.

Nach der Entdeckung, daß auch das Thorium eine radioaktive Substanz ist (C. G. SCHMIDT bzw. M. CURIE, 1898), beobachtete M. CURIE, daß die Aktivität von Uranerzen größer ist, als ihrem Urangehalt entspricht, woraus sie sofort den richtigen Schluß zog, daß ein weiteres unbekanntes und stark radioaktives Element in den Erzen in kleinen Mengen beigemischt sein müsse. Gemeinsam mit

ihrem Gatten P. CURIE gelang es ihr durch systematische Trennversuche, bereits im Jahre 1898 mit der das Wismut enthaltenden Fraktion eine neue radioaktive Substanz abzuscheiden, die den Namen *Polonium* erhielt; im gleichen Jahr wurde weiterhin von dem Ehepaar CURIE in der das Barium enthaltenden Fraktion ein weiteres radioaktives Element aufgefunden, das die Bezeichnung *Radium* erhielt. Da diese neuen Radioelemente aus der Pechblende nach vorhergehender Abscheidung des Urans gewonnen worden waren, setzte nun ein wahrer internationaler Run auf die Rückstände der Uranverarbeitung ein. Innerhalb weniger Jahre wurde in der das Lanthan enthaltenden Fraktion das Aktinium aufgefunden (A. DEBIERNE bzw. F. GIESEL, 1900), in der das Blei enthaltenden Fraktion das RaD entdeckt (J. ELSTER und H. GEITEL bzw. F. GIESEL bzw. K. A. HOFMANN und E. STRAUSS, 1902) und das Ionium identifiziert (B. BOLTWOOD bzw. O. HAHN wie auch W. MARCKWALD, 1907)[1]). Endlich wurde von O. HAHN und L. MEITNER bzw. von F. SODDY und J. CRANSTON im Jahre 1918 das Protaktinium isoliert, um nur einige der wichtigsten Elemente zu nennen. Erwähnt sei auch noch, daß bereits 1905 O. HAHN aus Thormineralien das Radiothor und das Mesothor abschied.

Während die zuerst entdeckten Stoffe, vornehmlich Uran, Thorium, Radium und Polonium, zunächst für zeitlich unveränderliche radioaktive Körper gehalten wurden und nur die Frage nach der Entstehung der bereits 1902 von E. RUTHERFORD klassifizierten emittierten Teilchen und die Frage nach der Herkunft ihrer Energie — die sich besonders anschaulich in den kalorischen Effekten ausdrückt — Schwierigkeiten bereitete, wurden ebenfalls schon in der Frühzeit Elemente beobachtet, deren Aktivität sich zeitlich ändert. Dazu gehören besonders die im Jahr 1900 entdeckten gasförmigen radioaktiven Stoffe, die den Namen *Emanationen* erhielten (aus Thoriumprodukten von E. RUTHERFORD und R. OWENS, aus Radium von E. DORN und aus Aktinium gleichzeitig von A. DEBIERNE bzw. F. GIESEL aufgefunden), aber auch die schnell verschwindenden Aktivitäten auf Körpern, die mit den Emanationen in Kontakt gewesen sind, sowie die langsam sich entwickelnde Aktivität, die sich im Fall der Radiumemanation nach dem Verschwinden der schnell abnehmenden neu bemerkbar macht. Diese rätselhafte und verwirrende Fülle von unvereinbar erscheinenden Zügen wurde 1903 verständlich durch die von RUTHERFORD und SODDY vorgenommene richtige Deutung von Versuchen, bei denen es W. CROOKES gelungen war, dem Uran seine *β-Aktivität zu entziehen* und diese in einem uranfreien Rückstand anzusammeln. Dieser hatte nämlich in zunächst mehr spielerischer Weise Uranylnitrat $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6\,H_2O$ in Äther gelöst. Bei diesem Vorgang vermischt sich das Kristallwasser nicht mit dem genannten Lösungsmittel. Trennt man die beiden Phasen voneinander, etwa mit Hilfe eines Scheidetrichters, und dampft sie getrennt zur Trockne ein, dann ist das wiedergewonnene Uranylnitrat frei von β-Strahlung, während

[1]) Bemerkenswert ist die rasche und gleichzeitig in vielen Laboratorien vorangetriebene Entwicklung, die so verlaufen ist, daß bei einer Reihe von Neuentdeckungen keine Priorität existiert.

sich die gesamte β-Aktivität im Rückstand der wässerigen Phase vorfindet. Diese einfache radiochemische Trennung, als welche wir die Operation heute bezeichnen, vermittelte die wichtige Erkenntnis, daß die β-Strahlung des Urans an einen Körper gebunden ist, der sich chemisch anders verhält als jenes. Dieser zunächst hypothetische Körper erhielt von CROOKES die Bezeichnung UX; wir wissen heute, daß es sich um ein Thoriumisotop handelt. Besonders frappierend war die weitere Beobachtung von CROOKES, daß die β-Strahlung des UX nicht konstant ist, sondern exponentiell mit der Zeit *abnimmt*, und daß das nach der Abtrennung zunächst strahlungsfreie Uransalz allmählich seine β-Aktivität in exponentiellem Anstieg *wiedergewinnt*. Die genaue Untersuchung des Abfalls der durch die β-Strahlen des Rückstandes vermittelten Wirkungen zeigte, daß nach $T_{1/2} = 24{,}1$ Tagen diese auf die Hälfte und nach Verlauf von $2\,T_{1/2}$ auf ein Viertel der Anfangswirkungen abgesunken waren. Man nennt seitdem $T_{1/2}$ die *Halbwertszeit* des UX. Der Wiederanstieg der Aktivität des Urans erfolgt spiegelbildlich (Abb. 25).

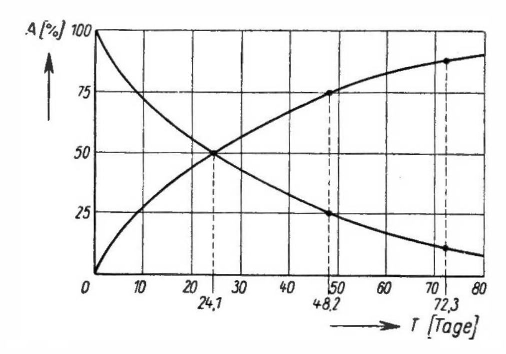


Abb. 25. Abfall der Aktivität des isolierten UX bzw. Wiederanstieg der β-Aktivität von UX-freiem Uran

Nachdem es anschließend an die geschilderten Beobachtungen E. RUTHERFORD und F. SODDY im Jahre 1902 gelungen war, auch beim Thorium analoge Verhältnisse aufzufinden und ein ThX abzuscheiden, wurde von ihnen noch im gleichen Jahr eine präzis formulierte Theorie aufgestellt, die bereits in der Einführung (Bd. I) erwähnt wurde und die als *Zerfalls- oder Umwandlungstheorie der radioaktiven Vorgänge* bezeichnet wird; sie wurde schnell allgemein akzeptiert. Es ließ sich zeigen, daß die Wirkungen aller isolierten radioaktiven Substanzen exponentiell mit der Zeit abnehmen und daß auch die vorher für zeitlich unveränderlich gehaltenen radioaktiven Körper, wie z. B. Uran, Radium, Thor, gleichen Wandlungen unterliegen; bei den letzteren erfolgt das Tempo des Zerfalls nur so langsam, daß die Veränderungen der Strahlungsintensität nicht direkt zu beobachten sind. Auch die ursprünglich so verwickelt erscheinenden Vorgänge bei den Emanationen und den in ihrem Gefolge auftretenden Aktivitäten ließen sich deuten als Überlagerungen einer größeren Zahl von abfallenden und entstehenden Aktivitäten, die alle das gleiche Zerfallsgesetz — nur mit anderen Konstanten — befolgen.

§ 13. Der exponentielle Zerfall und der Begriff der Aktivität

Die experimentelle Beobachtung, daß die von isolierten einheitlichen radioaktiven Substanzen bewirkten Effekte wie Ionisation oder Wärmeproduktion exponentiell abnehmen, erlaubt eine mathematisch einfache Beschreibung des Elementarvorgangs. Bezeichnet man mit W_0 die von dem aktiven Körper zu einem definierten Zeitpunkt ausgehende Wirkung, so ergibt sich zu einer um t Zeiteinheiten späteren Zeit ein Effekt

$$W = W_0 e^{-\lambda t},$$

wobei λ eine für das betrachtete Radioelement charakteristische Konstante bezeichnet. Beträgt nun zur Zeit t die Anzahl der Atome in der vorliegenden Substanz N und ist die Zahl der im Zeitelement dt zerfallenden Atome dN, dann ist $-\frac{dN}{dt}$ die Abnahme von N in der Zeiteinheit. Diese Größe, also die Zahl der in der Zeiteinheit in der aktiven Substanz sich abspielenden Zerfallsakte, ist nach den Grundvorstellungen der Zerfallstheorie identisch mit der Zahl der in der Zeiteinheit emittierten Teilchen bzw. Quanten; sie heißt *Zerfallsrate* oder *Aktivität A* des Präparats. Da der Meßwert der beobachteten Effekte proportional der Zahl der emittierten Teilchen ist, ergibt sich also

$$-\frac{dN}{dt} = C\,W = C\,W_0 e^{-\lambda t},$$

woraus durch Integration folgt

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{C}{\lambda} W_0 e^{-\lambda t} = \frac{C}{\lambda} W \\ \text{bzw.} \qquad \lambda N &= C\,W = -\frac{dN}{dt} = A. \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

Die Aktivität A eines Präparates ist also proportional der Zahl der in ihm enthaltenen Atome. Durch Integration von (13.1) erhält man schließlich

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{13.2}$$

d. h., auch die Zahl der aktiven Atome nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Die Größe λ heißt *Zerfallskonstante* und bezeichnet den Bruchteil der in der Zeiteinheit zerfallenden Atome; sie hat die Dimension einer reziproken Zeit. Wählt man eine Zeit τ derart, daß $\tau = \frac{1}{\lambda}$ ist, so folgt aus (13.2), daß nach Ablauf von τ Einheiten die ursprüngliche Anzahl der aktiven Atome auf den e-ten Teil abgefallen ist; man nennt diese Abklingzeit τ auch die *mittlere Lebensdauer*. Die Berechtigung zu dieser Bezeichnung läßt sich leicht erweisen; von N_0 zur Zeit 0 vorhandenen Atomen existieren zur Zeit t noch $N_0 e^{-\lambda t}$, zur Zeit $t + dt$ entsprechend $N_0 e^{-\lambda(t+dt)} = N_0 e^{-\lambda t}(1 - \lambda\,dt)$. Es ist daher $\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$ die Zahl jener Atome, deren tatsächliche Lebensdauer zwischen t und $t + dt$ liegt. Summiert man die Lebensdauern

sämtlicher ursprünglich vorhanden gewesener Atome, so erhält man für diese Summe

$$S = \int_0^\infty t\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \frac{N_0}{\lambda} = N_0 \tau .$$

$\frac{S}{N_0} = \tau$ ist also tatsächlich die mittlere Lebensdauer eines Atoms. Im praktischen Gebrauch verwendet man statt τ die bereits erwähnte Halbwertszeit, die definiert ist als die Zeit $T_{1/2}$, nach deren Ablauf die Zahl der noch vorhandenen Atome auf die Hälfte abgefallen ist. Aus dieser Definition von $T_{1/2}$ ergibt sich $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$ oder

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \tau \ln 2 .$$

Nach Verlauf von 10 Halbwertszeiten ist die Aktivität eines Präparats auf rund $1\,^0/_{00}$ abgeklungen. Die Halbwertszeit ist eine unveränderliche, charakteristische Konstante eines Radioelementes; indessen sind gewisse sehr kleine Schwankungen im Wert von $T_{1/2}$ in Sonderfällen (K-Einfang an sehr leichten aktiven Kernen, z. B. am Be^7) vorhergesagt und dann tatsächlich beobachtet worden.

Es ist aufschlußreich, daß sich das empirisch gefundene exponentielle Zerfallsgesetz ohne jede spezielle Annahme über den Mechanismus des Kernvorgangs aus bloßen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen herleiten läßt. Also, ohne jede Kenntnis von den Ursachen, die im einzelnen Fall irgend eines herausgegriffen gedachten Atomkerns zu seiner Umwandlung führen, kann man den Vorgang als einen rein zufälligen im Sinn der Wahrscheinlichkeitsrechnung auffassen. Man braucht nur anzunehmen, daß die Wahrscheinlichkeit w davon, daß ein Kern bestimmter Gattung innerhalb einer gegebenen Zeit Δt zerfällt, eine Konstante ist, d. h. unabhängig von seiner Vorgeschichte und für alle Atome der gleichen Art dieselbe. Für genügend kleine Werte von Δt ist dann w der Größe des Zeitelementes proportional, also $w = \lambda \Delta t$. Daraus folgt für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß ein Kern während eines endlichen Intervalls $t = n \Delta t$ **nicht** zerfällt,

$$w' = (1 - \lambda \Delta t)^n ,$$

was sich umformen läßt in

$$w' = \left[(1 - \lambda \Delta t)\right]^{\frac{1}{-\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t n} = \left[(1 - \lambda \Delta t)^{\frac{1}{-\lambda \Delta t}}\right]^{-\lambda t} .$$

Beim Übergang $\lim \Delta t \to 0$ ergibt sich

$$w' = e^{-\lambda t}.$$

Von einer sehr großen Zahl N_0 gleichartiger zur Zeit $t = 0$ gegebener Atome werden also zur Zeit t noch unverwandelt existieren

$$N = N_0 e^{-\lambda t} ,$$

was identisch ist mit (13.2). Dieser Verzicht auf eine kausale Beschreibung des

Einzelvorgangs entspricht im übrigen durchaus den Auffassungen der Kerntheorie. Natürlich hat mit dieser Darstellung die charakteristische Konstante λ einen anderen Sinn erhalten; sie bedeutet jetzt die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kern in der Zeiteinheit zerfällt.

§ 14. Schwankungserscheinungen

Die statistische Beschreibung des radioaktiven Zerfalls führt zu einer bedeutsamen Konsequenz, nämlich daß man das Auftreten von Schwankungserscheinungen zu erwarten hat. Diese machen sich in der Tat experimentell bemerkbar, und zwar um so stärker, je kleiner die beobachtete Zerfallsrate, d.h. die Aktivität $N\lambda$ des untersuchten Präparates ist. Da die einzelnen Zerfälle nicht kausal miteinander verknüpft sind, müssen sie in unregelmäßigen Abständen aufeinander folgen; macht man also das gleiche Zählexperiment mehrere Male über die gleiche Zeitdauer t ($t \ll T_{1/2}$), dann muß die beobachtete Zahl der beim Zerfall emittierten Teilchen von einer Beobachtung zur anderen variieren, wobei die Schwankungen um die durch die e-Funktion bestimmten Normalwerte liegen. Jede Messung einer Zerfallsrate ist also mit einer statistischen Unsicherheit behaftet. Indessen gibt die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Maß, um die Größe der statistischen Unsicherheit anzugeben. Zu diesem kritischen Maß gelangt man durch eine Betrachtung von *Wahrscheinlichkeitsverteilungen.*

Bei einem Einzelversuch sei p die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses, $q = 1 - p$ daher die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens. Für eine Serie von M gleichzeitig oder nacheinander unter den gleichen Bedingungen ausgeführten Einzelversuchen ergibt sich nach den kombinatorischen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß die Ereigniszahl einen bestimmten Wert x annimmt, d.h. daß innerhalb der Serie von M Versuchen das Ereignis x-mal eintritt, zu

$$W(x) = \binom{M}{x} p^x q^{M-x} = \frac{M!}{x!\,(M-x)!} p^x q^{M-x} \tag{14.1}$$

(*Newtonsche Formel*). Unter der mathematischen Erwartung für die Ereigniszahl versteht man die Größe $Z = pM$; sie ist gleichzeitig der Mittelwert der Ereigniszahl für unendlich viel Serien von M Einzelversuchen. Die Formel (14.1) läßt sich leicht umformen zu

$$W(x) = \frac{p^x q^{M-x} M^x}{x!} \frac{M!}{(M-x)!\,M^x}.$$

Der zweite Faktor geht gegen 1, wenn M sehr groß ist. Also wird

$$W(x) = \frac{(pM)^x}{x!}(1-p)^{M-x}.$$

Wenn fernerhin p und x sehr klein gegen M sind, dann ergibt sich

$$W(x) = \frac{Z^x}{x!}\left(1 - \frac{Z}{M}\right)^M = \frac{Z^x}{x!}\left[\left(1 - \frac{Z}{M}\right)^{-\frac{M}{Z}}\right]^{-Z},$$

was bei großem M schließlich in die *Poissonsche Verteilung*

$$W(x) = P_Z(x) = \frac{Z^x}{x!}e^{-Z} \tag{14.2}$$

übergeht; diese ist, wie schon aus den getroffenen Voraussetzungen hervorgeht, eine Verteilung seltener Ereignisse. Die Funktion $P_Z(x)$ ist nicht kontinuierlich,

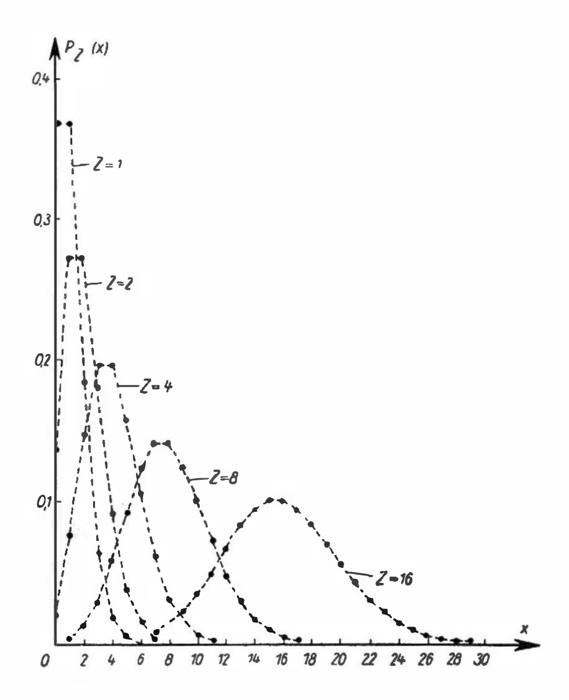


Abb. 26. Die Poisson-Verteilung $P_Z(x)$ für verschiedene Werte der mathematischen Erwartung Z

sondern nur für ganze Zahlen von x definiert; außerdem ist sie unsymmetrisch (Abb. 26). Für das Weitere ist es noch wichtig, einige Eigenschaften der Poisson-Verteilung kurz zu betrachten. Summiert man über alle Werte der Wahrscheinlichkeiten von $x = 0$ bis $x = \infty$, so erhält man

$$\sum_{x=0}^{\infty} W(x) = e^{-Z}\left(1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \cdots\right) = 1 .$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß sich eben mit Gewißheit irgendein Wert der

Ereigniszahl ergibt. Für die mittlere Zahl der Ereignisse erhält man aus der Verteilung

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{x=0}^{\infty} x\,P_Z(x)}{\sum\limits_{x=0}^{\infty} P_Z(x)} = e^{-Z} Z\left(1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \cdots\right) = Z,$$

ein Ergebnis, das der Definition der mathematischen Erwartung Z entspricht. In gleicher Weise kann man den Mittelwert $\overline{x^2}$ ausrechnen und erhält dafür den Wert $Z\,(Z+1)$.

Betrachtet man nun eine beliebige, wirklich veranstaltete Serie von M Versuchen, z.B. die i-te Serie, dann ist natürlich die Ereigniszahl, die man beobachtet, nicht Z, sondern $Z_i = Z + \delta_i$, wobei δ_i positive und negative Werte annehmen wird. Stellt man sehr viel Versuchsserien an, dann muß nach dem oben Gesagten $\overline{\delta_i} = 0$ sein, während natürlich $\overline{\delta_i^2}$ immer positiv ist. Dieser Mittelwert von δ_i^2, d.h. also $\overline{\delta_i^2}$, den man mit Hilfe der Poisson-Verteilung berechnen kann, verhilft zu dem gesuchten Maß der statistischen Unsicherheit eines experimentell bestimmten Einzelwertes Z_i. Die Wurzel aus $\overline{\delta_i^2}$ bezeichnet man als Standardabweichung σ; sie ist also, genau gesprochen, ein bei einer größeren Reihe von Versuchsserien zweckmäßig gebildeter *Mittelwert der statistischen Schwankung*:

$$\sigma^2 = \overline{\delta_i^2} = \overline{(Z_i - Z)^2}.$$

Da es sich hier um den Mittelwert einer quadratischen Form handelt und weil $\overline{Z} = Z$ ist, kann man σ^2 wie folgt umformen:

$$\sigma^2 = \overline{Z_i^2} - 2Z\overline{Z_i} + Z^2$$
$$= \overline{Z_i^2} - 2Z^2 + Z^2 = \overline{Z_i^2} - Z^2.$$

Da

$$\overline{Z_i^2} = \sum_{Z_i=0}^{\infty} Z_i^2 P_Z(Z_i) = Z\,(Z+1)$$

ist, wird

$$\sigma^2 = Z,$$
$$\sigma = \sqrt{Z}.$$

Die mittlere statistische Schwankung ist also gleich der Wurzel aus der mathematischen Erwartung.

Wendet man diese allgemeinen Überlegungen auf den radioaktiven Zerfall an, so ist, wenn N Atome der Zerfallskonstanten λ vorliegen, $Z = \lambda N \Delta t$ der durch das Zerfallsgesetz während der Beobachtungsdauer Δt bestimmte Normalwert, eben die *mathematische Erwartung beim Zerfall.* Bei wirklich vorgenommenen Versuchen erhält man nicht Z Zerfälle, sondern um Z herum schwankende Werte. Die mittlere statistische Schwankung in einer größeren Reihe von Beobachtungen ist also $\sqrt{Z} = \sqrt{\lambda N \Delta t}$. Es gibt natürlich Schwankungen bei Einzelbeobachtungen, die größer, und solche, die kleiner sind als $\sqrt{Z}$, das nur die Bedeutung eines Mittelwertes der zu erwartenden Schwankungen hat.

Die nächste Frage, die sich ergibt, ist die nach der Chance, daß bei einer Einzelzählung das Meßresultat Z_i im Intervall $Z \pm \sqrt{Z}$ liegt. Man kann die Frage auch so formulieren: Wie hoch ist bei einer den oben formulierten Bedingungen der Poisson-Verteilung genügenden Wahrscheinlichkeitsverteilung der zu erwartende Prozentsatz von Ergebnissen, bei denen die Schwankung $\delta_i \leqq \sigma$ ist? Um darauf antworten zu können, muß man die Poisson-Verteilung umbilden. Man kann leicht aus ihr eine bekannte analytische Funktion erhalten, die bequemer ist und infinitesimale Operationen erlaubt. Man ersetzt zu diesem Zweck die Fakultät durch die *Stirlingsche Annäherungsformel*

$$x! = (2\pi x)^{1/2} x^x e^{-x}.$$

Schreibt man außerdem zweckmäßigerweise $x = Z + \delta$, so erhält man aus (14.2)

$$P_Z(\delta) = \frac{Z^{Z+\delta} e^{-Z}}{[2\pi(Z+\delta)]^{1/2} (Z+\delta)^{Z+\delta} e^{-(Z+\delta)}}$$
$$= \frac{1}{[2\pi(Z+\delta)]^{1/2} \left(1 + \frac{\delta}{Z}\right)^{Z+\delta} e^{-\delta}}.$$

Den zweiten Faktor im Nenner formt man um, indem man ihn logarithmiert und dann in eine Reihe entwickelt:

$$\ln\left(1 + \frac{\delta}{Z}\right)^{Z+\delta} = (Z+\delta)\left(\frac{\delta}{Z} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{Z^2} + \frac{1}{3}\frac{\delta^3}{Z^3} - + \cdots\right)$$
$$= \delta + \frac{\delta^2}{2Z} - \frac{\delta^3}{6Z^2} + - \cdots.$$

Indem man wieder zum Numerus übergeht, erhält man den Faktor als unendliches Produkt

$$\left(1 + \frac{\delta}{Z}\right)^{Z+\delta} = e^{\delta} \cdot e^{\frac{\delta^2}{2Z}} \cdot e^{-\frac{\delta^3}{6Z^2}} \cdots$$

Von den Faktoren dieses Produkts kürzt sich der erste weg, während man den dritten und die weiteren für kleine Werte von δ vernachlässigen kann. Man erhält schließlich

$$P_Z(\delta) = \frac{1}{[2\pi(Z+\delta)]^{1/2}} e^{-\frac{\delta^2}{2Z}},$$

was durch Vernachlässigung von δ im Nenner in die *Gauß-Verteilung* übergeht, das heißt,

$$P_Z(\delta) = \frac{1}{(2\pi Z)^{1/2}} e^{-\frac{\delta^2}{2Z}}. \tag{14.3}$$

Die eben genannte Vernachlässigung bewirkt eine winzige Verschiebung der Maxima der beiden Verteilungen gegeneinander, die bei größeren Werten von Z praktisch nicht mehr zu bemerken ist. Sonst bleiben aber alle Eigenschaften der

Poisson-Verteilung bei ihrer Umbildung zur Gauß-Verteilung erhalten; insbesondere ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_Z(\delta)\, d\delta = 1\,.$$

Ebenso ergibt sich auch jetzt für die mittlere statistische Schwankung $\sigma = \sqrt{Z}$. Integriert man die Gauß-Verteilung zwischen den Grenzen $-\sqrt{Z}$ und $+\sqrt{Z}$, so ergibt das Integral die Zahl der Schwankungen, die bei sehr vielen Versuchen innerhalb des Intervalles von $-\sqrt{Z}$ bis $+\sqrt{Z}$ um Z herumliegen. Durch die Substitution $y = \frac{\delta}{\sqrt{2Z}}$ erhält man

$$\int_{-\sqrt{Z}}^{+\sqrt{Z}} P_Z(\delta)\, d\delta = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dy}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}\, dy = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

wobei $\Phi(\xi)$ das *Gaußsche Fehlerintegral* bezeichnet. Aus den tabellierten Werten dieser Funktion findet man für $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ den Wert 0,683.[1]) Damit ist die oben gestellte Frage beantwortet: 68,3 % aller Ergebnisse weisen eine Schwankung auf, die $\leqq \sqrt{Z}$ ist, oder mit anderen Worten ausgedrückt, bei einem beliebigen Einzelversuch besteht eine Chance von rund $\frac{2}{3}$ dafür, daß der Zahlenwert des Ergebnisses, nämlich die Ereigniszahl Z_i, im Intervall $Z \pm \sqrt{Z}$ liegt. Beträgt also bei einem radioaktiven Zerfall der Normalwert für eine gegebene Zeitdauer $Z = 10\,000$ Zerfallsereignisse, dann ist $\sqrt{Z} = \sqrt{10\,000} = 100$ die mittlere Schwankung. Macht man wiederholte Einzelbeobachtungen, dann liegen rund zwei Drittel aller Werte zwischen 9900 und 10100. Die relative Schwankung $\frac{\sqrt{Z}}{Z} = \frac{100}{10000}$ beträgt 1 %. Man spricht in diesem Fall etwas unzulässig von 1 % Genauigkeit; bei dieser Ausdrucksweise muß man aber immer bedenken, daß eine Chance von $\frac{1}{3}$ dafür besteht, daß sich bei einer Einzelmessung eine Zerfallsrate ergibt, deren Zahlenwert über 10100 oder unter 9900 liegt. Integriert man die Gauß-Verteilung zwischen den Grenzen $\pm 2\,\sigma$ bzw. $\pm 3\,\sigma$, so ergibt sich in analoger Weise, daß 95,4% bzw. 99,7% aller Schwankungen $\leqq 2\sqrt{Z}$ bzw. $\leqq 3\sqrt{Z}$ sind. Man sieht, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten größerer Schwankungen sehr schnell mit der Größe der Schwankungen abnimmt.

Da man zur Beobachtung von Zerfallsraten Meßgeräte braucht, z.B. Zählrohre, kann die ursprünglich gegebene Verteilung der Zerfälle, die in einer vorliegenden aktiven Substanz stattfinden, durch *die Messung beeinflußt* werden. Das kann in zweierlei Weise geschehen: Einmal addiert sich zu dem durch die strahlende Substanz hervorgerufenen Effekt ein durch andere Ursachen bewirkter Nulleffekt im Meßgerät, der also nach Wegnahme des Präparats übrigbleibt; fernerhin

[1]) Siehe z. B. JAHNKE-EMDE, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Leipzig 1938.

können sich in dem Mechanismus des Zählgerätes Störungen ergeben (z. B. unregelmäßig auftretende Nachentladungen in einem Geiger-Müller-Zählrohr), die als systematische Fehler die Zählrate zusätzlich vergrößern und verfälschen. Im ersteren Fall erhält man die Summe zweier Poisson-Verteilungen, die — wie sich leicht zeigen läßt — wieder eine Poisson-Verteilung ergibt. Das gesuchte Meßresultat erhält man durch eine Differenzmessung, und die mittlere statistische Schwankung wird durch das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt. Ist also Z_s der Zahlenwert des gezählten Summeneffekts, der sich in der Zeit t ergibt, und Z_0 derjenige des Nulleffekts, der in der Zeit t_0 gemessen wird, dann erhält man für die wahre Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit

$$n = \frac{Z_s}{t} - \frac{Z_0}{t_0}$$

und für die zugehörige mittlere statistische Schwankung von n den Wert

$$\sigma = \sqrt{\frac{Z_s}{t^2} + \frac{Z_0}{t_0^2}}\,.$$

Im zweiten Fall kann man die Messung natürlich nicht verwenden; da man aber eine Störung, die im Meßgerät stattgefunden hat, der sich ergebenden Verteilung nicht ohne weiteres anmerkt, muß diese im Verdachtsfall analysiert werden. Man stellt zu diesem Zweck eine größere Reihe von Versuchszählungen Z_i an und bildet ihren Mittelwert $\overline{Z_i} \sim Z$. Dann kann man σ direkt aus dem Mittelwert der δ_i^2 ausrechnen; dieser Wert muß im Fall der Störungsfreiheit mit $\sqrt{Z}$ übereinstimmen. Dieses Kriterium genügt indessen nicht, wenn eine Störung überlagert ist, die selbst auch eine statistische Verteilung aufweist. Dann ist, wie aus dem Obigen hervorgeht, das wahre σ größer als $\sqrt{Z_s}$ und größer als $\sqrt{\overline{\delta_i^2}}$. In diesem Fall muß man die Glockenkurve $P_Z(\delta)$ so zeichnen, daß sie einer großen Reihe von Versuchszählungen entspricht. Dann entnimmt man aus der Kurve denjenigen Wert der Streuung δ_e, der einer Abnahme der Häufigkeit auf den e-ten Teil entspricht. Aus (14.3) ergibt sich

$$\delta_e = \sqrt{2Z}\,, \quad \text{d.h.}, \quad \sigma = \frac{\delta_e}{\sqrt{2}}\,.$$

Sofern dieser Wert von σ mit $\sqrt{Z}$ übereinstimmt, liegt keine Störung im Meßgerät vor. Dieses Verfahren ist jedoch umständlich, wie auch fernerhin die Analyse der sog. Summenkurve, unter der man die Funktion $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} P_Z(\delta)\,d\delta$ versteht. Diese letztgenannte Analyse wird jedoch elementar einfach, wenn man ein sog. *Wahrscheinlichkeitspapier* benutzt, bei dem die Ordinaten so verzerrt werden, daß die Summenkurve durch eine Gerade dargestellt wird. Diese Gerade, der eine zu analysierende Verteilung entsprechen muß, sofern sie statistisch rein ist, und die durch die Integralwerte für die oberen Grenzen $-2\,\sigma$, 0 und $+2\,\sigma$ (nämlich 2,3 %, 50 % und 97,7 %) vorgegeben ist, wird zunächst gezeichnet. Dann werden die experimentell erhaltenen Schwankungen in Größenklassen eingeteilt und die Menge in

jeder Klasse, beginnend mit der größten negativen Schwankung, sukzessiv zu dieser addiert. Die so erhaltenen wachsenden Teilsummen werden schließlich als Funktion der Schwankungen eingezeichnet. Im Fall einer ungestörten Gauß-Verteilung streuen die eingezeichneten Summenwerte um die gezeichnete Summenlinie; falls eine Störung überlagert ist, die aber auch eine Gauß-Verteilung aufweist, streuen die Summenwerte um eine Gerade, die eine geringere Neigung aufweist als die Summenlinie und sie bei der Abszisse $\delta = 0$ und der Ordinate 50% schneidet. Falls schließlich die Störungen nicht statistisch verteilt sind, weichen die eingezeichneten Punkte der Summenwerte unsystematisch von der Summenlinie ab.[1])

§ 15. Allgemeine Zerfallstheorie

Wie schon im § 12 bemerkt wurde und wie später noch näher erörtert werden wird, liegt in den Uran- und Thormineralien ein kompliziertes Gemisch von radioaktiven Isotopen vor, die genetisch auseinander entstehen und dabei Umwandlungsreihen bilden. Das in den Mineralien enthaltene Gemenge von Radioisotopen ist wegen der besonderen stationären Verhältnisse (radioaktives Gleichgewicht) ein einfacher Fall des allgemeinen Problems, die Aktivitäten aller Radioelemente in einer genetisch zusammenhängenden Reihe in Abhängigkeit von der Zeit, von irgendwelchen Anfangsbedingungen und von den Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mathematisch darzustellen. Bevor die allgemeine Lösung angegeben wird, sollen einige besonders einfache Spezialfälle erörtert werden.

a) Konstante Nacherzeugung eines Radioisotops

Der einfachste Fall einer Überlagerung von Zerfallsvorgängen liegt vor, wenn durch die Umwandlung eines sehr langlebigen radioaktiven Isotops eine relativ kurzlebige Tochtersubstanz entsteht. Es sei also vorausgesetzt, daß die Zerfallskonstante der primären Substanz so klein ist, daß ihre Aktivität A_1 als konstant anzusehen ist. Dann lautet die Differentialgleichung für die Anzahl der Atome des Nachfolgeelementes unter der Anfangsbedingung $N_2(0) = 0$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = A_1 - \lambda_2 N_2(t)\,,$$

was einfach besagt, daß die Änderung von $N_2(t)$ gleich der Differenz von Zuwachs und Zerfall ist. Durch Integration ergibt sich für die Atomzahl

$$N_2(t) = \frac{A_1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t}) \tag{15.1}$$

und damit für die Aktivität

$$A_2(t) = A_1(1 - e^{-\lambda_2 t})\,.$$

---

[1]) Nähere Einzelheiten zur Analyse von Verteilungen mit Hilfe der Summenkurve unter Verwendung von Wahrscheinlichkeitspapier vgl. Riedel, O., Nucleonics **12** (6), 64 (1954).

Die Atomzahl steigt exponentiell mit der Zeit an und erreicht asymptotisch einen Grenzwert $\frac{A_1}{\lambda_2}$, die sog. Gleichgewichtsmenge. Das gleiche gilt für die Aktivität, wobei sich für das radioaktive Gleichgewicht als bemerkenswert ergibt, daß die Aktivitäten von Primär- und Folgeprodukt gleich sind, d.h.,

$$A_2(\infty) = A_1. \tag{15.2}$$

Man bezeichnet dieses Gleichgewicht als *Dauergleichgewicht* oder *säkulares Gleichgewicht.*

Der zeitliche Verlauf des Anstieges der Nachfolgesubstanz verläuft, wie aus (15.1) folgt, spiegelbildlich zum Abfall der Menge $N_2(\infty) = \frac{A_1}{\lambda_2}$. Man kann daher auch die Zerfallskonstante λ_2 dem Anstieg der Tochtersubstanz aus der Muttersubstanz entnehmen. Ein Beispiel für die eben betrachteten Verhältnisse ist die bereits in § 12 erwähnte Umwandlung U → UX nach Abtrennung des UX.

Im allgemeinen Fall, nämlich bei der Anfangsbedingung $N_2(0) > 0$, ergibt sich

$$N_2(t) = N_2(0)\,e^{-\lambda_2 t} + \frac{A_1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t}) = \frac{A_1}{\lambda_2} + \left(N_2(0) - \frac{A_1}{\lambda_2}\right)e^{-\lambda_2 t}.$$

Auch hier stellt sich asymptotisch der Gleichgewichtswert $\frac{A_1}{\lambda_2}$ ein, indem die positive oder negative Abweichung von $N_2(0)$ gegenüber der Gleichgewichtsmenge exponentiell verschwindet.

Das gleiche Problem der konstanten Nacherzeugung und einer Sättigung tritt übrigens auch auf, wenn künstlich radioaktive Nuklide[1]) durch konstante Aktivierung einer inaktiven Substanz erzeugt werden. Anstelle von A_1 — der Erzeugungsrate sowie der Sättigungsaktivität — steht eine Konstante Q, die durch das Produkt $\sigma N_b f$ definiert ist; dabei ist N_b die Zahl der Atome in der bestrahlten Probe, f der Fluß der Teilchen, die die Kernumwandlung hervorrufen (z. B. Neutronen), d.h. die Zahl der pro cm² und sec auftreffenden Teilchen, und σ ist der Wirkungsquerschnitt in cm² für die betreffende Reaktion.

b) Nacherzeugung aus einer abnehmenden Substanz

Wenn die Abnahme der Aktivität der Muttersubstanz innerhalb der Beobachtungszeit nicht mehr vernachlässigt werden kann, so erhält man für die Änderung der Zahl $N_2(t)$ der Atome der Tochtersubstanz die Differentialgleichung

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_1(0)\,e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2(t).$$

Durch Integration erhält man jetzt unter der Anfangsbedingung $N_2(0) = 0$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0)\,[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}].$$

---

[1]) Unter einem Nuklid versteht man eine Atomart, welche durch einen Kern bestimmter Ordnungszahl und Massenzahl in einem definierten Energiezustand charakterisiert ist.

Diese Funktion durchläuft ein Maximum, das für die Zeit $t_m = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ erreicht wird. Falls $\lambda_1 < \lambda_2$, d.h. die Primärsubstanz langlebiger als das Nachfolgeprodukt ist, nähert sich $N_2(t)$ asymptotisch der Funktion

$$N_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1(0) e^{-\lambda_1 t} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1(t).$$

Für die Aktivität erhält man dementsprechend nach genügend langer Zeit

$$A_2(t) = \lambda_2 N_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 N_1(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1(t). \tag{15.3}$$

Die Aktivität der Tochtersubstanz fällt mit der Halbwertszeit der Primärsubstanz ab. Man bezeichnet im übrigen diesen Zustand als *laufendes Gleichgewicht*. Dabei ist zu bemerken, daß $\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} > 1$ ist; im laufenden Gleichgewicht sind also die Aktivitäten nicht gleich, sondern die der Tochtersubstanz ist um einen konstanten Faktor höher. Falls $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ist, geht (15.3) in (15.2) über.
Sofern man die Aktivität einer Substanz aus einer der genetisch zusammenhängenden Reihen der natürlich aktiven Elemente nicht direkt ermitteln kann (z.B. wie im Fall des RaD, wo die extreme Weichheit der β-Strahlung eine Absolutmessung unmöglich macht), pflegt man die eines Nachfolgeelementes zu ermitteln (im Beispielsfall die des Poloniums). Dann muß man aber darauf achten, ob säkulares oder laufendes Gleichgewicht vorliegt.

c) Nacherzeugung aus einer linear mit der Zeit ansteigenden Substanz

Wenn aus einer sehr langlebigen Substanz 1, deren Aktivität als konstant anzusehen ist, eine verhältnismäßig langlebige Tochtersubstanz 2 entsteht, so kann man in der Reihenentwicklung der auf S. 56 angegebenen Anstiegsfunktion für kleine Werte von t die höheren Glieder vernachlässigen. Man erhält also, sofern $N_2(0) = 0$ ist,

$$N_2(t) = \frac{A_1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t}) = A_1 t.$$

Für eine weitere relativ kurzlebige, aus 2 entstehende Substanz 3 erhält man dann die Differentialgleichung

$$\frac{d N_3(t)}{dt} = \lambda_2 A_1 t - \lambda_3 N_3(t).$$

Die Integration ergibt für die Anfangsbedingung $N_3(0) = 0$

$$N_3(t) = \frac{\lambda_2 A_1}{\lambda_3^2}[\lambda_3 t - (1 - e^{-\lambda_3 t})].$$

Die dieser Funktion entsprechende Kurve (Abb. 27) nähert sich asymptotisch einer durch die Gleichung

$$f(t) = \frac{\lambda_2 A_1}{\lambda_3^2}(\lambda_3 t - 1)$$

definierten Geraden.
Entsprechend geht für größere Werte von t die Aktivität über in

$$A_3(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} A_1(\lambda_3 t - 1) = A_2(t) - A_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Die Aktivität der dritten Substanz bleibt also um einen konstanten Betrag kleiner als die jeweilige — linear ansteigende — Aktivität der zweiten.

d) Allgemeine Lösung

Formuliert man das Problem allgemein, so handelt es sich um die Lösung einer Differentialgleichung für die Zeitabhängigkeit der Atomzahl $N(t)$ eines Radioisotops, dessen Zerfallskonstante λ ist und dessen Nacherzeugung durch eine beliebige Funktion $q(t)$ beschrieben wird, d.h. also der Differentialgleichung

$$\frac{dN(t)}{dt} = q(t) - \lambda N(t).$$

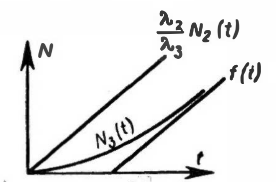


Abb. 27. Zeitabhängigkeit $N_3(t)$ der Menge einer Substanz, die aus einer linear ansteigenden Muttersubstanz erzeugt wird

Im allgemeinen Fall, d.h. wenn $N(0) \neq 0$ ist, lautet die Lösung

$$N(t) = e^{-\lambda t}\left[N(0) + \int_0^t q(\vartheta)\, e^{\lambda\vartheta}\, d\vartheta\right].$$

Die bisher behandelten Spezialfälle ergeben sich für die folgenden Festsetzungen der Funktion $q(t)$:

$q(t) = 0,$	exponentieller Zerfall einer isolierten Substanz;
$q(t) = \text{const},$	Anstieg bei Nacherzeugung aus einer Muttersubstanz konstanter Aktivität;
$q(t) = \lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t},$	Anstieg bei Nacherzeugung aus einer exponentiell zerfallenden Muttersubstanz;
$q(t) = Ct,$	Anstieg bei Nacherzeugung aus einer linear ansteigenden Muttersubstanz.

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung läßt sich sukzessiv der *zeitliche Verlauf der Umwandlungsprozesse für jedes der Radioelemente* berechnen, die in einer genetisch zusammenhängenden Reihe aufeinander folgen. Wenn nämlich die Menge der i-ten Substanz $N_i(t)$ errechnet worden ist, dann ist damit die Nacherzeugung für die k-te Substanz $q_k(t) = \lambda_i N_i(t)$ und damit die Möglichkeit zur Berechnung von $N_k(t)$ gegeben. Auf diese Weise erhält man das folgende geschlossene System von Formeln.[1])

Bezeichnet man wiederum mit $N_1(0), N_2(0), \ldots, N_n(0)$ die Anzahl der Atome eines Gemisches von n genetisch aufeinanderfolgenden Substanzen einer Zerfallsreihe, die zur Zeit $t = 0$ vorhanden sind, und mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Zerfalls-

[1]) Gruner, P., Ann. d. Phys. **19**, 169 (1906); Arch. sc. phys. et nat. **23**, 329 (1907); Bateman, H., Proc. Cambr. Soc. **15**, 423 (1910).

konstanten, dann beträgt allgemein die Anzahl der Atome der k-ten Substanz $N_k = S_1 + S_2 + \ldots + S_i + \ldots + S_k$. Dabei bedeutet

$$S_i = N_i(0)\,\lambda_i\,\lambda_{i+1} \ldots \lambda_{k-1} \left[\frac{e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)(\lambda_{i+2} - \lambda_i) \ldots (\lambda_k - \lambda_i)} \right.$$

$$+ \frac{e^{-\lambda_{i+1} t}}{(\lambda_i - \lambda_{i+1})(\lambda_{i+2} - \lambda_{i+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_{i+1})} + \ldots$$

$$\left. + \frac{e^{-\lambda_k t}}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_{i+1} - \lambda_k) \ldots (\lambda_{k-1} - \lambda_k)} \right].$$

Im übrigen wurde vorausgesetzt, daß das erste Element der Reihe nicht nacherzeugt wird und daß keine Verzweigungen vorliegen. Ist zur Zeit $t = 0$ nur das erste der betrachteten Elemente vorhanden, also $N_2(0) = N_3(0) = \cdots = N_k(0) = 0$, dann reduziert sich der Ausdruck N_k auf die Teilsumme S_1.

Befindet sich in dem angegebenen Gemisch eine Substanz, deren Zerfallskonstante λ_l merklich kleiner ist als die aller anderen Elemente, dann ergeben sich nach einer gewissen Zeit t konstante Mengenverhältnisse, weil sämtliche Funktionen $e^{-\lambda t} \sim 0$ sind, mit Ausnahme von $e^{-\lambda_l t}$. Es ergibt sich dann für

$$k < l: \quad N_k = 0;$$

$$k = l: \quad N_l = \left[\frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{l-1}}{(\lambda_1 - \lambda_l)(\lambda_2 - \lambda_l) \ldots (\lambda_{l-1} - \lambda_l)} N_1(0) \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{l-1}}{(\lambda_2 - \lambda_l)(\lambda_3 - \lambda_l) \ldots (\lambda_{l-1} - \lambda_l)} N_2(0) + \ldots N_l(0) \right] e^{-\lambda_l t};$$

$$k > l: \quad N_k = \frac{\lambda_l \lambda_{l+1} \ldots \lambda_{k-1}}{(\lambda_{l+1} - \lambda_l)(\lambda_{l+2} - \lambda_l) \ldots (\lambda_k - \lambda_l)} N_l.$$

Alle Substanzen stehen also in einem konstanten Mengenverhältnis; alle Mengen klingen mit $e^{-\lambda_l t}$ ab (laufendes Gleichgewicht, s.a. S. 58). Ist schließlich λ_l sehr klein gegen alle λ, dann wird

$$N_k = \frac{\lambda_l}{\lambda_k} N_l$$

(Dauergleichgewicht s. a. S. 57). Im letzteren Fall sind die Aktivitäten aller Substanzen gleich, es zerfallen also pro Zeiteinheit von jedem Folgeprodukt gleich viel Atome, und die Anzahlen der Atome verhalten sich umgekehrt wie die Zerfallskonstanten. Es ist also

$$\lambda_l N_l = \lambda_{l+1} N_{l+1} = \cdots = \lambda_n N_n = -\frac{dN}{dt} = A.$$

Im Fall von Verzweigungen zerfallen λN Atome derart, daß $\alpha' \lambda N$ sich in der einen und $\alpha'' \lambda N$ Atome sich in der anderen Weise umwandeln, wobei $\alpha' + \alpha'' = 1$ ist. α' und α'' sind die Abzweigverhältnisse. Bezeichnet man mit N' und N'' die Atomzahlen der Zweigprodukte und mit λ' und λ'' die zugehörigen Zerfallskonstanten, dann ist im Gleichgewicht $\lambda N = \lambda' N' + \lambda'' N''$.

Das radioaktive Gleichgewicht ist in besonders eindrucksvoller Weise in den ungestörten Uran- und Thormineralien verwirklicht.

§ 16. Die natürlichen Zerfallsreihen

Abgesehen von einigen isolierten, sehr langlebigen Radioelementen und von dem ständig in der Atmosphäre nacherzeugten C^{14} (s. § 18) gehört die überwiegende Mehrzahl der natürlich radioaktiven Isotope — nämlich insgesamt 45 Nuklide — in drei genetisch zusammenhängende Reihen. Dadurch erklärt sich auch, warum so viele relativ gegen das Alter der Erde sehr kurzlebige Elemente, wie z.B. das Radium (Ra^{226}) mit etwas über 1600 Jahren Halbwertszeit, nicht schon in sehr frühen Perioden der Geschichte der Erde verschwunden sind: Am Anfang der Reihen stehen *außerordentlich langlebige Nuklide*, U^{238}, U^{235} und Th^{232}. Die Gesamtmengen jedes Radioelements, das der Uran-Radium-Reihe angehört, haben im Verlauf der letzten Million Jahre — bezogen auf die gesamte Erde — nur um rund 0,1 Promille abgenommen, und zwar wegen des außerordentlich langsamen Abfalls der Primärsubstanz, eben des U^{238} ($T_{1/2} = 4{,}51 \cdot 10^9$ a). Durch sekundäre Prozesse werden freilich die Gleichgewichtsverhältnisse im Mineral selbst oft selektiv gestört. So gelangt häufig durch Auswaschung aus vielen Lagerstätten die Radiumemanation (Em^{222}), die sich in Wasser löst, mit diesem an die Oberfläche der Erde und damit in die Atmosphäre, wodurch das Gleichgewicht im Erz verändert wird; insbesondere fehlen dann natürlich die Nachfolgeprodukte der Emanation dem Entweichen entsprechend. Es hat ziemlich lange gedauert, bis die Verhältnisse in den Reihen bis in alle Einzelheiten aufgeklärt waren; in diesen allen, besonders in der Aktiniumreihe, sind noch in den letzten Jahren neue Verzweigungen aufgefunden worden, bei denen das eine Abzweigverhältnis sehr klein ist.
Im Ablauf der natürlichen Umwandlungsreihen wechseln α- und β-Zerfälle; die bei diesen spontanen Umwandlungen sich ergebenden Änderungen der Kernladungen entsprechen der ursprünglich von FAJANS und SODDY 1913 empirisch gefundenen *Verschiebungsregel*: Beim α-Zerfall nimmt die Ordnungszahl des Nachfolgekerns um 2 Einheiten ab, während sie sich beim β-Zerfall um 1 erhöht. Da es sich in den Reihen öfters ereignet, daß auf eine Umwandlung unter α-Emission zwei solche hintereinander folgen, bei denen ein β-Teilchen emittiert wird, sind in jeder von ihnen einige chemische Elemente durch mehrere Isotope vertreten. In der Uran-Radium-Reihe tritt z. B. das Polonium dreimal auf, als Po^{218} (RaA), als Po^{214} (RaC′) und als Po^{210} (RaF). Solange die Möglichkeiten zur Erzeugung radioaktiver Isotope auf künstliche Weise noch unbekannt waren, sind begreiflicherweise die natürlich aktiven Isotope ein besonders interessantes Objekt der Forschung und einige von ihnen auch von großer praktischer Bedeutung gewesen, wie z.B. das Radium. Die Sonderstellung, die dieses Radioelement lange Zeit hindurch eingenommen hat und in einem gewissen Grade auch heute noch besitzt, machte die Reihe, der es angehört, zur wichtigsten.

a) Die Uran-Radium-Reihe

Die Muttersubstanz der Uran-Radium-Reihe ist das mit 99,3% Häufigkeit vorhandene Hauptisotop des natürlichen Urangemisches, das die Massenzahl 238

besitzt, also U^{238} (U I).[1]) Seine Halbwertszeit von $4{,}51 \cdot 10^9$ a ist so groß, daß die Aktivität von Uranpräparaten, wie schon erwähnt, und diejenige der im Gleichgewicht mit dem Uran befindlichen Nachfolgeprodukte als absolut konstant betrachtet werden kann.

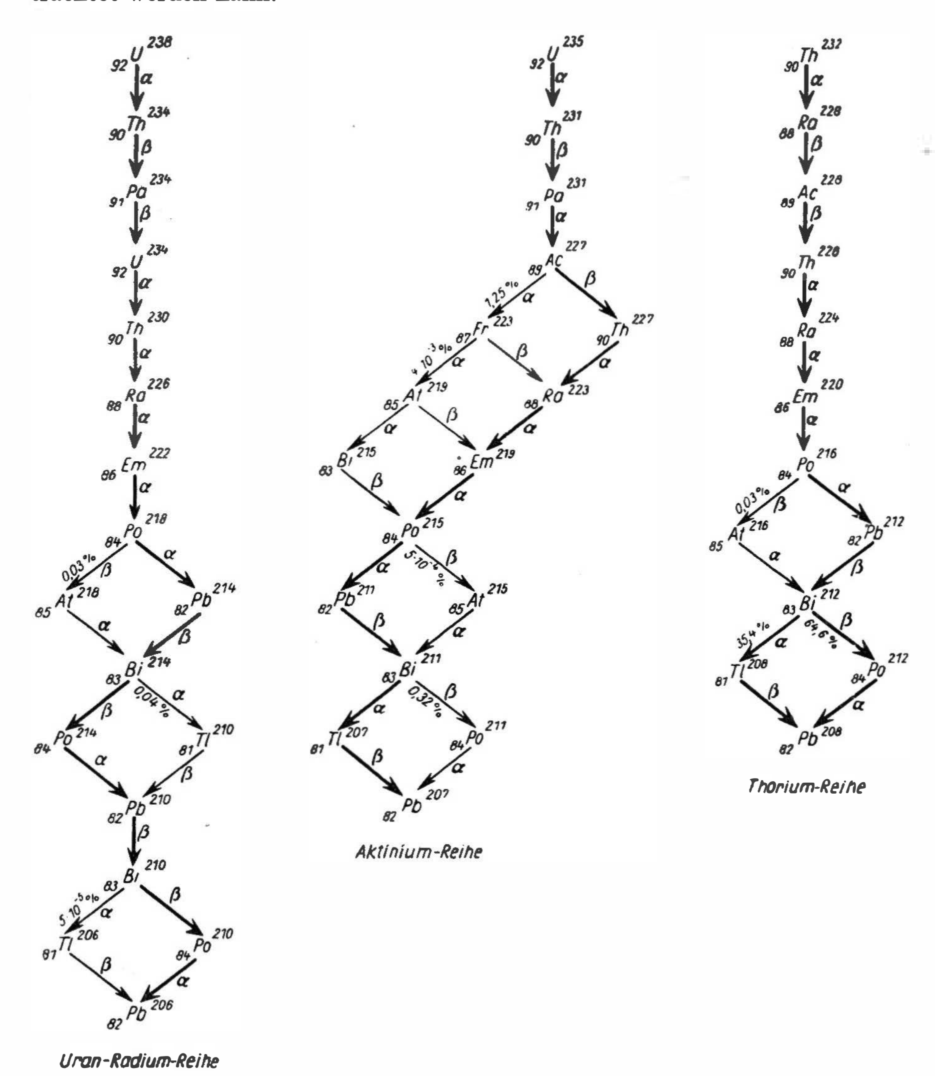


Abb. 28. Schematische Darstellung der Abfolge in den drei natürlichen Zerfallsreihen (Hauptlinie dickgezeichnet

[1]) Die in Klammern beigefügten Bezeichnungen der Radioelemente sind die historischen, die unsystematischer Natur sind und denen die Art des zugehörigen Nuklids nicht zu entnehmen ist; sie werden aber konventionellerweise häufig noch gebraucht (vgl. Anhang II, Tabelle 2).

Die Reihe der *Nachfolgeprodukte* zeigt schematisch die Abb. 28. Der Kern U^{238} zerfällt unter α-Zerfall in das Thorisotop Th^{234} (UX_1). Die α-Strahlung besteht aus zwei Gruppen, was bedeutet, daß der Nachfolgekern teils im Grund-, teils in einem Anregungszustand entsteht und daß ein Gammaquant emittiert werden muß, dessen Energie der Energiedifferenz von 0,048 MeV der beiden α-Gruppen entsprechen muß; dieser Schluß hat sich experimentell nicht nur in diesem Fall (vgl. Abb. 29), sondern immer da bestätigt, wo der Nachfolgekern in verschiedenen Zuständen gebildet wird, also auch bei sehr vielen β-Zerfällen. Dieser letztere Sachverhalt ergibt sich z.B. beim Zerfall des Th^{234}, das mit 24,1 d Halbwertszeit unter β-Strahlung in das Protaktiniumisotop Pa^{234} (UX_2) übergeht. Hierbei werden zwei sog. Teil-β-Spektren emittiert, deren Grenzenergien sich um 0,090 MeV unterscheiden; hier wurden sogar 3 Quanten von 0,043 MeV bzw. 0,047 MeV und 0,090 MeV beobachtet, was beweist, daß noch ein Zwischenniveau zwischen den Zuständen existieren muß, in denen der Nachfolgekern entstehen kann (vgl. Abb. 30).

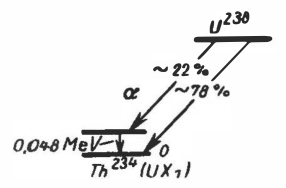


Abb. 29. Zerfallschema des U^{238}; Beispiel für den α-Zerfall eines natürlichen Radioelements mit begleitender Gammastrahlung

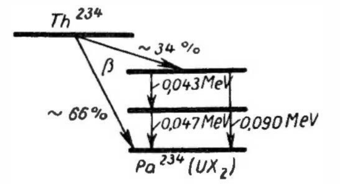


Abb. 30. Zerfallschema des Th^{234}; Beispiel für den β-Zerfall eines natürlichen Radioelements mit begleitender Gammastrahlung

Im folgenden soll bei der weiteren Besprechung der natürlich aktiven Elemente in den Umwandlungsreihen im einzelnen nur dann noch auf eine Gruppenstruktur der emittierten α-Teilchen bzw. auf vorliegende Teil-β-Spektren und auf die in beiden Fällen zugehörige Gammastrahlung hingewiesen werden, wenn es sich um interessante Fälle handelt. Es gibt im übrigen Zerfälle, bei denen sich sehr viele Anregungszustände des Nachfolgekerns und solche mit großen Energiedifferenzen ergeben und bei denen infolgedesssen viele und auch harte Quanten emittiert werden; bei diesen Nukliden ist die Gammastrahlung intensiv und durchdringend und damit ein markantes Kennzeichen.

Pa^{234} zerfällt in sehr komplizierter Weise. Es entsteht nämlich bei seiner Bildung aus Th^{234} in einem metastabil angeregten Zustand, aus dem es mit einer Halbwertszeit von 1,18 min weitaus am häufigsten direkt unter Emission von 4 Teil-β-Spektren und zugehörigen Gammaquanten in den Nachfolgekern U^{234} (U II) übergeht; ein sehr geringer Bruchteil der metastabil angeregten Pa^{234}-Kerne geht jedoch unter Gammastrahlung zum Grundzustand über, der dann mit 6,7 h Halbwertszeit unter Emission von 3 Teil-β-Spektren und zugehörigen Gammalinien zum U^{234} übergeht. Der Grundzustand von Pa^{234} hieß früher UZ und galt lange Zeit hindurch als selbständiges Radioelement, bis UX_2 und UZ von Hahn

als Isotope „höherer Ordnung" erkannt wurden und damit der erste Fall der inzwischen bei den künstlich aktiven Nukliden als weit verbreitete Erscheinung beobachteten Kernisomerie entdeckt worden war.

Das entstandene U^{234} ist wiederum so langlebig, daß man es als praktisch konstant ansehen kann (Halbwertszeit $2{,}52 \cdot 10^5$ a). Da es im Verhältnis zu U I praktisch gewichtslos im natürlichen Uran vorhanden ist (Häufigkeit im natürlichen Uran 0,0058%) und da es seit langen geologischen Zeiten im Gleichgewicht mit U I steht, hat das zur Folge, daß die Zahl der α-Teilchen, die man von 1 mg Uran, erhält, praktisch doppelt so hoch ist wie die, die man für 1 mg U I ($\sim$ 1 mg U) mit Hilfe der Zerfallskonstanten berechnet. U^{234} zerfällt unter α-Emission in Th^{230} (Io), das ein langlebiges Nuklid von $8{,}0 \cdot 10^4$ a Halbwertszeit ist. Ionium rein zu gewinnen ist unmöglich; aus der Gleichgewichtsbedingung ergibt sich eine Gleichgewichtsmenge von $2 \cdot 10^{-5}$ g Th^{230} pro g Uran. In Uranmineralien, die an sich „thoriumfrei" sind, ist jedoch immer als Verunreinigung eine Menge von Th^{232} von der gleichen Größenordnung 10^{-5} vorhanden, so daß man bei der Extraktion von Thorium aus Uranerzen ein Gemisch von Th^{230} und Th^{232} erhält. Allerdings ist wegen der riesigen Halbwertszeit des Th^{232} (s. unten), d. h. wegen seiner kleinen spezifischen Aktivität, der Beitrag dieses Isotops zur α-Strahlung des Gemisches sehr klein.

Th^{230} seinerseits zerfällt wiederum unter α-Strahlung in das bekannte Nuklid Ra^{226}. Die Halbwertszeit des Ra^{226} gehört zu den am häufigsten gemessenen Konstanten der Radioaktivität aus Gründen, die später erörtert werden sollen. Sie beträgt 1622 a. Das Radium wurde sehr viel und wird auch heute noch verwendet zu therapeutischen Zwecken, wegen der von einigen seiner kurzlebigen Nachfolgeprodukte, mit denen es schnell im Gleichgewicht ist, emittierten Gammastrahlung. Ra^{226} selbst emittiert nur eine schwache Gammalinie von 0,186 MeV (2 α-Gruppen, von denen die zum angeregten Zustand des Nachfolgekerns führende nur 5,7% Häufigkeit besitzt). Ra^{226} wandelt sich unter α-Zerfall in das Edelgas Em^{222} (Radon, Rn) um. Die Emanation ist in Wasser löslich und befolgt dabei das Henrysche Gesetz. Feste Radiumsalze geben zwar bei Zimmertemparatur nur wenig Emanation ab (besonders Sulfat), gleichwohl müssen alle Radiumpräparate wegen der Abgabe dieses radioaktiven Gases an die umgebende Luft absolut luftdicht eingeschlossen werden. Das ist nötig, um die radioaktive Verseuchung der Meßräume zu vermeiden; außerdem würde bei undichten Präparaten ein entsprechender Anteil der Gammastrahlung der Nachfolgeprodukte fehlen. Treibt man aus einer Lösung von Ra^{226} die Emanation mit Hilfe eines durchperlenden Luftstromes aus und überführt sie in eine vakuumdicht verschlossene Ionisationskammer, so liefert eine Messung des durch die α-Teilchen verursachten Ionisationsstromes die empfindlichste Nachweismethode für Radium (*Emanationsmethode*).

Die Halbwertszeit von Em^{222} beträgt 3,825 d; nach einem Monat ist Em^{222} also im Gleichgewicht mit dem Radium und mit ihr sämtliche kurzlebigen Nachfolgeprodukte bis Bi^{214} (RaC). Das Rn ist ein α-Strahler und wandelt sich bei seinem Zerfall in Po^{218} (RaA) um, dessen Halbwertszeit 3,05 min beträgt. RaA wandelt sich ebenfalls unter α-Strahlung in das Bleiisotop Pb^{214} (RaB) um. RaB ist ein

β-Strahler von 26,8 min Halbwertszeit; sein Spektrum ist komplex und daher von einer Reihe von Gammalinien begleitet. Diese Gammastrahlung stellt den weicheren und weniger intensiven Anteil der von den Nachfolgeprodukten des Ra^{226} ausgesandten durchdringenden Strahlung dar. Das Nachfolgeelement des RaB ist das Wismutisotop Bi^{214} (RaC), ebenfalls ein β-Strahler von $T_{1/2} = 19{,}7$ min. Die β-Strahlung des RaC ist ebenfalls komplex und von einer sehr großen Zahl durchdringender Linien begleitet. Dieses Radioelement liefert den Hauptanteil der Gammastrahlung des „Radiums". Das Nachfolgeprodukt des RaC ist der α-Strahler Po^{214} (RaC′) von nur $1{,}64 \cdot 10^{-4}$ sec Halbwertszeit, der sich bei seinem Zerfall in das langlebige Bleiisotop Pb^{210} (RaD) umwandelt.

Im Ablauf dieser Zerfallsreihe gibt es bis zum RaD an zwei Stellen *Verzweigungen*: 0,03% des Po^{218} gehen durch eine β-Umwandlung in At^{218} über, das seinerseits mit 2 sec Halbwertszeit sich durch α-Zerfall in Bi^{214} umwandelt; ferner gehen 0,04% des Bi^{214} durch α-Zerfall in den β-Strahler Tl^{210} (RaC″) über, der sich mit 1,32 min Halbwertszeit durch β-Zerfall in Pb^{210} (RaD) umwandelt.[1])

RaA, RaB und RaC lassen sich leicht durch Exposition in emanationshaltigen Gefäßen (mit und ohne elektrisches Feld) auf Metallfolien oder Drähten in völlig gewichtsloser und unsichtbarer Menge erhalten. Man kann diese Radioelemente leicht voneinander trennen durch radioaktiven Rückstoß, durch Elektrolyse und durch Destillation.[2])

RaD wandelt sich unter β-Emission in Bi^{210} (RaE) um. Die Halbwertszeit des RaD beträgt 19,4 a; die beim Zerfall emittierte β-Strahlung ist so weich, daß die exakte Bestimmung der Grenzenergien der 2 Teil-β-Spektren und der Energie der begleitenden Gammastrahlung erst in der letzten Zeit erfolgt ist. RaE ist — abgesehen von einer praktisch völlig bedeutungslosen Verzweigung, die durch einen α-Zerfall zum Tl^{206} führt — ein reiner β-Strahler ohne begleitende Gammastrahlung; seine Halbwertszeit beträgt 5,01 d.[3]) Das Nachfolgeprodukt des RaE ist Po^{210} (RaF), das seinerseits mit 138,4 d Halbwertszeit in das stabile Bleiisotop Pb^{203} (RaG) zerfällt. Wegen der gegen die Nachfolgeelemente kleinen Zerfallskonstanten des RaD ist es mit ihnen ziemlich schnell im laufenden Gleichgewicht. Ra(D + E + F)-Präparate werden viel als α- und β-Standards verwendet.

In der Uran-Radium-Reihe liegen einige direkte Bestimmungen des chemischen Atomgewichts vor, die in sehr befriedigender Weise mit den aus den Verschiebungssätzen sich ergebenden Massenzahlen übereinstimmen, nämlich für Uran 238,07; für Radium 226,05; für RaG 206,05.[4])

[1]) Nachtrag bei der Korrektur: Kürzlich wurde noch eine Verzweigung entdeckt, nämlich beim At^{218}, das zu 0,1 % durch einen β-Zerfall sich in ein Isotop des Radons — Em^{218} — umwandelt. Dieses Nuklid, dessen Halbwertszeit $1{,}9 \cdot 10^{-2}$ sec beträgt, geht durch α-Zerfall in RaC′ über. Diese neue Verzweigung ist in der Abb. 28 noch nicht berücksichtigt.

[2]) Einzelheiten findet man in den im Literaturverzeichnis (S. 75) aufgeführten Werken.

[3]) RaE kann man auch künstlich herstellen, z. B. durch einen (n, γ)-Prozeß am Bi im Reaktor.

[4]) Das Atomgewicht des gewöhnlichen Bleis ist bekanntlich 207,2. Den Wert 206,05 erhielt Hönigschmid für Blei, das aus afrikanischer Pechblende abgetrennt worden ist; gewöhnliches Blei ist weder in der Umgebung dieses Minerals noch in diesem selbst akzessorisch vorhanden.

b) Die Actiniumreihe

Diese Reihe müßte eigentlich Uran-Actinium-Reihe heißen; aber als Muttersubstanz hat sich erst spät das mit 0,7 % Häufigkeit im natürlichen Urangemisch vorhandene Uranisotop U^{235} (AcU) zuordnen lassen, so daß die Bezeichnung der Reihe längst vorlag, als noch ihre Genesis unklar war und als auch die Massenzahlen ihrer Nuklide zweifelhaft waren. In jedem Uranmineral sind also außer den Radioelementen der Uran-Radium-Reihe auch die der Actinium-Reihe vorhanden. Die Halbwertszeit des U^{235} beträgt $7{,}1 \cdot 10^8$ a. Aus dem Verhältnis der Zerfallskonstanten und Häufigkeiten der beiden Muttersubstanzen folgt, daß die Aktivität der Glieder der Actinium-Reihe 4,4 % derjenigen der Glieder der anderen Reihe im Gleichgewicht in ungestörten Mineralien beträgt.

U^{235} wandelt sich unter α-Zerfall in das Thorisotop Th^{231} (UY) um, einen β-Strahler von 25,6 h Halbwertszeit. Um UY zu erhalten, muß man zunächst Uran radiochemisch von allen seinen Nachfolgeprodukten befreien. Da sich die Tochtersubstanz des U^{238}, nämlich das Thorisotop UX_1, wegen seiner relativ großen Halbwertszeit sehr viel langsamer nachbildet als UY, so ergibt eine kurze Zeit nach der Reinigung des U vorgenommene Thorabtrennung praktisch nur UY. Beim β-Zerfall des UY entsteht das Hauptisotop des Protactiniums Pa^{231} von $3{,}43 \cdot 10^4$ a Halbwertszeit. Obwohl es in Uranmineralien in fast gleicher Menge wie Radium vorhanden ist (bei natürlich sehr viel kleinerer Aktivität, wie schon erwähnt), ist die Extraktion sehr schwierig, weil jenes Element ebenso wie das homologe Tantal sehr schwer in Lösung zu bringen und auch zu halten ist; es wird sehr leicht von jedem beliebigen Niederschlag adsorbiert und mitgerissen. Deshalb hat es sehr lange Zeit gedauert, bis es A. v. GROSSE gelang, eine Atomgewichtsbestimmung (= 231) durchzuführen; durch diese wurde dann die Zuordnung der Massenzahlen gesichert.

Protactinium zerfällt unter α-Strahlung in das Hauptisotop des Actiniums, nämlich Ac^{227}.[1]) Ac ist ein höheres Homologes des Lanthan; es ist dreiwertig, ähnelt besonders den Ceriterden und verhält sich normalerweise wie eine sehr basische Seltene Erde, die am Anfang der Reihe steht, vor dem La. Es findet sich zusammen mit den Seltenen Erden und dem Thorium in gewissen Rückständen der Uranaufarbeitung. Die Trennung des Ac von dem La ist noch schwieriger als die Trennung des Ra vom Ba und bleibt mit den üblichen klassischen Methoden nur unvollständig; erst neuerdings ist mit Hilfe von Ionenaustauschern eine quantitative Trennung möglich geworden.[2])

Ac^{227} zerfällt unter β-Strahlung — hier sei zunächst die Hauptlinie in der Reihe betrachtet — mit 21,6 a Halbwertszeit in das Thorisotop Th^{227} (RdAc). Die β-Teilchen des Ac haben so geringe Energie, daß die Strahlung lange Zeit hindurch nicht aufgefunden werden konnte; erst in jüngster Zeit gelang eine exakte Bestim-

---

[1]) Ac^{227} entsteht auch aus Ra^{227} durch β-Zerfall; dieses Radiumisotop kann man künstlich aus Ra^{226} durch Neutronenanlagerung im Reaktor herstellen.

[2]) Einzelheiten über die Reindarstellung des Ac vgl. C. F. WEISS, Radioaktive Standardpräparate, Berlin 1957.

mung der Grenzenergie des Spektrums (45 keV). Das Radioactinium RdAc zerfällt unter α-Strahlung mit 18,2 d Halbwertszeit in das Radiumisotop Ra^{223} (AcX). AcX ist wiederum ein α-Strahler von 11,7 d Halbwertszeit. Sein Nachfolgeprodukt ist Em^{219} (An), wie jede Emanation ein Edelgas, und zwar von nur 3,92 sec Halbwertszeit. Die Existenz eines gasförmigen Tochterelementes zwingt wie beim Radium dazu, Actiniumpräparate gasdicht einzuschließen. Das Nuklid Actinon geht durch α-Zerfall in Po^{215} (AcA) über, das mit $1{,}83 \cdot 10^{-3}$ sec Halbwertszeit unter weiterer Emission eines α-Teilchens in Pb^{211} (AcB) zerfällt. Die α-Strahlungen des RdAc, des AcX und des An besitzen eine komplizierte Feinstruktur, d.h. sehr viele Gruppen; dementsprechend sind die drei Zerfälle von vielen Gammalinien begleitet. AcB ist ein β-Strahler; sein Spektrum ist komplex. Es zerfällt mit 36,1 min Halbwertszeit und geht dabei in Bi^{211} (AcC) über. AcC ist ein α-Strahler von 2,16 min Halbwertszeit. Das Nachfolgeprodukt des AcC ist Tl^{207} (AcC″), ein β-Strahler von 4,79 min Halbwertszeit. AcC″ geht in das stabile Endprodukt Pb^{207} (AcD) über.

Längs der Hauptlinie der Zerfallsreihe ereignen sich viele *Verzweigungen*. 1,25% der Zerfälle des Actiniums führen unter α-Zerfall zum Fr^{223} (AcK), das unter β-Emission sich in AcX umwandelt; ein sehr kleiner Teil des AcK wandelt sich unter α-Emission in At^{219} um, das seinerseits sich wieder verzweigt, nämlich unter α-Zerfall in Bi^{215} und unter β-Zerfall in Em^{219}. Bi^{215} geht unter β-Zerfall in AcA über. Auch AcA zerfällt noch mit sehr geringer Häufigkeit unter β-Emission in At^{215}, das wiederum unter α-Zerfall in AcC übergeht. Auch bei diesem gibt es eine Verzweigung mit 0,32% Häufigkeit unter β-Zerfall zum Po^{211} (AcC′), das dann unter α-Zerfall sich in AcD umwandelt.

Die *B*- und *C*-Produkte können durch die gleichen Methoden wie bei den entsprechenden Radioelementen in der Uran-Radium-Reihe isoliert werden.

Sechs Monate nach seinem gasdichten Einschluß ist ein Actiniumpräparat im Gleichgewicht mit seinen Nachfolgeprodukten. Es emittiert dann eine Gammastrahlung, deren Intensität langsam mit der Halbwertszeit des Ac abnimmt. Das gesamte Spektrum der Gammalinien ist zwar sehr linienreich; aber die meisten Linien sind so weich bzw. so schwach, daß man es bei Gammastrahlmessungen nur mit denen des AcB zu tun hat.

c) Die Thoriumreihe

Die Muttersubstanz der Thoriumreihe ist das Reinisotop Th^{232}, das mit einer Halbwertszeit von $1{,}42 \cdot 10^{10}$ a zerfällt. Thorium findet sich in vielen Mineralien, aber das Hauptvorkommen, das technisch zur Gewinnung verwertet wird, sind die sog. Monazitsande. Diese sind sekundärer Natur, bestehen aus einem isomorphen Gemisch der Silikate und Phosphate des Th und der Seltenen Erden und finden sich vor den Mündungen der großen Flüsse (z. B. in Indien und Brasilien). Th zerfällt unter α-Strahlung und wandelt sich dabei in das Radiumisotop Ra^{228} (MsTh 1) um. Das Mesothor 1 ist ein β-Strahler von $T_{1/2} = 6{,}7$ a; sein Nachfolgeprodukt ist Ac^{228} (MsTh 2). Auch MsTh 2 ist ein β-Strahler, mit einer komplexen

Struktur von Teil-β-Spektren; die den Zerfall begleitende Gammastrahlung ist intensiv und durchdringend. Da die Halbwertszeit dieses Nuklids nur 6,13 h beträgt, ist es sehr schnell im säkularen Gleichgewicht mit MsTh 1. Mesothor — das sich leicht vom Thorium abtrennen läßt — ist langlebiger als seine sämtlichen Nachfolger und daher nach einiger Zeit im laufenden Gleichgewicht mit diesen. Da sich unter den Nachfolgeprodukten einige Gammastrahler befinden (MsTh 2, ThB und ThC) und da das Thorium technisch zur Fabrikation von Glühstrümpfen benötigt wird, werden seit langer Zeit Mesothorpräparate als Beiprodukt der Glühstrumpfindustrie hergestellt und therapeutisch verwertet.[1])

Durch den Zerfall des MsTh 2 entsteht wieder ein Thorisotop, nämlich Th^{228} (RdTh). Das Radiothor zerfällt mit 1,91 a Halbwertszeit unter α-Strahlung und wandelt sich in das Radiumisotop Ra^{224} (ThX) um. Durch einfache Trennungen kann man Thorium von seinen gesamten Nachfolgeprodukten befreien, mit Ausnahme natürlich des Radiothors. Um Th frei von RdTh zu erhalten, muß man rund 20 Jahre lang hindurch — zweimal pro Jahr — das MsTh abtrennen; dann ist das RdTh ausgestorben.

ThX ist auch ein α-Strahler, von 3,64 d Halbwertszeit; es zerfällt in Em^{220} (Tn), das wie Radon und Actinon ein Edelgas ist. Das gasförmige Nachfolgeprodukt zwingt dazu, Mesothor oder Radiothorpräparate luftdicht einzuschließen. Das Thoron zerfällt unter α-Strahlung in Po^{216} (ThA), das seinerseits mit 0,16 sec Halbwertszeit unter α-Zerfall in Pb^{212} (ThB) übergeht. 0,03% des ThA gehen durch β-Zerfall in At^{216} über. ThB und At^{216} führen durch β- bzw. α-Zerfall zum Bi^{212} (ThC). Die Halbwertszeit des ThB beträgt 10,6 h; seine β-Strahlung ist komplexer Natur und von vielen Gammalinien begleitet.

ThC zerfällt teils unter β-Strahlung (64,6%), teils unter α-Strahlung (35,4%). Der β-Zerfall ist von besonders durchdringender Gammastrahlung begleitet (härteste Linie $E = 2{,}615$ MeV). Die Halbwertszeit des ThC beträgt 60,5 min. Durch den β-Zerfall wandelt es sich in Po^{212} (ThC′), durch den α-Zerfall entsprechend in Tl^{208} (ThC″) um. Die Halbwertszeiten der beiden Verzweigungsprodukte sind $3 \cdot 10^{-7}$ sec bzw. 3,10 min. ThC′ zerfällt unter α-Strahlung in das stabile Endprodukt Pb^{208} (ThD); gemäß der Geiger-Nuttall-Regel muß der außerordentlich großen Zerfallskonstanten des ThC′ — der größten von allen natürlich aktiven Nukliden — eine maximale Energie und Reichweite der emittierten α-Teilchen entsprechen. Die Energie der Hauptgruppe beträgt 8,776 MeV, während z. B. im Fall des ThC diese 6,047 MeV beträgt. ThC″ zerfällt unter β-Strahlung in ThD.

Auch in der Thorium-Reihe werden für die Herstellung der B- und C-Körper die gleichen Methoden verwendet, durch die man die gleichnamigen, zu ihnen isotopen Körper in den beiden anderen Reihen isoliert.

[1]) Mesothorpräparate haben den Nachteil, daß sich sowohl die Intensität wie auch die Qualität der Gammastrahlung mit der Zeit ändern; bei frischem Mesothor nimmt die Intensität zunächst durch das Zuwachsen des Radiothors und seiner Nachfolgeprodukte bis zu einem Maximum zu, um dann mit der Halbwertszeit des Mesothors (laufendes Gleichgewicht!) abzufallen. Fernerhin befindet sich in technischem Mesothor auch noch sein Isotop Ra^{226}, weil die Monazitsande auch Uran und damit Radium enthalten.

Ein gasdicht eingeschlossenes Radiothorpräparat ist nach ungefähr einem Monat im Gleichgewicht mit seinen Nachfolgeprodukten; es emittiert dann eine mit der Halbwertszeit des RdTh abnehmende durchdringende Gammastrahlung.
In der Thorium-Reihe liegen zwei direkte chemische Atomgewichtsbestimmungen vor, deren Ergebnisse mit den zugeordneten Massenzahlen übereinstimmen, nämlich für Thorium: 232,05 und für ThD: 207,9.[1])

§ 17. Die Maßeinheit der Aktivität

Obwohl der Begriff der Aktivität bereits im § 13 definiert worden ist, kann erst an dieser Stelle — nachdem die Definition des radioaktiven Gleichgewichts erörtert und der genetische Zusammenhang in der Uran-Radium-Reihe dargestellt worden ist — von der Maßeinheit der Aktivität, dem Curie, gesprochen werden. Diese Einheit hat sich übrigens in ihrer Bedeutung historisch gewandelt. Das erste Radioelement, das mengenmäßig zu erfassen man sich genötigt sah, war das Radium, wegen der bereits erwähnten, sehr frühzeitig begonnenen therapeutischen Verwendung dieses Nuklids. Man gab die Menge des Radium-Elementes, das in einem Präparat enthalten war, ganz unabhängig von seiner chemischen Verbindung in der Masseneinheit g an.
Die Mengenbestimmung des Radiums in den Präparaten selbst wurde nicht durch Wägung, sondern durch eine Relativmessung ihrer Gammastrahlung, d.h. der der Nachfolgeprodukte des Ra, gegen die eines *Standards* durchgeführt. Diese Standards waren ihrerseits durch Strahlungsvergleich an *Urnormale* angeschlossen worden, bei denen die gar nicht einfache Wägung einmal vorgenommen worden war (HÖNIGSCHMID bzw. M. CURIE, 1911; HÖNIGSCHMID, 1934).
Später hat man sich dann für die Zahl Z der Zerfälle, die in 1 g Ra pro sec stattfinden, interessiert und die Größe experimentell sehr oft bestimmt.[2]) Im Jahr 1930 lag eine große Reihe von Meßergebnissen vor, die einen Streubereich von 3,66 bis $3{,}72 \cdot 10^{10}$ Zerfälle pro sec mit einem Mittelwert von etwa $3{,}70 \cdot 10^{10}$ umfaßten; diese Ergebnisse waren die Veranlassung für die internationale Radium-Standard-Kommission, im Jahr 1930 den Wert von Z auf $3{,}70 \cdot 10^{10}$ festzusetzen. Da nun die Beziehung zwischen der Menge eines Radiumpräparats in g Radium-Element

[1]) Das ThD wurde von FAJANS und HÖNIGSCHMID aus dem Thormineral Thorit aus Ceylon abgetrennt, das fast uranfrei und damit fast frei von RaG ist.
[2]) Das geschah im wesentlichen nach fünf Methoden: direkte Ermittlung von Z durch Zählung der emittierten α-Teilchen; indirekte Bestimmung von Z durch Messung der Heliumproduktion; indirekte Berechnung der Zerfallskonstante des Ra aus dem experimentell in ungestörten Erzen ermittelten Mengenverhältnis $\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{U}}$ $(= 3{,}38 \cdot 10^{-7})$ und der experimentell bestimmten Zerfallskonstanten des U I $(= 1{,}541 \cdot 10^{-10}/\mathrm{a})$ mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung; Abtrennung von Ionium und Radium aus alten Erzen und Bestimmung der Menge des Radiums sowie der seiner Nachwuchsrate aus dem Ionium; kalorimetrische Messung der abgegebenen Energie. Einzelheiten siehe W. SEBAOUN, Thèses, Paris 1956; C. F. WEISS a. a. O.

und seiner Aktivität rein empirisch gewonnen worden war, so war sie damit auch für die Nuklide innerhalb der Reihe gegeben, die mit 1 g Ra im Gleichgewicht stehen. Trennt man z.B. die Emanationsmenge ab, die mit 1 g Ra im Gleichgewicht ist, so hat diese Menge die gleiche Aktivität; die Menge selbst in g kann man aber aus der Gleichgewichtsbedingung ausrechnen (s. unten). Deshalb beschloß die Kommission im gleichen Jahr, *die Menge einer Substanz aus der Uran-Radium-Reihe, die mit* 1 g Ra *im Gleichgewicht steht* und *die also die gleiche Aktivität wie* 1 g *Radium* besitzt (nämlich Z Zerfälle pro sec), als 1 *Curie* (1 C) zu bezeichnen.

Aus der Bedingung für das säkulare Gleichgewicht $\frac{N_1}{T_1} = \frac{N_2}{T_2} = \ldots$ folgt für die einem Curie entsprechende Masse M_K irgendeiner Substanz der genannten Zerfallsreihe

$$M_K = \frac{T_K A_K}{T_R A_R}\,[\mathrm{g}]$$

(T_K, T_R Halbwertszeiten, A_K und A_R Atomgewichte, R bezieht sich auf Ra). Gemäß dieser Gleichung wurde die Tabelle 7 berechnet.

Tabelle 7. Gleichgewichtsmengen zu 1 g Ra *in Gramm*

U I ... $3{,}03 \cdot 10^{6}$	U II .. $1{,}76 \cdot 10^{2}$	RaA . $3{,}52 \cdot 10^{-9}$	RaC″ . $1{,}47 \cdot 10^{-9}$
UX_1 ... $4{,}36 \cdot 10^{-5}$	Io ... 54,0	RaB . $3{,}03 \cdot 10^{-8}$	RaD .. $1{,}31 \cdot 10^{-2}$
UX_2 ... $1{,}41 \cdot 10^{-9}$	Ra ... 1,000	RaC . $2{,}23 \cdot 10^{-8}$	RaE . $7{,}96 \cdot 10^{-6}$
UZ ... $4{,}98 \cdot 10^{-7}$	Rn .. $6{,}46 \cdot 10^{-6}$	RaC′ . $2{,}84 \cdot 10^{-15}$	RaF .. $2{,}24 \cdot 10^{-4}$

Obwohl die Mengeneinheit Curie ausdrücklich durch ihre Definition sich nur auf die Glieder der Uran-Radium-Reihe bezog, hatte sich allmählich die Gepflogenheit eingeführt, die Mengen *natürlich aktiver Nuklide der anderen Reihen* und schließlich auch die *künstlich aktiver Radioelemente* in Curie auszudrücken. Man verstand also unter 1 C P^{32} eine solche Menge dieses Stoffes, daß die in ihm sich abspielenden Zerfallsakte den Zahlenwert Z haben. Die für alle Nuklide, außer denen der U-Ra-Reihe, vorgeschlagene neue Einheit „Rutherford" (= 10^6 Zerfälle pro sec) hat sich merkwürdigerweise nicht eingeführt. Die praktische Verwendung des Curie als Aktivitätsmaß für künstlich aktive Radioelemente war natürlich nur dadurch möglich, daß im Laufe der letzten zehn Jahre viele Methoden entwickelt worden sind, die es gestatten, die Aktivität von Präparaten direkt und absolut zu messen.

Die dringend notwendig gewordene Klärung der Definition der Aktivitätseinheit wurde nun dadurch beschleunigt, daß in neuester Zeit sich bei Neubestimmungen von Z herausstellte, daß die Zerfallsrate von 1 g Ra pro sec durchaus nicht so gut definiert ist, wie man früher glaubte, sondern sicherlich niedriger ist als $3{,}70 \cdot 10^{10}$.[1]) In dieser Situation entschloß sich die neugebildete Nachfolge-Organi-

[1]) Kohman, Ames und Settlet erhielten $3{,}61 \cdot 10^{10}$ a und Sebaoun $3{,}62 \cdot 10^{10}$ a.

sation der früheren Radium-Standard-Kommission, nämlich die „Joint Commission of Standards, Units and Constants“, im Jahre 1950 zu einem entscheidenden Schritt. Man beschloß, die Einheit Curie zwar beizubehalten, aber ihre Relationierung auf das Gramm Radium aufzuheben. Die neue Definition des Curie lautet: *Das Curie ist eine radioaktive Einheit, definiert als diejenige Menge irgendeiner radioaktiven Substanz, in der die Zahl der Zerfälle pro* sec $3{,}700 \cdot 10^{10}$ *beträgt.* Die neue Einheit (1 c) ist also willkürlich festgesetzt worden, und falls sich die Ergebnisse der genannten Neubestimmungen von Z bestätigen sollten, dann ist

$$1\,\mathrm{c}\,\mathrm{Ra}^{226} > 1\,\mathrm{C}\,\mathrm{Ra}^{226} = 1\,\mathrm{g}\,\mathrm{Ra}^{226}.$$

§ 18. Isolierte natürlich aktive Nuklide

Außer den in den drei Zerfallsreihen genetisch auseinander entstehenden natürlich aktiven Radioelementen findet sich in der Natur noch eine Reihe *isolierter aktiver Nuklide* vor. Ein Teil dieser radioaktiven Isotope existiert einfach vermöge seiner sehr großen Lebensdauer; sie sind also aktive Urelemente, z.B. Uran und Thor, und unterscheiden sich von diesen nur dadurch, daß ihre Nachfolgekerne stabil sind. Der andere Teil entsteht *durch Kernumwandlungen,* die sich in der Natur abspielen; sie befinden sich in einem Gleichgewicht zwischen Bildung und Zerfall und sind begreiflicherweise nur in geringer Menge vorhanden. Einige dieser Nuklide sind erst in allerjüngster Zeit aufgefunden worden.

a) Langlebige isolierte natürlich aktive Nuklide

Bereits im Jahre 1906 wurde von Campbell und Wood beobachtet, daß von Kalium und Rubidium β-Strahlen emittiert werden, die nicht von Verunreinigungen durch andere radioaktive Elemente vorgetäuscht werden und deren Intensität den Mengen der beiden Elemente proportional ist; es liegt also ein *echter radioaktiver Effekt* vor. Es hat ziemlich langer Zeit bedurft, bis die Zerfallsvorgänge geklärt waren. Im Fall des Kaliums ist das mit 0,012% Häufigkeit im natürlichen Isotopengemisch vorliegende Nuklid K^{40} instabil; es zerfällt dual (Abb. 31): 88% zerfallen unter β-Strahlung in Ca^{40}, 12% gehen durch K-Einfang mit begleitender Gammastrahlung in Ar^{40} über. Trotz der sehr niedrigen spezifischen Aktivität[1]) des Kaliums — bewirkt durch die hohe Halbwertszeit von $1{,}47 \cdot 10^9$a und die sehr kleine Häufigkeit des aktiven Isotops — spielt die radiometrische Kaliumanalyse als Schnellbestimmungsverfahren eine große Rolle in der Industrie. Im Fall des Rubidiums ist das

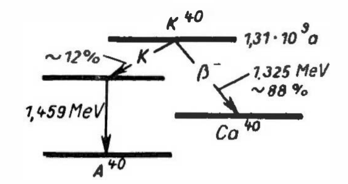


Abb. 31. Zerfallschema des K^{40}

[1]) Unter spezifischer Aktivität einer Substanz versteht man die Aktivität von 1 g der betreffenden Substanz.

mit 27,85% Häufigkeit im natürlichen Isotopengemisch vorkommende Rb^{87} instabil; es zerfällt mit einer Halbwertszeit von $5 \cdot 10^{10}$ a unter β-Umwandlung in Sr^{87}.

Im Jahre 1932 erregte es ziemliches Aufsehen, als es HEVESY und PAHL gelang, eine α-Aktivität beim Samarium zu entdecken, da bis dahin α-Zerfall nur bei den schwersten Kernen des Periodischen Systems beobachtet worden war. Es handelt sich um das mit 14,62% Häufigkeit vorhandene Sm^{147}, das eine Halbwertszeit von $1{,}28 \cdot 10^{11}$ a besitzt. Die beim Zerfall emittierten α-Teilchen haben eine Reichweite von 1,13 cm. Übrigens hat man noch weitere α-Strahler aufgefunden, wie z.B. Nd^{144} und W^{180} ($5 \cdot 10^{15}$ bzw. $2{,}2 \cdot 10^{17}$ a Halbwertszeit). Erwähnt seien noch die β-Strahler La^{138}, Lu^{176} und Re^{187} mit $1{,}1 \cdot 10^{11}$, $2{,}2 \cdot 10^{10}$ und $4 \cdot 10^{12}$ a Halbwertszeit. Es gibt noch einige weitere Nuklide, deren Instabilität wahrscheinlich ist.

b) In der Natur vorkommende, ständig nacherzeugte isolierte Nuklide

Die Ursache für das Vorhandensein einiger — gemessen am Alter der Erde extrem kurzlebiger — aktiver Nuklide, wie H^3, Be^7, C^{14}, Na^{22}, P^{32}, P^{33}, S^{35} und Cl^{39}, ist, daß diese Kerne ständig durch *Umwandlungsprozesse* nachgeliefert werden, die sich *in der Atmosphäre* abspielen *und von der kosmischen Strahlung* bewirkt werden.

Das interessanteste dieser aktiven Nuklide — sowie das häufigste — ist das *Kohlenstoffisotop* C^{14}; ferner ist seine Genese am einfachsten zu erklären. Die primären Teilchen der kosmischen Strahlung, die hauptsächlich aus Protonen, aber auch aus schwereren Kernen bestehen, bewirken bei ihrem Eindringen in die Atmosphäre eine Reihe von sekundären und weiteren Kernprozessen, als deren Schlußergebnis ein Fluß von Neutronen übrigbleibt. Nach erfolgter Abbremsung durch elastische Zusammenstöße mit Atomkernen werden die langsamen Neutronen im wesentlichen von Stickstoffkernen N^{14} eingefangen, wodurch C^{14} entsteht, d.h., die Reaktion $N^{14} + n = C^{14} + H^1$ findet statt. Die so entstandenen Kohlenstoffatome oxydieren sich zu Kohlensäure, die durch Diffusion und Luftströmungen zur Erdoberfläche gelangt. Da die Lebensdauer ziemlich groß ist — die Halbwertszeit beträgt 5568 a — verteilt sich die aktive Kohlensäure $C^{14}O_2$ gleichmäßig und gelangt durch Assimilierung in alle Pflanzen und damit in alle biologischen Organismen, in den Humus des Bodens und auch in das Meerwasser. Aus der Bildungsrate von 2,6 Molekülen pro cm^2 Erdoberfläche und sec — die aus dem bekannten Fluß der kosmisch erzeugten Neutronen resultiert — und aus der Halbwertszeit errechnet man einen Gleichgewichtswert von 80 t $C^{14}O_2$ für die gesamte Erde. Überall da, wo kohlenstoffhaltige Substanzen im Gasaustausch mit der Atmosphäre stehen, findet sich eine konstante Konzentration von einem C^{14}-Atom auf 10^{12} stabile C^{12}-Atome; der Kohlenstoff ist gleichsam automatisch markiert. Hört der Austausch auf, also z.B. bei fossilen Hölzern, so nimmt infolge des Zerfalls der Gehalt an C^{14} ab. Darauf beruht die von LIBBY entwickelte Methode der Altersbestimmung archäologischer Funde. Die Messungen erfordern

eine sehr sorgfältige Technik, da die natürliche Aktivität des Kohlenstoffs naturgemäß sehr klein ist, nämlich 15 Zerfälle pro g und min, und weil die emittierte β-Strahlung sehr weich ist (Maximalenergie des Spektrums 0,155 MeV).

Im Fall des H^3 ist die Frage der Genese nicht so einfach zu beantworten. Man weiß durch sorgfältige Messungen, daß 0,14 Tritiumatome pro cm^2 Erdoberfläche und sec gebildet werden. Während man zunächst der Reaktion $N^{14}(n, T)C^{12}$ die Produktion des Tritiums zuschrieb, wurde kürzlich nachgewiesen, daß der Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses nicht ausreicht, um die angegebene Gesamtrate zu liefern; mehr als die Hälfte des Tritiums wird durch die primäre Komponente der kosmischen Strahlung gebildet (Currie, Libby und Wolfgang).

Be^7 entsteht in noch geringerem Maße als H^3, etwa von der Größenordnung 0,01 pro cm^2 Erdoberfläche und sec. Es entsteht möglicherweise durch die Reaktion $N^{14}(n, 2\alpha)Be^7$; es gibt aber andere, nämlich protoneninduzierte Reaktionen, die alle ungefähr gleich wahrscheinlich sind bei hohen Protonenenergien. Na^{22}, P^{32}, P^{33}, S^{35} und Cl^{39} konnten kürzlich im Regenwasser nachgewiesen werden. Diese aktiven Nuklide entstehen vermutlich aus Ar^{40} durch Spallation-Prozesse.

Eine weitere Quelle für das Vorhandensein aktiver Nuklide in der Natur ist die spontane Spaltung des U^{238}. Durch diesen Prozeß entstehen in allen Uranmineralien die Produkte der Spontanspaltung. Die bei der Spaltung frei werdenden Neutronen werden im Mineral — das man als unterkritischen Reaktor auffassen kann — gebremst und multipliziert; dabei entstehen zusätzliche, neutroneninduzierte Spaltungen. Ferner wird ein Teil der Neutronen im U^{238} resonanzabsorbiert, wodurch Np^{239} und Pu^{239} entstehen. Die in den Uranmineralien enthaltenen Plutoniummengen und die Häufigkeiten der Spaltprodukte sind gut untersucht und lassen sich in ihren Zahlenwerten rechnerisch aus der erwähnten Modellvorstellung herleiten (Burkhardt).

§ 19. Einige wichtige Eigenschaften des Radiums

Ra^{226} wird seit langer Zeit in technologischem Maßstab aus den Uranerzen abgetrennt. Es ist ein höheres Homologes des Ba und läßt sich von diesem trennen, wenn auch nicht leicht. Die Abtrennung verlief jahrzehntelang nach der von dem Ehepaar Curie entwickelten, klassisch gewordenen Methode der *fraktionierten Kristallisation* der Chloride und Bromide, die darauf beruht, daß bei teilweiser Fällung der Ra-Ba-Salze — etwa durch langsames Verdunsten — das Radium in den Mischkristallen angereichert wird. Seit einigen Jahren beginnen die *Ionen-Austauschmethoden* die Kristallisation zu verdrängen. Das Salz, das man aus den Radiumfabriken bezieht, enthält üblicherweise 60 bis 90% Ra; nur in sehr seltenen Fällen ist Ra ganz rein hergestellt worden, nämlich bei Atomgewichtsbestimmungen und für die Urnormale.

Wenn Radium aus Mineralien abgetrennt wird, die außer Uran auch noch Thor enthalten, dann ist es nicht radioaktiv rein, sondern enthält auch noch sein

Isotop Ra^{228} (MsTh 1). Es gibt eine ganze Reihe von Methoden, um die Freiheit von Mesothor zu prüfen.[1])
Die Zahl der Zerfälle pro g und sec ist noch nicht endgültig gesichert (s. o.); zur Zeit empfiehlt es sich, den Wert $3{,}65 \cdot 10^{10}$ Zerfälle pro g und sec zu verwenden. Diesem Wert entspricht eine Halbwertszeit von etwa 1600 a und eine Zerfallskonstante $\lambda = 4{,}32 \cdot 10^{-4}$a.
Das sehr linienreiche Gesamtspektrum der Gammalinien, das von dem Gemisch Ra bis RaC im Gleichgewicht emittiert wird, besteht aus einer *Eigenlinie* des Ra selbst — die allerdings so weich und wenig intensiv ist, daß sie zum Gesamtionisationsstrom in den üblichen Bleikammern nichts beiträgt — und sehr *vielen Linien des* RaB *und* RaC. Die des letzteren Nuklids sind erheblich durchdringender als die des RaB, so daß bei Filterung der Strahlung durch Blei von mehr als 2 cm Dicke im wesentlichen nur die Gammastrahlung des RaC wirksam ist. Das Spektrum ist hinsichtlich Energie und Intensität seiner Linien zwar sehr oft untersucht worden, jedoch besteht bei den Nebenlinien noch keine gute Übereinstimmung der experimentellen Werte. DZHELEPOV und Mitarbeiter verzeichneten kürzlich in einer Zusammenstellung 65 ausgemessene Linien (strittige mit eingeschlossen); viele von diesen haben nur sehr geringe Intensitäten. Es ist für viele Zwecke möglich, mit einem Modell des Radiumspektrums auszukommen, das nur die Hauptlinien enthält.

Tabelle 8.
Hauptlinien und zugehörige Intensitäten des Gammaspektrums von Radium im Gleichgewicht mit seinen Nachfolgeprodukten

$h\nu$ [MeV]	n_{absolut}			
	(nach WHYTE)	(nach GUSSEW)	(nach BACKENSTOSS und WOHLLEBEN)	(nach DZHELEPOV und Mitarb.)
0,188	0,012	0,012		
0,241	0,106	0,115		0,105
0,294	0,240	0,258		(0,241)
0,350	0,435	0,450		
0,607	0,680	0,658		
0,766	0,067	0,065		
0,933	0,068	0,067		
1,120	0,202	0,206		
1,238	0,060	0,063		
1,379	0,059	0,064		
1,761	0,223	0,258		(0,230)
2,198	0,060	0,074	0,052	0,052
2,452	0,022	0,030	0,025	(0,018)

[1]) Diese Methoden beruhen entweder auf Absorptionsmessungen oder auf der Verwendung des Kernphotoeffekts bzw. auf der Analyse der Energieverteilung der Sekundärelektronen bzw. auf der Entfernung der Nachfolgeprodukte. Einzelheiten bei C. F. WEISS a. a. O.

Die Tabelle 8 der Linien nach WHYTE stellt insofern ein gutes Modell dieser Art dar, als die an einem kanalisierten Parallelstrahl gemessene Schwächung der Gammastrahlen durch Blei von 0 bis 26 cm Dicke mit der übereinstimmt, die man aus Intensität und Energie der Linien gemäß den Werten der Tabelle mit Hilfe der Absorptionskoeffizienten berechnet. Auch führt eine Berechnung der Dosiskonstanten, die von diesen Werten ausgeht, zu dem heute akzeptierten Wert von $0{,}825 \frac{\mathrm{r \cdot m^2}}{\mathrm{g \cdot h}}$[1]). In der Tabelle sind außer den Werten von WHYTE für die Zahlen *n* der Quanten pro zerfallendes Radiumatom noch die Werte nach GUSSEW sowie einige Werte nach Messungen von BACKENSTOSS und WOHLLEBEN bzw. DZHELEPOV und Mitarbeitern zum Vergleich angeführt; die eingeklammerten Werte sind die Summen der Häufigkeiten benachbarter Linien.

Zur Bestimmung sehr kleiner Mengen von Ra in unendlich dünner Schicht verwendet man das sog. *Stromäquivalent*: 10^{-6} mg Ra bewirken einseitig (d. h. im Halbraum 2π) einen Sättigungsstrom in einer Ionisationskammer von $3{,}98 \cdot 10^{-13}$ A.

LITERATUR

BACKENSTOSS, G., und K. WOHLLEBEN, Z. Naturforsch. **10**a, 384 (1955)
Бреслер, Радиоактивные элементы; deutsch: BRESLER, S. J., Die radioaktiven Elemente, Berlin 1957
BRODA, E., und T. SCHÖNFELD, Die technischen Anwendungen der Radioaktivität, Berlin 1959
BURKHARDT, W., Ann. d. Phys. **20**, 184 (1957)
CURRIE, L. A., W. F. LIBBY und R. L. WOLFGANG, Phys. Rev. **101**, 1557 (1956)
DZHELEPOV, B. S., und Mitarb., Nucl. Phys. **8**, 250 (1958)
FINKELNBURG, W., Einführung in die Atomphysik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958
FRIEDLÄNDER, G., und J. W. KENNEDY, Nuclear and Radiochemistry, New York 1953
Гусев, Н. Г., Справочник по радиоактивным излучениям и защите; deutsch: GUSSEW, N. G., Leitfaden für Radioaktivität und Strahlenschutz, Berlin 1957
HALLIDAY, D., Introductory Nuclear Physics, New York 1950
HANLE, W., Künstliche Radioaktivität, Stuttgart 1952
HEVESY, G., and F. PANETH, A Manual of Radioactivity, London 1938
HEVESY, G., und F. PANETH, Lehrbuch der Radioaktivität, Leipzig 1931
JOLIOT-CURIE, I., Les radioéléments naturels, Paris 1946
KOHLRAUSCH, F., Praktische Physik. Leipzig 1955
LIBBY, W. F., Radiocarbon Dating, Chicago 1955
MEYER, S., und E. SCHWEIDLER, Radioaktivität, Leipzig und Berlin 1927
RIEZLER, W., Einführung in die Kernphysik, München 1959
RUTHERFORD, E., J. CHADWICK and C. D. ELLIS, Radiations from Radioactive Substances, Cambridge 1930
WEISS, C. F., Radioaktive Standardpräparate, Berlin 1957
WHYTE, G. N., Canad. J. Phys. **30**, 442 (1952)
ZIMEN, K., Angewandte Radioaktivität, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952

---
[1]) Über den Begriff der Dosiskonstanten, gemessen in Röntgen (r) pro c und h in einer Entfernung von 1 m, vgl. Bd. III.

V. Spontane Kernumwandlungen

Bei den spontan ablaufenden Kernumwandlungen sind zwei Gruppen zu unterscheiden. Bei der einen Gruppe, den *β-Prozessen*, bleibt die Massenzahl A konstant. Bei der anderen wird ein Teil des Kernes abgespalten und demnach die Massenzahl geändert. Zu der zweiten Gruppe gehört der *radioaktive α-Zerfall* und die *spontane Spaltung.*

γ-Strahlen und die spontane Neutronenemission sind Begleiterscheinungen der radioaktiven Prozesse. Den isomeren Übergang rechnet man im allgemeinen nicht zu den Kernumwandlungen. Bei ihm geht ein Kern von einem angeregten, langlebigen in einen tieferen Zustand oder in den Grundzustand über.

Die β-Prozesse beruhen auf der *wechselseitigen Umwandlung der beiden Arten von Nukleonen.* Wird aus einem Neutron ein Proton, so verlassen ein negatives Elektron als β^--Teilchen und ein Neutrino den Kern. Die Sätze von der Erhaltung der Ladung, der Energie und des Drehimpulses sind durch diese Emission zweier Teilchen erfüllt. Bei der Verwandlung eines Protons in ein Neutron verläßt ein Positron-Neutrino-Paar den Kern. Zu diesem β^+-Zerfall gibt es auch den inversen Prozeß. Die Wellenfunktionen der Hüllenelektronen erstrecken sich in das Kerninnere (s. Bd. I, S. 45). Daher halten sich Hüllenelektronen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit im Innern des Kernes auf. Vereinigt sich ein Hüllenelektron mit einem Proton, so verschwindet es, ein Neutrino wird erzeugt und emittiert, und das Proton wird zu einem Neutron umgewandelt. Die frei werdende Energie wird als kinetische Energie des Neutrinos abgeführt. Dieser Prozeß des E-Einfangs wird in der Regel in 90% aller Fälle von einem der beiden Elektronen der K-Schale verursacht. Mit etwa 10% Wahrscheinlichkeit wird eines der beiden s-Elektronen des L_I-Niveaus eingefangen und umgewandelt.

E-Einfang und β^+-Prozeß sind konkurrierende Vorgänge. Mit steigender Ordnungszahl wird der E-Einfang immer wahrscheinlicher gegenüber der Emission eines β^+-Teilchens, da die K- und L-Schalen näher am Kern zu liegen kommen und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Hüllenelektrons im Kern damit vergrößert wird. Die Theorie der β-Prozesse wird im Kap. X gebracht.

§ 20. Energetische Bedingungen für die spontanen Kernumwandlungen

a) Die Betaprozesse

Damit ein Elektron oder Positron vom Kern emittiert werden kann, muß der Massenunterschied zwischen Ausgangs- und Folgekern die Ruhemasse des Elektrons übersteigen. Beim β^--Prozeß verläßt ein Elektron den Kern, das Tochteratom besitzt jedoch ein Hüllenelektron mehr als das Ausgangsatom. Bezogen auf die Massen der neutralen Atome, wird somit der β^--Prozeß bei Gleichheit der Atommassen

eben noch möglich. Beim β^+-*Zerfall* verläßt ein Elektron den Kern, ein weiteres wegen der Änderung der Ordnungszahl die Hülle, so daß dieser Prozeß nur stattfinden kann, wenn das neutrale Tochteratom mehr als zwei Elektronen-Ruhemassen leichter ist als das Ausgangsatom. Beim *E-Einfang* schließlich nimmt der Kern ein Hüllenelektron auf, die Ordnungszahl wird dabei um Eins kleiner, so daß dieser Prozeß wiederum bei Gleichheit der neutralen Atommassen eben noch eintreten kann. Bei Energiedifferenzen der neutralen Atome $\leqq$ 1 MeV ist ein β^+-Zerfall energetisch nicht möglich, wohl jedoch E-Einfang (s. Bd. I, Abb. 7, S. 40). Durch E-Einfang können auch höhere angeregte Energieniveaus des Folgekernes erreicht werden als durch β^+-Zerfall.

Die Zerfallsenergie ist bei der Emission von β^-- und β^+-Teilchen durch die Grenzenergie des kontinuierlichen β-Spektrums gegeben. Folgen auf das β-Teilchen noch γ-Quanten in Kaskade, so ist deren Energie hinzuzuzählen. Die Energieverteilung der β-Teilchen kann mit einem der verschiedenen β-Spektrometer sehr genau gemessen werden.

Die Bestimmung der Zerfallsenergie beim E-Einfang stößt auf die Schwierigkeit, daß die kinetische Energie des emittierten Neutrinos direkt nicht gemessen werden kann. Es stehen aber drei indirekte Methoden hierfür zur Verfügung.

1. Man kann aus dem Unterschied der Massenwerte von Ausgangs- und Folgekern die Zerfallsenergie berechnen. Dieser Unterschied ist in vielen Fällen aus dem Q-Wert von Kernreaktionen sehr genau bekannt. Beispielsweise ist Fe^{55} (Halbwertszeit 2,60 a) ein radioaktiver Körper, aus dem sich durch E-Einfang das stabile Mn^{55} im Grundzustande bildet. Die Kernreaktion $Mn^{55}(p, n) Fe^{55}$ hat einen Q-Wert von $-1{,}006$ MeV. Um daraus die Zerfallsenergie von Fe^{55} zu berechnen, ist das Energieäquivalent des Massenunterschiedes zwischen Neutron und neutralem Wasserstoffatom, nämlich 782 keV, davon abzuziehen. Somit erhält man für die Zerfallsenergie des Fe^{55} den Wert 224 keV.

2. Jeden β-Zerfall, auch den E-Einfang, begleitet eine schwache γ-Strahlung mit kontinuierlicher Energieverteilung. Die Ursache dieser *inneren Bremsstrahlung* ist in der plötzlichen Ladungsänderung des Kernes bei der Umwandlung zu suchen. Die Grenzenergie der kontinuierlichen γ-Strahlung ist gleich der Neutrinoenergie. Beim Einfang eines K-Elektrons aus der Hülle beträgt sie somit $E_0 - E_K$, wobei E_0 die Zerfallsenergie und E_K die Bindungsenergie des Elektrons der K-Schale bezeichnen. Die innere Bremsstrahlung ist zwar sehr schwach, aber doch noch gut meßbar. Bei Fe^{55} kommen $3 \cdot 10^{-5}$ γ-Quanten auf eine Kernumwandlung. Die Grenzenergie dieser Quanten liefert eine Zerfallsenergie E_0 von 220 ± 10 keV. Dieser Wert deckt sich mit der vorigen Bestimmung.

3. Es ist möglich, aus dem Verhältnis $\varepsilon_{L_I}/\varepsilon_K$ der Wahrscheinlichkeit eines Einfanges aus der L_I-Schale zu der aus der K-Schale die Zerfallsenergie E_0 zu bestimmen. Das Verhältnis beträgt

$$\frac{\varepsilon_{L_I}}{\varepsilon_K} = \frac{f(Z, L_I)}{f(Z, K)} \left(\frac{E_0 - E_{L_I}}{E_0 - E_K} \right)^2 .$$

E_{L_I} und E_K bedeuten darin die Bindungsenergien des Elektrons in der L_I- und K-Schale. $f(Z, L_I)$ und $f(Z, K)$ sind Funktionen von den Radialteilen der Diracschen Wellenfunktionen des L_I- und K-Elektrons im Kernfeld. Diese Funktionen f hängen der Hauptsache nach nur von der Quantencharakteristik des eingefangenen Elektrons sowie von Z und in geringem Maße vom Kernradius R ab. Sie sind tabelliert.

Das Verhältnis $\varepsilon_{L_I}/\varepsilon_K$ kann aus Messungen der Intensitäten der Auger-Elektronen und auch der K- und L_I-Röntgenstrahlen bestimmt werden, die den E-Einfang als Sekundäreffekte begleiten.

Die energetischen Bedingungen für die β-Umwandlungen in Verbindung mit der dreifach aufgespaltenen Fläche der Bindungsenergie lassen die Regeln für die Existenz der β-stabilen Kerne verstehen, die MATTAUCH empirisch aufstellte.

Bei Isobaren mit *ungerader* Massenzahl, also Kernen von den Typen g, u und u, g, ist nur jeweils ein Kern stabil, wie bereits auf S. 28 ff. ausgeführt wurde (s. Abb. 13). Ausnahmen von dieser Regel sind Cd^{113} (Spin $\frac{1}{2}$) — In^{113} (Spin $\frac{9}{2}$) sowie Sb^{123} (Spin $\frac{7}{2}$) — Te^{123} (Spin $\frac{1}{2}$). Es ist anzunehmen, daß jeweils ein Kern dieser beiden Paare β-radioaktiv ist. Wegen der großen Unterschiede im Spin hat aber der instabile Kern wahrscheinlich eine so große Halbwertszeit, daß seine Aktivität mit dem derzeitigen Stand der Meßtechnik nicht festgestellt werden kann. Bei den Massenzahlen $A = 5$ und $A = 147$ zerfällt der einzige Kern, der gegen β-Umwandlung stabil ist, unter Emission von α-Teilchen. Im übrigen ist jede ungerade Massenzahl zwischen 1 und 207 durch einen stabilen Kern vertreten.

Die Regeln der β-Stabilität der Kerne mit *gerader* Massenzahl lassen sich an Hand der Abb. 14, S. 30 ableiten. Alle Kerne vom Typ u, u, die auf der oberen Kurve zu liegen kommen, sollten sich in Kerne vom Typ g, g umwandeln, denn dabei wird Energie frei. Der Kern 5 der Abb. 14 hat dabei zwei Zerfallsmöglichkeiten: unter β^+-Emission in den Kern 4 oder durch einen β^--Prozeß in den Kern 6. Ein solcher dualer β-Zerfall kommt nur bei Kernen vom Typ u, u vor. Ein Beispiel ist Cu^{64} (12,9 h), bei dem die Wahrscheinlichkeiten der beiden Zerfallsrichtungen von gleicher Größenordnung sind. Es gibt als Ausnahme vier sicher stabile Kerne vom Typ u, u, und zwar H^2, Li^6, B^{10} und N^{14}. Es sind dies Kerne mit $Z = N$ und mit niedriger Nukleonenzahl. Eine fünfte Ausnahme ist $_{23}V^{50}$. Dieser Kern hat an sich zwei Möglichkeiten einer β-Umwandlung, und zwar

$$_{23}V^{50} \xrightarrow{\beta^+} {}_{22}Ti^{50} + 2{,}4\ \text{MeV},$$

$$_{23}V^{50} \xrightarrow{\beta^-} {}_{24}Cr^{50} + 1{,}2\ \text{MeV}.$$

Wenn keine dieser Umwandlungen beobachtet wurde, so liegt dies wohl daran, daß der Ausgangskern den Spin 6 und die beiden Endkerne vom Typ g,g den Spin 0 besitzen. Diese großen Spindifferenzen machen beide β-Übergänge „mehrfach verboten". Die Halbwertszeit von $_{23}V^{50}$ wird demgemäß so groß, daß der Zerfall bisher nicht beobachtet werden konnte. Eine weitere, sechste Ausnahme ist $_{73}Ta^{180}$, das ebenfalls vermutlich instabil ist.

Bei den Kernen vom Typ g,g gibt es bei den Massenzahlen $A = 96$, 124 und 136 drei stabile Isobare; dieser Fall ist in Abb. 14 dargestellt. Häufiger kommen zwei Isobare vor, oder nur ein einzelner Kern ist β-stabil. Bei einer Anzahl von zwei oder drei Isobaren ist die Stabilität nur scheinbar. Wie aus Abb. 14 zu ersehen ist, kann der Kern 4 in den Kern 6 zerfallen, wenn zwei β-Umwandlungen zugleich stattfinden, so daß der Kern 5, der energetisch höher liegt, sich nicht als Zwischenprodukt bildet. Ein solcher doppelter β-Zerfall ist ein sehr unwahrscheinlicher Vorgang. Immerhin gelang es, ihn bei dem Isobaren-Trio $_{52}Te^{130}$ — $_{54}Xe^{130}$ — $_{56}Ba^{130}$ nachzuweisen. Bi_2Te_3-Minerale mit einem geologischen Alter von etwa $1{,}5 \cdot 10^9$ a enthalten eine geringe Menge von Xe^{130}, das nur dem doppelten β-Zerfall von $_{52}Te^{130}$ entstammen kann. Aus der Menge von Xe^{130} läßt sich die Halbwertszeit von $_{52}Te^{130}$ zu etwa $1 \cdot 10^{21}$ a berechnen. (Inghram und Reynolds, 1950). Dieses Beispiel zeigt, daß die Grenze zwischen stabilen und instabilen Kernen fließend ist.

Für jede gerade Massenzahl bis 208 existiert wenigstens ein stabiler Kern, ausgenommen für $A = 8$. Das β-stabile $_4Be^8$ zerfällt sofort nach der Bildung in zwei α-Teilchen.

Aus den besprochenen Gesetzmäßigkeiten für isobare Kerne folgen die Regeln für die *Verteilung der β-stabilen Kerne* in bezug auf Z und N. Bis $Z = 82$ gibt es bei geradem Z, mit einer Ausnahme, wenigstens zwei stabile Isotope, meist aber mehr. Bei $Z = 4$ existiert nur ein einziges Isotop, nämlich $_4Be^9$. Bei ungeradem Z kommt meist ein einziger stabiler Kern vor. Nur in 10 Fällen sind zwei stabile Isotope vorhanden. Die Elemente $_{43}Tc$ und $_{61}Pm$ besitzen kein stabiles Isotop. Abb. 32 veranschaulicht die Gründe hierfür für das Element Tc. In der Nachbarschaft dieses Elements liegen die stabilen Kerne so verteilt, daß zu jeder für ein stabiles Tc in Frage kommenden Neutronenzahl bereits ein stabiles Isobar existiert. Kein Tc-Isotop kann daher stabil sein.

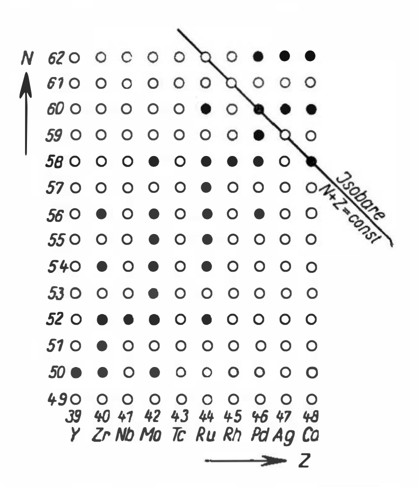


Abb. 32. Verteilung der stabilen Kerne (Vollkreise) in der Nachbarschaft von $_{43}Tc$. Zu jeder in Frage kommenden Neutronenzahl für dieses Element existiert bereits ein stabiles Isobar

Die Neutronenzahl der stabilen Kerne reicht von 0 bis 126. Bei geradem N gibt es, ausgenommen für $N = 2$ und 4, die einfach besetzt sind, immer mindestens zwei stabile Isotone, meist mehr. Bei ungeradem N existieren höchstens zwei stabile Isotone, meist nur eines. Für 9 ungerade Neutronenzahlen, nämlich 19, 21, 35, 39, 45, 61, 89, 115 und 123, gibt es keine stabilen Kerne.

b) Der Alphazerfall

Die Kurve der Bindungsenergie in Abhängigkeit von der Massenzahl verläuft anfangs steil und bei größerer Massenzahl flacher, wie Abb. 7, S. 26, zeigt. In Abb. 33 ist dieser Verlauf schematisch nochmals dargestellt. Von dem eingezeichneten Kern 1 mit der Masse x werde nun ein α-Teilchen, das ist ein Heliumkern der Masse 4, entfernt. Der Restkern 2, der im steilen Teil der Kurve liegt, hat dann die Masse x-4 und eine kleinere Bindungsenergie.

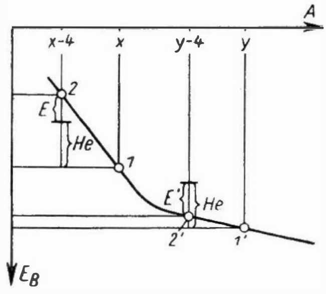


Abb 33. Schematische Darstellung der energetischen Verhältnisse beim α-Zerfall

Mit dem He-Kern verläßt eine Bindungsenergie von 28,6 MeV den Kern 1. Um einen He-Kern aus diesem zu entfernen, muß der Energiebetrag E aufgewendet werden, wie es Abb. 33 veranschaulicht. Der Kern 1 ist also stabil gegen α-Zerfall. Liegt der Ausgangskern 1′ mit der Masse y im flachen Teil der Kurve, so entsteht bei der Abspaltung eines He-Kernes der Kern 2′ mit der Masse y-4. Der Unterschied an Bindungsenergie zwischen diesen beiden Kernen ist nun geringer als die Bindungsenergie des He-Kernes. Die Differenz, den Energiebetrag E', muß der Kern abgeben, denn sonst wäre seine Bindungsenergie zu klein, der Kern also zu schwer. Diese Energie E' ist die *frei werdende Zerfallsenergie*. Sie ist somit durch die Massenbilanz

$$\frac{E'}{c^2} = {}_ZM^A - {}_{Z-2}M^{A-4} - M_{\mathrm{He}} \tag{20.1}$$

gegeben, die zu der Gleichung

$$E' = -({}_ZE^A - {}_{Z-2}E^{A-4} - E_{\mathrm{He}}) \tag{20.2}$$

führt. In Gleichung (20.2) sind nur mehr die Größen der Bindungsenergien enthalten.

Die Zerfallsenergie E' tritt als kinetische Energie E_α des α-Teilchens und als kinetische Energie des Restkerns in Erscheinung. Aus Energie- und Impulssatz folgt die Beziehung

$$E' = E_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{R}}}\right), \tag{20.3}$$

in der m_α und m_{R} die Massen von α-Teilchen und Restkern bedeuten. Bei den natürlichen α-Strahlern der Uran- und Thoriumreihe beträgt der Unterschied zwischen der α-Zerfallsenergie und der kinetischen Energie der α-Teilchen knapp 2%.

Man kann nun die Frage aufwerfen, warum nur He^4-Kerne spontan emittiert werden und nicht andere leichte Kerne. Um diese Frage zu beantworten, braucht man nur auch für andere Kerne die Bilanzen der Bindungsenergien zu ziehen, wie es an Hand der Abb. 33 für das α-Teilchen erläutert wurde. Für den Zerfall des U^{232} errechnen sich aus den bekannten Massenwerten die in Tabelle 9 zusammengestellten Zerfallsenergien.

Tabelle 9.
Aus den Massenwerten berechnete Zerfallsenergien für U^{232}

emittiertes Teilchen	Zerfallsenergie in MeV	emittiertes Teilchen	Zerfallsenergie in MeV
n	— 7,27	He^4	+ 5,41
H^1	— 5,76	He^5	— 2,49
H^2	— 10,18	He^6	— 5,88
H^3	— 9,77	Li^6	— 3,84
He^3	— 9,72	Li^7	— 1,80

Man sieht, daß nur bei der Emission des He^4-Kernes die Zerfallsenergie positiv ist. Unter den in der Tabelle angeführten Teilchen kann also nur dieses spontan emittiert werden. Der Grund liegt darin, daß der He^4-Kern, wie aus Abb. 8, S. 27, zu ersehen, besonders fest gebunden ist. Bei Fortsetzung der Tabelle 9 käme man erst wieder bei ${}_6C^{12}$ und ${}_8O^{16}$ auf positive Zerfallsenergien von 24,0 und 37,6 MeV. Diese Kerne sind jedoch 6- und 8fach geladen. Aus Gl. (22.1) des nächsten Abschnittes geht hervor, daß mit steigender Ordnungszahl des emittierten Teilchens die Zerfallswahrscheinlichkeit exponentiell abnimmt. Die spontane Emission eines C^{12}- oder O^{16}-Kernes ist deshalb ein so seltener Prozeß, daß er experimentell nicht auffindbar war.

Der α-Zerfall der Atomkerne wird durch das Längsprofil, der β-Zerfall durch das Querprofil der Energiefläche bestimmt. Allerdings ist das Längsprofil nicht exakt in Richtung der Talsohle der Energierinne zu nehmen, sondern entlang Kernen mit gleichem $N - Z$, den sog. *Isodiapheren.* Liegt der Ausgangskern genau in der Talsohle, so kommt der Tochterkern wegen der Krümmung der Energierinne (s. Abb. 11, S. 29) meist auf dem Hang zu liegen. Zwei aufeinanderfolgende β^--Umwandlungen führen ihn wieder in die Talsohle zurück. Im Gebiet der Uran- und Thoriumreihen findet man diese Aufeinanderfolge von einer α- und zwei β^--Umwandlungen sehr ausgeprägt. β^+-Umwandlungen kommen wegen dieser Krümmung der Energierinne bei den vier Zerfallsreihen nicht vor.

Das Auftreten des α-Zerfalles und die Zerfallsenergie hängen eng mit den Windungen der Energiefläche zusammen, die Abb. 15 und 16 zeigen. Verläuft die Energierinne in der Richtung der Linie gleichen Neutronenüberschusses, so können Ausgangs- und Endkern in der Talsohle liegen. Ihr Massenunterschied ist dann günstig für das Eintreten einer α-Umwandlung. Bei den Windungen hat außerdem die Talsohle eine Neigungsänderung, was ebenfalls empfindlich auf den α-Zerfall einwirkt. Eine solche Windung der Energiefläche kommt im Gebiet der Seltenen Erden vor und gibt die Erklärung für die α-Aktivität von Sm^{147}, Nd^{144} und für benachbarte, durch Kernumwandlungen erzeugte Kerne.

Im Gebiet der schwersten Kerne liegt eine Windung der Energiefläche bei der magischen Protonenzahl $Z = 82$ vor. Die Kerne von Blei sind also besonders fest gebunden. Die Massendifferenz gegenüber den Isodiapheren von $Z = 80$ ist groß

gegenüber $Z = 84$ relativ klein. Alle Bleiisotope sind daher α-stabil, die Kerne mit $Z = 84$ (Polonium) haben jedoch große α-Zerfallsenergien, wie es Abb. 34 zeigt. Der Sprung in den Kurven für $Z = 84$ und $Z = 86$ ist auf den Einfluß der magischen Neutronenzahl $N = 126$ zurückzuführen. In Abb. 34 sind mit Massenzahl und

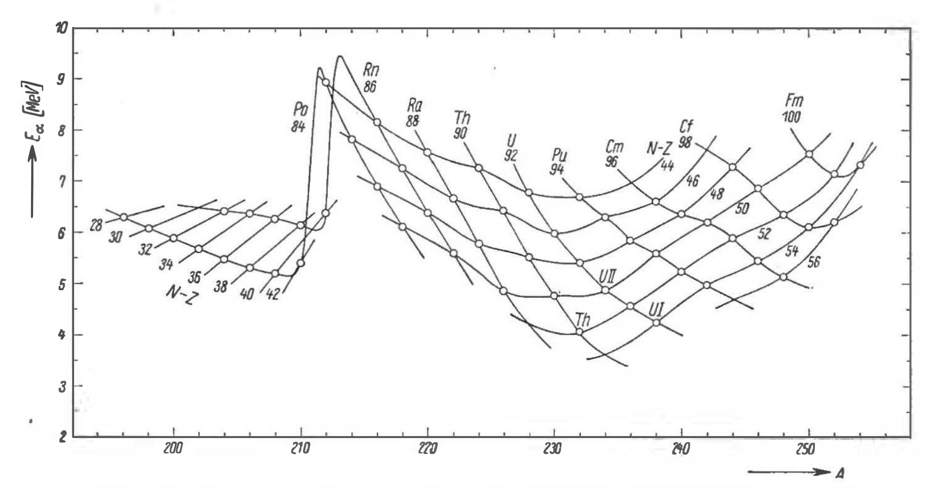


Abb. 34. Die α-Strahler vom Kerntyp g, g (Isotope und Isodiaphere sind durch Linien verbunden). (Nach J. SCHINTLMEISTER)

Zerfallsenergie als Koordinaten die bekannten α-Strahler vom Kerntyp g, g eingezeichnet. Isotope und Isodiaphere sind durch Linien verbunden. Mit zunehmender Entfernung von den magischen Zahlen $Z = 82$ und $N = 126$ nähern sich diese Linien dem Verlauf, wie er aus der Weizsäcker-Gleichung (S. 32) berechnet wird, um sich bei UI und Th damit zu decken.

In Abb. 34 sind der Übersichtlichkeit wegen nur die (g, g)-Kerne eingezeichnet. Die Kerne vom Typ g, u fügen sich gut dazwischen ein. Ein Diagramm nach Art der Abb. 34 erlaubt verläßliche Aussagen über den etwaigen α-Zerfall von Kernen, die noch unbekannt sind oder von denen nur ein β-Zerfall bekannt ist. Beispielsweise war es möglich vorauszusagen (SCHINTLMEISTER, 1938), daß Ac, ein β^--Strahler, auch α-strahlend sein müßte, was sich auch bestätigte (Element Fr). Man kann erwarten, daß $MsTh_2$ α-Strahlen aussendet mit einem Verzweigungsverhältnis $\alpha : \beta^-$ von $4 \cdot 10^{-8}$. Diagramme nach Art der Abb. 34 sind heute noch bei der Erforschung der Transuran-Elemente ein wertvolles Hilfsmittel.

§ 21. Die spontane Spaltung

Weil die Neigung der Energierinne mit steigender Massenzahl immer flacher wird, ist die Spaltung der schweren Kerne in zwei annähernd gleiche Teile ein exothermer Prozeß. Die Energie, die bei der Spaltung von U^{238} frei wird, läßt sich grob aus dem Verlauf der Bindungsenergie abschätzen, der in Abb. 7 (S. 26) dargestellt

ist. Bei $A = 238$ beträgt die Bindungsenergie rund 1800 MeV, bei der halben Massenzahl $A = 119$ etwa 1000 MeV. Bei der symmetrischen Spaltung werden demnach rund 200 MeV frei. Diese Abschätzung ist eine Näherung, weil sich die Kurve der Abb. 7 auf stabile Kerne bezieht. U^{238} hat einen Überschuß von 54 Neutronen. Nach der Teilung weisen die Bruchstücke einen zu großen Neutronenüberschuß auf, um stabil zu sein, ihre Bindungsenergie darf man nicht der Abb. 7 entnehmen.

Die Zerfallsenergie bei spontaner Spaltung läßt sich sehr genau aus der halbempirischen Massenformel von Weizsäckers (S. 32) berechnen. Die *Zerfallsenergie Q* bei Teilung in zwei gleiche Stücke ist offensichtlich

$$Q = \left\{M(Z, A) - 2M\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right)\right\}c^2 \tag{21.1}$$

$$= a_O A^{2/3}(1 - 2^{1/3}) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right) \tag{21.1 a}$$

$$= -\ 0{,}260 a_O A^{2/3} + 0{,}370 a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \tag{21.1 b}$$

$$= -\ 3{,}4 A^{2/3} + 0{,}22 \frac{Z^2}{A^{1/3}}\ [\text{MeV}]\,. \tag{21.1 c}$$

Für ${}_{92}U^{238}$ ergibt sich

$$Q(U^{238}) = -130 + 300 = 170 \text{ MeV}.$$

Der erste Term rührt von der Änderung der Oberflächenenergie her. Die Vergrößerung der Oberfläche verringert die frei werdende Energie. Der zweite Term entspricht der Änderung der elektrostatischen Energie bei der Teilung. Etwa 43% davon werden durch die Änderung der Oberflächenenergie kompensiert.

Die Stabilitätsgrenze gegen spontane Spaltung in zwei gleiche Teile erhält man aus Gleichung (21.1 c) bei Nullsetzen der Zerfallsenergie Q. Dies führt zu

$$\frac{Z^2}{A} = \frac{3{,}4}{0{,}22} = 15{,}5\,. \tag{21.2}$$

Symmetrische spontane Spaltung kann also einsetzen bei $A \simeq 62$ und $Z \simeq 31$, wenn Z durch $\frac{A}{2}$ ausgedrückt wird, was näherungsweise richtig ist.

Bei Spaltung mit geringer Anregungsenergie, z.B. mit thermischen Neutronen, haben die beiden Bruchstücke i. allg. verschiedene Massen. Die spontane Spaltung zeigt eine fast gleiche Unsymmetrie. Haben die beiden Bruchstücke die Massen αA und $(1 - \alpha) A$ und wird die elektrische Ladung im gleichen Verhältnis geteilt, so tritt anstelle von Gleichung (21.1 a) für die Zerfallsenergie die Gleichung

$$Q = a_O A^{2/3}[1 - \alpha^{2/3} - (1 - \alpha)^{2/3}] + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot [1 - \alpha^{5/3} - (1 - \alpha)^{5/3}]\,. \tag{21.3}$$

$Q = 0$ gesetzt, liefert die Stabilitätsgrenze für verschiedene Werte von α, die als Funktion von Z in Abb. 35 dargestellt ist. Die symmetrische Spaltung, $\alpha = 0{,}5$, erfordert den kleinsten Wert von Z.

Bei der Spaltung führt der Kern Deformationsschwingungen aus, er verlängert sich, schnürt sich ein und teilt sich, wie in Kap. VI 4 besprochen wird.
Bei diesem Vorgang durchläuft der Kern ein Stadium, in dem er eine kleinere Bindungsenergie als im Grundzustand hat. Wird dem Kern die Energie, die zur

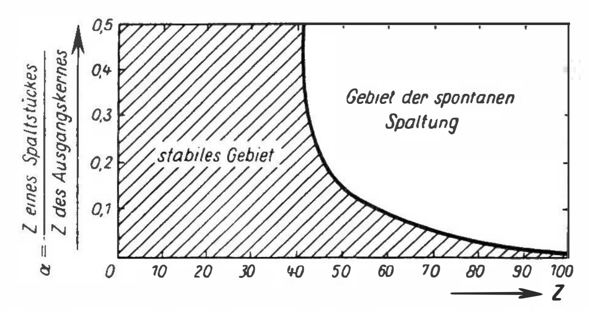


Abb. 35. Die Stabilitätsgrenze für spontane Spaltung. (Nach G. GAMOW und C. L. CRITCHFIELD)

Überwindung dieses Potentialwalles nötig ist, als Anregungsenergie zugeführt, so spaltet er sogleich. Andernfalls besteht, ähnlich wie beim α-Zerfall, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für den Übergang, die der Substanz eine charakteristische Halbwertszeit für die spontane Spaltung gibt. In Abb. 36 sind die energetischen Verhältnisse veranschaulicht. Als Abszisse ist der Abstand der Ladungsmittelpunkte der beiden Bruchstücke aufgetragen, als Ordinate die potentielle Energie des Gesamtsystems. Der Kern mit der Masse A^* liegt auf der Stabilitätsgrenze der Abb. 35. Seine Zerfallsenergie ist Null.

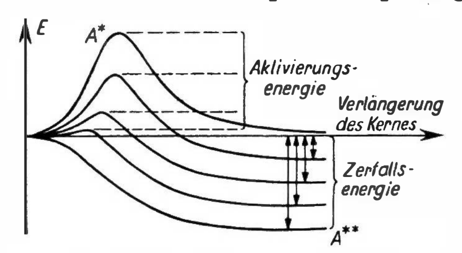


Abb. 36. Die energetischen Verhältnisse bei der Spaltung. Als Abszisse ist der Abstand der Ladungsmittelpunkte der beiden Bruchstücke aufgetragen. Parameter ist die Massenzahl A. (Nach J. I. FRENKEL)

Das Maximum der Kurve entspricht der Aktivierungsenergie zur sofortigen Spaltung. Je größer die Masse A wird, um so niedriger wird die Potentialschwelle, um so kleiner die Aktivierungsenergie und bei spontaner Spaltung die Halbwertszeit. Bei der Masse A^{**} ist der Potentialwall verschwunden, der Kern wird absolut instabil gegen Spaltung, d.h., er zerfällt sofort nach der Bildung. Dieser Fall ist dann gegeben, wenn die Zerfallsenergie Q gleich groß ist wie die gegenseitige elektrostatische Energie E_C der Bruchstücke bei Berührung. Bei kugelförmigen Bruchstücken mit dem Radius $R_0\left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}$ und symmetrischer Spaltung ist

$$E_C = \frac{e^2\left(\frac{Z}{2}\right)^2}{2R_0\left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}} = \frac{2^{1/3}}{8}\,\frac{e^2}{R_0}\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} = 0{,}262\,a_C\,\frac{Z^2}{A^{1/3}}\,, \tag{21.4}$$

wenn wir $\frac{3e^2}{5R_0} = a_C$ einsetzen (S. 31, Gl. (7.2)). Die Bedingung $Q = E_C$ führt von den Gleichungen (21.1 b) und (21.4) zu der Gleichung

$$\frac{Z^2}{A} = 2{,}4\,\frac{a_O}{a_C} = 53 \qquad (21.5)$$

für den kritischen Parameter $\frac{Z^2}{A}$. Bei der Spaltung haben die Bruchstücke zunächst ellipsoide Form, so daß die Ladungsmittelpunkte etwa um 10% weiter auseinander liegen als angenommen. Die ellipsoide Form vergrößert auch die Oberflächenenergie, doch ist diese Korrektur von geringerer Bedeutung. Die genauere Rechnung, die beide Umstände berücksichtigt, liefert für die Grenze der absoluten Instabilität den verbesserten Wert

$$\frac{Z^2}{A} = 2{,}0\,\frac{a_O}{a_C} = 44\,. \qquad (21.6)$$

Spontane Spaltung wurde bisher an 40 Kernen beobachtet. Noch immer gibt es keine Theorie, welche es möglich macht, in dem metastabilen Gebiet zwischen den Massen A^* und A^{**} der Abb. 36 aus der Höhe der Potentialschwelle die Zerfallskonstante für die spontane Spaltung zu berechnen. Zwischen dem Logarithmus der experimentell gemessenen Partialhalbwertszeit für spontane Spaltung und dem kritischen Parameter $\frac{Z^2}{A}$ besteht jedenfalls keine lineare Beziehung, welche früher vermutet wurde. Trägt man nämlich diese Halbwertszeit für die Kerne vom Typ g, g über der Neutronenzahl auf, so erhält man für gleiches Z die in Abb. 37 dargestellten Kurven.

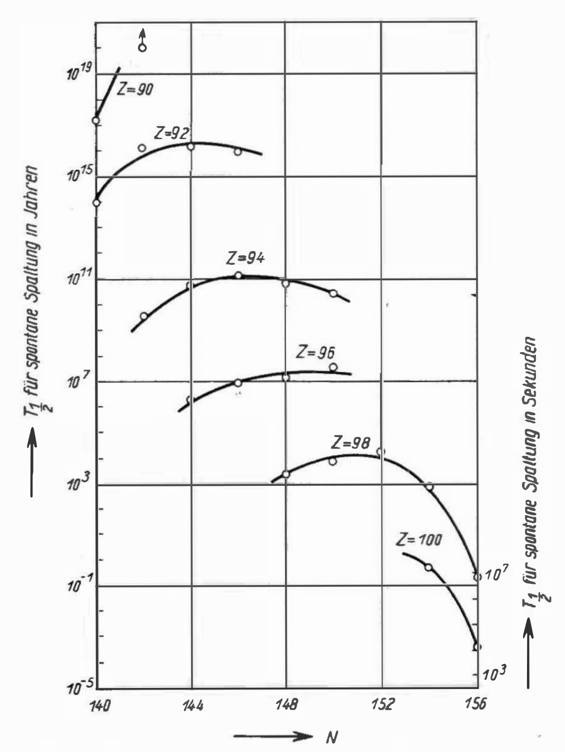


Abb. 37. Partialhalbwertszeit für spontane Spaltung der schweren Kerne

§ 22. Die Emission von Alphateilchen

a) Die Halbwertszeit

Im Innern des Atomkerns unterliegt das α-Teilchen den anziehenden kurzreichenden Kernkräften, außerhalb des Kernes der elektrostatischen Abstoßungskraft. Der Potentialverlauf zwischen einem α-Teilchen und einem Kern der Ladung Ze hat daher den in Abb. 38 dargestellten Verlauf. Ein α-Teilchen im Inneren des

Kernes, das mit der kinetischen Energie E den Kern verlassen könnte, wird durch den *Coulomb-Wall* am Entweichen gehindert.
Der Übergang von der Abstoßung zur Anziehung am Kernrande verläuft nicht als Sprung im Potential, sondern allmählich. Erstens nimmt die Dichte der Kernmaterie am Kernrande ab (s. Abb. 6, S. 24), zum anderen beginnt die Austauschkraft schon bei Berührung der Oberflächen von Teilchen zu wirken, um mit fortschreitendem Eindringen immer größer zu werden. Die elektrostatische Kraft

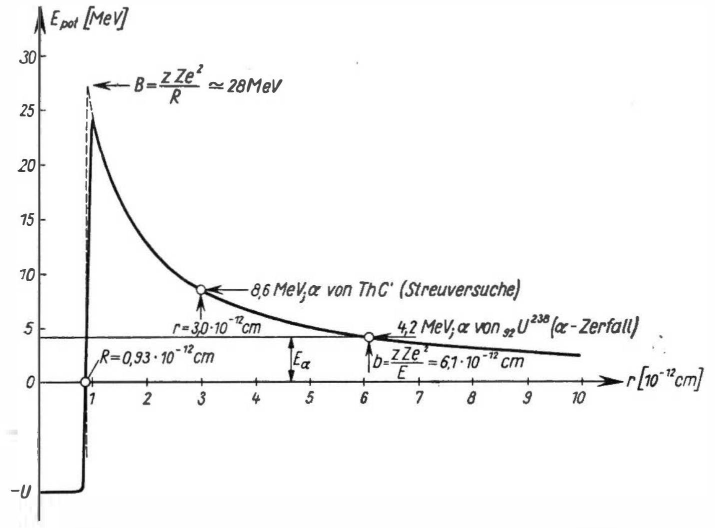


Abb. 38. Der Potentialverlauf zwischen α- Teilchen und ${}_{90}Th^{234}$ (UX_1), dem Restkern beim α- Zerfall von ${}_{92}U^{238}$ (UI)

wirkt jedoch von Mittelpunkt zu Mittelpunkt. Streuversuche von Neutronen an Helium ergeben für das α-Teilchen einen Radius von $2{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm. Der Übergang von Anziehung zur Abstoßung erstreckt sich also auf eine Strecke dieser Größenordnung. Der Rechnung wird der Einfachheit halber der in Abb. 38 punktiert eingezeichnete scharfe Sprung im Potentialverlauf zugrunde gelegt, also ein Coulomb-Potential

$$U(r) = \frac{z Z e^2}{r},$$

das beim Kernrande $r = R = R_0 A^{1/3}$ abgebrochen ist. An dieser Stelle hat das Coulomb-Potential den Maximalwert

$$B = \frac{zZ e^2}{R} = \frac{zZ e^2}{R_0 A^{1/3}}.$$

Für praktische Zwecke ausreichend genau ist die Näherung

$$B = 0{,}76\ zZ^{2/3}\,[\text{MeV}],$$

die mit $A \simeq 2\,Z$ und $R_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm berechnet ist.

Beim α-Zerfall von ${}_{92}U^{238}$ (U I), der Abb. 38 zugrunde gelegt ist, beträgt die Zerfallsenergie 4,2 MeV. Ein von außen kommendes α-Teilchen dieser Energie kann sich dem Restkern ${}_{90}Th^{234}$ (UX_1) nach klassischen Gesetzen der Teilchenvorstellung nur bis auf einen Abstand von $6{,}1 \cdot 10^{-12}$ cm nähern. Der Restkern besitzt aber einen Radius von $0{,}93 \cdot 10^{-12}$ cm und eine Höhe des Coulomb-Walles von rund 28 MeV. Ein α-Teilchen mit einer kinetischen Energie von 4,2 MeV könnte demnach weder in den Kern eindringen noch ihn verlassen. GAMOW und unabhängig davon GURNEY und CONDON haben 1928 gezeigt, daß wegen des Wellencharakters der Materie das α-Teilchen bei jedem Stoß gegen eine derartige Barriere, wie sie Abb. 38 darstellt, eine gewiße Wahrscheinlichkeit besitzt, diese zu durchdringen. Die *Durchdringungswahrscheinlichkeit* beträgt nach Kap. VI, 2

$$e^{-G} \simeq e^{-\left[\frac{2\pi z Z}{137\beta} - \frac{4}{137}\left(2 z Z \frac{M}{m_0} \frac{R}{r_0}\right)^{1/2}\right]}. \tag{22.1}$$

Hierin bedeuten Z und M die Ladungs- und Massenzahl des Tochterkernes, z die Ladungszahl des α-Teilchens, $\frac{1}{137} = \frac{e^2}{\hbar c}$ die Feinstrukturkonstante, $\beta = \frac{v}{c}$ die Geschwindigkeit des α-Teilchens relativ zur Lichtgeschwindigkeit, m_0 die Elektronenruhemasse und $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} = 2{,}818 \cdot 10^{-13}$ cm den klassischen Elektronenradius.

Die *Zerfallskonstante* λ wird mithin

$$\lambda = \lambda_0 e^{-G}, \tag{22.2}$$

worin λ_0 die Zahl der Stöße des α-Teilchens pro sec gegen den Coulomb-Wall bedeutet.

Eine befriedigende Theorie zur Berechnung der Größe von λ_0 besitzen wir zur Zeit nicht. Aus den experimentellen Werten erhält man die Größenordnung

$$\lambda_0 \simeq 2 \text{ bis } 3 \cdot 10^{21} \text{ sec}^{-1}. \tag{22.3}$$

Nach dem Einteilchen-Modell läßt sich λ_0 folgendermaßen abschätzen: Im Inneren des Kernes hat das α-Teilchen eine Geschwindigkeit v_i, die von der Tiefe des Potentialtopfes abhängt und rund $10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ beträgt. Es oszilliert im Kern und stößt dabei mit einer Frequenz der Größe $\frac{v_i}{R}$ gegen den Kernrand. Wenn man annimmt, daß die Bildungswahrscheinlichkeit des α-Teilchens nahe bei 1 liegt (genauere Aussagen kann man nicht machen), so wird also die Zahl der Stöße pro sec gegen die Wand von der Größenordnung

$$\lambda_0 \simeq \frac{10^9 \text{ cm sec}^{-1}}{10^{-12} \text{ cm}} = 10^{21} \text{ sec}^{-1}.$$

Gegen diese Vorstellung ist allerdings einzuwenden, daß das α-Teilchen erst bei der Abspaltung kinetische Energie erlangt. Beim analogen Prozeß der Spaltung schwerer Kerne erhalten die Bruchstücke diese auch erst nach der Teilung.

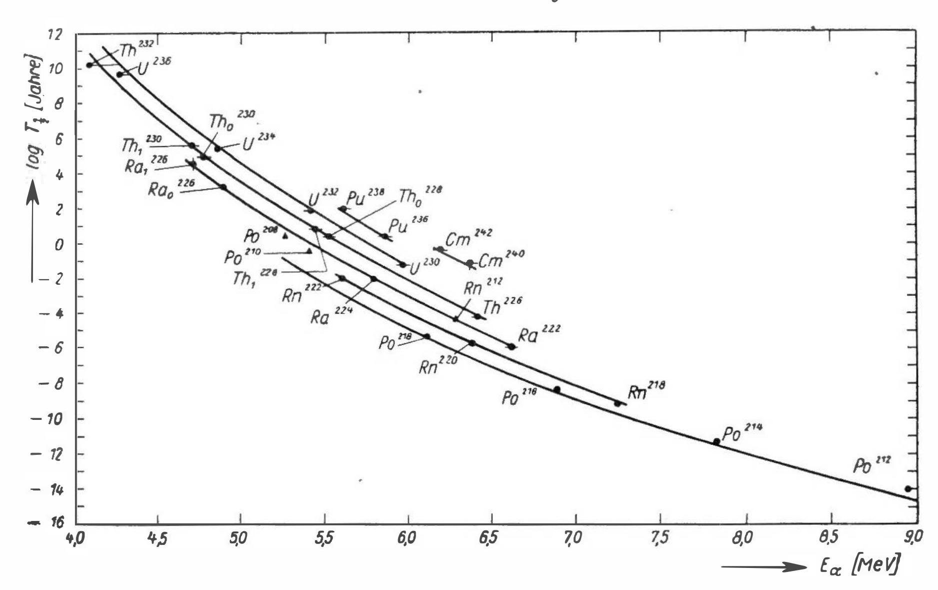


Abb. 39. Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit und der Zerfallsenergie von α-Strahlern vom Kerntyp g, g. Die Kurven sind berechnet nach den Gleichungen (22.1) und (22.2) mit einem Kernradius $R = 1{,}48 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ cm und $\lambda_0 = \frac{v}{R}$. (Nach I. PERLMAN, A. GHIORSO und G. T. SEABORG)

Die Gleichungen (22.1) und (22.2) geben den experimentellen Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit und der Zerfallsenergie der α-Strahler, der von GEIGER und NUTTALL 1911 (in der Form eines Zusammenhanges zwischen Halbwertszeit und Reichweite der α-Strahlen) empirisch gefunden wurde, richtig wieder. Abb. 39 zeigt die berechneten Kurven und die gemessenen Werte für die α-Strahler vom Kerntyp g, g. Die Halbwertszeiten liegen in dem Bereich von $1{,}42 \cdot 10^{10}$ a für $_{90}Th^{232}$ bis 0,30 μsec für $_{84}Po^{212}$ (ThC'), variieren also um einen Faktor 10^{23}, wenn sich die Zerfallsenergie nur um einen Faktor 2 ändert. Aus den Massenwerten läßt sich ausrechnen, daß die meisten Kerne mit $A > 190$ instabil gegen α-Zerfall sind. Die Zerfallsenergie liegt dabei unter 3 bis 4 MeV. Die außerordentlich starke Änderung der Halbwertszeit mit der Zerfallsenergie bringt dabei sehr große Halbwertszeiten mit sich. Bei dem gegenwärtigen Stand der experimentellen Technik ist es nicht möglich, diesen Zerfall nachzuweisen.

Bei (g, u)- und (u, u)-Kernen treten Abweichungen von den Kurven der Abb. 39 auf, die auf eine verringerte Bildungswahrscheinlichkeit der α-Teilchen deuten, also auf einen kleineren Wert von λ_0 zurückzuführen sind.

Von Bedeutung für die Halbwertszeit der α-Strahler sind Abweichungen des Kernes von der Kugelgestalt. Geringfügige Änderungen von R haben wegen des exponentiellen Zusammenhanges zwischen R und λ erheblichen Einfluß auf die Halbwertszeit. Dieser Einfluß ist bei der Berechnung der Kurven der Abb. 39 durch passende Wahl von R_0 berücksichtigt worden.

b) Feinstruktur und weitreichende Alphastrahlen

Gleichung (22.1) für die Wahrscheinlichkeit des Durchdringens des Coulomb-Walles wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der Bahndrehimpuls zwischen α-Teilchen und Restkern Null ist. Der Stoß des α-Teilchens ist in diesem Falle radial gerichtet. Bestehen zwischen den Grundzuständen von Ausgangs- und Folgekern Unterschiede im Spin, so durchsetzt das α-Teilchen den Coulomb-Wall schräg, und es treten Zusatzglieder zu Gleichung (22.1) auf, welche die Durchdringungswahrscheinlichkeit herabsetzen. Der α-Zerfall kann auf diese Weise auch zu angeregten Niveaus des Folgekernes mit vom Grundzustand verschiedenen Spins führen. Anschließend kann der Kern durch Emission von Gammastrahlen seine Anregungsenergie abgeben. Die Folge ist eine Reihe von diskreten Gruppen von α-Strahlen, die sich bis 10% in ihrer Energie unterscheiden. Diese *Feinstruktur* wurde erstmalig von Rosenblum 1930 bei den α-Strahlern von $_{83}Bi^{212}$ (ThC) beobachtet. Abb. 40 zeigt das Zerfallsschema dieses Körpers. Die Energiedifferenzen der α-Gruppen entsprechen genau den gemessenen Energien der Gammastrahlen.

Während bei der Feinstruktur der α-Strahlen der Übergang zum Grundzustand der energiereichsten α-Gruppe zugehört, haben die *weitreichenden* α-Strahlen Energien, die beträchtlich größer sind als dem Übergang vom Grundzustand des Ausgangskernes zum Grundzustand des Folgekernes entspricht. Solche weitreichenden

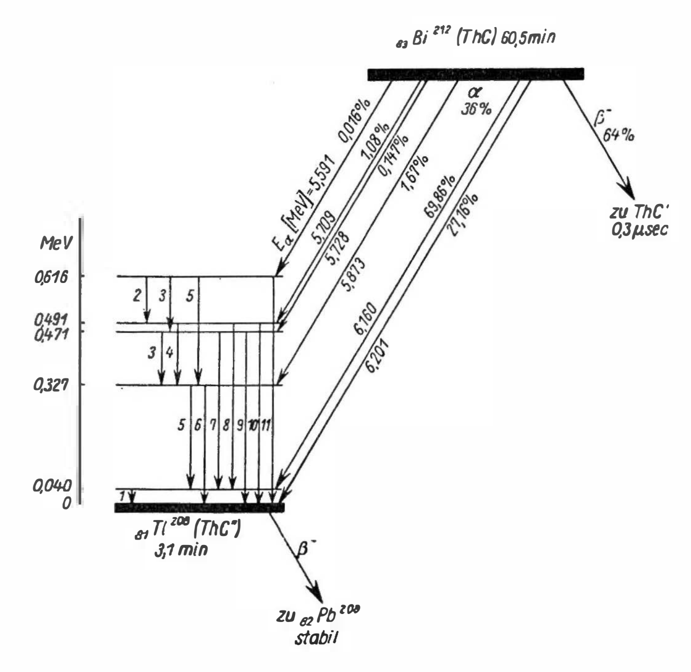


Abb. 40. Feinstruktur der α-Strahlen von $_{83}Bi^{212}$ (ThC)

α-Strahlen wurden von RUTHERFORD bei den sehr kurzlebigen Körpern $_{84}Po^{212}$ (ThC'), 0,30 µsec (gemeinsam mit A. B. WOOD, 1916), und im Jahre 1919 bei $_{84}Po^{214}$ (RaC'), 163,7 µsec, beobachtet. Sie gehen, wie Abb. 41 für ThC' veranschau-

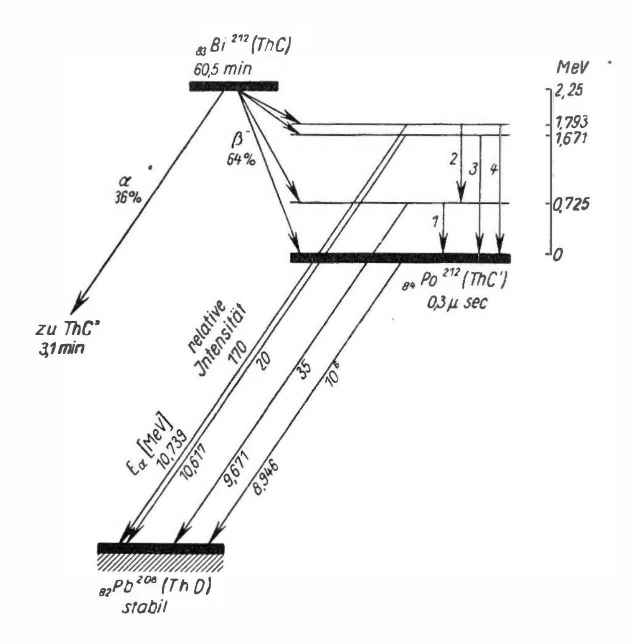


Abb. 41. Die Entstehung der weitreichenden α-Strahlen von Th C'

licht, von den angeregten Zuständen der Muttersubstanz aus, die beim β-Zerfall von ThC entstehen. Die angeregten Kerne gehen meist unter Emission von γ-Strahlen in den Grundzustand über. Da aber dieser selbst bereits kurzlebig gegen α-Zerfall ist, haben die angeregten Niveaus wegen der noch größeren α-Zerfallsenergie eine so große Wahrscheinlichkeit für α-Zerfall, daß auf rund 100 γ-Übergänge ein α-Übergang zu beobachten ist. Die Messungen ergeben auch bei den weitreichenden α-Strahlen exakte Übereinstimmung zwischen der Energie der γ-Quanten und den Energiedifferenzen der Gruppen der α-Strahlen.

VI. Kernreaktionen

einschließlich Kernspaltung

§ 23. Einführung

Analog den chemischen Reaktionen treten Kernreaktionen ein, wenn zwei Atomkerne in die Reichweite ihrer Kernkräfte geraten. Auch Strahlungen elektromagnetischer Natur können Kernprozesse hervorrufen. In beiden Fällen ergeben sich oft tiefgreifende Änderungen in der Zusammensetzung der Kerne aus Protonen und Neutronen.

Da die Konstitution des Kernes das chemische Element bestimmt, ist mit einer Kernreaktion häufig eine *Elementumwandlung* verbunden. Rückschauend ist zu erkennen, daß die jahrhundertealten Bemühungen zur Umwandlung der Elemente ineinander nur durch Kernreaktionen im heutigen Sinne hätten zum Ziele geführt werden können. Auch mit den experimentellen Hilfsmitteln des 19. Jahrhunderts blieb das Ziel unerreicht. Ebensowenig hatten die vielen späteren, sogar bis in die zwanziger Jahre fortgesetzten Versuche, z.B. in gewöhnlichen elektrischen Gasentladungen Elementumwandlungen zu erzeugen, irgendeinen Erfolg. Und doch zeigen die Kernreaktoren unserer Zeit, daß in der Natur ein Weg verborgen lag, Kernreaktionen in größtem Ausmaß mit im Prinzip verblüffend einfachen Anordnungen zu erzielen, ohne von komplizierten Einrichtungen, wie Hochspannungsanlagen, Zyklotrons usw., Gebrauch zu machen. Aber die historische Entwicklung ging einen anderen Weg.

Das erste Anzeichen einer Möglichkeit von Elementumwandlungen überhaupt wurde auf dem von H. Becquerel und den Curies erschlossenen Gebiet des natürlichen radioaktiven Zerfalls erkannt. Schon 1899 sprachen J. Elster und H. Geitel die Vermutung aus, daß mit der Radioaktivität eine Umwandlung und Neuentstehung von Elementen verbunden sei. Bis zur völligen Klarstellung dieser Vorgänge bedurfte es aber einer langen Reihe neuer experimenteller Erkenntnisse, welche insbesondere von E. Rutherford und seiner Schule in den nächsten 10 Jahren bis etwa 1909 errungen wurden.

Die spontanen radioaktiven Prozesse zeigten sich äußeren Einwirkungen gegenüber völlig unzugänglich, wie zahlreiche vergebliche Versuche zu ihrer Beeinflussung durch extreme Drücke, erhöhte Temperatur usw. eindringlich erwiesen hatten. Die Tatsache, daß die spontane Radioaktivität mit der Umsetzung von Energien der Größenordnung 1 MeV pro Atom verbunden ist, machte es sehr wahrscheinlich, daß eine Elementumwandlung auch nur mit Energiekonzentrationen der gleichen Größenordnung erzwungen werden kann.

Das von Rutherford 1911 auf Grund der Streuexperimente mit α-Teilchen aufgestellte und später im Zusammenhang mit der Bohrschen Theorie der Atomspektren so hervorragend bewährte Atommodell ließ die Ursache der früheren

Mißerfolge genauer erkennen: Die elektrostatische Abstoßung der Kernladungen verhindert es, daß unter den damals üblichen Versuchsbedingungen zwei Kerne jemals in die Reichweite ihrer Kernkräfte kommen. Die einzige Möglichkeit zur Erzeugung von Kernreaktionen scheint hiernach darin zu bestehen, einen Atomkern mit so großer Geschwindigkeit auf einen anderen zu schießen, daß die kinetische Energie ihrer Relativbewegung die elektrostatische Abstoßung zu überwinden vermag.

Rutherford erkannte nun in den natürlichen *α-Strahlen* das nächstliegende und vorerst einzige Agens mit der erforderlichen Energiekonzentration: In der Tat gelang ihm 1919 die *erste künstliche Kernreaktion* durch Beschuß von N^{14} (der gewöhnlichen Luft) mit den sehr energiereichen α-Strahlen des RaC′ [R19-1]. Der Eintritt der Reaktion wurde durch eine über 30 cm weit reichende *Protonenstrahlung* (in Luft unter Normalbedingungen) angezeigt. Daß diese nicht etwa von einem elastischen Zusammenstoß eines α-Teilchens mit einem zufällig in der Beobachtungskammer befindlichen H-Atom herrührte — wie die *Protonen-Strahlen* von E. Marsden (1914), die bei Beschuß von H-haltigen Substanzen mit α-Teilchen entstehen —, konnte durch die beobachtete Energie- und Richtungsverteilung der neuen Protonenstrahlung gesichert werden. Die neue Reaktion trat auch nur bei Anwesenheit von N auf und mußte darin bestehen, daß ein α-Teilchen in den Kern des N^{14} eindringt und dabei ein Proton herausschleudert. Der bei diesem Prozeß übrigbleibende Restkern O^{17} wurde 1925 von P. M. S. Blackett mit Hilfe der Wilson-Kammer nachgewiesen.

Nach Entdeckung dieser ersten künstlichen Kernreaktion gelang es E. Rutherford und J. Chadwick, an allen leichten Elementen von B ($Z=5$) bis K ($Z=19$) mit Ausnahme von C und O ähnliche, mit Einfang eines α-Teilchens und Emission eines Protons verbundene Prozesse aufzufinden. Jedesmal entstand das im Periodischen System nachfolgende Element.

Lange Zeit blieben dies die einzigen bekannten künstlichen Kernreaktionen. Erst 1930 beobachteten W. Bothe und H. Becker [B 30-1], auf der Suche nach anderen Reaktionstypen, bei Einwirkung von α-Strahlen auf die leichten Elemente Li, Be und B eine neue Reaktionsart, bei der eine *γ-Strahlung* während des Beschusses auftritt. Hierbei wird der Atomkern durch den Anstoß des α-Teilchens in einen *angeregten Zustand* versetzt, aus dem er durch γ-Emission in den *Grundzustand* zurückgeht. Besonders intensiv war die Strahlung bei Beryllium.

I. Curie und F. Joliot fanden 1932, daß diese „Be-*Strahlung*" aus wasserstoffhaltigen Substanzen energiereiche Protonenstrahlen erzeugt [C 32-1]. Die Annahme eines dem Compton-Effekt analogen Stoßprozesses ergab als notwendige Energie der γ-Quanten einen unwahrscheinlich hohen Wert von 55 MeV. Bald darauf bemerkte J. Chadwick an der gleichen Be-Strahlung das Auftreten von Rückstoßteilchen nicht nur bei einer Wasserstoff-Füllung der Beobachtungskammer, sondern auch bei Stickstoff und Argon. Je schwerer das Rückstoßatom war, um so unglaubwürdiger wurde die anzunehmende Quantenenergie, die zur Deutung des beobachteten Rückstoßes notwendig wurde; waren es bei H etwa 55 MeV, so mußte man bei N schon 90 MeV, bei Ar sogar 155 MeV annehmen. Chadwick

erkannte 1932, daß die Existenz einer — neben den γ-Quanten — in der Be-Strahlung enthaltenen Teilchenstrahlung von Korpuskeln der Ladung Null und der Masse eines Protons alle Beobachtungen zufriedenstellend erklärt [C 32-2]. Damit war das von W. HARKINS und von E. RUTHERFORD [R 20-1] seit 1920 vermutete und mehrfach gesuchte *Neutron* und zugleich die erste Kernreaktion zu seiner Erzeugung gefunden. Auch heute noch stellt sie eine viel gebrauchte Neutronenquelle dar.

Weitere Arten von Kernreaktionen wurden in rascher Folge bekannt. 1932 gelang J. D. COCKCROFT und E. T. S. WALTON [C 32-3] die erste Kernreaktion mit künstlich beschleunigten Protonen an Li. In Fortführung dieser Versuche fanden M. L. E. OLIPHANT, P. HARTECK und O. M. RUTHERFORD 1934 die ersten mit *Deuteronen* erzielbaren Prozesse, darunter die intensive Neutronenerzeugung bei Beschuß von Deuteronen mit Deuteronen [O 34-1].

Der *Kernphotoeffekt* wurde 1934 von J. CHADWICK und M. GOLDHABER [C 34-1] am Deuteron beobachtet und ermöglichte die erste genaue Massenbestimmung des Neutrons.

Im gleichen Jahre entdeckten I. CURIE und F. JOLIOT [C 34-2] an Reaktionen von α-Strahlen mit B, Mg und Al die *künstliche Radioaktivität*, die hier in der Emission von *Positronen* besteht, welche übrigens auf diese Weise erstmals im Laboratorium durch eine Kernreaktion erzeugt wurden. Hieran anschließend erkannte man bald die Existenz aller Arten von künstlicher Radioaktivität an den Produkten der Reaktionen mit Neutronen, Protonen und anderen Teilchen. Auffallend leicht und zahlreich erhielt man Prozesse mit Neutronen, die wegen des Fehlens einer elektrischen Ladung ungehindert in jeden Kern eindringen können.

Insbesondere fand E. FERMI 1934 [F 34-1] bei und nach Beschuß der meisten Elemente mit Neutronen eine große Menge verschiedener Aktivitäten und bemerkte kurz darauf eine überraschend starke Wirksamkeit der langsamen Neutronen bzw. von Neutronengruppen bestimmter Geschwindigkeit. Durch letzteres wurde (1935) der sog. *Resonanzeinfang* bekannt.

Eine folgenschwere Entdeckung ergab sich 1934 an U, dessen auffallend vielfältige Aktivitäten FERMI *Transuranelementen* zuschrieb, welche bei der Neutronenbestrahlung entstehen sollten [F 34-1]. Die Ergebnisse waren aber zunächst zu komplex, als daß die Identifizierung eines bestimmten Transuranelementes gelang. Die von IDA NODDACK [N 34-1] schon 1934 geäußerte Vermutung, daß hier eine neuartige Kernreaktion — die heutige *Kernspaltung* — zu größeren Bruchstücken, als den bis dahin bekannten α-Teilchen führen könnte, wurde kaum beachtet, da eine solche Annahme damals offenbar zu unwahrscheinlich erschien und exakte experimentelle Beweise fehlten.

So setzte die letzte Phase der Entwicklung, welche zur wirklichen Entdeckung der Kernspaltung führte, erst viel später ein. Den Anstoß dazu gaben 1938 IRÈNE CURIE und P. SAVITCH [C 38-1] durch die Auffindung eines neuen Körpers mit 3,5 h Halbwertszeit, welcher die Eigenschaften einer Seltenen Erde zeigte.

Durch äußerst sorgfältige radiochemische Untersuchungen stellten nun O. HAHN und F. STRASSMANN Ende 1938 definitiv fest, daß unter den Produkten der Neutronenreaktion mit Uran das Element Barium vorkommt [H 39-1]. Der Urankern

zerfällt danach in Ba und einen Restkern Kr. Später fand man noch eine große Anzahl weiterer Reaktionsprodukte. Damit war eine völlig neuartige Kernreaktion entdeckt, die *Uran-Spaltung*: Der U-Kern zerfällt in zwei etwa gleich große Teile, ganz im Gegensatz zu allen früher bekannten Prozessen, bei denen nur die Emission von Neutronen und Protonen, höchstens aber von α-Teilchen zu beobachten gewesen war. Daß bei einem solchen Prozeß die ungewöhnlich große Energie von etwa 200 MeV frei werden müßte, erkannten LISE MEITNER und O. R. FRISCH [M 39-1]. Letzterer wies daraufhin die Spaltprodukte durch ihre außerordentlich starke Ionisationswirkung nach [F 39-1], was alsbald auch in vielen anderen Laboratorien unabhängig voneinander bestätigt wurde.

Unmittelbar nach der Entdeckung der Uran-Spaltung setzte von verschiedenen Seiten eine eifrige Suche nach etwaigen während des Prozesses frei werdenden Neutronen ein, und F. JOLIOT-CURIE, L. KOWARSKY und H. v. HALBAN [J 39-1], [H 39-2] fanden 1939 als erste eine *Vermehrung der Neutronenzahl* durch die Spaltungsreaktion. Parallel dazu bemerkten R. B. ROBERTS, R. C. MEYER und P. WANG [R 39-1] eine auch nach Beendigung der Neutronenbestrahlung auftretende schwache, aber doch merkliche Gruppe von *verzögerten Neutronen*. Damit war die Möglichkeit der Erzeugung einer *regelbaren Kettenreaktion* gegeben, welche durch das Anlaufen des unter der Leitung von E. FERMI erstellten Uranreaktors bei Chicago am 2. Dezember 1942 erstmalig sichergestellt wurde.

Die starke Radioaktivität der Spaltprodukte stellt eine teils nützliche, teils aber eine äußerst unbequeme Beigabe der Uranspaltung dar. Unter den entstehenden etwa 250 Isotopen finden sich u. a. die in der Natur nicht vorkommenden (radioaktiven) Elemente Technetium Tc (Ordnungszahl $Z = 43$) und Promethium Pm ($Z = 61$).

Die spätere Entwicklung zeigte, daß bei der Neutronenreaktion mit U neben den mittelschweren Spaltprodukten auch die von FERMI vermuteten Transurane entstehen. Das erste unter ihnen, Neptunium ($Z = 93$), wurde 1940 von E. Mc MILLAN und P. H. ABELSON endgültig nachgewiesen [M 40-1].

In neuerer Zeit werden vielfach auch beschleunigte *Ionen* der leichten Elemente Li, B, C, N, O usw. zu Kernreaktionen herangezogen. Verschiedenste Reaktionstypen treten in großer Zahl auf. Bei Beschuß von schweren Kernen kann man neue, sonst nicht erreichbare Isotope mit Protonenüberschuß erhalten.

Eine neue Methode zur Kernanregung ist seit 1953 als „*Coulomb-Anregung*" bekannt (T. HUUS und Č. ZUPANČIČ [H 53-3]): Ein vorbeifliegendes geladenes Teilchen veranlaßt durch Anstoß über das elektrische Coulomb-Feld (daher der Name) einen Kern zur Aussendung von γ-Quanten.

Eine besondere Stellung unter den möglichen Reaktionspartnern nehmen die *Elektronen* ein. Diesen gegenüber sind alle natürlich vorkommenden Isotope völlig indifferent, sonst wären sie alle längst umgewandelt. Aber 1937 fand L. W. ALVAREZ [A 37-1] den von H. YUKAWA 1935 [Y 35-1] vorausgesagten *E-Einfang* (früher K-Einfang genannt), wobei der Kern ein Atomelektron absorbiert und damit seine Ladungszahl um Eins erniedrigt. Hier hat man tatsächlich die lange gesuchte Kernumwandlung durch Elektronen vor sich. Allerdings müssen solche E-einfangenden Kerne durch andere Kernreaktionen erst neu erzeugt werden.

Eine bedeutungsvolle Erscheinung, die allerdings keine Kernreaktion im üblichen Sinne darstellt, sondern eine Reaktion der γ-Quanten mit dem elektrischen Felde eines Atomkerns, ist die von P. M. S. BLACKETT und G. P. OCCIALINI 1933 erstmalig beobachtete Bildung eines *Elektron-Positron-Paares* beim Durchgang eines Höhenstrahlteilchens durch eine Pb-Platte. I. CURIE und F. JOLIOT sowie C. D. ANDERSON und S. NEDDERMEYER gelang 1934 auch die Beobachtung dieser *Paarbildung* mit der ThC″-γ-Strahlung in der Wilson-Kammer.
Es gibt auch den umgekehrten Vorgang der *Paarvernichtung*, wobei ein Positron mit einem Elektron zusammen verschwindet und dafür die Energie ihrer Massen in Form von γ-Strahlung auftritt (O. KLEMPERER, 1934). Beide Vorgänge bilden eine eindrucksvolle Bestätigung der von A. EINSTEIN 1905 erkannten *Äquivalenz zwischen Masse und Energie.*
Schließlich ist noch zu erwähnen, daß die lange gesuchten Kernreaktionen mit *Neutrinos* 1956 anscheinend endgültig sichergestellt wurde [R 56-2].
Damit ist die Reihe der Prozesse, die in das Gebiet der Kernreaktion mit Energien unter ≈ 100 MeV fallen, abgeschlossen.
Die Reaktionen mit Neutronen, Protonen, α-Strahlen und mit schweren Ionen wurden ausgiebig benutzt, um z. B. neue, in der Natur nicht vorkommende Elemente herzustellen. So wurde 1940 das letzte der noch unbekannten Elemente vor Uran, das Astatin At ($Z = 85$), durch eine Kernreaktion mit sehr schnellen α-Strahlen eines Zyklotrons erzeugt [C 40-1]. Ferner konnten bisher zehn *Transuranelemente* (insbesondere durch SEABERG und Mitarbeiter) hergestellt werden.
Die erstmalig erhaltenen Isotope und ihre Erzeugungsreaktionen waren außer bei Es und Fm[1]) die folgenden:

Neptunium	$_{93}Np^{239}$	durch Neutroneneinfang in U^{238} mit nachfolgendem β-Zerfall; 1940 [M 40-1];
Plutonium	$_{94}Pu^{238}$	durch Beschuß von U^{238} mit d und nachfolgendem β-Zerfall; Ende 1940 [S 46-1], [46-2];
Americium	$_{95}Am^{241}$	durch zweimaligen Neutroneneinfang, ausgehend von Pu^{239} und nachfolgendem β-Zerfall; Ende 1944 [S 49-1], [G 50-1];
Curium	$_{96}Cm^{242}$	durch Beschuß von Pu^{239} mit α; Mitte 1944 [S 49-2];
Berkelium	$_{97}Bk^{243}$	durch Beschuß von Am^{241} mit α; Ende 1949 [T 50-1];
Californium	$_{98}Cf^{244}$	durch Beschuß von Cm^{242} mit α; Anfang 1950 [T 50-2];
Einsteinium	$_{99}Es^{246}$	und
	$_{99}Es^{247}$	durch Beschuß von U^{238} mit N^{14}-Ionen; 1954 [G 54-1] [1]);
Fermium	$_{100}Fm^{324}$	durch intensive Neutronenbestrahlung und β-Zerfall, ausgehend von Cf^{252} über Es^{253}; 1954 [H 54-2] [1]);
Mendelevium	$_{101}Md^{256}$	durch Beschuß von Es^{253} mit α; 1955 [G 55-1];
Nobelium[2])	$_{102}No^{254}$	durch Beschuß von Cm^{246} mit C^{12}-Ionen; 1958 [S 58-1].

---

[1]) Einsteinium und Fermium sowie bis dahin unbekannte Isotope der Elemente Np bis Cf wurden schon früher in den Produkten aus der ersten thermonuklearen Explosion vom 1. Nov. 1952 auf den Marschallinseln gefunden; s. Phys. Rev. 99, 1048 (1955).

[2]) Vorläufig vorgeschlagener Name.

Inzwischen wurden eine große Anzahl anderer Isotope der o. g. neuen Elemente dargestellt und untersucht. Der Erzeugung noch höherer Elemente steht nur der zunehmend rascher werdende Zerfall entgegen.
Die für Arbeiten mit Kernreaktionen erforderlichen umfangreichen experimentellen Hilfsmittel zur künstlichen Beschleunigung von Teilchen sind in Bd. I dieses Buches (Abschnitt C) beschrieben. Heute (1960) sind alle Energiebereiche bis etwa 2,8 10^{10} eV durch Maschinen erreichbar. Die höchstenergetischen Teilchen von mehreren 100 MeV bis zu 10 GeV und darüber rufen ganz neue Typen von Kernreaktionen hervor. Das grundsätzlich Neue hierbei ist die Erzeugung schwerer Teilchen während der Reaktion; es entstehen u. a. π- und K-Mesonen, Hyperonen, Antiprotonen und Antineutronen, die ihrerseits wieder ganz neuartige Kernprozesse hervorrufen können (s. Kapitel VII).
In diesem Kapitel beschränken wir uns auf die Vorgänge im Gebiete niedriger Energien unterhalb etwa 100 MeV, bei denen diese neuen Elementarteilchen nicht entfernt zu berücksichtigen sind.
Im Abschnitt 1 werden an einigen Beispielen die bei Kernreaktionen auftretenden *charakteristischen Erscheinungen und Gesetzmäßigkeiten* besprochen. Nach Einführung der Bohrschen grundlegenden *Idee des Compoundkernes* betrachten wir die Energetik bei Kernreaktionen und die damit ermöglichte Bestimmung der Energieniveaus der Kerne. Danach behandeln wir die mit der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts zusammenhängenden Fragen sowie die zu ihrer Erklärung entwickelten und bewährten Vorstellungen. Zugleich machen wir uns mit den formelmäßigen Endresultaten wellenmechanischer Rechnungen bekannt, die eine im ganzen sehr brauchbare Beschreibung der Erscheinungen liefern. Mit dieser Grundlage betrachten wir im Abschnitt 2 eine Anzahl von *speziellen Kernreaktionen*, systematisch geordnet nach der Art der ein- und auslaufenden Teilchen. Im Abschnitt 3 ist die *Kernspaltung* wegen ihrer besonderen Eigenart separat behandelt.
In den Abschnitten 1 bis 3 werden nur Rechnungen nicht spezifisch quantenmechanischer Art explizite ausgeführt. Für einige gelegentliche Bemerkungen und für § 44 (Erhaltungssätze) ist der Abschnitt 4 sowie das Kapitel VIII, Theorie der Atomkerne, zu Rate zu ziehen. Im Abschnitt 4 werden hauptsächlich die in den §§ 32 bis 34 ohne Beweis angegebenen Resultate aus der *Theorie der Kernreaktionen* abgeleitet und damit die dort zurückgelassenen Lücken geschlossen. Darüber hinaus werden noch manche in den früheren Abschnitten nur kurz erwähnte Erscheinungen genauer behandelt. Einige Zusätze rein mathematischer Natur, welche im Text den physikalischen Gedankengang stören würden, sind in einem mathematischen Anhang zusammengestellt.
Mit Rücksicht auf den vorgesehenen Raum konnten feinere Details, wie die mit der Winkelverteilung und mit Winkelkorrelationen zusammenhängenden Fragen, nur gelegentlich gestreift werden. Hier muß auf die Spezialliteratur verwiesen werden.

1. DIE GRUNDLEGENDEN TATSACHEN ÜBER KERNREAKTIONEN

§ 24. Die verschiedenen Arten von Kernreaktionen

Zur Erzeugung von Kernreaktionen pflegt man in der Laboratoriumspraxis einen ruhenden *Targetkern*[1]) oder *Zielkern* A (der Massenzahl A) mit *Geschoßpartikeln* a (Massenzahl a) zu beschießen, wobei für letztere u. a. in Frage kommen: Protonen p, Neutronen n, Deuteronen d, Tritonen t, α-Teilchen, γ- Quanten und schließlich auch schwerere Kerne in Form mehrfach geladener Ionen von Li, C, O usw. Die Reaktion vollzieht sich – wenn sie überhaupt eintritt – in unmeßbar kurzer Zeit, in deren Verlauf meist ein Teilchen b der erstgenannten Art emittiert wird und ein sog. *Restkern* B übrig bleibt. Eventuell können bei sehr heftigen Prozessen mehrere Teilchen zugleich ausgesandt werden. Direkt beobachtbar sind nur die ein- und auslaufenden Partikel und unter besonderen Bedingungen auch der Restkern in der Gestalt eines Rückstoßteilchens.

Analog einer chemischen Gleichung beschreibt man den Reaktionsvorgang in dem einfachsten Falle der Emission eines einzigen Teilchens b symbolisch durch

$$\mathrm{A} + a = b + \mathrm{B}\,. \tag{24.1}$$

(Die Verallgemeinerung auf mehrere emittierte Teilchen liegt auf der Hand.) Der *Restkern* oder *Endkern* B kann stabil sein; in vielen Fällen ist er radioaktiv und wandelt sich durch Emission von Elektronen oder Positronen oder durch E-Einfang um. In selteneren Fällen entstehen langlebige γ-Strahler, sog. *Isomere.*

Die von RUTHERFORD entdeckte Umwandlung des Stickstoffes durch α-Strahlen des RaC′ war die Reaktion

$$\mathrm{N}^{14} + \mathrm{He}^4 = \mathrm{H}^1 + \mathrm{O}^{17}. \tag{24.2}$$

Hier führte das Eindringen eines He^4-Kerns in N^{14} im Verlaufe des Prozesses zur Emission eines Protons, H^1, von etwa 40 cm Reichweite (in N_2 unter Normalbedingungen). Der übrigbleibende Restkern O^{17} war zur Zeit der Rutherfordschen Entdeckung (1919) als Isotop nicht bekannt, er konnte aber später von BLACKETT (1925) mit Hilfe der Wilson-Kammer durch Bestimmung seiner Massenzahl nachgewiesen werden. Für (24.1) bzw. (24.2) benutzt man auch die abgekürzte Schreibweise nach BOTHE und FLEISCHMANN:

$$\mathrm{A}(a, b)\mathrm{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{N}^{14}(\alpha, p)\,\mathrm{O}^{17}. \tag{24.3}$$

[1]) Mit Target (= Zielscheibe) bezeichnet man kurz die beschossene Materieschicht.

In der Klammer steht zuerst das Geschoßteilchen a, danach das während der Reaktion emittierte Teilchen b, links von der Klammer der Zielkern und rechts der Endkern. Zur kurzen Kennzeichnung spricht man auch von einem (a, b)-Prozeß für die Reaktion A (a, b) B. Genau wie bei chemischen Reaktionen verlaufen Kernreaktionen teils unter Entwicklung einer *Reaktionsenergie* Q ($Q > 0$, *exotherme* Reaktion), teils wird Energie verbraucht ($Q < 0$, *endotherme* Reaktion, wie bei (24.2)). Im letzteren Falle setzen die Prozesse überhaupt erst bei einer bestimmten, sog. „*Schwellenenergie*" der Geschoßpartikel ein. Für die Energiebilanz schreibt man abgekürzt

$$\mathrm{A} + a = b + \mathrm{B} + Q, \tag{24.4}$$

indem man unter A, a, b und B jetzt die Energieinhalte der betreffenden Kerne (im Ruhezustand) versteht. Q erscheint experimentell als der durch die Reaktion verursachte (maximale) Zuwachs der kinetischen Energien der Partikel.
Bei allen Kernreaktionen mit Energien unterhalb etwa 140 MeV werden nach vorliegenden Erfahrungen keine neuen, mit Ruhemasse behafteten Teilchen erzeugt; die Gesamtzahl der Neutronen und Protonen bleibt erhalten. Dabei verhält sich der Kern bei allen Prozessen als ein System von Nukleonen, das gemäß der Quantenmechanik — jedenfalls bei nicht zu hohen Energien — eine *diskrete* Anzahl von relativ gut definierten *Energiezuständen* aufweist, welche für jede Kernart eine (wie bei Atomspektren) *charakteristische Termfolge* bilden. Bei hohen Energien verschwimmen die Terme in ein Kontinuum. Dementsprechend zeigt ein Kern — ganz wie die Atomhülle — bei niederen Energien ein ausgesprochen selektives, sog. *Resonanzverhalten*, welches mit wachsender Energie in ein kontinuierliches übergeht.
γ-Quanten werden während einer Kernreaktion absorbiert oder hervorgebracht. Positronen und Elektronen, welche oft beobachtet werden, sind dagegen praktisch immer als Produkte des spontanen radioaktiven Zerfalls der neu gebildeten Kerne zu deuten. Ihre Emission erfolgt fast stets so langsam, daß sie für die kurze Dauer einer Kernreaktion praktisch zu vernachlässigen ist.[1])

Unter den Kernreaktionen kann man im wesentlichen folgende Arten unterscheiden:

1. *Elastische Streuung oder Stöße; (a, a)-Prozesse*

Bei der Reaktion wird das auftreffende Geschoßteilchen a selbst oder ein anderes *Teilchen der gleichen Art* wieder emittiert, und zwar haben die Teilchen — gemessen *im Schwerpunktssystem — vor und nach dem Stoß* die *gleiche Geschwindigkeit*. Die inneren Energien (Anregungszustände) der Stoßpartner bleiben unverändert. (Bei geladenen Teilchen gibt es auch eine Streuung durch das elektrostatische Kraftfeld der Kerne, was aber nicht als eigentliche Kernreaktion bezeichnet wird.)

---

[1]) Eine Ausnahme ist der für die Energieerzeugung im Innern der Sterne wichtige Prozeß $\mathrm{H} + \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{D} + \beta^+$ oder die Emission eines Elektron-Positron-Paares aus dem 6,05 MeV-Niveau des O^{16} bei der Reaktion $\mathrm{F}^{19} + \mathrm{H}^1 \rightarrow \mathrm{He}^4 + \mathrm{O}^{16}$.

2. *Unelastische Streuung oder Stöße; (a, a′)-Prozesse*

Hier ist das emittierte Teilchen a' wieder das Geschoßteilchen a selbst oder ein anderes *Teilchen der gleichen Art*. Es hat aber — gemessen im Schwerpunktssystem — eine *kleinere Geschwindigkeit* als das stoßende Teilchen a, was durch den Strich (a') angezeigt werden soll. Der Verlust an kinetischer Energie der Relativbewegung der Teilchen findet sich in der Anregungsenergie des Restkerns (und eventuell in der von a') wieder.

3. *Austauschreaktionen; (a, b)-Prozesse*

Hier kommt für ein einfallendes Teilchen a ein Teilchen b *einer anderen Art* heraus. Haben a und b verschiedene Ladungen, so tritt eine *Elementumwandlung* ein. Als emittierte Teilchen kommen bei Reaktionen im Gebiet unterhalb von etwa 50 MeV im wesentlichen nur Neutronen, Protonen und α-Teilchen vor, ferner Tritonen und He^3 sowie in sehr seltenen Fällen auch Deuteronen. Bei einer durch eine bestimmte Teilchensorte a verursachten Kernreaktion können i. allg. mehrere verschiedene Arten von Sekundärteilchen auftreten, sobald die Energieverhältnisse und gewisse Auswahlregeln es erlauben.

4. *Mehrfachprozesse; Spallation*

Bei größeren Energien treten Mehrfachprozesse vom Typ $(a, n p \ldots)$ auf: Ein einzelnes Geschoßteilchen a führt zur *Emission mehrerer Teilchen* verschiedener oder gleicher Art. Bei Energien der Ordnung 100 MeV wird in der Regel eine größere Anzahl Neutronen, Protonen oder α-Teilchen herausgeschlagen. Man nennt diese Prozesse auch *Spallation*.

5. *Einfangsreaktionen; (a, γ)-Prozesse*

Das Teilchen a wird vom Zielkern *absorbiert*, während die dabei frei werdende Energie in Form von *γ-Strahlung* ausgestrahlt wird. Besonders häufig sind diese Prozesse mit langsamen Neutronen. In manchen Fällen wird die Reaktionsenergie nicht als γ-Strahlung abgeführt, sondern geht direkt auf ein Hüllenelektron über, welches dann als sog. *Konversionselektron* das Atom verläßt. Diese haben im Gegensatz zu den β-Strahlen scharf definierte Energien.

6. *Kernphotoeffekt; (γ, b)-Prozesse (Umkehrprozeß zu 5)*

Ein *γ-Quant* kann von einem Kern *vollständig absorbiert* werden, wobei die absorbierte Energie zur *Emission eines Nukleons*, meist eines Neutrons, führt.

7. *γ-Anregung; (γ, γ) und (γ, γ′)-Prozesse*

Durch Absorption eines γ-Quants wird der Kern in einen *angeregten Zustand* versetzt, aus welchem er darauf durch Emission eines γ-Quants oder manchmal eines Konversionselektrons wieder in den Grundzustand (evtl. über Zwischenstufen) zurückfällt.

8. *Coulomb-Anregung*

Das am Orte des Zielkerns zeitlich stark veränderliche elektrische Feld eines vorbeifliegenden geladenen Teilchens führt zur Kernanregung mit darauffolgender γ-Emission. Der Vorgang ähnelt einer γ-Anregung nach 7.

9. *Kernspaltung*

Der Beschuß der schwersten Kerne mit Neutronen, Protonen, α-Teilchen oder γ-Quanten führt in manchen Fällen zur *„Kernspaltung" in zwei etwa gleich große Teile.* Besonders bedeutungsvoll ist die Spaltung des U und seiner Nachbarelemente durch Neutronen und die Tatsache, daß hierbei pro Spaltung 2 bis 3 neue Neutronen freigesetzt werden.

10. *E-Einfang*

Einige instabile Kerne absorbieren ein K-, L-, M-Elektron usw. aus der *Elektronenhülle* des Atoms; der Vorgang ist eine inverse β-Emission. Die Reaktionsenergie wird in Form von Neutrinostrahlung abgeführt. Experimentell wird der E-Einfang durch das Auftreten der K-, L-, M- usw. -Röntgenstrahlung des Folgekerns sowie durch dessen Rückstoß feststellbar.

11. *Elastische und unelastische Streuung von Elektronen*

Bei (e, e)- und (e, e')-Prozessen mit *sehr schnellen Elektronen* macht sich die *Ladungsverteilung im Kerninnern* bemerkbar. Diese Streuprozesse werden daher u. a. zur Erforschung der Struktur der Kerne benutzt.

12. *Kernreaktion mit Neutrinos*

In jüngster Zeit (1956) gelang es, in dem intensiven Neutrinostrom eines Kernreaktors den Nachweis einer *Neutrinoreaktion* zu erbringen, bei der Protonen unter Emission eines Positrons in Neutronen umgewandelt werden.

13. *Paarerzeugung durch γ-Quanten*

Aus einem γ-Quant hinreichender Energie ($>$ 1,02 MeV) entsteht in dem starken elektrischen Feld von Atomkernen ein *Elektron-Positron-Paar* (*Paarerzeugung*):

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-.$$

Der Prozeß ist eine Reaktion des γ-Quants mit dem elektrischen Felde eines Atomkerns und stellt somit keine eigentliche Kernreaktion dar. Im inversen Prozeß der *Paarvernichtung* verschwindet ein Positron zusammen mit einem Elektron unter Erzeugung von zwei oder drei γ-Quanten gleicher Energie:

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\,\gamma \text{ (oder seltener } 3\,\gamma).$$

Im folgenden beschäftigen wir uns im wesentlichen mit den Reaktionstypen 1 bis 9, während 11 und 12 als Sonderfälle nur kurz behandelt sind.

§ 25. Der Zwischenkern oder Compoundkern

Die im § 24 genannten Prozesse an einem Kern als einer dichtgepackten Ansammlung von Nukleonen legen die Vorstellung nahe, daß bei einer Kernreaktion ein von außen auftreffendes Teilchen mit einem der Kernnukleonen kollidiert und dieses sogleich aus dem Kern hinausstößt. Der Vorgang würde sich dann innerhalb einer Zeit der Größenordnung $\tau_0 \approx 10^{-22}$ sec abspielen, denn die Geschwindigkeit eines Nukleons im Kern beträgt einige $10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ (s. § 57), und die Kerndurchmesser liegen bei einigen 10^{-13} cm, so daß $\tau_0 \approx \frac{10^{-13}}{10^9} = 10^{-22}$ sec zu erwarten ist. Zweifellos gibt es — insbesondere bei hohen Energien — Prozesse, die auf diese Weise zustande kommen. Wesentliche Züge der Kernreaktionen bei niederen Energien lassen sich jedoch nicht mit dieser Vorstellung vereinbaren. Historisch waren es insbesondere die von FERMI 1935/36 entdeckten, unerwartet scharfen und dicht gelegenen *Einfangresonanzen* mit Neutronen, die eine andere Vorstellung von den inneren Vorgängen bei Kernreaktionen notwendig machten. Sie führten NIELS BOHR sowie auch BREIT und WIGNER 1936 zu der Idee des sog. *Compound-* oder *Zwischenkerns,* wonach sich eine Kernreaktion in zwei gut getrennten Schritten vollzieht:

1. Das auftreffende Teilchen verschmilzt in der ersten Phase mit dem Zielkern zu einem neuen, stark angeregten Compound- oder Zwischenkern. Hierbei wird angenommen, daß die *Energie* des eingedrungenen Teilchens – bestehend aus seiner kinetischen Energie vor der Reaktion zuzüglich der Bindungsenergie – sehr schnell durch Zusammenstöße auf viele Kernnukleonen *praktisch gleichmäßig verteilt wird, so daß keines der Kernteilchen in der Lage ist, gegen die Bindungsenergie das Compoundsystem zu verlassen.* Dieses bildet dann ein hochangeregtes System von $A + a$ Nukleonen in einem *quasistationären Quantenzustand.* Die Anzahl solcher Energiezustände wächst sehr stark mit der Gesamt-Teilchenzahl und mit der Anregung des Kernes an (s. § 59).

2. Der gemäß 1. gebildete Compoundkern vollführt nun in der zweiten Phase nach Art aller radioaktiven Kerne eine *spontane Umwandlung,* z.B. eine Teilchenemission, mit einer *bestimmten mittleren Lebensdauer* τ, die i. allg. unmeßbar kurz zu sein pflegt (10^{-18} bis 10^{-19} sec), aber jedenfalls bedeutend länger ist, als die oben erwähnte „Elementarzeit“ oder „*Stoßzeit*“ von $\tau_0 \approx 10^{-22}$ sec. Der Zerfall kann dabei auf verschiedene Weise erfolgen. Die relativen Häufigkeiten der Umwandlungsarten hängen im wesentlichen nur von der Anregungsenergie des Compoundkerns ab und nicht von der Art und Weise seiner Erzeugung durch eventuell ganz verschiedene Kernreaktionen. Letztere beeinflussen den Zerfallscharakter nur insofern, als die Höhe der Anregung sowie andere Parameter, welche gewisse Auswahlregeln befolgen, davon abhängen.

Eine wesentliche Seite der Compoundvorstellung ist die gegenüber τ_0 sehr lange Lebensdauer des Zwischenkerns. Dies bedingt nämlich (s. § 32) quantentheoretisch

die Existenz wohldefinierter Energie-Niveaus des Compoundkerns, welche übrigens — wie bei der Atomspektroskopie — zu dessen Identifizierung benutzt werden können. Die Bedeutung dieser quasistationären Energiezustände liegt darin, daß sie bei einer Kernreaktion beobachtbar sind, und zwar durch das resonanzartige Ansteigen der Bildungswahrscheinlichkeit des Compoundkerns, sobald die experimentell variierte Anregungsenergie mit einem dieser Energie-Niveaus übereinstimmt (sog. *Compoundresonanzen*).

Im Sinne der Compoundvorstellung hat man also statt (24.1) ausführlicher zu schreiben

$$A + a \rightarrow C^* \rightarrow b + B, \tag{25.1}$$

wo C* den intermediär gebildeten Zwischenkern bezeichnet. Der Stern * soll auf hohe Anregung hinweisen.

Die eingangs erwähnte $N(\alpha, p)$-Reaktion lautet in der Schreibweise von (25.1)

$$N^{14} + \alpha \rightarrow F^{18*} \rightarrow O^{17} + p. \tag{25.2}$$

Der Zwischenkern F^{18*} läßt sich auch auf anderen Wegen herstellen, und er kann auch auf andere Arten zerfallen, wie im folgenden Schema angedeutet wird:

$$\begin{array}{lcl}
\cdots\cdots\cdots \searrow & & \nearrow \cdots\cdots\cdots \\
N^{14} + \alpha \searrow & & \nearrow N^{14} + \alpha \\
O^{17} + p \rightarrow & & \rightarrow O^{17} + p \\
 & F^{18*} & \\
O^{16} + d \rightarrow & & \rightarrow F^{17} + n \\
F^{17} + n \nearrow & & \searrow F^{18} + \gamma \\
\cdots\cdots\cdots \nearrow & & \searrow \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

In der Literatur ist es üblich, einen jeden der möglichen Wege zur Compoundbildung und des Zerfalls als „Eingangs-" und „Ausgangs-Kanal", allgemein als „Reaktions-Kanal" zu bezeichnen.

In allen diesen Fällen beobachtet man — sofern sich die Anregungsbereiche experimentell überlappen — dieselben für F^{18} charakteristischen Energieterme.

Es gibt auch mehrere Kernreaktionen, bei denen F^{18} als Restkern auftritt, z. B.

$$O^{18} + p \rightarrow n + F^{18},$$
$$Ne^{20} + d \rightarrow \alpha + F^{18},$$
$$F^{19} + \gamma \rightarrow n + F^{18}.$$

An diesen Reaktionen lassen sich i. allg. die weniger stark angeregten Terme von F^{18} beobachten, während an den Reaktionen, welche über F^{18} als Compoundkern führen, die hochangeregten Terme in Erscheinung treten. Ganz allgemein sind durch Beobachtungen von Compoundresonanzen die höher angeregten Zustände zu erfassen, da schon allein die Bindungsenergie der auftreffenden Partikel in jedem Falle eine Anregung auf > 5 MeV bedingt. Am Restkern dagegen lassen sich die tieferen Niveaus erkennen (s. § 28).

Über eine Besonderheit der geladenen Teilchen bei der Bildung oder beim Zerfall des Compoundkerns ist noch folgendes zu bemerken: Der Annäherung eines solchen Teilchens an den Zielkern wirkt die elektrostatische Abstoßung der Kernladungen entgegen, bis bei Erreichung der „Oberfläche" des Zielkerns die eigentlichen Kernkräfte das ankommende Teilchen in den Kern hineinziehen. Die Geschoßpartikel muß daher vor Erreichen des Zielkerns einen u. U. beachtlichen Potentialwall überwinden, der als *Coulomb-Wall* oder *Gamow-Berg* bezeichnet wird. Ein *auslaufendes* geladenes Teilchen hat denselben Potentialwall – nur in umgekehrter Richtung – zu durchlaufen. Die Existenz dieser Potentialbarriere vermindert bei niedrigen und mittleren Energien in hohem Maße das Zustandekommen der Kernreaktionen, an denen geladene ein- oder auslaufende Teilchen beteiligt sind.

Die Idee des Compoundkerns mit seinen quasistationären Zuständen hat sich im Bereich der *Anregungsenergien* bis zu etwa 50 MeV gut bewährt. Bei höheren Energien treten immer häufiger Prozesse auf, bei denen die angestoßenen Nukleonen offenbar sofort aus dem Kern fliegen und nicht längere Zeit im Compoundsystem verbleiben. Bei Energien über 100 MeV werden diese direkten Prozesse dominierend, worüber im Kapitel VII berichtet wird.

§ 26. Experimentelle Anordnungen zur Beobachtung von Kernreaktionen

Zur quantitativen Beobachtung der beschriebenen Kernprozesse kann man im einfachsten Falle ihre Gesamtausbeute in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Teilchen messen; je nach dem Typ der betrachteten Reaktion wird man also die Intensität der emittierten n-, p- oder γ-Strahlung usw. registrieren, in anderen Fällen wieder die Menge der entstandenen radioaktiven Folgeprodukte feststellen. Für weitergehende physikalische Schlüsse ist das *Energiespektrum*, die *Winkelverteilung* und evtl. die *Polarisation der ausgesandten Strahlung* zu bestimmen.

Um die für genaue Messungen erforderliche, möglichst homogene Primärstrahlung herzustellen, kann man mittels elektronischer Hilfseinrichtungen die Spannung an der Ionenröhre stabilisieren, wobei sich mit heutigen Mitteln eine Stabilität von etwa 0,2 % erreichen läßt. Noch besser wird man durch eine *magnetische Ablenkung* um etwa 90° die Teilchen nach ihren Impulsen sortieren und danach ausblenden. Zweckmäßigerweise regelt man dann die Hochspannung automatisch mit Hilfe der für die Reaktion vorgesehenen Teilchensorte selber, oder man benutzt dazu eine andere im Ionenstrom enthaltene Partikelart.

Statt magnetischer lassen sich auch *elektrostatische Analysatoren* bauen, bei denen die Ionen zwischen zwei z. B. koaxialen Zylinderelektroden abgelenkt werden. Dabei sind Magnetfeld H und elektrisches Feld E bezüglich ihrer Ablenkungseigenschaften einander äquivalent, wenn — E in $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}$ und H in Oersted gemessen —

$$E = 300\,\frac{v}{c}\,H$$

gewählt wird und sowohl E als auch H senkrecht zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ stehen. c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit.

Ähnliche Ablenkanordnungen werden auch zur Analyse der bei Kernreaktionen *emittierten Teilchen* angewandt.

Um die hohe Präzision der Energiemessungen auch ausnutzen zu können, verwendet man meist sehr dünne Targetschichten, in denen die Energieverluste durch Bremsung der Teilchen die erreichte Meßgenauigkeit nicht übersteigen dürfen.

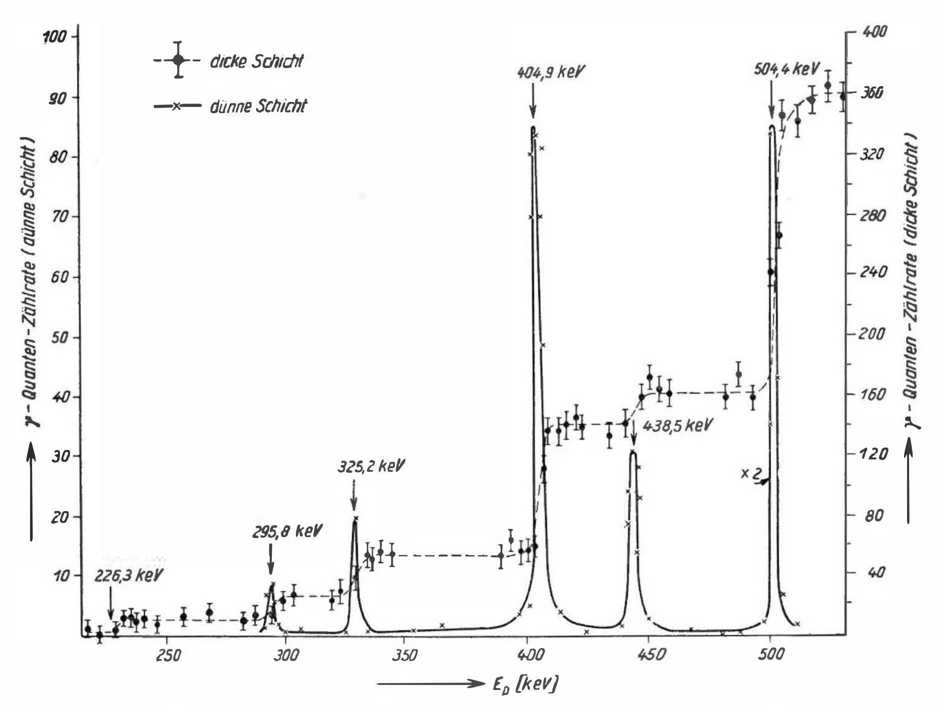


Abb. 42. γ-Quantenausbeute der Reaktion Al^{27} (p, γ) Si^{28} bei dünnen und dicken Target-Schichten

Bei einem sehr dicken Target würden die einfallenden Teilchen im Material abgebremst, mit allen Geschwindigkeiten bis zu Null auf die Zielkerne fallen und dadurch i. allg. genauere Details verdecken.

Abb. 42 zeigt am Beispiel der Reaktion Al^{27} (p, γ) Si^{28} den Unterschied der Meßergebnisse, je nachdem, ob man ausreichend dünne oder sehr dicke Targets verwendet. Wie leicht verständlich, stellt die Kurve für dicke Targets etwa das Integral über die für dünne Schichten dar: Die Existenz einzelner *Resonanzenergien* (Stellen großen Wirkungsquerschnitts) ist hier nur noch an den „Treppenstufen" der Anregungskurve zu erkennen. Da man bei allzu dünnen Schichten keine genügenden Beobachtungsintensitäten bekommt, wählt man oft die Targetdicke so, daß der Bremsverlust in der Größenanordnung der Auflösungsschärfe der

Energiemessung liegt. Um aber andererseits die Schwierigkeiten der Herstellung dünner Targets mit sauberer Oberfläche zu umgehen, kann man in vielen Fällen auch mit dicken Targets arbeiten und gerade die obengenannten Treppenstufen zur Analyse benutzen.

Zur *Messung des Teilchenstromes* verwendet man

1. *Faraday-Käfige* als Sammelelektroden, wobei darauf zu achten ist, daß keine Verfälschung durch Sekundärelektronen eintritt. Bei kleinsten Intensitäten kann man

2. auch die von den Teilchen erzeugten *Sekundärelektronen* — über einen Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) verstärkt — zur integralen Messung oder zur Zählung der Einzelteilchen benutzen, oder man bedient sich

3. eines *Szintillationszählers* (Kristall + SEV) bzw. eines *Leuchtschirmes* mit nachfolgendem Photomultiplier. Ebenso sind hierfür

4. die *Ionisationskammer*,

5. der *Geiger-Müller-Zähler* und schließlich *Proportionalzähler* sowie

6. die *photographische Platte* als Registrierinstrument zu erwähnen.

Die Möglichkeit der Beobachtung kleiner Intensitäten wird bei Messungen mit hoher Auflösung zur dringenden Forderung, da hierbei eine weitgehende Ausblendung des Strahlstromes notwendig und dieser dadurch stark geschwächt wird. Bei solchen Versuchen ist auch oft die genaue Messung der Beobachtungsrichtung ϑ gegenüber der Einfallsrichtung erforderlich. Zur Untersuchung der Winkelverteilung der Reaktionsprodukte, welche eine wichtige Hilfe bei der Deutung vieler Reaktionen darstellt, hat man außerdem Maßnahmen zur meßbaren Änderung des Beobachtungswinkels vorzusehen.

Eine Anordnung, bei der die unter 90° emittierten Reaktionsprodukte in ihrem Energiespektrum analysiert werden, zeigt das Schema der Abb. 43. Der aus der Beschleunigungsanlage durch die Blende B_1 hindurchgehende Primärstrahl D wird durch das Magnetfeld $\mathfrak{H}_1$ – z. B. wie in der Abb. 43 um 90° – abgelenkt und aus dem so erzeugten „*Spektrum*" die gewünschte Energie E mittels der Blende B_2 ausgeblendet. Die auf diese Weise homogenisierten Geschoßteilchen treffen auf das Target T. Die bei der Reaktion unter 90° emittierten

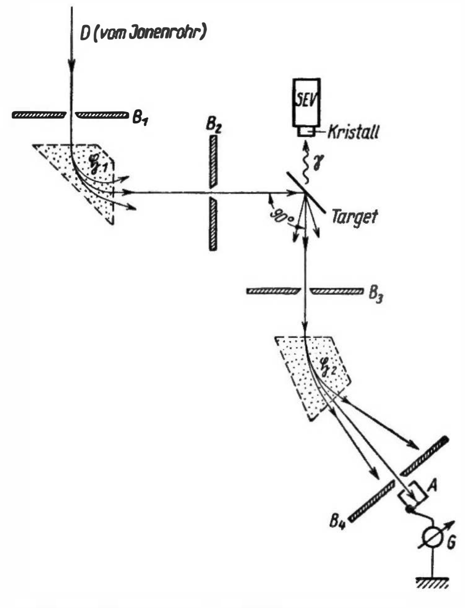


Abb. 43. Schema einer Anordnung zur Analyse des Energiespektrums der senkrecht zum Primärstrahl emittierten geladenen Teilchen

geladenen Teilchen treten durch die Blende B_3, werden durch das Magnetfeld $\mathfrak{H}_2$ spektral zerlegt, laufen durch die Blende B_4 und gelangen in die Nachweisapparatur A, welche die ankommenden Teilchen registriert, z.B. zählt. Da die Art der Teilchen als bekannt vorausgesetzt werden kann, ist deren Energie durch die Geometrie des Apparates, das ist die Blendenstellung, und durch das Magnetfeld $\mathfrak{H}_2$ eindeutig definiert. Für $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ kann man am besten von Blende zu Blende geschwindigkeitsfokussierende Magnetfelder benutzen.

Wenn man einen γ-Zähler in der Nähe des Targets aufstellt, können auch *Koinzidenzen* zwischen Teilchenemission und γ-Strahlung festgestellt werden. Die Verwendung etwa eines Szintillationszählers mit nachfolgendem Einkanalanalysator ermöglicht dabei noch eine Selektion bestimmter Energiebereiche der γ-Quanten. Dadurch wird die gegenseitige Zuordnung der Zählungen erleichtert und gleichzeitig der Nulleffekt durch zufällige Koinzidenzen mit unerwünschten Streustrahlungen verringert.

Die Homogenisierung von langsameren Neutronenstrahlen sowie die Analyse des Energiespektrums der bei der Kernreaktion emittierten Neutronen erfordern andere Verfahren, die im Teil D, Neutronenphysik, beschrieben sind. Über die Gewinnung monoenergetischer Neutronen aus Kernreaktionen sei auf § 28 und § 37 sowie auf § 39, Abschnitt (p, n)- und (d, n)-Prozesse, verwiesen.

§ 27. Die Äquivalenz von Masse und Energie bei Kernreaktionen

Bei Kernreaktionen tritt in der Regel eine Energieentwicklung auf, welche die bei chemischen Prozessen gewohnte um mehr als das 10^6-fache übertrifft. Bei chemischen Reaktionen bleibt die Summe der Massen der Reaktionspartner bekanntlich innerhalb der bisher erreichten Meßgenauigkeit konstant. Im Falle der Kernprozesse ist dies wegen des außerordentlichen Energieumsatzes nicht mehr der Fall, wie A. EINSTEIN schon 1905 voraussah. Aus der speziellen Relativitätstheorie leitete er damals die fundamentale Beziehung zwischen Energie E und träger Masse m ab:

$$E = mc^2 \tag{27.1}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit). Zahlenmäßig gilt

Ein Tausendstel atomarer Masseneinheit (1 TME) = 931 keV.

Am Schluß seiner Arbeit „Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?“ bemerkte EINSTEIN [E 05-1]: „Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energiegehalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird“. Diese Erwartung hat sich an den Kernreaktionen und spontanen Kernumwandlungen vollauf bestätigt.

Als besonders drastisches Beispiel zur Gleichung (27.1) nennen wir die Vernichtung eines Positron-Elektron-Paares, wobei die Masse der beiden Teilchen, zusammen

$2 \cdot 0{,}911 \cdot 10^{-27}$ g = 1,10 TME, verschwindet und dafür *zwei* γ-Quanten mit einer Energie von je 511 keV oder drei γ-Quanten mit insgesamt 1,02 MeV entstehen, was genau der Einsteinschen Formel (27.1) entspricht.

Wegen der grundlegenden Bedeutung dieser Beziehung auf dem Gebiete der Kernreaktionen bringen wir eine einfache Ableitung: Wir setzen nur voraus, daß 1. alle Energieformen ineinander umwandelbar sind, 2. der Energie- und Impulssatz in allen Fällen zutrifft und 3. der (mechanische) Impuls eines elektromagnetischen Wellenzuges (oder Wellenpaketes) der Energie E den aus der Maxwellschen Theorie folgenden Wert besitzt:

$$p = \frac{E}{c}. \tag{27.2}$$

Dieser Impuls des Lichtes wurde bekanntlich von Lebedew (1901) experimentell bestätigt. Wir betrachten nun ein Gedankenexperiment: Von dem linken Ende A eines „Raumschiffes" S der Länge l und der Masse M senden wir nach rechts (in Abb. 44) einen elektromagnetischen Wellenzug der Energie E ($\lll Mc^2$) und von einer gegen l vernachlässigbaren Länge ab. Am rechten Ende B werde diese Energie vollständig absorbiert, in eine beliebige andere Energieform, z. B. in Wärme, übergeführt und wieder nach A zurücktransportiert.

Durch den Rückstoß bei der Emission der Welle bekommt das „Raumschiff" S eine Geschwindigkeit $v = \frac{p}{M} = \frac{E}{cM}$ nach links und behält sie während der Laufzeit der Welle $t = \frac{l}{c}$ bei. (Die hier gemachte irreale (!) Annahme der „Starrheit" des „Raumschiffes" ist nicht wesentlich. Bei der Absorption der Welle in B kommt S wieder zur Ruhe, hat sich aber gegenüber seiner Ausgangsposition um $x = vt = \frac{lE}{c^2M}$ nach links bewegt. Beim Rückstransport der Energie von B nach A muß diese Verschiebung x wieder genau aufgehoben werden: Denn sonst hätte sich das „Raumschiff" von seinem alten Ort fortbewegt, ohne daß sich an dem System insgesamt etwas verändert hätte, und lediglich durch den inneren Kreislauf einer gewissen Energiemenge wäre das „Raumschiff" ohne Anstoß von außen in Bewegung geraten, was mit dem Satz von der Erhaltung des Impulses unvereinbar ist. Die von B nach A transportierte Energie muß daher eine träge Masse m besessen haben, die bei ihrer Verschiebung nach links das „Raumschiff" um $x = \frac{ml}{M}$ nach rechts bewegt haben muß. Der Vergleich mit dem vorigen Wert für x zeigt, daß der Impulssatz notwendig fordert: $E = mc^2$, also Gleichung (27.1).

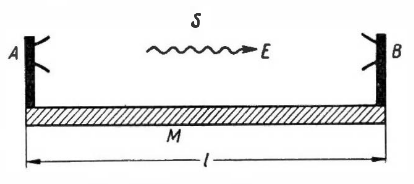


Abb 44. Zur Ableitung der Beziehung $E = mc^2$

Da der Energietransport von B nach A prinzipiell in jeder beliebigen Energieform möglich ist, gilt (27.1) für alle Arten von Energien, z. B. für die kinetische Energie oder auch für die Energie der Kernkräfte. —

Wir leiten noch einige oft gebrauchte Beziehungen im Anschluß an (27.1) ab: Zuerst betrachten wir die Veränderlichkeit einer Masse mit der Geschwindigkeit v. Eine Kraft K wirke in Richtung der Geschwindigkeit auf eine bewegte Masse m. Nach Newtons Definition der Kraft ist $K = \frac{d(mv)}{dt}$. Die kinetische Energie muß nach (27.1) pro Zeiteinheit um $\frac{dE}{dt} = \frac{c^2\,dm}{dt}$ zunehmen. Der Energiesatz besagt daher:

$$c^2\frac{dm}{dt} = vK = v\frac{d(mv)}{dt} = v^2\frac{dm}{dt} + \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}.$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren und liefert

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{27.3}$$

wo $\beta = \frac{v}{c}$ und m_0 die Ruhemasse (Massenwert bei $v = 0$) bedeutet.[1]) Aus (27.3) ergeben sich die wichtigen Formeln:

Impuls $\mathfrak{p}$ einer mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Masse

$$\mathfrak{p} = \frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{27.4}$$

kinetische Energie E_{kin} einer bewegten Masse

$$E_{\text{kin}} = (m - m_0)\, c^2 = m_0\, c^2 \left\{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right\}. \tag{27.5}$$

Zwischen der Gesamtenergie E einer bewegten Masse und ihrem Impuls p gilt die Beziehung

$$m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = E^2. \tag{27.6}$$

Für Lichtquanten ($m_0 = 0$) folgt hieraus wieder unsere Ausgangsgleichung für den Lichtimpuls $p = \frac{E}{c}$.

Zur Energiebestimmung bei Kernreaktionen wird oft die magnetische Ablenkmethode angewandt. Die Bewegungsgleichung im Magnetfeld $\mathfrak{H}$ lautet relativistisch genau

$$\frac{d(m\,\mathfrak{v})}{dt} = \frac{e}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]. \tag{27.7}$$

Da hier die Kraft senkrecht auf $\mathfrak{v}$ steht, ist $|\mathfrak{v}|$ konstant. Wir setzen des weiteren voraus, daß $\mathfrak{H} \perp \mathfrak{v}$ gewählt sei. m beschreibt dann eine Kreisbahn. Die linke Seite von (27.7) hat daher, absolut genommen, den Wert $m\left|\frac{d\,\mathfrak{v}}{dt}\right| = \frac{m\,v^2}{r}$, wo r den Krümmungsradius der Teilchenbahn bezeichnet. Danach erhält man die — auch für relativistische Geschwindigkeiten gültige — Beziehung

$$p = m\,v = \frac{e}{c}\,(r\,H); \quad H = |\mathfrak{H}|.$$

Die Messung der Ablenkung im Magnetfeld gibt uns somit eine Bestimmung des Impulses $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$, der oft in Einheiten $\frac{\text{MeV}}{c}$ angegeben wird.

Für die Geschwindigkeit v bzw. für β folgt

$$\beta = \frac{\frac{p\,c}{m_0\,c^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{p\,c}{m_0\,c^2}\right)^2}}.$$

---

[1]) Bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit wächst m gemäß $m = m_0 / 2^{1/2}\,(1-\beta)^{1/2}$ nach ∞.

Mit Rücksicht auf EINSTEINS Äquivalenzbeziehung (27.1) lautet die *Energiebilanz* bei Kernreaktionen:

$$M_0c^2 + m_0c^2 + \widetilde{E}_0 = Mc^2 + mc^2 + \widetilde{E} + E_A.$$

Darin bedeuten M_0 die Ruhemasse des Zielkerns A im Grundzustand, m_0 die Ruhemasse des Geschoßkerns a im Grundzustand, M die Ruhemasse des Restkerns B im Grundzustand, m die Ruhemasse des auslaufenden Teilchens b im Grundzustand, $\widetilde{E}_0$ die Summe der kinetischen Energien von A und a vor dem Stoß (also die von a allein, wenn A ruht), $\widetilde{E}$ die Summe der kinetischen Energien von B und b nach dem Stoß, E_A die Anregungsenergie des Restkerns B.

Die *Anregungsenergie des emittierten Teilchens b*, welches wir weiterhin als Neutron, Proton, Deuteron, Triton, He^3, α-Teilchen oder γ-Quant voraussetzen, können wir als *Null* annehmen.

Die *Reaktionsenergie Q* ist als die Energiedifferenz zwischen den ruhenden Anfangs- und Endkernen in ihren Grundzuständen definiert, so daß also gilt

$$Q = (M_0 + m_0)\,c^2 - (M + m)c^2 = \widetilde{E} - \widetilde{E}_0 + E_A. \tag{27.8}$$

Q setzt sich zusammen aus der direkt bei der Kernreaktion beobachtbaren *experimentellen Reaktionsenergie*

$$Q' = \widetilde{E} - \widetilde{E}_0 \tag{27.9}$$

und der Anregungsenergie E_A des Restkerns.

Experimentell findet man für $\widetilde{E}$ bzw. Q' oft mehrere verschiedene Werte $\widetilde{E}_i$ bzw. Q_i', die den Übergängen nach den verschiedenen Anregungszuständen des Restkerns mit den Energien E_{Ai} entsprechen ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Zum maximalen $\widetilde{E}_i (= (\widetilde{E}_i)_{\max})$ gehört $E_A = 0$, falls nicht zufällig ein direkter Übergang in den Grundzustand „verboten“ ist. Abgesehen von diesen Ausnahmefällen, gilt

$$Q = (Q_i')_{\max} = (\widetilde{E}_i)_{\max} - \widetilde{E}_0, \tag{27.10}$$

und die zu einem $\widetilde{E}_i$ ($< (\widetilde{E}_i)_{\max}$) gehörige Anregungsenergie des Restkerns beträgt

$$E_{Ai} = Q - Q'_i = (\widetilde{E}_i)_{\max} - \widetilde{E}_i.$$

Die Reaktionsenergie Q (auch Wärme- oder Energietönung genannt) läßt sich auf zwei Arten bestimmen: erstens nach (27.8) aus den massenspektrographischen M-Werten und zweitens, wie soeben in (27.10) angegeben, direkt an der Kernreaktion als (maximale) Differenz der kinetischen Gesamtenergien vor und nach dem Stoß.

Die in Tabellenwerken angegebenen Massenwerte beziehen sich i. allg. auf neutrale Massen: Die Elektronenmassen sind mitgezählt. Da letztere aber aus allen Reaktionsgleichungen praktisch herausfallen, kann man Q mit den neutralen Atommassen statt mit den Kernmassen berechnen. Der begangene Fehler liegt nämlich nur in der Differenz der Bindungsenergien aller Hüllenelektronen vor und nach der Reaktion und ist bei der heute erreichbaren Meßgenauigkeit gerade noch zu vernachlässigen. Um Irrtümer zu vermeiden, schreiben wir im folgenden $\mathring{M}$, $\mathring{m}$ usw., wenn *Atommassen* gemeint sind.

Als ein Beispiel betrachten wir etwa den uns schon bekannten (α, p)-Prozeß an N^{14}: Wir schreiben unter die Reaktionsgleichung die entsprechenden mit Massenspektrographen ermittelten Atommassen:

$$\begin{array}{ccccccccc} N^{14} & + & He^4 & = & H^1 & + & O^{17} & + Q \\ 14{,}007550 & & 4{,}003879 & & 1{,}008145 & & 17{,}004507 & \end{array} \quad (27.11)$$

Man findet hieraus

$$Q = -0{,}001287\ \text{ME} = -1{,}198\ \text{MeV}.$$

Das bedeutet, daß man eine aus der kinetischen Energie des α-Teilchens zu bestreitende Energie von mindestens 1,198 MeV (im Schwerpunktssystem, s. w. u.) aufbringen muß, um die Reaktion einzuleiten. Diese ist also endotherm. Die direkte Bestimmung an der Kernreaktion ergab $Q = -1{,}13$ MeV, was innerhalb der Versuchsfehler obigen Wert bestätigt [H 50-1].

Bei dem zu (27.11) genau inversen Prozeß $O^{17}(p, \alpha)N^{14}$ ist natürlich die Reaktion exotherm, und es wird Energie freigesetzt:

$$Q_{\text{inv}} = +1{,}198\ \text{MeV}.$$

Bei solchen Q-Berechnungen ist es zur Einsparung von Dezimalziffern oft nützlich, statt der Atomgewichte $\mathring{M}(Z, A)$ die konventionellen *Massendekremente* Δ zu benutzen. Wir schreiben bei der (ganzzahligen) Massenzahl A

$$\Delta_A = \mathring{M}(Z, A) - A$$

und analog bei a, B, b usw. Für die Reaktion A(a, b)B gilt dann

$$Q = [(\Delta_A + \Delta_a) - (\Delta_B + \Delta_b)]c^2.$$

Entsprechend läßt sich mit dem *Astonschen Packungsanteil* f verfahren. Da laut Definition $f_A = \dfrac{\mathring{M}(Z, A)}{A} - 1$ ist, wird $\mathring{M}(Z, A) = A(1 + f_A)$ und somit

$$Q = [(A f_A + a f_a) - (B f_B + b f_b)]\, c^2.$$

Von $A = 20$ bis $A = 178$ sind Δ und f negative Größen. Am besten ist es daher, mit den stets positiven, wirklichen *Massendefekten* (oder Bindungsenergien) W zu rechnen, die bei der Bildung eines Kernes (bzw. Atoms) A aus Z neutralen H-Atomen und N Neutronen mit den Massen $\mathring{m}_H$ und m_n auftreten:

$$W = [(Z\mathring{m}_H + N m_n) - \mathring{M}]c^2.$$

Es ist dann

$$Q = [W(B) + W(b)] - [W(A) + W(a)].$$

Wenn man hier von jeder der beiden Klammern [+] rechts die Bindungsenergie W(C) des (im Grundzustand gedachten) Compoundkernes abzieht, erhält man Q als Differenz der gegenseitigen Bindungsenergien zwischen den jeweiligen beiden Partikeln vor und nach der Reaktion:

$$Q = E_B - E_B'.$$

Hierbei bedeuten E_B die gegenseitige Bindungsenergie zwischen a und A und E_B' die gegenseitige Bindungsenergie zwischen b und B. Kann man einerseits aus den massenspektrographischen Daten dergestalt die Reaktionsenergien berechnen, so läßt sich andererseits auch umgekehrt aus den gemessenen Reaktionsenergien Q auf die Kernmassen schließen. Bei den leichten Kernen ist in den letzten Jahren eine große Anzahl von Q-Werten experimentell bestimmt worden, so daß es möglich ist, nur über die Q-Werte von Kernreaktionen und von spontanen Kernumwandlungen die genauen Massen der leichten Kerne zu erhalten, und zwar durch direkten Anschluß an O^{16}. Jeder Q-Wert liefert eine Gleichung zwischen bestimmten Kernmassen. Hat man also eine genügende Menge solcher Q-Werte und damit ebenso viele Gleichungen zwischen den (leichten) Kernmassen einschließlich O^{16}, so lassen sich diese berechnen.

In Tabelle 9a sind die auf diese Weise erhaltenen Massen mit den massenspektrographischen Werten verglichen. Die Massen von radioaktiven Isotopen sind nicht vermerkt, da z. Z. noch keine massenspektrographischen Werte genügender Präzision zum Vergleich vorliegen.

Tabelle 9a. Vergleich von spektrographisch gemessenen und den aus Q-Werten von Kernreaktionen abgeleiteten Massen einiger leichter Kerne

Isotop	Atommassen	
	spektrographische	aus Kernreaktionen
H^1	1,008142 (± 3)	1,008142 (± 3)
H^2	2,014732 (± 4)	2,014735 (± 6)
He^4	4,003860 (± 12)	4,003873 (± 15)
Li^7	7,01818 (± 12)	7,018223 (± 26)
Be^9	9,01494 (± 16)	9,015043 (± 30)
B^{10}	10,016110 (± 10)	10,016114 (± 28)
B^{11}	11,012811 (± 9)	11,012789 (± 23)
C^{12}	12,003807 (± 11)	12,003804 (± 17)
C^{13}	13,007538 (± 13)	13,007473 (± 14)
N^{14}	14,007525 (± 15)	14,007515 (± 14)
N^{15}	15,004928 (± 20)	15,004863 (± 12)
O^{16}	16,— Definition	16,— Definition
O^{17}	17,004507 (± 15)	17,004533 (± 7)
O^{18}	18,004875 (± 13)	18,004857 (± 23)
F^{19}	19,004414 (± 17)	19,004456 (± 15)
Ne^{20}	19,998771 (± 12)	19,998777 (± 21)
Ne^{22}	21,998329 (± 19)	21,998358 (± 25)
Al^{27}	26,990109 (± 23)	26,990071 (± 30)
Si^{28}	27,985792 (± 32)	27,985767 (± 32)
P^{31}	30,983622 (± 23)	30,983550 (± 39)
S^{32}	31,982272 (± 19)	31,982183 (± 42)

Die gute gegenseitige Übereinstimmung der nach den beiden Methoden ermittelten Massenwerte gibt eine ausgezeichnete Bestätigung der Einsteinschen Gleichung $E = mc^2$. In den Fällen, in denen es sich um kurzlebige Isotope handelt, führt allein die Massenbestimmung über die Q-Werte zum Ziel, da die massenspektrographische Methode für solche Kerne zu langsam arbeitet.

§ 28. Bestimmung der Q-Werte und die Stoßgesetze bei Kernreaktionen

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß die Q-Werte als *Differenz der kinetischen Energien* aller beteiligten Reaktionspartner vor und nach dem Stoß zu finden sind, wenn im Anfangs- und Endzustand höchstens zwei Teilchen vorkommen. Experimentell pflegt man vor der Reaktion die Bewegungsenergie des stoßenden Teilchens zu kennen, und das gestoßene ruht. Nach der Reaktion beobachtet man meistens nur die Energie und Flugrichtung des emittierten leichteren Teilchens. Energie und Impuls des Compound- und Restkerns ergeben sich dann aus den Erhaltungssätzen, die unverändert auch für Kernprozesse gelten. Im folgenden nehmen wir an, daß nur nichtrelativistische Geschwindigkeiten auftreten, abgesehen von den γ-Quanten, deren Impulse aber in diesem Paragraphen unberücksichtigt bleiben können.

a) Die Energieübertragung auf den Compoundkern und die Q-Werte

Ein Teilchen der Masse m_0 stoße mit der Geschwindigkeit v_0 (im Laborsystem), d. h. mit der kinetischen Energie $E_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2$, auf einen ruhenden Zielkern der Masse M_0, und es möge sich ein Compoundkern der Masse $M^* = M_0 + m_0$ bilden. Genau genommen wäre hierzu noch $\frac{E^*_{\text{in}}}{c^2}$ zu addieren, wo E^*_{in} den aus der Energie der Relativbewegung der Stoßpartner stammenden Beitrag zur Anregungsenergie des Compoundkerns bezeichnet. Für die Formeln dieses Paragraphen kann aber dieser Zusatz bei M^* vernachlässigt werden. Der Compoundkern erhält nach dem Impulssatz die Geschwindigkeit $v^* = \frac{m_0}{M^*} v_0$, also eine kinetische Energie von $\frac{1}{2} M^* v^{*2} = E_0 \frac{m_0}{M^*}$, welche für die Anregung verlorengeht. Es wird daher

$$E^*_{\text{in}} = E_0 \left(1 - \frac{m_0}{M^*}\right) = E_0 \frac{M_0}{M^*}. \tag{28.1}$$

Die Anregungsenergie E^*_{A} des Compoundkerns folgt hieraus durch Addition der Bindungsenergie E_B zwischen Geschoßteilchen und Zielkern zu

$$E^*_{\text{A}} = E^*_{\text{in}} + E_B = E_B + E_0 \left(1 - \frac{m_0}{M^*}\right). \tag{28.2}$$

Einen Überblick über die im Periodischen System bei den verschiedenen Massenzahlen auftretenden Bindungsenergien der leichtesten Kerne bis He^4 gibt uns Tabelle 10.

Tabelle 10.
Bindungsenergien der leichtesten Teilchen bis He[4] *an die Kerne des Periodischen Systems*

	Mittlere Bindungsenergien in MeV					
Massen-zahl A	Neutron n	Proton p	Deuteron d	Triton t	Helium[3] χ	Helium[4] α
25	9,8	9,0	16,5	20,0	20,0	9,2
100	8,4	7,5	13,7	15,8	15,8	3,6
200	6,5	5,7	10,0	10,3	10,2	—3,8

Die angegebenen Energien stellen Durchschnittswerte dar. Besonders bei den leichten Kernen unter $A = 25$ bestehen im einzelnen starke Abweichungen von den Tabellenwerten.

Die Bildung des Compoundkerns ist an dem Auftreten seiner Zerfallsprodukte zu erkennen. Die Beobachtung der emittierten Teilchen gibt daher eine Bestimmungsmöglichkeit für die Energieniveaus des Compoundkerns, welche allgemein Stellen stark bevorzugter Compoundbildung darstellen. Bei Variation der Energie E_0 der einfallenden Teilchen beobachtet man an diesen Stellen ein scharfes Maximum der registrierten Teilchen aus dem Zerfall der gebildeten Compoundkerne. Ist die Bindungsenergie E_B' des emittierten Teilchens größer als die des eingefangenen,

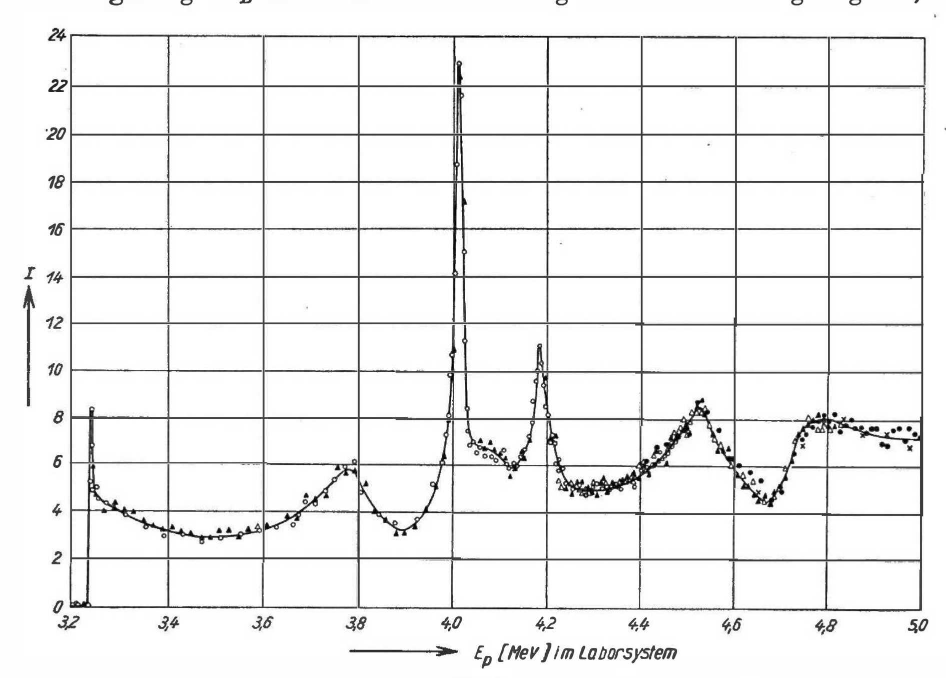


Abb. 45
Energieabhängigkeit der Neutronenausbeute bei der Reaktion $C^{13}(p, n)N^{13}$, gemessen in Vorwärtsrichtung

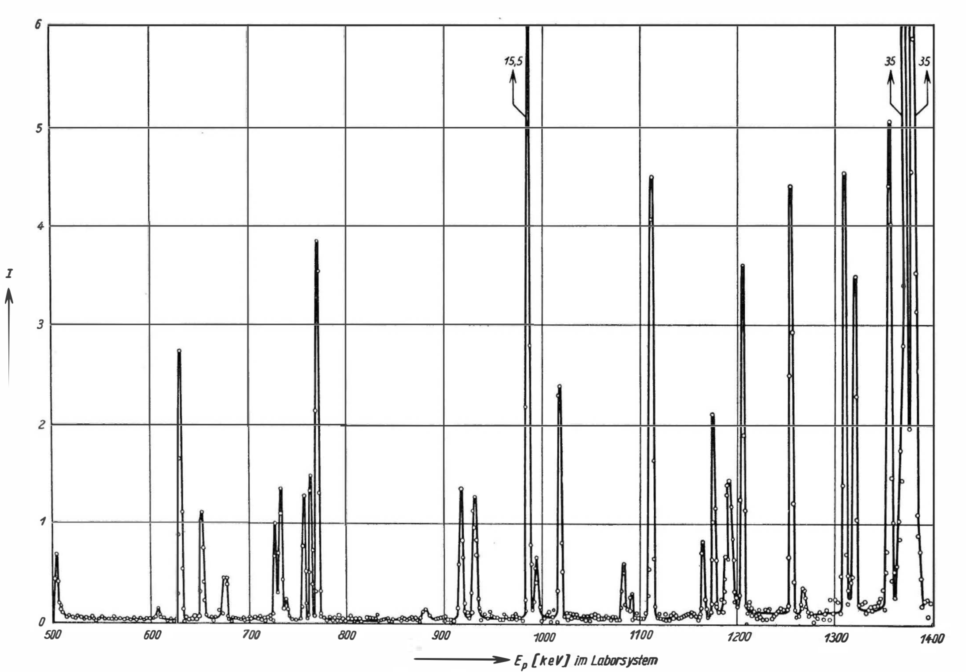


Abb. 46. γ-Quantenausbeute der Reaktion Al^{27} (p, γ) Si^{28} als Funktion der Energie E_p der auftreffenden Protonen

E_B, also $E'_B > E_B$, so kann die Emission dieser Teilchenart naturgemäß erst von einem gewissen *Schwellenwert* an erfolgen, bei dem gerade E^*_A den Wert von E'_B erreicht. Dazu muß mindestens der Betrag der Reaktionsenergie, $|Q| = E'_B - E_B$, aus der kinetischen Energie des Geschoßteilchens auf den Compoundkern übertragen werden. Das ergibt als Schwellenwert im Laborsystem laut (28.1)

$$E_{0\,\text{Lab. Schwelle}} = |Q| \frac{M^*}{M_0} = |Q| \left(1 + \frac{m_0}{M_0}\right) \text{ für } Q < 0 \,.$$

Als Beispiel ist in Abb. 45 die Ausbeutekurve der Reaktion $C^{13}(p, n)N^{13}$ dargestellt. Sie hat einen Schwellenwert bei 3,236 MeV (im Laborsystem) und Maxima bei 3,78; 4,01; 4,18; 4,52 und 4,8 MeV, die zu quasistationären angeregten Zuständen des N^{14} gehören. Außerdem liegt ein Resonanzniveau offenbar unmittelbar bei der Schwellenenergie. Die Bindungsenergie des p an C^{13} entspricht

$$C^{13} + H^1 - N^{14} = 13{,}007\,50 + 1{,}008\,14 - 14{,}007\,55 = 0{,}00809 \text{ ME},$$

also ist $E_B = 7{,}54$ MeV.

Nehmen wir z.B. die große Resonanz bei 4,01 MeV (im Laborsystem), so ergibt sich im Schwerpunktssystem (da $m_0 = 1$; $M^* = 14$) eine Energie von $4{,}01 \cdot \left(1 - \frac{1}{14}\right) = 3{,}72$ MeV. Die zugehörige Anregungsenergie des N^{14} beträgt demnach $E^*_A = 7{,}54 + 3{,}72 = 11{,}26$ MeV.

Bei (a, γ)-*Prozessen* läßt sich die Compoundkernbildung durch das Auftreten der γ-Strahlung besonders leicht nachweisen. An der Abb. 42, S. 104, sieht man beispielsweise die bei der $Al^{27}(p, \gamma)$-Reaktion mit Erhöhung der Energie der einfallenden Protonen nacheinander auftretenden Anregungszustände des Compoundkerns. Bis 1,4 MeV zeigt Al^{27} noch weitere 24 stärkere Resonanzen (Abb. 46). Auch hier ist zur Reduktion der Energien auf das Schwerpunktssystem Gleichung (28.1) zuständig.

b) Die Anregungsenergien des Restkernes und die Q-Werte

Die auf dem Restkern zurückbleibende Anregungsenergie ist allein durch die *kinetischen Energien* der beteiligten Stoßpartner vor und nach der Reaktion eindeutig gegeben und hängt nicht außerdem noch von dem inneren Mechanismus der Stoßprozesse ab. Wir rechnen im folgenden wieder in nichtrelativistischer Näherung. Eine Masse m_0 stoße mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ auf eine ruhende Masse M_0. Nach dem Stoß habe das leichte Teilchen mit der Masse m die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit der Flugrichtung ϑ gegen $\mathfrak{v}_0$; der Restkern habe die Masse M und die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$. Nach dem Impulssatz liegen $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ komplanar, und das Vektordiagramm des Stoßvorganges zeigt Abb. 47.

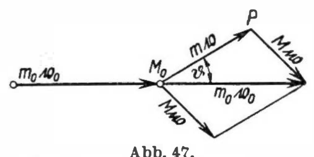


Abb. 47. Stoßdiagramm im Laborsystem

In dem einfachsten Falle des elastischen Stoßes gleich schwerer Teilchen ($m_0 = m = M_0 = M$) lautet der Energiesatz:

$$v_0^2 = v^2 + w^2.$$

Die Vektoren $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ bilden daher ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Punkt P der Abb. 47, so daß P auf einem Halbkreis über $\mathfrak{v}_0$ liegt. Die beiden Partikelbahnen nach dem Stoß stehen senkrecht aufeinander. Dies tritt z. B. bei Streuung von α-Teilchen an He^4 oder von p an H ein.

Im allgemeinen Fall lautet der Energiesatz, wenn Q' die bei dem Prozeß frei werdende *experimentelle Reaktionsenergie* bedeutet,

$$\tfrac{1}{2}\, m_0 v_0^2 + Q' = \tfrac{1}{2}\, m v^2 + \tfrac{1}{2}\, M w^2.$$

Wir schreiben dafür

$$M^2 w^2 = m_0 M v_0^2 - m M v^2 + 2\, M Q'.$$

Aus dem Impulsdreieck in Abb. 47 folgt aber andererseits nach dem Kosinussatz:

$$M^2 w^2 = m_0^2 v_0^2 + m^2 v^2 - 2\, m_0 m v_0 v \cos\vartheta.$$

Indem wir $(Mw)^2$ eliminieren, erhalten wir für Q', wenn wir noch die Geschwindigkeiten durch die entsprechenden Energien ausdrücken $\left(v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2};\ v_0 = \left(\frac{2E_0}{m_0}\right)^{1/2}\right)$, die Beziehung

$$\frac{Q'}{E_0} = -\left(1 - \frac{m_0}{M}\right) + \frac{E}{E_0}\left(1 + \frac{m}{M}\right) - 2\,\frac{\sqrt{m\,m_0}}{M}\sqrt{\frac{E}{E_0}}\cos\vartheta. \qquad (28.3)$$

Hier stehen rechts nur beobachtbare Größen (E_0, E, m, m_0, ϑ); man kann also Q' bestimmen, indem man die Energien, die Art und die Richtung der ein- und ausfliegenden Teilchen beobachtet. Eine graphische Darstellung der Verhältnisse nach (28.3) zeigt Abb. 48.

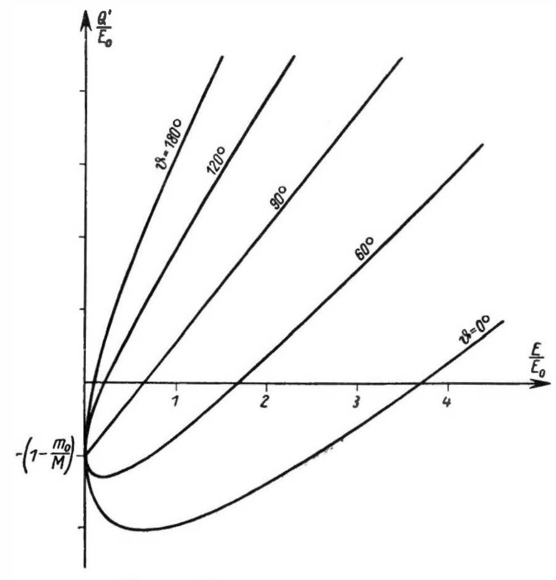


Abb. 48. Beziehung zwischen $\frac{Q'}{E_0}$ und $\frac{E}{E_0}$ bei verschiedenen Beobachtungswinkeln ϑ (schematisch)

Experimentell haben die in einer bestimmten Richtung auslaufenden Teilchen meist eine Reihe diskreter Energien E_i, die verschiedenen Anregungszuständen des Restkerns entsprechen.
Aus diesen E_i lassen sich nach (28.3) die zugehörigen Q' errechnen. Man erhält so bei *konstantem* E_0 eine Reihe von Werten $Q' = Q_i$, aus denen sich die Energien der angeregten Niveaus des Restkerns ergeben: $E_{Ai} = (Q_i)_{\max} - Q_i$.
Man kann Gleichung (28.3) auch umgekehrt zur Berechnung der Energie der *emittierten* Teilchen benutzen, z. B. die der Neutronen aus (α, n)- oder (p, n)-Reaktionen. Aus der für $\sqrt{E}$ quadratischen Gleichung (28.3) folgt (mit $M^* = M + m$):

$$\sqrt{E} = \frac{\sqrt{m m_0}}{M^*}\left\{\cos\vartheta \pm \left[\cos^2\vartheta + \frac{M M^*}{m_0 m}\left(\frac{Q'}{E_0} + 1 - \frac{m_0}{M}\right)\right]^{1/2}\right\}\sqrt{E_0}. \qquad (28.4)$$

Hier sind, da $\sqrt{E} = |\mathfrak{v}|\sqrt{\frac{m}{2}}$ gesetzt worden war, nur Werte $\sqrt{E} > 0$ sinnvoll.

Im Falle

$$Q' > -\left(1 - \frac{m_0}{M}\right) E_0$$

ist in (28.4) für alle ϑ stets $[\,]^{1/2} > \cos\vartheta$. Daher kommt nur das „+"-Zeichen in Frage. Alle ϑ-Werte sind möglich, und zu jedem ϑ gibt es nur einen Wert E.
Als Beispiel betrachten wir die Reaktion D(d, n)He^3, welche häufig zur Erzeugung von Neutronen benutzt wird. Wir erhalten mit $m_0 = 2$; $M = 3$; $m = 1$ und $Q' = 3{,}2$ MeV aus (28.4) für die Winkelabhängigkeit der Neutronenenergie E, wenn wir in der $[\,]$ E_0 in MeV einsetzen,

$$E = \frac{1}{8}\left\{\cos\vartheta + \left[\cos^2\vartheta + \frac{19{,}2}{E_0} + 2\right]^{1/2}\right\}^2 E_0 .$$

Bei $E_0 = 1$ MeV z.B. ergibt sich folgende Winkelabhängigkeit:

ϑ	0°	90°	180°
E [MeV]	4,05	2,65	1,14

Im Intervall

$$\left(1 - \frac{m_0}{M}\right) E_0 \leqq -Q' \leqq \left(1 - \frac{m_0}{M^*}\right) E_0 \qquad (28.5)$$

ist

$$0 \geqq \frac{M M^*}{m m_0}\left(\frac{Q'}{E_0} + 1 - \frac{m_0}{M}\right) \geqq -1;$$

daher wird in (28.4) für alle $\vartheta \leqq \vartheta_{\max} \leqq \frac{\pi}{2}$ stets $[\,]^{1/2} \leqq \cos\vartheta$, und es gibt zu jedem ϑ zwei verschiedene E-Werte. Der maximale Winkel $\vartheta_{\max}$ entspricht $[\,]^{1/2} = 0$, wo die beiden E-Werte zusammenfallen (für größere ϑ würde $\sqrt{E}$ komplex!). Es gilt

$$\cos^2\vartheta_{\max} = \frac{M M^*}{m m_0}\left(\frac{-Q'}{E_0} + \frac{m_0}{M} - 1\right)$$

oder

$$\sin^2\vartheta_{\max} = \frac{M M^*}{m m_0}\left(\frac{Q'}{E_0} + 1 - \frac{m_0}{M^*}\right). \qquad (28.6)$$

Die rechte Grenze in (28.5) entspricht der Reaktionsschwelle bei einem endothermen Prozeß ($Q' < 0$). Die Sekundärteilchen verlassen hier den Compoundkern gerade noch mit verschwindender Geschwindigkeit und daher wird $\vartheta_{\max} = 0$.

An der linken Grenze von (28.5) wird $\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{2}$ und $E = 0$ für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Die Sekundärteilchen haben hier relativ zum Schwerpunktssystem dieselbe Geschwindigkeit wie der Compoundkern im Laborsystem.

Wir können die Verhältnisse leichter überblicken, wenn wir auf das *Schwerpunktssystem* S (Index s) der Teilchen zurückgreifen.

In diesem Bezugssystem (Abb. 49a) laufen die Teilchen m_0 und M_0 mit der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ so aufeinander zu, daß der entstehende Compoundkern C in S ruht. Die kinetische Energie dieser Relativbewegung, d.h. die Summe der Bewegungsenergien der Teilchen in S, beträgt vor dem Stoß

$$E_0 \frac{M_0}{M^*} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \mu v_0^2, \quad \text{wobei} \quad \mu = \frac{m_0 M_0}{m_0 + M_0}$$

die reduzierte Masse des Systems bezeichnet. Nach dem Stoß laufen in S die Partikel m und M in entgegengesetzten Richtungen ϑ_s und $(\pi + \vartheta_s)$ auseinander. Die Geschwindigkeit von m sei $\mathfrak{v}_s$; dann ist die von M gleich $-\mathfrak{v}_s \frac{m}{M}$. Die kinetische Gesamtenergie beträgt $\frac{E_s M^*}{M}$, wo E_s die kinetische Energie des Teilchens m im System S bezeichnet. Der Energiesatz liefert daher $E_s \frac{M^*}{M} = E_0 \frac{M_0}{M^*} + Q'$, also

$$E_s = E_0 \frac{M}{M^*} \left(\frac{M_0}{M^*} + \frac{Q'}{E_0} \right)$$

und daraus für die Geschwindigkeit des Teilchens m

$$|\mathfrak{v}_s| = \sqrt{\frac{2 E_s}{m}} = v_0 \sqrt{\frac{m_0 M}{m M^*} \left(\frac{M_0}{M^*} + \frac{Q'}{E_0} \right)} .$$

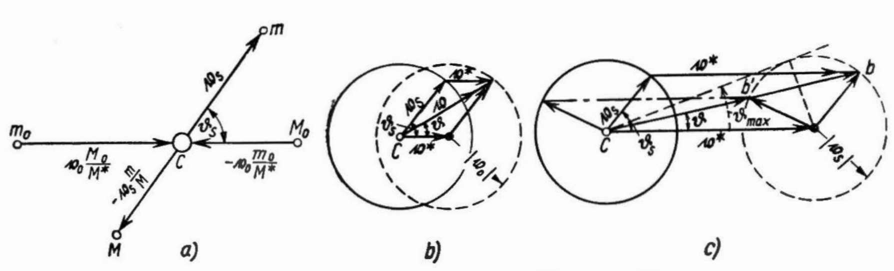


Abb. 49. Geschwindigkeitsdiagramm beim Stoß zweier Massen
a) Darstellung im Schwerpunktssystem b) Transformation vom Schwerpunktssystem auf das Laborsystem im Falle $|\mathfrak{v}^*| < |\mathfrak{v}_s|$ c) desgl. im Falle $|\mathfrak{v}^*| > |\mathfrak{v}_s|$. Zu jedem $\vartheta < \vartheta_{\max}$ im Laborsystem sind zwei Geschwindigkeiten möglich: $\mathfrak{v}_1 = \overrightarrow{Cb}$ und $\mathfrak{v}_2 = \overrightarrow{Cb'}$

Den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ des Teilchens m im Laborsystem erhält man aus $\mathfrak{v}_s$ durch Addition der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$ des Compoundkernes im Laborsystem:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_s + \mathfrak{v}^* \quad \text{mit} \quad \mathfrak{v}^* = \mathfrak{v}_0 \frac{m_0}{M^*} .$$

In den Abbildungen 49b und 49c ist die Addition graphisch ausgeführt.

Betrachtet man alle Richtungen ϑ_s, so liegen die Endpunkte von $\mathfrak{v}_s$ auf einem Kreis mit dem Radius v_s um Punkt C; die Endpunkte von $\mathfrak{v}$ (im Laborsystem) liegen auf einem um den Vektor $\mathfrak{v}^*$ parallel verschobenen Kreis. Man sieht hier sogleich die beiden oben angeführten Fälle:

1. Im Falle $|\mathfrak{v}_s| > |\mathfrak{v}^*|$ – (Abb. 49 b) – kommen auch im Laborsystem alle ϑ vor. Zu jedem ϑ gehört je ein E-Wert.

2. Im Falle $|\mathfrak{v}_s| < |\mathfrak{v}^*|$ – (Abb. 49c) – ist nur ein vorderer Winkelbereich, $|\vartheta| \leqq \vartheta_{\max}$, realisiert, und aus der Abb. ergibt sich unmittelbar für $\vartheta_{\max}$ die Beziehung $\sin\vartheta_{\max} = \frac{v_s}{v^*}$, was mit (28.6) identisch ist. Das vom Compoundkern nach rückwärts emittierte Teilchen fliegt hier relativ zum Laboratorium in Vorwärtsrichtung; dem entspricht der kleinere der beiden E-Werte von (28.4).

§ 29. Beispiele zur Bestimmung angeregter Niveaus

a) Resonanzen des Compoundkerns

Als Beispiel mag die in Abb. 42 (S. 104) an der Reaktion $Al^{27}(p,\gamma)Si^{28}$ dargestellte Resonanz des Compoundkerns Si^{28} dienen. Nach (28.2) ergeben sich die zu den Resonanzenergien E_r gehörigen Anregungsenergien aus

$$E_A^* = E_B + \left(1 - \frac{1}{28}\right) E_r.$$

E_B, die Bindungsenergie des Protons an Al^{27}, beträgt nach den spektrographischen Massenwerten der Tabelle 9a (S. 111):

$$E_B = 26{,}990109 + 1{,}008142 - 27{,}985792 = 0{,}012459 \text{ ME} = 11{,}62 \text{ MeV}.$$

Die Umrechnung der gemessenen Resonanzenergien E_r auf die Anregungsenergien ist damit gegeben.
Da im vorstehenden Falle die Resonanzen bei Änderung der Energie des Primärstrahls beobachtet sind, handelt es sich um Compoundkernresonanzen. Ob die beobachteten γ-Strahlen von dem Übergang nach tieferen Zuständen des Si^{28} oder ob sie von den Endkernen aus anderen Prozessen, wie (p, n)-, (p, p)- usw., herrühren, läßt sich aus Abb. 42 allein nicht erkennen. Dazu wäre noch die γ-Strahlung oder das Verhalten der Endkerne aus den verschiedenen Prozessen zu untersuchen.

b) Die Energieniveaus des Restkerns

Als erstes Beispiel betrachten wir die Reaktion $B^{10}(\alpha, p)C^{13}$, welche wir genauer durchrechnen wollen. Bei dem Versuch, dessen Ergebnis Abb. 50 darstellt, wurde eine sehr dünne Targetschicht aus angereichertem, 98%igem B^{10} mit α-Strahlen

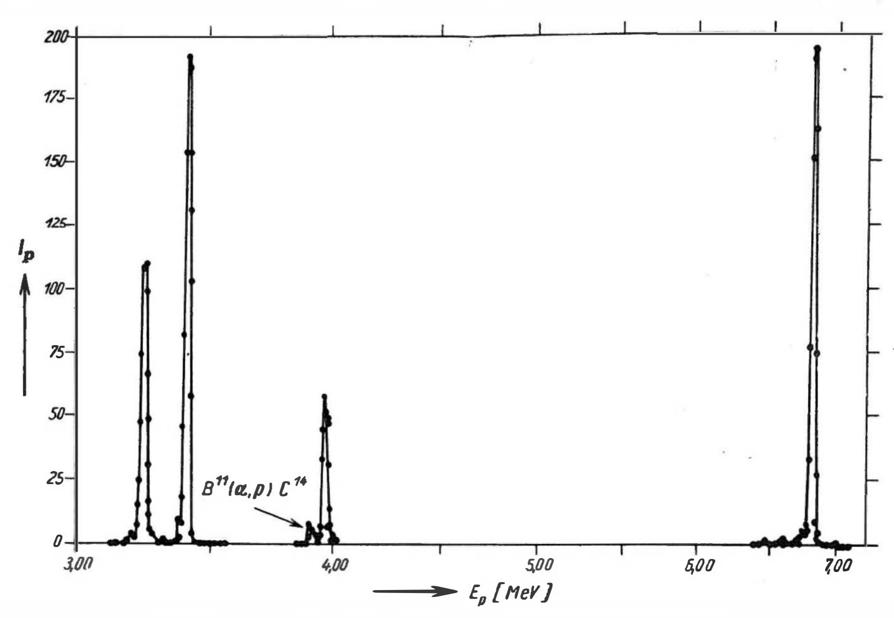


Abb. 50. Energiespektrum der Protonen aus der Reaktion $B^{10}(\alpha, p)\,C^{13}$
I_p = relative Anzahl der Protonen (in willkürlichen Einheiten).
Die mit $B^{11}(\alpha, p)\,C^{14}$ gekennzeichnete schwache Resonanz rührt von 2% Beimengung an B^{11} her

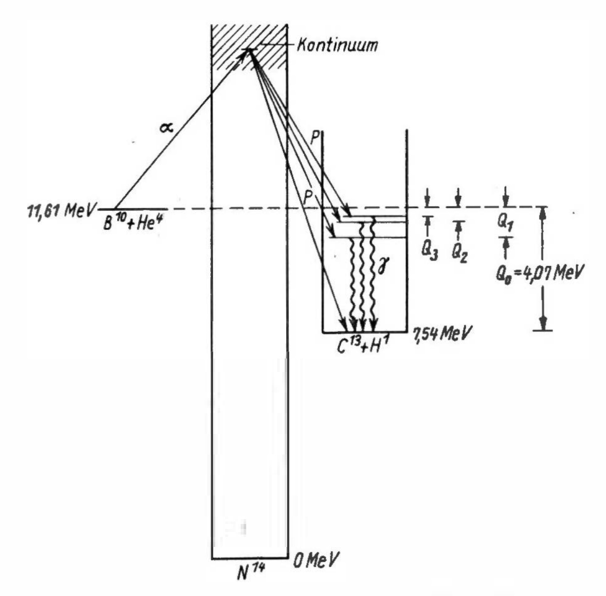


Abb. 51. Energiediagramm der Reaktion $B^{10}(\alpha, p)\,C^{13}$.
Bei E_α = 4,77 MeV befindet sich das Compoundkern-Niveau im Kontinuum.
Von hier aus zerfällt der Zwischenkern N^{14} in die verschiedenen Zustände des Restkerns C^{13}

konstanter Energie von $E_\alpha = 4{,}77$ MeV beschossen und die unter $\vartheta = 90°$ emittierten Protonen nach der in § 26 beschriebenen Weise magnetisch analysiert. Es ergaben sich vier voneinander verschiedene, scharf definierte Protonengruppen, deren Energien E_{pi} in Zeile 1 der Tabelle 11 angegeben sind.

Tabelle 11.
Zur Bestimmung der Energieniveaus des C^{13} *als Restkern aus der Reaktion* $B^{10}(\alpha, p)\,C^{13}$

E_{pi} [MeV]	6,84	3,98	3,43	3,27
Q_i' [MeV]	4,07	0,98	0,39	0,22
$E_{Ai}(C^{13})$[MeV]	0	3,09	3,68	3,85
γ	nein	ja	ja	ja
Koinzidenz	—	ja	ja	ja

Die „experimentellen Q_i'-Werte“ folgen vgl. ((28.3)) für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ aus

$$Q_i' = \left(1 + \frac{1}{13}\right) E_{pi} - \left(1 - \frac{4}{13}\right) E_\alpha ,$$

und die Anregungsenergien des C^{13} sind $E_{Ai}(C^{13}) = (Q_i')_{\max} - Q_i'$. Die Q_i' und E_{Ai} stehen in der 2. und 3. Zeile der Tabelle 11. Das Energiediagramm der Reaktion sieht man in Abb. 51, wo auch das Niveau des Compoundkerns N^{14} gezeigt ist, über den der Prozeß verläuft und aus dem die Übergänge nach den verschiedenen Zuständen des Restkerns C^{13} erfolgen.

Zur weiteren Bestätigung des Schemas wurde die mit den Protonen *zusammen emittierte γ-Strahlung* aus dem Restkern C^{13} (s. Abb. 51) *in Koinzidenz* beobachtet. Während die Protonen mit der maximalen Energie (6,84 MeV) mit keiner γ-Strahlung verknüpft sind, haben die anderen koinzidierende γ-Quanten als Begleiter. Dies zeigt deutlich, daß die maximale Protonenenergie wirklich dem Übergang zum Grundzustand des Endkerns C^{13} zuzuschreiben ist, während die übrigen Fälle von Protonenemission auf höher gelegene Niveaus des C^{13} führen, aus denen beim Übergang in tiefere Niveaus bzw. in den Grundzustand die koinzidierende γ-Strahlung emittiert wird. Hiernach ist als Reaktionsenergie $Q = (Q_i')_{\max} = 4{,}07$ MeV anzunehmen.

Als zweites Beispiel einer Bestimmung angeregter Terme von Restkernen seien die Ergebnisse an dem „linienreichen“ Protonenspektrum aus der Reaktion $Al^{27}(d, p)\,Al^{28}$ kurz angeführt. Hier wurde bei konstanter Energie der einfallenden Deuteronen (2,1 MeV) die unter $\vartheta = 90°$ emittierten Protonen wie oben magnetisch analysiert. Das Ergebnis zeigt Abb. 52. Aus den beobachteten $(H\varrho)$-Werten lassen sich die Protonenenergien, daraus die Q_i' und die Energien der angeregten Niveaus des Restkerns Al^{28} ermitteln. In Abb. 53 sind die so erhaltenen Terme aufgetragen.

Abb. 52. Energiespektrum der Protonen aus der Reaktion Al^{27} (d, p) Al^{28}, beobachtet unter 90° gegen den Deuteronenstrahl von 2,1 MeV. Die Gruppen *A* bis *W* stammen aus der Al-Reaktion. Andere, zufällig entstandene Gruppen sind durch die sie erzeugenden Kerne gekennzeichnet (n = relative Anzahl der Protonen pro sec), $H\varrho$ = Magnetfeldstärke H mal Krümmungsradius ϱ der Teilchenbahn im magnetischen Analysator

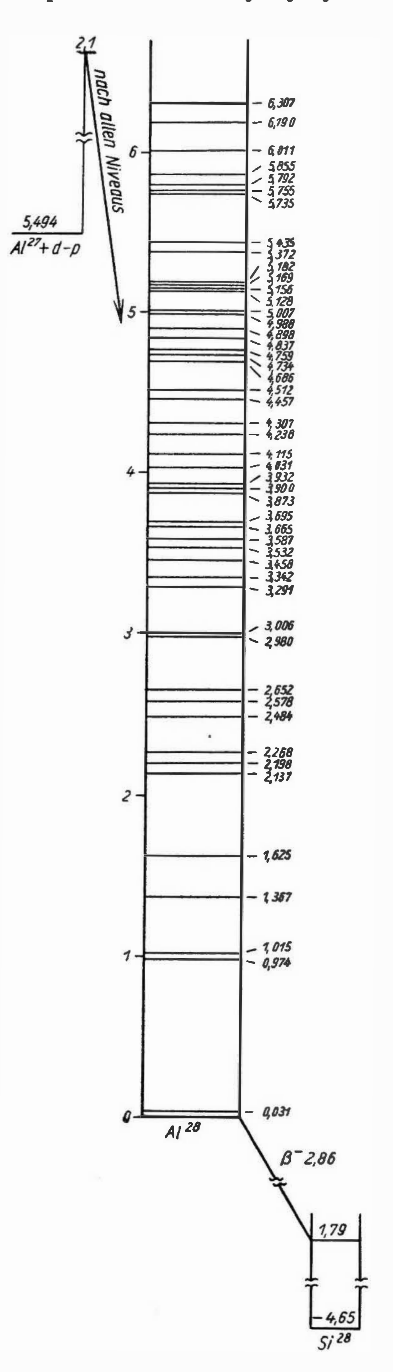


Abb. 53.

Niveauschema des Al^{28}

c) Bestimmung der Niveaus eines Kerns als Compound- und Restkern

Wenn man ein und denselben Kern auf verschiedene Arten als Compoundkern und als Restkern erzeugt, so hat man die Möglichkeit, eine große Menge von quasistationären Zuständen des betreffenden Kerns aufzufinden:
Für N^{14} liegt eine sehr vollständige Reihe von Beobachtungen vor, bei denen der Kern teils als Compoundkern, teils als Restkern gebildet wird.

Tabelle 12. Angeregte Niveaus von N^{14}

N^{14*} Anregungs-energie	$B^{10}(\alpha, p)C^{13}$		$C^{12}(d, p)C^{13}$		$C^{13}(p, n)N^{13}$		$C^{13}(p, \gamma)N^{14}$	
[MeV]	E_α [MeV]	Γ [keV]	E_d [MeV]	Γ [keV]	E_p [MeV]	Γ [keV]	E_p [MeV]	Γ [keV]
13,23	2,27	130						
13,16	2,16	20						
12,92	1,83	40	3,08					
12,81	1,68	15						
12,78	1,63	25	2,90					
12,68	1,50	30						
12,5	—	—	2,68					
12,4	—	—	2,49					
11,75	—	—	1,73	—	4,53	~150		
11,49			1,435	5,5				
11,42	—	—	—	—	4,18	35		
11,38	—	—	1,30	80				
11,26	—	—	1,16	200				
11,23	—	—	1,13	30	4,01	22		
11,04	—	—	0,91	200	3,77	~100		
10,43	—	—	—	—	—	—	3,11	30
9,49	—	—	—	—	—	—	2,10	45
9,18	—	—	—	—	—	—	1,76	2
8,70	—	—	—	—	—	—	1,25	500
8,62	—	—	—	—	—	—	1,16	6
8,06	—	—	—	—	—	—	0,55	32

E_α, E_d, E_p bedeuten die Energien der Geschoßpartikel im Laborsystem; Γ bezeichnet die volle Halbwertsbreite der Resonanzlinie (Nach EVANS).

Abb. 54 zeigt z. B. die Wirkungsquerschnittskurve der Compoundbildung bei der Reaktion $B^{10}(\alpha, p)C^{13}$, gemessen an der Intensität der 3,9 MeV-γ-Strahlung des Endkerns C^{13}, den dieser beim Übergang in den Grundzustand aussendet. Da Q aus den Massenwerten der Tabelle 9a (s. S. 111) zu

$$\mathring{M}(B^{10}) + \mathring{M}(He^4) - \mathring{M}(N^{14}) = 11{,}62\ \text{MeV}$$

folgt, liegen die Anregungsenergien des Compoundkerns bei

$$E_A^* = 11{,}62 + \left(1 - \frac{4}{14}\right) E_\alpha ,$$

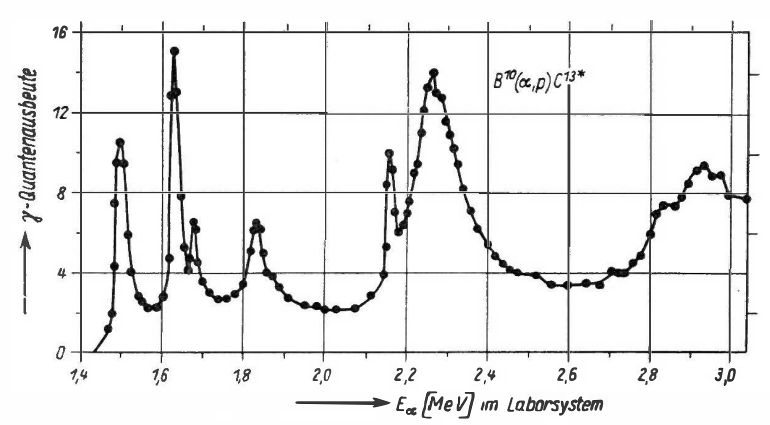


Abb. 54. Ausbeutekurve der 3,9 MeV-γ-Strahlung aus dem Restkern C^{13*} zeigt die Bildung des Compoundkerns N^{14} während der Reaktion $B^{10}(\alpha, p)\,C^{13}$

wo E_α die kinetische Energie der α-Strahlen im Laborsystem bezeichnet. Der Resonanz bei z.B. $E_\alpha = 1{,}63$ MeV entspricht also $E_A^* = 12{,}78$ MeV.
Auf diese Weise hat man hauptsächlich an den Reaktionen

$$B^{10}(\alpha, p)\,C^{13};\; C^{12}(d, p)\,C^{13};\; C^{13}(p, n)\,N^{13} \quad \text{und} \quad C^{13}(p, \gamma)\,N^{14},$$

die alle über denselben Kern N^{14} als Compoundkern laufen, die Resonanzen vermessen. Tabelle 12 zeigt die z. Z. bekannten Niveaus zugleich mit ihren Niveaubreiten (s. § 32). Für die Bohrsche Idee des Compoundkerns ist besonders hervorzuheben, daß einige der Niveaus bei verschiedenen Reaktionen wiederkehren. Die sich überlappenden Energiebereiche sind leider nicht ausgedehnt genug, um mehr übereinstimmende Niveaus zu ergeben. Aber die wenigen gefundenen gemeinsamen Resonanzen dürften kaum anders als durch Compoundbildung zu deuten sein.
Nimmt man noch die aus den Reaktionen, in denen N^{14} als Endkern vorkommt, erhaltenen Daten hinzu, so erhält man das vollständigere Niveauschema der Abb. 55. Die hierzu eingehender untersuchten Reaktionen sind die folgenden:

$$C^{13}(d, n)\,N^{14};\quad B^{11}(\alpha, n)\,N^{14};\quad N^{14}(p, p')\,N^{14};\quad O^{16}(d, \alpha)\,N^{14};\quad N^{14}(\alpha, \alpha')\,N^{14}.$$

In Abb. 55 ist der Energienullpunkt der verschiedenen Reaktionskurven gegen den Grundzustand des N^{14} so verschoben, wie es der Massendifferenz, d. i. dem Q-Wert der Reaktion, entspricht. Von Reaktionen, in denen N^{14} als Compoundkern vorkommt, sind die σ-E-Kurven aufgetragen: σ nach links, E nach oben, wobei die Zahlen die Energien (in MeV) im Laborsystem angeben; die Ordinatenlängen beziehen sich jedoch auf das Schwerpunktssystem. Bei Reaktionen, in denen N^{14} als Restkern auftritt, ist die Energie des Geschoßteilchens durch einen vertikalen Pfeil und die Partikelemission durch schräge Pfeile dargestellt.
Abschließend seien noch zwei weitere Methoden der Termbestimmung durch Beobachtungen an Kernreaktionen erwähnt: Die im Prinzip einfachste Methode benutzt die (γ,γ)- oder die (γ, γ')-*Reaktion.* Ihre experimentelle Ausführung ist jedoch wegen der Schwierigkeit, eine γ-Strahlung mit scharf bestimmter und

Abb. 55. Zur Bestimmung der Energieniveaus von N^{14} aus Kernreaktionen. Nicht sicher bekannte Niveaus und Übergänge sind gestrichelt, als besonders breit erkannte Niveaus schräg schraffiert. Unsichere Indizierungen der Niveaus sind eingeklammert

kontinuierlich einstellbarer Energie zu erzeugen bzw. durch die Kleinheit der effektiven γ-Wirkungsquerschnitte nicht einfach. Eine weitere Methode der Termbestimmung durch Messung der Kern-γ-Strahlung ist die bereits eingangs erwähnte *Coulomb-Anregung* (s. § 41).

§ 30. Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

Übersicht über die wesentlichsten Tatsachen

Neben der Energetik ist bei Kernreaktionen die wichtigste Frage die nach dem *Wirkungsquerschnitt* σ, der die effektive Fläche der „Zielscheibe" darstellt, die der Kern einem Strom von Geschoßteilchen bietet. Laut Definition ist

$$\sigma = \frac{\text{Za l der Reaktionen pro Kern}}{\text{Zahl der auftreffenden Teilchen pro cm}^2\text{ Strahlquerschnitt}}.$$

Wenn ein und dasselbe auffallende Teilchen a mehrere Prozesse zugleich hervorrufen kann, pflegt man den gesamten oder *totalen Wirkungsquerschnitt* σ_{tot} in mehrere „*Teilquerschnitte*" für die einzelnen Reaktionstypen — etwa (a, γ); (a, p); (a, n); (a, α) ... — aufzuteilen und die Teilquerschnitte mit $\sigma_{a\gamma}$; σ_{ap}; σ_{an}; $\sigma_{a\alpha}$ ... (oder, wenn kein Zweifel über das Primärteilchen a möglich ist, mit σ_γ; σ_p usw.) zu bezeichnen. Es ist dann natürlich

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{a\gamma} + \sigma_{ap} + \sigma_{an} + \sigma_{a\alpha} + \dots$$

Wir geben hier zunächst einen kurzen Überblick über die bei den verschiedenen Reaktionstypen beobachtete Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte von der Energie E der auffallenden Teilchen (mit Ausnahme der γ-Quanten).

a) Wirkungsquerschnitte ungeladener Teilchen (Neutronen)

Neutronen können als ungeladene Teilchen auch bei beliebig kleinen Geschwindigkeiten in die Kerne eindringen, wodurch sie zur Erzeugung von Kernreaktionen besonders geeignet sind. Charakteristisch ist, daß ihr Wirkungsquerschnitt gerade bei kleinsten Geschwindigkeiten oft außerordentlich hohe Werte annimmt. Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes, welche bei den einzelnen Reaktionstypen verschieden ist, zeigt folgendes Bild:

α) *Einfangprozesse.* Bei sehr kleinen — insbesondere thermischen — Geschwindigkeiten v überwiegt bei schweren und mittelschweren Kernen der (n, γ)-*Einfangprozeß* alle anderen Reaktionsmöglichkeiten. Hier gilt in der Regel das Fermische $\frac{1}{v}$-*Gesetz*:[1])

$$\sigma_{n\gamma} \sim \frac{1}{v} \sim \frac{1}{\sqrt{E}}.$$

Am linken Teil der σ-E-Kurve für Au (Abb. 56) ist dieser Verlauf deutlich zu erkennen. Dieselbe Abhängigkeit zeigen auch einige exotherme (n, α)- und (n, p)-Prozesse mit leichten Kernen wie B und Li. Als Beispiel ist in Abb. 57 die σ-E-Kurve für die (n, α)-Reaktion an Bor wiedergegeben.

β) *Elastische Streuung.* Neben den (n, γ)-Prozessen tritt die elastische Streuung auch bei langsamen Neutronen auf. Der Wirkungsquerschnitt σ_n ist im Bereich kleiner Energien außerhalb der Resonanzstellen wenig veränderlich und strebt auch für $v \to 0$ einem endlichen Wert zu, der bei schweren Kernen gegenüber dem

[1]) $\sim$ bedeutet proportional.

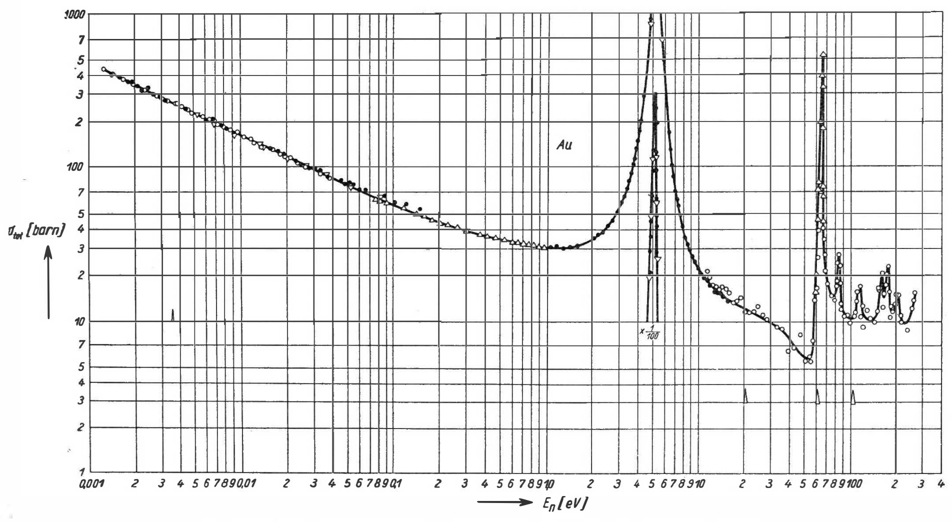


Abb. 56. Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} von Au für thermische und epithermische Neutronen

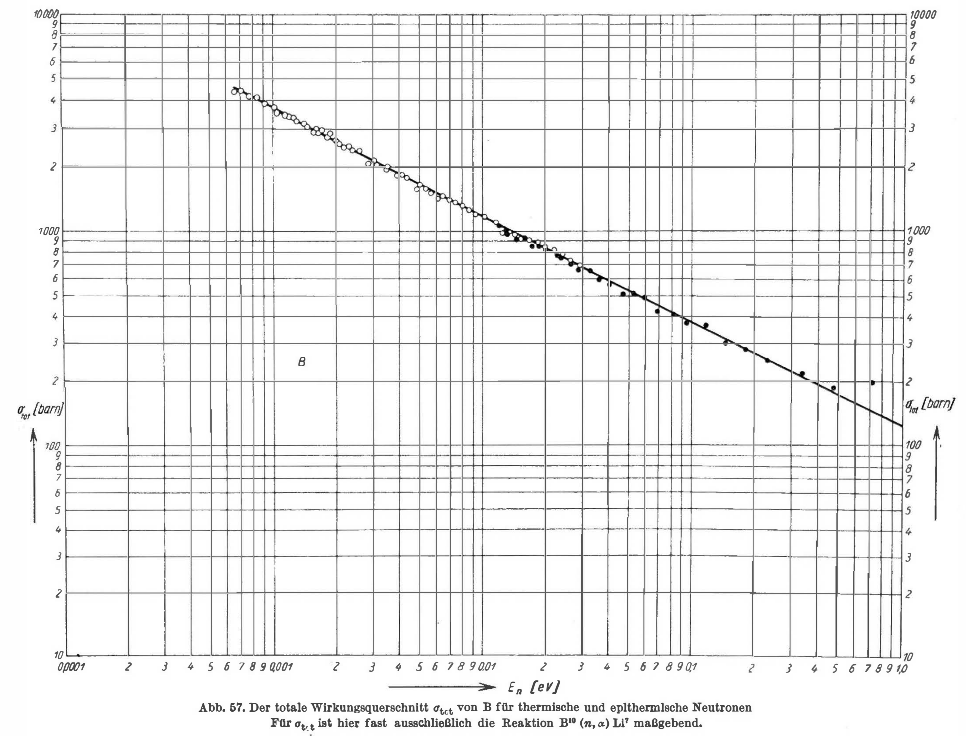


Abb. 57. Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} von B für thermische und epithermische Neutronen
Für σ_{tot} ist hier fast ausschließlich die Reaktion B^{10} (n, α) Li^7 maßgebend.

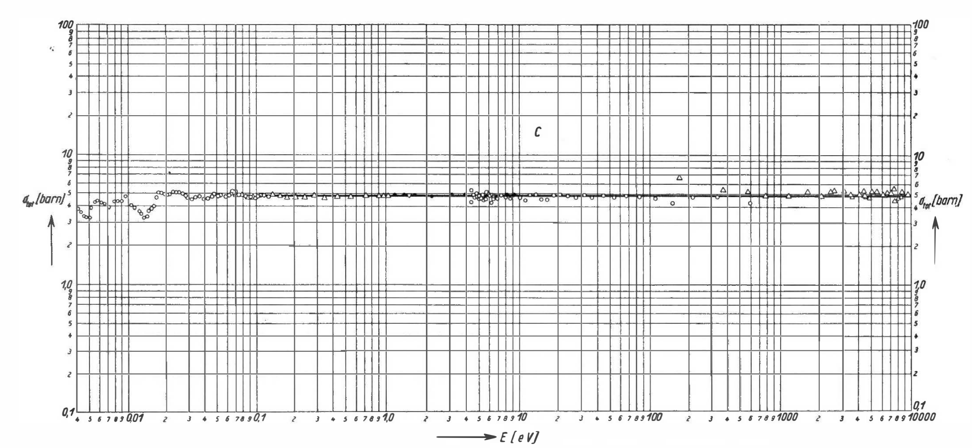


Abb. 58. Wirkungsquerschnitt von C für Neutronen von $4 \cdot 10^{-3}$ eV bis 10^{4} eV. Die Meßpunkte bedeuten σ_{tot} Da bei C die Absorption verschwindend klein ist ($\sigma_{abs} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ barn), ist praktisch $\sigma_{t.t}$ (C) = σ_{streu} (C)

Einfangsquerschnitt praktisch verschwindet, bei den leichten Kernen jedoch diesen oft erheblich überschreitet. Abb. 58 zeigt für C diesen typischen Verlauf mit E.

γ) Unelastische Streuprozesse treten ein, sobald die Neutronengeschwindigkeit ausreicht, den Restkern in einem angeregten Zustand zurückzulassen. Da der Abstand des ersten angeregten Niveaus über dem Grundzustand stets relativ hoch liegt und zwar meist über 100 keV sind diese Prozesse merklich endotherm: Sie setzen erst bei Überschreitung einer gewissen „Schwellenenergie" E_{Schw} ein. Danach steigt der Wirkungsquerschnitt zunächst proportional mit der Geschwindigkeit v' des *herausfliegenden* Neutrons an (s. Abb. 59):

$$\sigma_{nn'} \sim v.$$

Für größere v' wird die Abhängigkeit komplizierter.

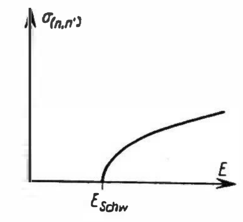


Abb. 59. Verlauf des unelastischen Streuquerschnitts in der Nähe der Schwellenenergie E_{Schw} (schematisch)

Abb. 60. Wirkungsquerschnitt endothermer (n,p)- und (n,α)-Reaktionen in der Nähe der Reaktionsschwelle E_{Schw} (schematisch)

δ) Endotherme (n, p)- und (n, α)-Prozesse setzen ebenfalls erst bei Überschreitung einer Schwellenenergie ein. Der Wirkungsquerschnitt steigt danach exponentiell mit der Geschwindigkeit v' des *auslaufenden* Teilchens an, und zwar für kleine v' gemäß

$$\sigma(n, b) \sim e^{-\frac{K_b}{v'}}; \quad K_b = \text{const}. \tag{30.1}$$

Diese Form des Exponentialgesetzes ist charakteristisch für Reaktionen, an denen geladene Teilchen mit kleinen Energien (unterhalb des Coulomb-Walles, s.S.103; 155) beteiligt sind. Die Energieabhängigkeit ist schematisch in Abb. 60 veranschaulicht. Genaugenommen wäre in (30.1) noch ein von v' schwach abhängiger Faktor zu berücksichtigen, der aber nur bei sehr genauen Messungen neben der e-Funktion bemerkbar wird (s. hierzu § 34; § 39c; § 64c; § 72 bis 75).

ε) Resonanzprozesse mit Neutronen. — Im Energiebereich unterhalb etwa 2 MeV zeigt sich eine große Anzahl von Energieniveaus, an denen die Compoundkernbildung resonanzartig anschwillt: sog. *Mehrteilchenresonanzen* oder *Compoundkernresonanzen* (s. Abb. 56 für Au(n, γ) und Abb. 61 für U(n, γ)). Die Dichte dieser Resonanzstellen, d. h. deren Anzahl pro Einheit des Energieintervalles, wird um so größer, je schwerer die Atomkerne und je höher die Anregungsenergien werden. Vor den Resonanzstellen beobachtet man häufig ein *Minimum* des totalen Wirkungsquerschnittes (s. z. B. die Kurve für U, Abb. 61).

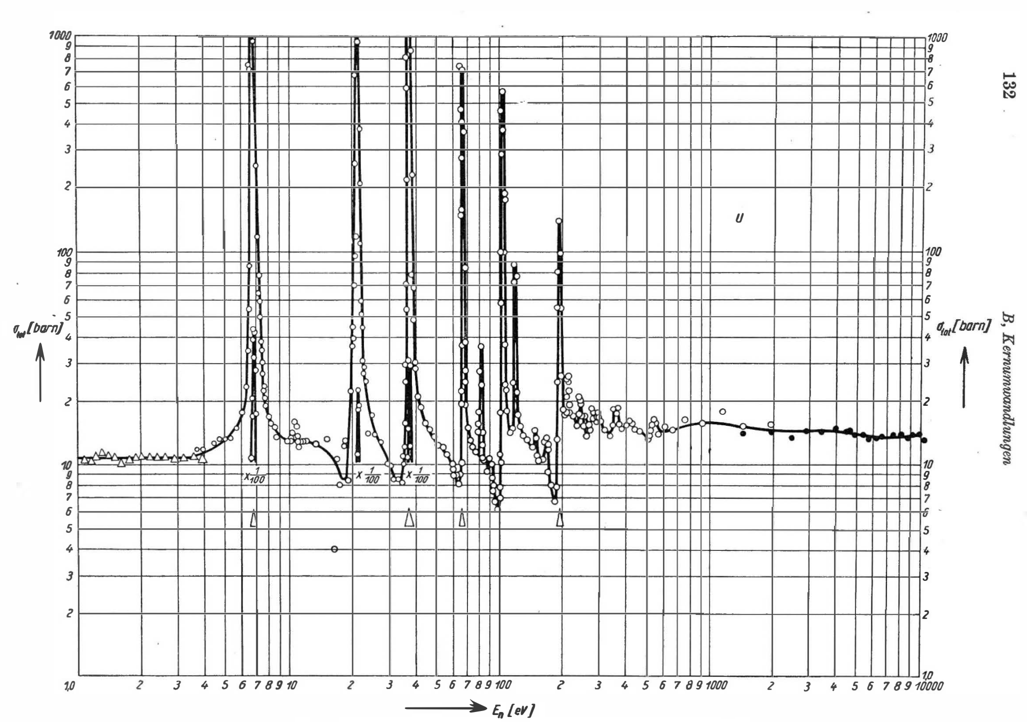


Abb. 61. Wirkungsquerschnitt von U für epithermische und langsame Neutronen

Die Abstände der Resonanzen mit langsamen Neutronen betragen der Größenordnung nach bei den leichten Kernen etwa 0,5 MeV, die Resonanz-Breiten 10 keV; bei mittelschweren Kernen sind die entsprechenden Werte ≈ 1 keV und 100 eV, bei den schweren Kernen ≈ 1 eV und 10^{-2} eV. Für die schwersten Kerne ändern sich die Werte praktisch nicht mehr. Das Bild der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes langsamer Neutronen wird durch die Resonanzen und das $\frac{1}{v}$-Gesetz beherrscht. Mit steigender Anregungsenergie rücken die Resonanzstellen immer näher aneinander, und die Resonanzbreiten nehmen monoton zu. Bei großen Energien verschwimmen daher die Resonanzen ineinander, bis sie schließlich verschwinden.

ζ) Riesenresonanzen. In dem Energiebereich, in welchem die eben betrachteten Mehrteilchenresonanzen in ein „Kontinuum" übergegangen sind, treten die von jenen ursächlich gänzlich verschiedenen, über ein weites Intervall von vielen MeV sich erstreckenden, relativ flachen „*Riesenresonanzen*" auf, die in neuerer Zeit im Zusammenhang mit dem optischen Modell eine große Bedeutung erlangt haben (giant resonances, s. S. 152/153, insbesondere Abb. 69). Man kann sie auch in das Gebiet niedrigerer Energien verfolgen, wenn man die Energieabhängigkeit des über die Mehrteilchenresonanzen *gemittelten* Wirkungsquerschnitts betrachtet.

b) Wirkungsquerschnitte geladener Teilchen

Bei geladenen Teilchen wird das soeben für Neutronen erörterte Verhalten durch die *elektrostatische Abstoßung* der Reaktionspartner stark modifiziert. Je größere Ladungen die beteiligten Kerne tragen, um so größere Energien der Geschoßteilchen werden erforderlich, um eine Kernreaktion in merklichem Maße einzuleiten. Für Reaktionen mit Protonen steigt die notwendige Energie über das Periodische System von einigen Zehntel MeV bei den leichtesten Kernen auf etwa 14 MeV bei den schwersten. Für α-Teilchen benötigt man das Doppelte.

α) Bei *exothermen Prozessen* vom Typ (p, γ); (p, n); (p, α); (α, p) setzen die Reaktionen bei Steigerung der Partikelgeschwindigkeit allmählich ein. Der Anstieg des Wirkungsquerschnittes erfolgt anfangs etwa gemäß

$$\sigma \sim e^{-\frac{K_a}{v}}, \quad K_a = \text{const}, \tag{30.2}$$

wo v die Geschwindigkeit des *einfallenden* Teilchens bedeutet (s. die schematische Abb. 62 oder Abb. 84, S. 193). Genauer gilt $\sigma \sim \frac{1}{v^2} \exp\left(-\frac{K_a}{v}\right)$. Diesem allgemeinen Verlauf überlagern sich oft mehr oder weniger zahlreiche Resonanzen.

Abb. 62.
Der Wirkungsquerschnitt exothermer Reaktionen mit geladenen Teilchen (schematisch)

β) Endotherme Reaktionen treten erst beim Überschreiten der *Reaktionsschwelle* ein. In deren Nähe verläuft der Wirkungsquerschnitt wie

$$\sigma(a, b) \sim e^{-\frac{K_b}{v'}} e^{-\frac{K_a}{v}}, \tag{30.3}$$

wo v' die Geschwindigkeit des *emittierten* Teilchens bezeichnet (s. Abb. 63). K_a bzw. K_b stellen Konstanten dar, die proportional zum Produkt der Kernladungen der beiden Partikel vor bzw. nach dem Stoß sind. Für ungeladene emittierte Teilchen ist die erste Exp.-Funktion durch einen Faktor v' zu ersetzen.

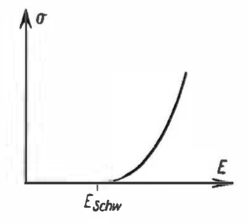


Abb. 63. Der Wirkungsquerschnitt endothermer Reaktionen in der Nähe der Reaktionsschwelle bei geladenen auslaufenden Teilchen (schematisch)

γ) Die Compoundkernresonanzen mit geladenen Teilchen sind, falls keine Neutronenemission auftritt, wegen der Verlängerung der Lebensdauer des Zwischenkerns durch die *Coulomb-Barriere* (s. weiter unten) schärfer als die Resonanzen mit Neutronen gleicher Energie und können bis zu Geschwindigkeiten von einigen MeV der einfallenden Teilchen beobachtet werden (s. die Al(p, γ)-Reaktion nach Abb. 42, S. 104).

δ) Riesenresonanzen. Im Gebiet sehr großer Einfallsenergien, die die Höhe des „Coulomb-Berges" weit überschreiten, beobachtet man keine schmalen Resonanzen mehr, sondern nur die breiten, über Gebiete von MeV's sich erstreckenden — bei den Neutronen schon erwähnten — Riesenresonanzen. Diese lassen sich auch in das Gebiet niedrigerer Energien verfolgen, wenn man die über die gewöhnlichen, schmalen Mehrteilchenresonanzen gemittelten Wirkungsquerschnitte betrachtet.

c) Der Wirkungsquerschnitt inverser Reaktionen

Eine besonders eindrucksvolle Bestätigung der Compoundbildung erhält man aus dem Verhalten der Wirkungsquerschnitte von *inversen Reaktionen.* Ein Beispiel zeigt Abb. 64, wo die Wirkungsquerschnitte der einander inversen Reaktionen $Al^{27}(p, \alpha)Mg^{24}$ und $Mg^{24}(\alpha, p)Al^{27}$ übereinander aufgetragen sind. Könnte man z. B. nach der (p, α)-Reaktion an Al^{27} die Bewegungsrichtung des α-Teilchens und die des Mg^{24}-Kerns genau umkehren, so entstünde der inverse Prozeß $Mg^{24}(\alpha, p)Al^{27}$.

Es ist ersichtlich, daß in diesem Falle

1. der Zwischenkern Si^{28} bei beiden Prozessen genau gleich stark angeregt ist und daß
2. die kinetische Energie der Relativbewegung der Stoßpartner bei dem primären und dem inversen Prozeß um die Reaktionsenergie Q differieren. Diese Differenz beträgt 1,613 MeV und ist in Abb. 64 als Abszissenverschiebung zu erkennen (s. a. § 65). Die genaue Übereinstimmung der Resonanzenergien bei beiden Reaktionen ist ein überzeugender Beweis dafür, daß — trotz der verschiedenen Ausgangskerne — beide Prozesse über denselben Compoundkern Si^{28} laufen.

Allgemein besteht zwischen den Wirkungsquerschnitten inverser Reaktionen die *Reziprozitätsbeziehung*

$$\frac{\sigma(a, b)}{\sigma(b, a)} = \frac{(2I_A + 1)(2I_b + 1)}{(2I_B + 1)(2I_a + 1)} \frac{p_b^2}{p_a^2}, \tag{30.4}$$

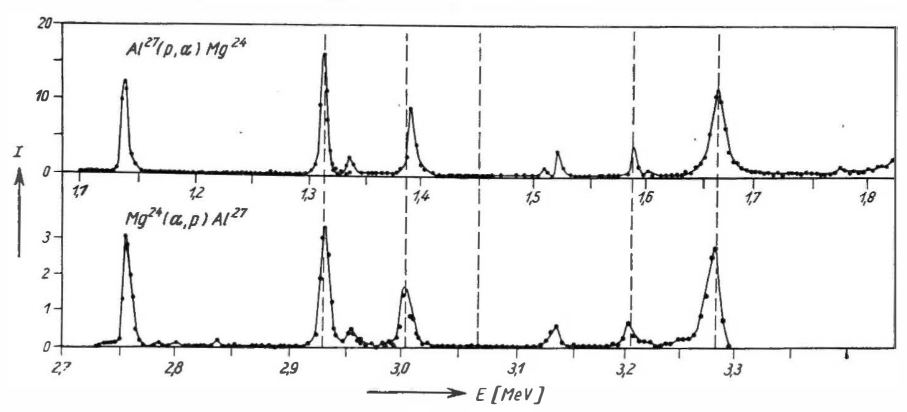


Abb. 64. Vergleich der Wirkungsquerschnitte der inversen Reaktionen $Al^{27}(p,\alpha)Mg^{24}$ und $Mg^{24}(\alpha,p)Al^{27}$. Die Abszissenverschiebung um 1,613 MeV entspricht dem Q-Wert der Reaktion (E = Energie der einfallenden Partikel in MeV im Schwerpunktssystem, I = relative Ausbeute)

die in § 65 explizite abgeleitet ist. I_A, I_a, I_B und I_b bedeuten die Spins der Teilchen A, a, B und b. Die Impulse p_a und p_b der Teilchen a und b (im Schwerpunktssystem) sind in (30.4) durch den Energiesatz miteinander gekoppelt:

$$\frac{p_b^2}{2\mu_b} - \frac{p_a^2}{2\mu_a} = Q,$$

wo μ_a und μ_b die reduzierten Massen der jeweiligen Teilchenpaare vor und nach der Reaktion bedeuten.

d) Mehrfachprozesse

Bei sehr großen Anregungsenergien kann ein Compoundkern auch mehrere Teilchen emittieren. Dabei gilt die Regel, daß zur Emission *geladener* Teilchen um so größere Energien erforderlich sind, je höher die Kernladungszahlen werden.
An den leichtesten Kernen bemerkt man – abgesehen von den starken individuellen Eigenheiten, welche Kerne kleiner Nukleonenzahlen immer aufweisen – noch kein sehr unterschiedliches Verhalten zwischen Neutronen und Protonen. Bei leichten und mittelschweren Kernen beobachtet man mit wachsender Energie zuerst die Emission eines Neutrons, später die von zwei Neutronen oder die eines Neutrons und eines Protons. Als Beispiel zeigt Abb. 65 die Ausbeutekurven bei Ni^{60}-α- und Cu^{63}-p-Reaktionen, die beide über denselben Compoundkern Zn^{64} laufen. Die Übereinstimmung des Spektrums der emittierten Teilchen aus beiden Reaktionen zeigt wieder die Richtigkeit der Compoundvorstellung. Daß hier die (α, np)- und (p, np)-Prozesse häufiger auftreten als die $(\alpha, 2n)$- und $(p, 2n)$-Prozesse, liegt offenbar daran, daß für ein Proton als zweites emittiertes Teilchen die Energieverhältnisse günstiger liegen als für ein Neutron: Bei den leichten bis mittelschweren Kernen kann nämlich die *Verschiedenheit der Endkerne* noch merkliche Energieunterschiede bedingen. Diese verschwinden aber immer mehr bei den schweren und schwersten Kernen. Ferner wird die Behinderung der Emission geladener Teilchen durch die wachsende Coulomb-Barriere immer merklicher. Daher findet man unter den von einem

schweren Compoundkern emittierten Teilchen mittlerer Energie vorwiegend Neutronen. Ein Beispiel zeigt Abb. 66 an der α-Reaktion mit In^{115}. Die über die (α, n)-; $(\alpha, 2n)$- und $(\alpha, 3n)$-Prozesse gebildeten Sb-Isotope 118; 117 und 116 wurden mit Hilfe ihrer E- und β^+-Aktivität beobachtet.

Man bemerkt mit wachsender Anregungsenergie die Emision einer steigenden Anzahl von Neutronen.

Die Protonenemission wird erst bei höheren Anregungsenergien merklich. α- Teilchen beobachtet man meist nur bei Energien über ≈ 40 MeV.

Eine Übersicht über die bei verschiedenen Energien auftretenden Prozesse gibt die Tabelle 13. Hiermit ist — etwas schematisch — der Bereich des experimentellen Materials umrissen, dessen nähere Diskussion und theoretische Deutung die Aufgabe der folgenden Paragraphen sein soll.

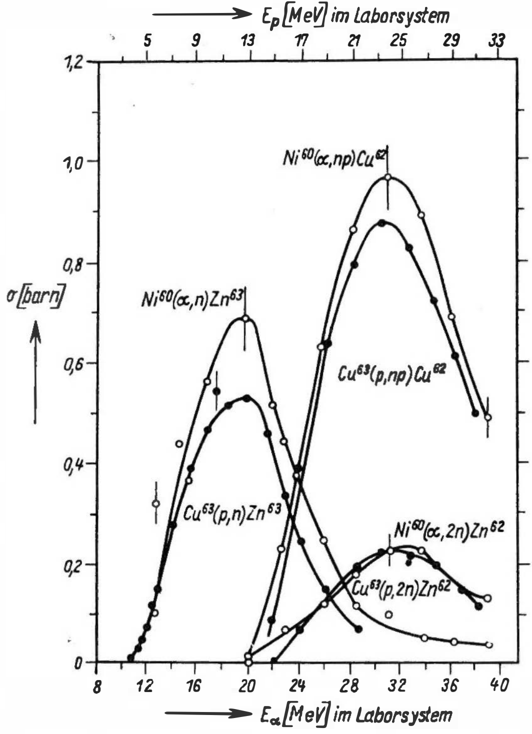


Abb. 65. Wirkungsquerschnitte der Reaktionen (α, n), (α, np) und $(\alpha, 2n)$ an Ni^{60} sowie die der Reaktionen (p, n), (p, np) und $(p, 2n)$ an Cu^{63}. Die Skala der Protonenenergie ist gegen die der α-Energie um 7 MeV verschoben, derart, daß

$$E_\alpha = E_p + 7\text{ MeV}$$

ist. Die Anregungsenergien des gemeinsamen Compoundkerns stimmen dann im Diagramm überein

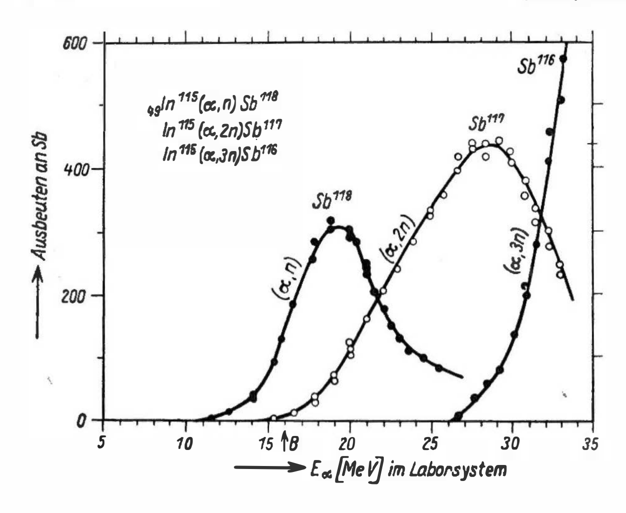


Abb. 66. Ausbeutekurven für die Bildung von Sb^{118}, Sb^{117} und Sb^{116} bei Beschluß von In^{115} mit α-Teilchen. Jede Kurve hat ihren eigenen (unbekannten) Ordinatenmaßstab, man kann daher die verschiedenen Isotopenausbeuten nicht numerisch miteinander vergleichen

Tabelle 13. Reaktionstypen an mittelschweren und schweren Kernen nach [B. u. W.]

Energie der einfallenden Partikel	Einfallende Partikel: n	p	α	d
mittelschwere Kerne				
niedrig 0 bis 1 keV	n (el) (Res)			
mittel 1 bis 500 keV	n (el) (Res)	n (Res)	n p (Res)	p n
hoch 0,5 bis 10 MeV	n (el) n (unel) p Res bei niedrigen Energien	n p (unel) Res bei niedrigen Energien	n p α (unel) Res bei niedrigen Energien	p n pn $2n$ d (unel)
sehr hoch 10 bis 50 MeV	$2n$ n (unel) n (el) p np $2p$ drei oder mehr Partikel	$2n$ n p (unel) np $2p$ drei oder mehr Partikel	$2n$ n p np $2p$ α (unel) drei oder mehr Partikel	p $2n$ pn $3n$ d (unel) t drei oder mehr Partikel
schwere Kerne				
niedrig 0 bis 1 keV	n (el) (Res)			
mittel 1 bis 500 keV	n (el) (Res)			
hoch 0,5 bis 10 MeV	n (el) n (unel) p	n p (unel)	n p	p n pn $2n$
sehr hoch 10 bis 50 MeV	$2n$ n (unel) n (el) p pn $2p$ drei oder mehr Partikel	$2n$ n p (unel) np $2p$ drei oder mehr Partikel	$2n$ n p np $2p$ α (unel) drei oder mehr Partikel	p $2n$ np $3n$ d (unel) t drei oder mehr Partikel

Erklärung: Die Tabelle zeigt — geordnet nach Energien — die am häufigsten auslaufenden Teilchen bei einer Kernreaktion, welche durch die Art der Geschoßpartikel und des Zielkerns sowie durch die Energie der Geschoßteilchen charakterisiert ist. Es bedeuten el = elastische Streuung; unel = unelastische Streuung; Res = Resonanzen, bezieht sich auf alle angegebenen Reaktionen; t = Triton. Kernspaltung ist nicht erwähnt.

§ 31. Ansätze zur Erklärung der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes

Allgemeines über das Potentialtopfmodell und den Compoundkern

Während die vor 1934 nur spärlich bekannten Wirkungsquerschnitte von Neutronenreaktionen alle etwa die Größenordnung der geometrischen Kerndimensionen und damit nichts Außergewöhnliches erkennen ließen, bereiteten die von FERMI [F 35-1] u. a. gefundenen unerwartet großen Reaktionsquerschnitte bei langsamen Neutronen und ihre starke Veränderlichkeit mit der Geschwindigkeit dem Verständnis große Schwierigkeiten. Die ersten Versuche von BETHE [B 35-1] u. a. zur Erklärung dieser Erscheinung benutzten das einfache *Potentialtopfmodell*, welches den Kern als ein strukturloses Raumgebiet stark erniedrigten Potentials für die ankommenden Teilchen ansieht (s. §§ 69 bis 71 sowie Kap. IX, Theorie der Atomkerne).

Zur einfachsten Beschreibung wird meist ein kugelsymmetrisches „*Topfpotential*“ V angenommen:

$$V = -V_0 \quad \text{für } r < R,$$
$$V = 0 \quad \text{für } r > R;$$

und als „Topfradius“ wird der gewöhnliche Kernradius $R = r_0 \sqrt[3]{A}$ benutzt, mit $r_0 = (1{,}3 \text{ bis } 1{,}4) \cdot 10^{-13}$ cm. Die Tiefe des Potentialtopfes errechnet sich z. B. nach dem Fermias-Modell (s. § 57) aus der Bindungsenergie und dem Wert von R zu

$$V_0 = 30 \text{ bis } 40 \text{ MeV}$$

und ist praktisch konstant über das gesamte Periodische System.
Die Wechselwirkung des Neutrons mit dem Kern wird als eine Streuung der Neutronenwellen am Potentialtopf beschrieben: Die Wellenlänge beträgt außerhalb des Kerns

$$\lambda = \frac{h}{m_n v} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{2{,}87 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E}},$$

wenn die kinetische Energie E des freien Neutrons in eV und λ in cm gemessen werden. Die Wellenlänge im Kerninneren beträgt (λ in cm; E und V_0 in eV)

$$\lambda = \frac{2{,}87 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E + V_0}}.$$

Der Kern wirkt daher auf die Neutronenwellen etwa wie eine Kugel mit dem *Brechungsindex*

$$n = \sqrt{1 + \frac{V_0}{E}},$$

welche in einem Medium mit $n = 1$ eingebettet liegt.

Die Erscheinungen, die ein solches Modell erwarten läßt, sind ähnlich denen, die ein in Luft befindlicher, kugelförmiger ideal durchsichtiger Körper mit $n \gg 1$ gegenüber elektromagnetischen Wellen oder Schallwellen bietet: Die Wirkungsquerschnitte für elastische Streuung liegen i. allg. etwa in der Größenordnung des geometrischen Kernquerschnittes; aber an gewissen „Resonanzstellen" können sie außerordentlich stark anwachsen, und zwar bis zur maximalen Größe von etwa

$$\sigma_{\max} \approx \pi \lambda\!\!\!^{-2},$$

wo $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi}$ gesetzt ist. In diesem Modell betragen die Abstände der Resonanzen an mittelschweren Kernen 10 bis 20 MeV und die Resonanzbreiten bis zu mehreren MeV, wie weiter unten in § 70 näher ausgeführt ist.

Das Potentialtopfmodell läßt außer der Streuung auch die Möglichkeit eines Teilcheneinfanges in einen der gebundenen Zustände negativer Energie voraussehen. Die beim Einfang abzuführende Energie wird in Form von γ-Strahlung ausgestrahlt. Die Rechnung läßt selbst an Resonanzstellen nur eine relativ kleine Einfangswahrscheinlichkeit erwarten. Diese Aussagen des Modells sind zwar qualitativ in Übereinstimmung mit der Erfahrung, quantitativ aber zeigen die wirklichen Kerne ein anderes Verhalten:[1])

1. Die Abstände der Resonanzen betragen in Wirklichkeit bei mittelschweren und schweren Kernen 100 eV bis $\approx$ 1 eV — gegenüber vielen MeV im Potentialtopfmodell.

2. Die Breite der Resonanzen ist in Wirklichkeit ebenfalls um viele Zehnerpotenzen kleiner als nach dem Modell.

3. Die Einfangswahrscheinlichkeit ist besonders an Resonanzstellen außerordentlich viel größer, als es der modellmäßigen Erwartung entspricht.

Eine widerspruchsfreie Anpassung des Potentialtopfmodells an diese experimentellen Daten ist nicht möglich. Dies ist auch keineswegs verwunderlich, da es sich um eine Einteilchenbeschreibung handelt, welche eine *ungestörte Bewegung* des auftreffenden Teilchens durch die dichtgepackten Nukleonen des Zielkerns ohne Zusammenstöße annimmt und somit von vornherein augenscheinlich recht künstliche Voraussetzungen enthält.

Die von N. Bohr zur Erklärung der Erscheinungen eingeführte *Compoundvorstellung* benutzt gerade die entgegengesetzte Annahme einer starken Wechselwirkung zwischen allen Nukleonen, derart, daß gleich beim Eindringen des neuen Teilchens dessen kinetische Energie durch wiederholte Stöße sich in kurzer Zeit auf viele Kernnukleonen gleichmäßig verteilt, so daß sich ein Mehrteilchenzustand mit einer größeren Anzahl von Teilchen auf angeregten Niveaus ausbildet. Die hier auftretenden Resonanzen heißen daher auch „*Mehrteilchenresonanzen*". Ein solches System hat bei einigermaßen großer Teilchenzahl (etwa $A > 10$) und nicht

---

[1]) Zuerst wurde dies 1935/36 bemerkt von Bjerge und Westcott [B 35-2]; Moon und Tillmann [M 35-1]; Szillard [S 35-1]; Fermi und Amaldi [F 35-1]; Frisch et al. und Frisch und Placzek [F 36-2].

zu kleiner Anregungsenergie eine große Menge von möglichen Energiezuständen, deren Dichte mit der Zahl der Freiheitsgrade und mit der Stärke der Anregung schnell anwächst. Diese Eigenschaft von Mehrteilchensystemen erkennt man beispielsweise bei einem Vergleich des Wasserstoffspektrums (Einteilchenproblem) mit etwa einem Xenonspektrum (54 Teilchen-Problem), das ganz erheblich mehr Linien aufweist, als das des Wasserstoffs. Die große Dichte der an schweren Kernen beobachteten Resonanzniveaus wird damit verständlich.

Zur *Compoundbildung* ist es notwendig, daß das ankommende Teilchen so stark mit den Nukleonen des Zielkerns wechselwirkt, daß es auf einem Wege von einigen 10^{-13} cm, d.h. auf einem kleinen Bruchteil des Kerndurchmessers, praktisch seine ganze Energie auf einige der anderen Kernnukleonen überträgt, diese ebenso schnell die Energie weiter auf die anderen Teilchen verteilen usw., so daß sich in kurzer Zeit eine Art von *statistischer „Temperaturverteilung"* der Energie der Kernnukleonen einstellt. Man kann diesen Zustand, in dem keines der Nukleonen im Mittel genügend Energie besitzt, um aus dem Kernverband austreten zu können, durch eine Temperatur T des derart „aufgeheizten" Kernes beschreiben. Diese statistische Verteilung ist, falls sie überhaupt eintritt, offenbar unabhängig vom Anfangszustand im ersten Augenblick der Bildung des Zwischenkerns. Von den Anfangsbedingungen bleiben nur die durch die Erhaltungssätze (von Energie, Drehmoment, Ladung, Teilchenzahl, Statistik, Parität und Isopin) gegebenen Einschränkungen als „Erinnerung" übrig. Abgesehen hiervon, ist daher das weitere Verhalten des Compoundkerns – in Übereinstimmung mit vielfältiger Erfahrung – *unabhängig von der Art seiner Entstehung* und wird nur durch jene Größen bestimmt. Die Anregungsenergie kann durch γ-Strahlung abgegeben werden oder führt zur Emission eines Teilchens, ein Vorgang, der als Verdampfung eines Nukleons aus der erhitzten Kernmaterie aufgefaßt werden kann: Durch eine zufällige Schwankung der Energieverteilung kann ein Nukleon oder ein α-Teilchen des Compoundkerns so viel Energie auf sich sammeln, daß es gegen die Bindungsenergie den Kernverband verläßt. Die beobachtete Schärfe der Resonanzen zeigt, daß die Lebensdauer τ des Compoundkerns zumeist mindestens 10^{-18} bis 10^{-19} sec beträgt und damit um mehrere Größenordnungen länger ist als die Laufzeit τ_0 des einfallenden Teilchens quer durch den Kern ($\tau_0 \approx 10^{-22}$ sec).

Diese relativ lange Lebensdauer gibt dem Compoundkern oft die Möglichkeit, bevor andere Prozesse eintreten (trotz der Langsamkeit der Energieabgabe durch elektromagnetische Strahlung) seine Energie in Form von γ-Quanten soweit abzugeben, daß die Restenergie nicht mehr ausreicht, um auch nur ein einziges Nukleon zu verdampfen. Das eingedrungene Teilchen ist dann endgültig eingefangen. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Prozesses wird mit abnehmender Energie E des Geschoßteilchens i. allg. ansteigen, denn je weniger der Compoundkern angeregt, d. h. „erhitzt" ist, um so weniger kann eine Teilchenverdampfung erfolgen, die ja gänzlich aufhören muß, wenn die Anregungsenergie gerade die Bindungsenergie erreicht. Die Wahrscheinlichkeit der γ-Emission dagegen, welche durch die große Energiedifferenz zwischen Compoundniveau und Grundzustand bestimmt wird, bleibt für kleine Einfallsenergien E praktisch konstant. Dies gibt eine qualitative

Erklärung der von FERMI beobachteten großen Einfangsquerschnitte bei langsamen Neutronen. (Für die volle Erklärung ist noch die Wellennatur der Materie maßgebend.) Da die γ-Emission stets einen langsamen Vorgang darstellt, folgt zugleich auch die lange Lebensdauer und damit die große Energieschärfe der schwach angeregten Niveaus.

Bei wachsender Teilchenenergie wird der Compoundkern stärker angeregt — „erhitzt" —, die Teilchenemission, die einer Art Dampfdruckgleichung folgt, wird immer häufiger gegenüber dem (a, γ)-Einfangprozeß. Die Lebensdauern der Compoundzustände werden mit steigender Energie immer kürzer und damit die Energieniveaus bzw. die Resonanzen immer unschärfer. Schließlich erreichen die Resonanzbreiten die zunehmend enger werdenden Niveauabstände oder übertreffen diese sogar, und der Resonanzcharakter geht verloren. Gut ausgeprägte Resonanzen finden sich daher i. allg. nur bei Einfallsenergien unter etwa 2 MeV.

Vielfache Erfahrung hat gezeigt, daß die Compoundvorstellung im Gebiet mittlerer Anregungsenergien (auf welches wir uns in diesem Kapitel beschränken) im ganzen recht gut zutrifft. Hierfür läßt sich auch eine direkte Begründung angeben: Nach neueren experimentellen Ergebnissen über die (n,p)-*Streuung* kann man die mittlere freie Weglänge Λ eines Nukleons in der Kernmaterie abschätzen zu[1])

$$\Lambda \approx 1{,}8 \cdot 10^{-15}\, E_{\text{kin}}, \text{ gültig (mit } \Lambda \text{ in cm) für } E_{\text{kin}} > 10 \text{ MeV.}$$

E_{kin} bedeutet hier die *kinetische Energie im Kerninneren* in MeV und hat bei *Einfallsenergien* bis zu ≈ 10 MeV Werte um 40 bis 50 MeV. Hier ist $\Lambda = (0{,}7$ bis $0{,}9) \cdot 10^{-13}$ cm, und die Bildung eines Compoundkernes ist daher sehr wahrscheinlich, da der Kerndurchmesser einige 10^{-13} cm oder mehr beträgt. Es ist aber auch ersichtlich, daß eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden ist, daß das einfallende Teilchen nicht zur Compoundbildung führt.

Bei Einfallsenergien > 100 MeV wird $\Lambda \gtrsim 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm, und es finden häufiger Prozesse statt, bei denen das primäre oder die unmittelbar von ihm angestoßenen Teilchen aus dem Kern fliegen, ohne von den anderen Nukleonen daran gehindert zu werden (s. Kap. VII, „knock-out"-Prozesse).

Andererseits ist aus den Erfolgen des *Schalenmodells* (s. Kap. IX) bekannt, daß bei extrem kleinen Anregungsenergien das Bild des ohne Zusammenstöße operierenden *Einteilchenmodells* zu Recht besteht (zumindest lassen sich die Erfahrungen so deuten). Dies ist durchaus plausibel, da in der Nähe des Grundzustandes das *Pauli-Prinzip* die Wechselwirkung eines Teilchens mit anderen Nukleonen des Kernes ausschließt, wenn die Anregungsenergie nicht ausreicht, gleich mindestens zwei Teilchen auf höhere angeregte Zustände zu bringen. In diesem Gebiet unterhalb der Bindungsenergie ist also die Bohrsche Compoundkern-Vorstellung mehr und mehr durch das Einteilchenmodell abzulösen.

Bei Kernreaktionen ist aber die Mindestanregungsenergie durch die Bindungsenergie des einfallenden Teilchens gegeben und beträgt i. allg. über 6 MeV. Hier erweist

---

[1]) Dies folgt aus der bekannten Dichte der Kernmaterie und dem experimentellen Wert $\sigma_{pn} \approx \frac{4}{E_{\text{kin}}}$ [barn].

sich die *Compoundbildung als das wesentliche Merkmal der weitaus meisten Kernreaktionen.* Insgesamt ist zu erwarten, daß die dem Potentialtopfmodell und der Compoundbildung entsprechenden Prozesse parallel laufen, wobei im Gebiet *niedriger Einfallsenergien* die letzteren im allgemeinen überwiegen.

§ 32. Genauere Beschreibung des Compoundmechanismus

Für den im vorigen Paragraphen nur qualitativ erörterten *Compoundmechanismus* soll nunmehr eine formelmäßig präzisierte Beschreibung gegeben werden. Die nähere theoretische Begründung wird im Abschn. 4 nachgeholt. Wir nehmen mit BOHR den Verlauf einer Kernreaktion in zwei Schritten an:

1. Bildung eines Compoundkerns; *2. Zerfall des Compoundkerns.*

a) Zerfall des Compoundkerns und die Γ-Breiten

Wir betrachten zuerst den Zerfall und das hierbei auftretende Verzweigungsverhältnis verschiedener Reaktionstypen. Nach Art aller radioaktiven Prozesse wird angenommen, daß in einem jeden bestimmten Zustand des Compoundkerns die sekundliche Wahrscheinlichkeit w_b der Emission eines Teilchens der Sorte b *zeitunabhängig* ist. Kann die Umwandlung auf verschiedene Weisen erfolgen (einschließlich durch γ-Strahlung), so ist die resultierende Zerfallswahrscheinlichkeit w pro sec die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelprozesse:

$$w = w_\gamma + w_n + w_p + w_\alpha + \dots \qquad (32.1)$$

Die mittlere Lebensdauer des Compoundkerns beträgt dann

$$\tau = \frac{1}{w}. \qquad (32.2)$$

Die Endlichkeit der Lebensdauer bedingt nach der *Unbestimmtheitsbeziehung* von HEISENBERG eine Energieunschärfe Γ des Compoundniveaus, die durch $\tau\Gamma = \hbar$ gegeben wird (Näheres s. § 66). Es gilt also

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = w\hbar \qquad (32.3)$$

oder, wenn wir Γ in eV, τ in sec und w in $\sec^{-1}$ ausdrücken,

$$\Gamma = 6{,}62 \cdot 10^{-16} \cdot w = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-16}}{\tau}. \qquad (32.4)$$

Wegen der Proportionalität zwischen w und Γ kann man letzteres mit Hilfe von (32.1) auch formal in einzelne Teile aufspalten, indem man jedem w_b eine *Partialbreite* Γ_b zuordnet:

$$\Gamma_b = w_b\hbar. \qquad (32.5)$$

Die Partialbreite Γ_b bedeutet also — bis auf $\hbar^{-1}$ — die Emissionswahrscheinlichkeit eines b-Teilchens aus dem Compoundkern, oder sie ist die (gedachte) Niveaubreite, wenn der Compoundkern nur durch die Emission eines b-Teilchens zerfallen würde.

Die gesamte Niveaubreite ist natürlich

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_p + \Gamma_\alpha + \Gamma_\gamma + \dots \tag{32.6}$$

Die *relative Wahrscheinlichkeit* der Emission einer bestimmten Teilchenart b (einschließlich γ-Quanten) im Vergleich zur Gesamtheit aller Umwandlungsmöglichkeiten heißt das *Verzweigungsverhältnis* $\frac{\Gamma_b}{\Gamma}$.

Wir betrachten nun die einzelnen Zerfallstypen gesondert:

b) Zerfall durch Emission schwerer Teilchen

Es wurde bereits weiter oben bemerkt, daß die Teilchenemission aus einem hochangeregten Compoundkern als Verdampfung eines oder mehrerer Nukleonen aus dem erhitzten Kern aufgefaßt werden kann. Die in § 60 angegebene Durchrechnung dieses „Modells" ergibt als Lebensdauer eines mittleren Zwischenkerns gegen Neutronenemission die im wesentlichen mit der Erfahrung übereinstimmende Größenordnung von etwa 10^{-18} bis 10^{-19} sec (s. § 60 (60.2)).

Bei hinreichend hoher Anregungsenergie im Bereich des Kontinuums entspricht die Energieverteilung der herausdampfenden Neutronen – genau wie bei den Glühelektronen – der Maxwell-Verteilung (s. § 61)

$$n(E)\,dE \sim E\,e^{-\frac{E}{kT}}\,dE,$$

wo $N(E)\,dE$ die Zahl der Neutronen im Energieintervall E bis $E + dE$ bedeutet. Durch fortlaufende Teilchenemission kühlt sich der Kern sukzessive ab, bis die Anregungsenergie die Bindungsenergie eines Nukleons unterschreitet und die Emission versiegt. Die weitere Energieabgabe kann dann im wesentlichen nur über γ-Strahlung und innere Konversion erfolgen.

Für kleine Geschwindigkeiten v_n' des emittierten Neutrons wird nach der Störungstheorie die Austrittswahrscheinlichkeit durch die Kernoberfläche, also w_n, proportional zu v_n' (s. § 62). Daher gilt hier die besonders bei Reaktionen mit langsamen Neutronen wichtige Beziehung

$$\Gamma_n \sim v_n'. \tag{32.7}$$

Beim Zerfall des Compoundkerns durch Emission *geladener* Teilchen werden die Austrittswahrscheinlichkeiten ganz wesentlich um den sog. Gamow-Faktor dadurch verringert, daß geladene Teilchen im Gegensatz zu ungeladenen einen zusätzlichen Potentialwall beim Verlassen des Kernes zu durchlaufen haben, wie weiter unten dargelegt ist (s. §§ 34 und 72 bis 75).

Die neben der Teilchenemission, insbesondere bei kleiner Anregungsenergie wichtigste Art der Energieabgabe von einem Compoundkern ist.

c) Die γ-Emission

Die γ-Emission eines angeregten Kerns erfolgt meist in Form einer elektrischen *Quadrupolstrahlung* oder allgemein einer höheren *Multipolstrahlung*. Ist deren Ordnung 2^l, so besitzt das emittierte Photon relativ zum Restkern einen Drehimpuls, dessen Komponente in einer vorgegebenen Richtung maximal $l\hbar$ beträgt ($l =$ ganze Zahl; $l = 1, 2, 3, \ldots$ bedeutet Dipol-, Quadrupol-, Oktupol-Strahlung usw.) Die Drehimpulsquantenzahlen des γ-Quants befolgen genau dieselben Regeln, wie die mechanischer Bahndrehimpulse. Der Erhaltungssatz des Gesamtdrehimpulses liefert dadurch eine Beziehung zwischen der Multipolität der emittierten Strahlung und den Spins J_A und J_E des Anfangs- und Endzustandes: Die möglichen Änderungen der Komponente des Kernspins in einer bestimmten Bezugsrichtung liegen alle zwischen $|J_A - J_E|$ und $(J_A + J_E)$ einschließlich der Grenzen. Für l bedeutet dies daher

$$|J_A - J_E| \leqq l \leqq (J_A + J_E). \tag{32.8}$$

Für die Emissionswahrscheinlichkeit w_γ eines γ-Quants der Multipolordnung 2^l ergibt sich unter der plausiblen Annahme, daß die Strahlung des Multipols etwa gleich derjenigen einer mit dem Kernradius R als Amplitude schwingenden Elementarladung ist,

$$w_\gamma = \frac{8\pi(l+1)}{l[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2l+1)]^2} \cdot \frac{c}{R}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2l+1}; \tag{32.9}$$

λ ist die Wellenlänge des γ-Quants, dividiert durch 2π.

Numerisch ergibt sich z. B. für einen Kern am Ende des Periodischen Systems ($R = 9 \cdot 10^{-13}$ cm), wenn wir von w_γ zur Lebensdauer $\tau_\gamma \left(= \frac{1}{w_\gamma}\right)$ in sec übergehen und λ durch die Quantenenergie E_γ in MeV ausdrücken,

$$\tau_\gamma \approx 1 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{l}{l+1}[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2l+1)]^2 \left(\frac{22}{E_\gamma}\right)^{2l+1}. \tag{32.10}$$

Die Lebensdauer gegen Quadrupolstrahlung ($l = 2$) mit $E_\gamma = 1$ MeV wird hier z.B. $\tau_\gamma \approx 8 \cdot 10^{-11}$ sec. Wenngleich (32.9) erfahrungsgemäß Werte liefert, die um Faktoren 10 bis 100 von der Wirklichkeit abweichen, wird doch die Tatsache klargelegt, daß die γ-Emission einen sehr langsamen Vorgang darstellt, der eine lange Lebensdauer gegen γ-Zerfall garantiert. Das aber bedeutet eine neue Stütze für die Idee des Compoundkerns als eines Systems von Nukleonen in einem hochangeregten quasistationären Zustand.

Aus (32.10) ist weiter zu ersehen, daß die Wahrscheinlichkeit der γ-Emission stark mit wachsendem l abnimmt. Es ist nämlich für die üblichen γ-Energien $\frac{R}{\lambda} \ll 1$. Die wirklich emittierte γ-Strahlung wird daher überwiegend dem kleinsten nach (32.8) zulässigen l-Wert entsprechen, d.h., es wird praktisch

$$l = |J_A - J_E|. \tag{32.11}$$

Im speziellen Fall $J_A = J_E = 0$ wäre nach (32.8) in Strenge nur $l = 0$ möglich; da aber Lichtquanten mit $l = 0$ nicht vorkommen, ist ein γ-Übergang $0 \rightarrow 0$ absolut „verboten". Ein Übergang erfolgt dann nur über innere Konversion oder innere Paarbildung (s. w. u.).

Für die *magnetische* Multipolstrahlung gelten ähnliche Verhältnisse. Nur ist hier die Wahrscheinlichkeit der γ-Emission um einen Faktor der Größenordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^{-2} \approx 100$ (v ist die Nukleonengeschwindigkeit im Kern) kleiner als beim elektrischen Multipol gleicher Ordnung.

Außer durch den Erhaltungssatz des Drehimpulses ist der γ-Übergang weiter eingeschränkt durch die Erhaltung der Gesamtparität. Hierbei ist die Parität eines elektrischen 2^l-Pols $= (-1)^l$, die Parität eines magnetischen 2^l-Pols $= -(-1)^l = (-1)^{l+1}$ zu setzen (s. a. § 44).

d) Isomere

Bei manchen Kernreaktionen erhält man Kerne, sog. Isomere, mit einer meßbaren Lebensdauer gegen γ-Emission wie z. B. Br^{80} mit einer Halbwertszeit von $4{,}4^h$. Nach C. F. v. Weizsäcker [W 36-1] kommt dies dadurch zustande, daß in einem solchen Falle eine ungewöhnlich große Spindifferenz $|J_A - J_E|$, d. h. l, zusammen mit einem relativ kleinen E_γ auftritt. In der Tat liefert (32.10) für z. B. $l \geqq 3$ und $E_\gamma \approx 0{,}022$ MeV schon $\tau_\gamma > 9$ Tage. Diese Fälle stellen aber Ausnahmen dar; i. allg. ist $\tau_\gamma \approx 10^{-13}$ bis 10^{-16} sec.

Der Bereich der z. Z. experimentell direkt meßbaren Lebensdauern reicht hinunter bis zu etwa 10^{-14} sec. Elektronische Kurzzeitverfahren ermöglichen äußerstenfalls Messungen bis zu etwa $5 \cdot 10^{-11}$ sec. Durch mannigfache Ausnutzung der Linienverschiebung durch den Doppler-Effekt der Rückstoßbewegung der Restkerne aus Kernreaktionen oder von β- oder γ-Zerfällen, ferner durch Vergleich der γ-Lebensdauern mit der Bremszeit der Rückstoßkerne in Flüssigkeiten und Festkörpern und durch manche andere Verfahren lassen sich heute Halbwertszeiten bis zu etwa 10^{-14} sec ermitteln. Die Anzahl der bekannten „Isomere" hat sich dementsprechend mit der Verfeinerung der Meßmethoden stark erhöht.

Für weitere Einzelheiten sei auf § 35 und auf Kapitel IX, § 112, verwiesen.

e) Innere Konversion und innere Paarbildung

Dasselbe oszillierende elektromagnetische Feld eines Kernes, welches die γ-Emission verursacht, kann auch durch direkte Übertragung der Übergangsenergie auf ein Hüllenelektron dieses aus dem Atomverband als sog. „*Konversionselektron*" hinausschleudern (*Innere Konversion*). Der Prozeß findet i. allg. mit abnehmender Häufigkeit an den K-, L-, M-Elektronen usw. statt. Das Verhältnis der Zahl der „*konvertierten*" Übergänge zu der der γ-Übergänge wird als *Konversionskoeffizient* α bezeichnet und wird u. a. wesentlich durch die Änderung von Spin und Parität beim Übergang bestimmt.

Bei der zweifachen γ-Kaskade des Br^{80} z. B. ist der erste Übergang praktisch vollständig konvertiert ($\alpha \approx \infty$), der zweite konvertiert mit $\alpha \approx 1{,}2$. (Zu bemerken

ist noch, daß als Konversionsfaktor α' oft auch das Verhältnis der Anzahl der konvertierten zur Gesamtzahl aller Übergänge bezeichnet wird. Es ist dann $\alpha' \leqq 1$ und $\alpha = \frac{\alpha'}{1-\alpha'}$. Im folgenden geben wir α' stets in % an.

In (bisher) seltenen Fällen, bei denen ein γ-Übergang hochgradig verboten ist, wird der Grundzustand durch Emission eines Elektron-Positron-Paares erreicht. Ein Beispiel hierzu bietet das über die Reaktion $F^{19}(p, \alpha)O^{16}$ erreichbare erste angeregte Niveau des O^{16} bei 6,05 MeV ($J = 0$), welches praktisch nur durch Paarbildung in den Grundzustand ($J = 0$) übergeht.

f) Compoundbildung und Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen Reaktionstypen

Bezeichnen wir den Wirkungsquerschnitt für die Bildung eines Compoundkerns durch ein Teilchen a mit $\sigma_c(a)$, so gilt für den Wirkungsquerschnitt einer (a, b)-Reaktion im Sinne der Bohrschen Hypothese der *Unabhängigkeit* zwischen Bildung und Zerfall

$$\sigma(a, b) = \sigma_c(a)\,\frac{\Gamma_b}{\Gamma}, \tag{32.12}$$

denn jeder gebildete Compoundkern wird mit der relativen Wahrscheinlichkeit oder dem *Verzweigungsverhältnis* $\frac{\Gamma_b}{\Gamma}$ durch Emission eines b-Teilchens zerfallen.

$\sigma_c(a)$ heißt auch der *totale Wirkungsquerschnitt*, da er die Summe aller Teilquerschnitte darstellt: Es ist nämlich wegen (32.6)

$$\sigma_c(a) = \sum_b \sigma(a, b) \qquad (\textstyle\sum \text{ über alle } b). \tag{32.13}$$

Nur im Falle der *elastischen Streuung* ist zu bemerken, daß (32.12) nicht den gesamten Streuquerschnitt darstellt: Zwar geht ein Teil der elastischen Streuung über den Compoundzustand, und für diesen Anteil wäre (32.12) zuständig (sog. *compoundelastische Streuung*). Aber die elastische Streuung hat noch wesentliche Anteile aus der „*Kernpotentialstreuung*", herrührend von dem plötzlichen Potentialsprung an der Kernoberfläche, und – bei geladenen Teilchen – noch zusätzlich von der bei kleineren Energien besonders starken Streuung am *Coulomb-Potential*. Denn jeder räumliche Potentialgradient verursacht eine Streuung der de Broglie-Wellen. Alle drei Anteile erzeugen miteinander kohärente Streuwellen, die zu Interferenzeffekten führen (s. hierzu § 70).

Noch eine Bemerkung ist anzufügen: Bildung und Zerfall des Compoundkerns sind nicht allein durch die Energiebilanz bestimmt; diese ist vielmehr nur eine notwendige Bedingung. Für den wirklichen Eintritt einer Kernreaktion müssen noch die *Erhaltungssätze* des Drehimpulses, der Parität und — wenn auch weniger streng — die des Isospins erfüllt sein. Wir kommen hierauf später (in § 44) noch zurück. Der Einfluß des Bahndrehimpulses der ankommenden Teilchen relativ zum Zielkern muß aber hier schon kurz erörtert werden: Er hat zur Folge, daß von den Geschoßpartikeln nur diejenigen zur Reaktion gelangen, deren Bahndrehimpulse $l\hbar$ — wo $l = 0, 1, 2, \ldots$ — mit den drei Kernspins: I_A (vom Zielkern),

I_a (vom Geschoßkern) und I_C (vom Compoundkern) zusammen den Drehimpulssatz erfüllen. Ist z. B. $I_a = 0$, so liegt l im Intervall

$$|I_C - I_A| \leqq l \leqq I_A + I_C.$$

Wegen der Zentrifugalkräfte oder der „*Zentrifugalbarriere*" (s. § 74) führen — — bei nicht zu hohen Energien und unter sonst gleichen Umständen — die Teilchen mit dem kleinsten l am häufigsten zur Reaktion. $l = 0$ entspricht dem zentralen Stoß. In der wellenmechanischen Darstellung werden die den Teilchen mit $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zugeordneten Wellen mit s-, p-, d-, f-Wellen bezeichnet, und zwar in Anlehnung an die alte Rydbergsche Benennung der Spektralterme mit s, p, d, f usw., denen nach heutiger Kenntnis die Bahndrehimpulse $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zukommen.

Man kann den Charakter der zur Reaktion kommenden Wellen an der *Winkelverteilung der Reaktionsprodukte* erkennen: s-Wellen ($l = 0$) ergeben (im Schwerpunktssystem) isotrope Verteilung; p-Wellen ($l = 1$) und höhere Wellen führen zu einer anisotropen Verteilung, mit einer Symmetrie bezüglich der Ebene senkrecht zur Strahlrichtung. Für den Fall der elastischen Streuung ist dies in § 63 abgeleitet. Das Resultat gilt aber allgemeiner.

Sind in der Nachbarschaft der Einfallsenergie Niveaus mit verschiedenen I_C vorhanden, so werden natürlich auch verschiedene l-Wellen zur Wirkung kommen. Am häufigsten führen — unter sonst gleichen Umständen und wenn keine Auswahlregeln dem entgegenstehen — s-Wellen zu einer Kernreaktion. Wir begnügen uns i. allg. mit diesem Fall und werden nur gelegentlich — wie in § 44 — uns mit höheren l-Wellen beschäftigen.

In den beiden nächsten Paragraphen betrachten wir die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte (32.12) zuerst für ungeladene und danach für geladene Partikel.

§ 33. Der Wirkungsquerschnitt der Compoundbildung $\sigma_c(a)$ für ungeladene Partikel

a) Die Breit-Wigner-Formel

Die Energieabhängigkeit der beobachteten Wirkungsquerschnitte erinnert oft an die Resonanzkurven makroskopischer Schwingungskreise oder an die der Wirkungsquerschnitte von Atomen bei Absorption von Licht. Bei Licht- oder γ-Quanten gilt für den totalen Absorptionsquerschnitt bei Vorhandensein einer einzigen *Resonanzlinie*:[1])

$$\sigma_c = \sigma_{\text{abs}} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} g \frac{\Gamma_s \Gamma}{(E - E_r)^2 + \left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2}. \tag{33.1}$$

[1]) s. § 68, Gl. (68.5). Man setze dort $\gamma = \frac{\Gamma}{\hbar}$; $\gamma_s = \frac{\Gamma_s}{\hbar}$; $\omega = \frac{E}{\hbar}$; $\omega_r = \frac{E_r}{\hbar}$.

Dabei bedeuten:

$ƛ$ = reduzierte Wellenlänge des Photons $\left(= \frac{\lambda}{2\pi}; \lambda = \text{Wellenlänge}\right)$,

$E = h\nu$ = Energie der einfallenden Photonen der Frequenz ν (genauer: die vom Zielkern zur *inneren* Anregung aufgenommene Energiemenge),

$E_r = h\nu_r$ = Resonanzenergie des Atoms,

Γ_s = Strahlungsdämpfung des Niveaus durch Resonanzstrahlung ($= \Gamma_\gamma$),

$\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_i$ = Gesamtdämpfungsbreite der Resonanzlinie,

Γ_i = Dämpfung durch „innere Absorption" oder durch strahlungslosen Übergang,

$g = \frac{1}{2}\frac{2J_e+1}{2J_a+1}$ ist ein statistischer Faktor der Größenordnung 1, der die Spins J_a und J_e des Ausgangs- und Endzustandes des Kerns berücksichtigt.

Für den Streuquerschnitt gilt dieselbe Formel, nur daß nach (32.12) statt $\Gamma\Gamma_s$ im Zähler Γ_s^2 steht.

Beim *Einfang schwerer Teilchen* führt die wellenmechanische Beschreibung der Wechselwirkung des Atomkerns mit den de Broglie-Wellen des einfallenden Teilchens zu der sog. *Breit-Wigner-Formel*, einer Formel gleichen Typs wie (33.1), nur mit den folgenden veränderten Bedeutungen der Zeichen:

$ƛ = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E}}$ = reduzierte de Broglie-Wellenlänge des einfallenden Teilchens, gemessen im Schwerpunktssystem (μ = reduzierte Masse von Geschoß- und Zielkern),

E = kinetische Energie der Relativbewegung der Teilchen vor dem Stoß,

E_r = Resonanzenergie[1]) des Compoundkerns,

Γ_s = Partialbreite für elastische Streuung ($= T_n$ für Neutronen),

$\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_b$ = Gesamtbreite des Niveaus, wenn außer elastischer Streuung nur noch die Emission einer anderen Teilchensorte b vorkommt,

Γ_b = Partialbreite für die Emission eines Teilchens b (einschließlich γ-Quanten),

$g = \frac{2I_C+1}{(2I_a+1)(2I_A+1)}$ ist ein statistischer Faktor, worin I_a, I_A und I_C die Spins des Geschoßteilchens a, des Zielkerns A und des Compoundkerns C darstellen. (Falls a ein Photon ist, gilt $(2I_a+1) = 2$.) Bei zentralem Stoß spinloser Teilchen ist $g = 1$.

Das Charakteristische an (33.1) ist die Möglichkeit einer stark selektiven Absorption mit einem maximal möglichen Wirkungsquerschnitt σ_{max} der Größenordnung $\pi ƛ^2$, der bei $E = E_r$ eintritt, wenn noch zugleich die Bedingung $\Gamma_s = \frac{1}{2}\Gamma$ erfüllt ist. Sowohl bei Licht- als auch bei Teilchenabsorption kann dieser Querschnitt

---

[1]) Der Energienullpunkt ist hier dem Zustand zugeordnet, in dem das einfallende Teilchen weit außerhalb des Zielkerns relativ zu diesem ruht.

mehrere millionenmal den geometrischen Querschnitt der Atome bzw. Atomkerne übertreffen. Wir bemerken ausdrücklich, daß (33.1) nur in dem einfachsten Fall gilt, daß nur ein Resonanzniveau existiert. Sind deren mehrere vorhanden, so ist in erster Näherung das resultierende σ eine Überlagerung der σ's der einzelnen Niveaus, falls die Abstände D der Resonanzen sehr groß gegenüber den Resonanzbreiten Γ sind ($D \gg \Gamma$). Im Falle $D \lesseqgtr \Gamma$ sind die Verhältnisse sehr verwickelt; es treten Interferenzen zwischen den einzelnen Termen auf, worauf wir aber nicht näher eingehen können (zur genaueren Diskussion siehe z. B. Blatt und Weisskopf [B u. W]). Die wesentlichsten Merkmale des Resonanzphänomens sind aber schon in (33.1) enthalten.

b) Die compoundelastische Streuung von Neutronen

Für den (n, n)-Prozeß bei kleinen Energien folgt aus (32.12) mit (33.1)

$$\sigma(n, n)_{\text{comp}} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} g \frac{\Gamma_n^2}{(E - E_r)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} . \tag{33.2}$$

Man findet bei $E = E_r$ eine *compoundelastische Resonanzstreuung.*

Für sehr kleine Geschwindigkeiten[1] $v(= v')$, d.h. für $E \to 0$, wird $\Gamma_n \sim v' \sim \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}$, also $\lambda\!\!\!^{-}\Gamma_n = \text{const}$ und daher auch $\sigma(n, n)_{\text{comp}} = \text{const}$, wie schon in § 30 bemerkt wurde. Die leichten Kerne zeigen hier im Vergleich zur Absorption besonders starke elastische Streuung; bei den schweren Elementen überwiegt aber meist die Absorption.

Außer der compoundelastischen Streuung (33.2) existiert noch die (schon in § 32 erwähnte) Potentialstreuung, und das Vorhandensein zweier Streuwellen führt zu *Interferenzeffekten,* welche in den §§ 69 bis 71 behandelt sind.

c) Einfang langsamer Neutronen

Abgesehen von den Besonderheiten bei den leichten Kernen, gibt es mit langsamen Neutronen neben der (n, n)-Reaktion nur noch den (n, γ)-Prozeß. Hier ist daher

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma,$$

worin sich Γ_γ als praktisch unabhängig von der Neutronenenergie E erweist. Denn nach (32.9) oder (32.10) ist $\Gamma_\gamma \sim \left(\frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)^{2l+1} \sim E_\gamma^{2l+1}$ und wird von der beim (n, γ)-Prozeß ausgestrahlten Quantenenergie E_γ bestimmt, welche praktisch nicht von E abhängt. E_γ entspricht nämlich dem Übergang nach einem der tieferen Kernzustände und besitzt somit die Größenordnung MeV, wogegen die Bewegungsenergie langsamer Neutronen, welche in E_γ nur additiv enthalten ist, völlig

---

[1]) v = Geschwindigkeit des primären, v' = Geschwindigkeit des gestreuten Neutrons.

verschwindet. Für genügend kleine v bzw. E wird $\Gamma_n \sim \sqrt{E}$, also $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$, daher $\Gamma \approx \Gamma_\gamma = \text{const}$. Berücksichtigt man noch, daß $\lambda^2 \sim \frac{1}{E}$ ist, so folgt aus (32.12) und (33.1), wenn wir mit σ_r den Wert von $\sigma_{n\gamma}$ bei $E = E_r$ bezeichnen,

$$\sigma_{n\gamma} = \sigma_r \sqrt{\frac{|E_r|}{E}} \, \frac{(\frac{1}{2}\Gamma)^2}{(E-E_r)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2} \tag{33.3}$$

oder

$$\sigma_{n\gamma} = \sigma_r \sqrt{\frac{|E_r|}{E}} \, \frac{1}{1 + \left(\frac{2E_r}{\Gamma}\right)^2 \left(\frac{E}{E_r} - 1\right)^2} \, . \tag{33.4}$$

Unter der Wurzel steht $|E_r|$, da auch ein $E_r < 0$, d.h. ein Compoundniveau dicht unterhalb des Nullpunktes, $E = 0$, möglich ist. Das Verhältnis $\frac{E_r}{\Gamma}$ bestimmt den Charakter der Energieabhängigkeit von $\sigma_{n\gamma}$, wie sie in Abb. 67 für einige Werte von $\frac{E_r}{\Gamma}$ dargestellt ist. Für $\frac{E_r}{\Gamma} \gg 1$ hat man eine scharfe Resonanzstelle bei $E = E_r$. Bei $\frac{E_r}{\Gamma} \ll 1$ ergibt sich eine monoton abfallende Kurve. Die Grenze zwischen monotonem Abfall und Resonanzverhalten liegt bei $\frac{E_r}{\Gamma} = \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}559 \approx \frac{1}{1{,}79}$. Ein längeres Intervall mit fast konstantem $\sigma_{n\gamma}$ resultiert, wenn $\frac{E_r}{\Gamma}$ nur ein

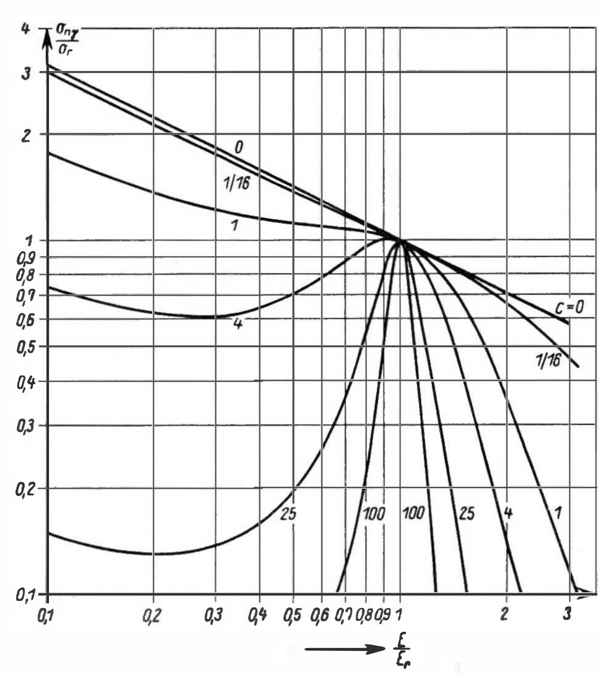


Abb. 67. Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts nach der Breit-Wigner-Formel für einige Werte des Parameters $c = \left(\frac{2E_r}{\Gamma}\right)^2$. ($c = 0$ führt zum $\frac{1}{v}$-Gesetz, $c = 4$ entspricht etwa dem Fall Cd)

wenig kleiner ist als der obige Wert. Liegt E_r *dicht unterhalb Null*, so findet man zwar keine Resonanzstelle (da $E < 0$ nicht realisierbar ist), aber man bemerkt ihre rechte Resonanzflanke durch einen steileren Abfall als nach dem sonst gültigen $\frac{1}{v}$-Gesetz. Ein Beispiel ist Hg mit $E_r = -2$ eV (siehe Tabelle 20, S. 172). Ähnliche Fälle liegen bei $_{63}Eu^{151}$ mit $E_\gamma = -0{,}011$ eV und bei Dy vor

d) Das $\frac{1}{v}$-Gesetz

Aus (33.4) folgt für $E \ll |E_r|$ das Fermische Gesetz für (n, γ)-Prozesse:

$$\sigma_{n\gamma} \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \sim \frac{1}{v}. \tag{33.5}$$

Übrigens gelten (33.5) und (33.4) auch bei anderen Reaktionstypen, wie z.B. für (n, α)-Prozesse, wenn die Partikelbreiten Γ_α im betrachteten Energiebereich genügend konstant und groß gegen Γ_n sind. Mit den Formeln (33.3) bis (33.5) ist im wesentlichen die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts gegenüber *langsamen* Neutronen beschrieben, welche durch die Resonanzen und das $\frac{1}{v}$-Gesetz beherrscht wird.

e) Mittlerer Wirkungsquerschnitt von Neutronen an schweren Kernen

Bei *höheren Energien* verschwimmen die eben betrachteten Mehrteilchenresonanzen zu einem Kontinuum, und die individuellen Besonderheiten der Kerne treten zurück. Man kann daher in diesem Gebiet zunächst einmal von den ohnehin theoretisch nicht erfaßbaren Mehrteilchenresonanzen absehen und versuchen, Größe und Energieabhängigkeit eines mittleren pauschalen Wirkungsquerschnitts der Kerne in großen Zügen zu verstehen. Dabei legen wir die Bohrsche Hypothese zugrunde, wonach jedes von außen in das Kerninnere eingedrungene Teilchen auch stets zur Compoundbildung führt, was für schwere Kerne am ehesten zu erwarten ist. (Sollte nur ein Bruchteil $\varkappa$ zur Compoundbildung beitragen, so hätte man alle weiter unten betrachteten Wirkungsquerschnitte mit $\varkappa$ zu multiplizieren.) Für dieses Modell kann man annehmen, in Gebieten höherer Energie, wo das Resonanzverhalten einem Kontinuum Platz gemacht hat, brauchbare Resultate zu erhalten. Aber auch bei niederen Energien ist wenigstens ein Verständnis für die Größenordnung des Wirkungsquerschnitts zu erhoffen, sofern wir uns bei letzterem mit einem Mittelwert über einen Energiebereich mit vielen Resonanzen begnügen. Die Durchrechnung ergibt nun, wenn man mit N. Bohr den Kern als einen gegenüber Neutronenwellen „schwarzen" Körper betrachtet, nach Feshbach und Weisskopf (F 49-1) für den Absorptionsquerschnitt näherungsweise

$$\sigma_c \approx \pi (R + \lambda\!\!\!^{-})^2 \frac{4 \lambda\!\!\!^{-} \lambda\!\!\!^{-}_i}{(\lambda\!\!\!^{-} + \lambda\!\!\!^{-}_i)^2}. \tag{33.6}$$

Darin sind $\lambda\!\!\!^{-}_i$ und $\lambda\!\!\!^{-}$ die — auf das Schwerpunktssystem bezogenen — reduzierten de Broglie-Wellenlängen innerhalb und außerhalb des Kerns vom Radius R.

Der Faktor $\frac{4\lambda\lambda_i}{(\lambda+\lambda_i)^2}$ bedeutet die Durchlässigkeit der Kernoberfläche gegenüber den Neutronenwellen (d. h. genauer, die Transparenz des Potentialsprunges am Kernrand). Über den Faktor $\pi(R+\lambda)^2$ sei vorläufig nur bemerkt, daß ein Neutron bei der Wechselwirkung mit Atomkernen sich so verhält, als ob es einen maximalen Radius von $\approx \lambda$ besäße, wie dies auch aus (33.1) hervorgeht. Bei einem Zusammenstoß mit einem Kern vom Radius R ergibt sich dann ein Stoßradius von $(R+\lambda)$. Der Wirkungsquerschnitt wird daher gleich $\pi(R+\lambda)^2$ mal dem obigen Durchlässigkeitsfaktor der Kernoberfläche, wenn, der Bohrschen Hypothese entsprechend, jedes eingedrungene Neutron auch zur Compoundbildung führt. Eine genauere Ableitung folgt in § 64.

Bei kleinen Energien liefert (33.6) wegen $\lambda \gg R$ und $\lambda \gg \lambda_i$

$$\sigma_c \approx 4\pi\lambda\lambda_i. \tag{33.7}$$

Das ist, da $\lambda \sim \frac{1}{v}$ und $\lambda_i \approx$ const ist, wieder das $\frac{1}{v}$-Gesetz.
Numerisch ergibt sich dafür aus (33.7) mit E in eV und σ_c in barn

$$\sigma_c \approx \frac{500}{\sqrt{E}}. \tag{33.8}$$

Bei sehr großen Energien $E \gg V_0$ wird $\lambda \approx \lambda_i$, und es folgt

$$\sigma_c \approx \pi(R+\lambda)^2. \tag{33.9}$$

Unter den gleichen Bedingungen ergibt sich nach der Streutheorie bei Annahme einer gegen Neutronenwellen „schwarzen" Kernmaterie der Streuquerschnitt σ_s zu $\sigma_s \approx \sigma_c$ (s. § 63; $\eta_0 = 0$; Gl. (63.15)). Bei kleinen Geschwindigkeiten ist dagegen der Kern nicht mehr „schwarz". Erfahrungsgemäß ist dann außerhalb der Resonanzen die Potentialstreuung mit $\sigma_s \approx 4\pi R^2$ vorherrschend, und es wird $\sigma_s \leqq \sigma_c$ (s. § 70, Gl. (70.16), sowie § 36 b, S. 175, Tabelle 21). Der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot} = \sigma_s + \sigma_c$ ändert sich somit schätzungsweise zwischen

$\sigma_{tot} \approx 2\pi\,(R+\lambda)^2$ bei großen Energien

und

$\sigma_{tot} \approx 4\pi\lambda\lambda_i$ bei kleinen Energien (als ungefähre obere Grenze).

Die Erfahrungen bestätigen im großen und ganzen diese aus dem Bohrschen Compoundmodell unter der Annahme des Einfanges fast aller in einen Kern eingedrungenen Teilchen gezogenen Folgerungen. Zum Beleg kann die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von Ni für Neutronen von 0,01 bis 1,4 MeV dienen, die in Abb. 68 dargestellt ist. Abgesehen von den Mehrteilchenresonanzen entspricht der monotone Abfall von σ_{tot} nach höheren Energien den theoretischen Erwartungen.
Bei anderen Kernen erweist sich aber der Gang von σ_{tot} mit E keineswegs als ein einfacher monotoner Abfall. Eingehende Messungen von Barshall und anderen ([B 52-1]; [M 52-1]; [W 53-1]; [O 54-1]) förderten die in Abb. 69 gezeigte

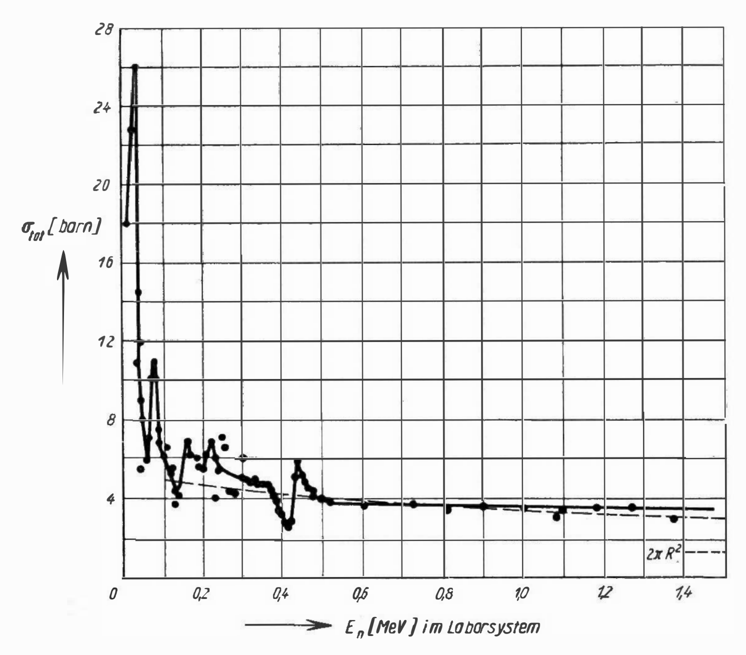


Abb. 68. Totaler Wirkungsquerschnitt von Ni für Neutronen von 0,01 bis 1,4 MeV. Unterhalb 0,5 MeV hatten die Neutronen eine Geschwindigkeitsstreuung bis zu $\approx \pm 20$ keV, oberhalb 0,5 MeV eine Streuung von $\approx \pm 150$ keV, weswegen hier auch keine Resonanzen sichtbar sind. Die gestrichelte Linie entspricht (33.6)

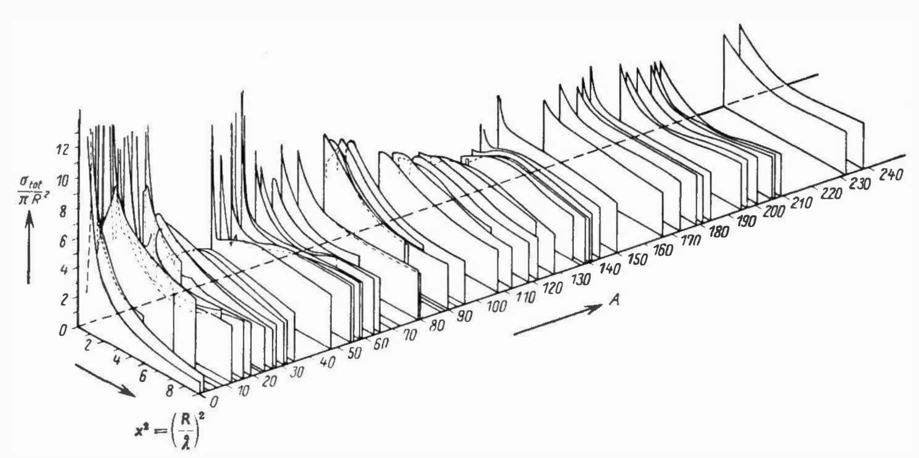


Abb. 69. Verlauf der „Riesenresonanzen" des totalen Wirkungsquerschnittes σ_{tot} über das Periodische System, gemessen mit Neutronen zwischen 0,05 bis etwa 3 MeV. Ordinate: σ_{tot} in Einheiten des geometrischen Kernquerschnitts πR^2 mit $R = 1{,}45 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ cm; Abszisse: $x^2 = \left(\frac{R}{ƛ}\right)^2$. Die zugehörige Neutronenenergie E_n im Laborsystem beträgt $E_n = 10x^2 \left[1 + \left(\frac{1}{A}\right)\right] A^{-2/3}$ [MeV]

Energieabhängigkeit von σ_{tot} über das gesamte Periodische System zutage: Es zeigen sich über ein Gebiet von mehreren MeV verlaufende, stark gedämpfte Resonanzen, deren Abstände an die auf S. 139 erwähnten Einteilchenresonanzen des Potentialtopfmodells erinnern, während die Resonanzschärfe merklich geringer ist. (Wir bemerken, daß hier stets die über viele Mehrteilchenresonanzen gemittelte und „geglättete" σ_{tot}-Kurve aufgetragen ist.)

Die Gesamtheit der Beobachtungen deutet darauf hin, daß — selbst wenn man von den scharfen Mehrteilchenresonanzen völlig absieht — weder die gegenüber den Neutronenwellen „*ideal schwarze*", noch die „*ideal durchsichtige*" Kugel aus einem Material mit sehr großem Brechungsindex ein allgemein brauchbares Kernmodell darstellt. Ein Mittelding zwischen diesen Extremen, welches eine teilweise Absorption und eine teilweise Durchlässigkeit, also eine gegen Neutronenwellen „*graue*" Kernmaterie, annimmt, erscheint daher der Natur besser angepaßt.

In den letzten Jahren ist ein in diesem Sinne korrigiertes Potentialtopfmodell durch Feshbach, Porter und Weisskopf ([F 53-1]; [F 54-1]) erfolgreich ausgebaut worden, das die — über viele Resonanzen des Mehrteilchensystems gemittelte — Absorption des einfallenden Teilchens in den Compoundzustand durch einen *imaginären* Teil im Potential V beschreibt:

$$V = -(V_0 + i V_1) \quad \text{für} \quad r < R,$$

sonst

$$V = 0 \quad \text{für} \quad r > R.$$

Ein solches Potential entspricht der Einführung eines *komplexen Brechungsindex* in der Optik, um Brechung und Absorption gleichzeitig zu erfassen.

Dieses — auch als „*Cloudy Crystal Ball*" bekannte — „*Optische Modell*" *gibt den allgemeinen Verlauf des Wirkungsquerschnitts* σ_{tot} *über das Periodische System und seine Abhängigkeit von der Energie recht befriedigend wieder*, wenn man von den Mehrteilchenresonanzen absieht bzw. über diese mittelt (Näheres s. Kap. IX, §§ 130 bis 135).

§ 34. Der Wirkungsquerschnitt von Reaktionen mit geladenen Teilchen

Die Reaktionen mit geladenen Teilchen werden durch die *elektrostatische Abstoßung* im elektrischen Felde des Zielkerns empfindlich behindert. Die potentielle Energie einer geladenen Partikel hat im Gebiet außerhalb des Kerns (vom Radius R) den $\frac{1}{r}$-Verlauf des Coulomb-Feldes. Im Kerninneren wird — in Ermangelung genauerer Daten — meist das Gesamtpotential der Kernkraft und des inneren elektrischen Feldes zusammen etwa topfförmig angenommen, d.h., die Kernkraft soll im wesentlichen nur am Kernrand auf das ankommende Teilchen wirken. Insgesamt entsteht dadurch der „*Gamow-Berg*" im Potentialverlauf der Abb. 70: Die geladenen Teilchen müssen einen Potentialberg überschreiten, bevor sie in den Kern gelangen. Es ist aber wichtig zu bemerken, daß auch *auslaufende*

geladene Partikel denselben „Berg" — in umgekehrter Richtung — zu überwinden haben. Der höchste Punkt H dieses „Berges" beträgt für punktförmig gedachte Geschoßteilchen beiden obigen Annahmen über die Kräfte:

$$H = \frac{z Z e^2}{R}. \qquad (34.1)$$

Hierin ist

z = Ladungszahl des Geschoßteilchens,

Z = Ladungszahl des Zielkerns,

e = Elementarladung,

R = Radius des Zielkerns der Massenzahl A.

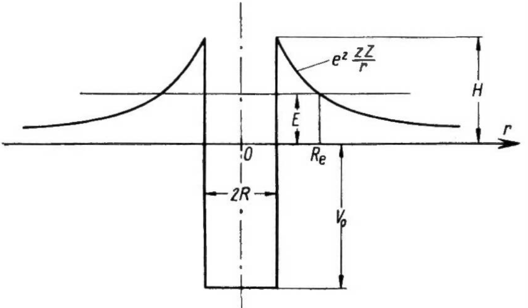


Abb. 70.
Der Coulomb- oder Gamow-Berg um einen Atomkern

Setzt man $R = r_0 \sqrt[3]{A}$ mit $r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm, so gilt numerisch (H in MeV)

$$H = 1{,}0 \cdot \frac{zZ}{\sqrt[3]{A}}. \qquad (34.2)$$

Zieht man die Ausdehnung des Geschoßkerns (Massenzahl a) in Betracht und nimmt man an, daß die Kernkraft-Anziehung bei „Berührung der Kernoberflächen" die elektrostatische Abstoßung sofort weit übertrifft, so wäre in (34.1) besser $R = r_0 \cdot (\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{a})$ und im Nenner von (34.2) $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{a}$ statt $\sqrt[3]{A}$ zu setzen.

Nach der klassischen Mechanik könnten Teilchen mit einer kinetischen Energie der Relativbewegung $E < H$ auch bei zentralem Stoß nicht in den Kern eindringen. Der *Tunneleffekt* der Wellenmechanik verleiht aber auch in diesen Fällen den Teilchen eine gewisse Wahrscheinlichkeit G zur Durchdringung des Potentialberges. Dieser sog. *Gamow-Faktor* beträgt im Falle $E \ll H$, d. h. $G \ll 1$, näherungsweise

$$G = F \cdot \exp(-g), \qquad (34.3)$$

wo

$$g = \frac{2\pi e^2 z Z}{v \hbar} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\arccos \sqrt{\frac{E}{H}} - \sqrt{\frac{E}{H}\left(1 - \frac{E}{H}\right)}\right] \qquad (34.4)$$

ist und F einen — in Gebieten weitab von Resonanzen — wenig von E abhängigen Faktor der Größenordnung 1 bedeutet (s. § 73). Unter der ohnehin gemachten Voraussetzung $E \ll H$ können wir in (34.4) in erster Näherung $[-] = \frac{\pi}{2}$ schreiben und erhalten

$$g = \frac{2\pi e^2 z Z}{\hbar v}. \qquad (34.5)$$

Wenn wir $v\left(=\sqrt{\frac{2E}{m_a}}\right)$ durch E in keV ausdrücken, wird

$$g = \frac{B}{\sqrt{E}} \quad \text{mit} \quad B = 31{,}4\, zZ\sqrt{\bar{a}}\,, \tag{34.6}$$

worin $\bar{a}$ die Massenzahl (genauer das relative Atomgewicht) des Geschoßteilchens bedeutet, wenn, wie üblich, der Zielkern ruht. Bewegen sich beide Partikel, so ist für $\bar{a}$ die reduzierte Massenzahl a_{red} und für E die kinetische Energie der Relativbewegung einzusetzen.

Im Falle $E \geqq H$ ist $G \approx 1$ zu nehmen.

Derselbe Ausdruck (34.4) gilt auch für den Tunneleffekt bei *auslaufenden* Partikeln. In beiden Fällen bezeichnet v die Relativgeschwindigkeit der Reaktionspartner vor bzw. nach der Reaktion, außerhalb der Reichweite der elektrischen Kräfte. Die Wahrscheinlichkeit für die *Emission eines geladenen Teilchens b* (Index b) aus dem Compoundkern wird also durch dessen Ladung um einen Faktor G_b verringert, und damit verkleinert sich auch die Partialbreite $\Gamma_b \sim G_b$.

Die Gleichungen (34.3) bis (34.5) gelten für zentral ein- und auslaufende Teilchen. Haben die Partikel relativ zum Zielkern bzw. Restkern einen Drehimpuls $l\hbar$, so vermindert sich G. Die entsprechenden Ausdrücke für die zu G und g analogen Größen G_l und g_l im Falle $l > 0$ sind in § 74 zu finden.

Das allgemeine Bild der Energieabhängigkeit des *Wirkungsquerschnittes geladener Teilchen* unterscheidet sich von dem bei Neutronen im wesentlichen nur dadurch, daß in (33.6) anstelle des Durchlässigkeitsfaktors der Kernoberfläche $\frac{4\lambda\lambda_i}{(\lambda+\lambda_i)^2}$ der Gamow-Faktor G_a für das einfallende Teilchen a (Index a) tritt und daß in allen Formeln (wie (32.12) oder (33.1)) die Niveaubreite Γ_b sich proportional zu G_b verkleinert. Damit sind 1. das Wegfallen des $\frac{1}{v}$-Gebiets bei langsamen Teilchen, wo die Coulomb-Abstoßung die Reaktion verhindert, 2. der allmähliche, exponentielle Anstieg des Wirkungsquerschnittes mit der Teilchenenergie und 3. die selbst im MV-Gebiet noch sehr scharfen Resonanzen erklärt.

Als Wirkungsquerschnitt ergibt sich also, wenn wir eine Reihe konstanter Größen in einem neuen Faktor F_1 zusammenfassen und weiter berücksichtigen, daß im Gültigkeitsbereich der Gln. (34.3) bis (34.5), d. i. für $G \ll 1$, stets $R \ll \lambda$ wird,

$$\sigma(a,b) = F_1 \cdot \pi\lambda^2\, G_a\, G_b. \tag{34.7}$$

Wenn wir die G mittels (34.3) und (34.6) ausdrücken, erhalten wir schließlich mit Rücksicht darauf, daß $\lambda^2 \sim E_a^{-1}$ ist,

$$\sigma = \frac{F_2}{E_a} \cdot e^{-\frac{B_a}{\sqrt{E_a}}} \cdot e^{-\frac{B_b}{\sqrt{E_b}}}\,, \tag{34.8}$$

wo wir in F_2 alle „Konstanten“ (*schwach* E-abhängige Größen!) zusammengefaßt haben. Die Beziehung (34.8) gilt für zentralen Stoß und nur in einem Energiegebiet fernab von Resonanzen. Das in § 30 besprochene Verhalten des Wirkungs-

querschnitts geladener Teilchen und die dort lediglich zur Beschreibung des empirischen Materials angegebenen Formeln (30.1) bis (30.3) sind damit im wesentlichen auf den Tunneleffekt bei Kernreaktionen zurückgeführt.
Nachdem wir nunmehr eine erste Übersicht über die grundlegenden Erscheinungen und allgemeinen Gesetzmäßigkeiten gewonnen haben, betrachten wir im folgenden Abschnitt eine Reihe spezieller Kernreaktionen.

2. SPEZIELLE KERNREAKTIONEN

Die Zahl der bisher bekannt gewordenen und untersuchten Kernreaktionen hat bereits zweitausend überschritten und ist in stetigem Anwachsen begriffen. Wenn wir in den folgenden Paragraphen einige, nach allgemein-physikalischen, kerntechnischen oder historischen Gesichtspunkten ausgewählte Beispiele betrachten, welche unsere bisherigen Erörterungen mit weiteren experimentellen Tatsachen beleben sollen, so ist zu bemerken, daß nur ein sehr kleiner Ausschnitt aus der Fülle des vorliegenden Materials behandelt werden kann.
Wir besprechen die Kernreaktionen geordnet nach der Art der sie erzeugenden und der in ihrem Verlauf emittierten Partikel.

§ 35. γ-induzierte Reaktionen

Eine Kernreaktion mit γ-Quanten führt zu einem der folgenden Prozesse:

1. *elastische Streuung* der γ-Quanten, darunter Resonanzstreuung oder *Resonanzfluoreszenz*,
2. *unelastische Streuung* mit Anregung des Zielkerns,
3. *vollständige Absorption* des Quants mit anschließender Emission eines Neutrons, Protons oder α-Teilchens (*Kernphotoeffekt*),
4. *Photospaltung*, insbesondere der schwersten Elemente (s. Abschn. 3, Kernspaltung).

a) (γ, γ)-Prozesse

Reicht die γ-Energie nicht zu einer Teilchenemission durch *Kernphotoeffekt* aus, so werden nur tiefliegende Niveaus angeregt, von denen aus die Anregungsenergie nur durch γ-Quanten (oder über Konversionselektronen) abgegeben werden kann. Die lange Lebensdauer dieser Niveaus bedingt eine außerordentliche Schärfe der absorbierten und reemittierten γ-Energie. Führt hierbei eine einzige γ-Emission zum Grundzustand zurück, so entsteht die *Resonanzfluoreszenz.* Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei der Lichtemission aus der Atomhülle unter üblichen Laboratoriumsbedingungen — etwa in gewöhnlichen Gasentladungslampen — fehlt im Falle der Kern-Resonanzfluoreszenz die dort störende Stoßdämpfung, so daß die natürliche Linienschärfe besser zur Auswirkung kommt. Einer Lebensdauer von z. B. $\tau = 10^{-13}$ sec entspricht eine Energieunschärfe von nur $\Gamma = 6{,}6$ meV. Sie ist

so klein, daß sich bereits der *Doppler-Effekt* der Rückstoßbewegung bei Emission und Absorption entscheidend bemerkbar macht. Der Rückstoßimpuls beträgt $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = Mv$, die Rückstoßgeschwindigkeit also

$$v = c\,\frac{E_\gamma}{Mc^2} = c\,\frac{E_\gamma}{A\,931\,\mathrm{MeV}},$$

wenn der Kern (der Massenzahl A und Masse M) vor dem Stoß geruht hat. Die Rückstoßenergie des Kerns wird $\frac{p_\gamma^2}{2M} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$. Um diesen Betrag ist daher die Energie der γ-Strahlung (gemessen im Laborsystem) kleiner als die *Energiedifferenz* ΔE_e der beteiligten Kernniveaus:

$$E_\gamma = \Delta E_e - \text{Rückstoßenergie} = \Delta E_e\left(1 - \frac{\Delta E_e}{2Mc^2}\right).$$

Hier wurde zuletzt E_γ^2 durch $(\Delta E_e)^2$ ersetzt. Wird diese γ-Strahlung durch einen (anfangs ruhenden) Kern desselben Isotops absorbiert, so geht ein gleicher Bruchteil der γ-Energie wie oben durch Rückstoß für die Anregung verloren. Die vom Zielkern absorbierte innere Energie beträgt daher

$$\Delta E_a = \Delta E_e\left(1 - \frac{\Delta E_e}{Mc^2}\right) = \Delta E_e\left[1 - \frac{\Delta E_e}{A\ 931\ \mathrm{MeV}}\right],$$

und die gesamte Doppler-Verschiebung wird

$$\Delta E_{\mathrm{Dop}} = \Delta E_e - \Delta E_a = \frac{(\Delta E_e)^2}{A\,931\,\mathrm{MeV}}. \tag{35.1}$$

Für z. B. $\Delta E_e = 0{,}5$ MeV folgt selbst für einen schweren Kern $A = 200$ eine Doppler-Verschiebung von $\Delta E_{\mathrm{Dop}} \approx 1{,}34$ eV; die Rückstoßgeschwindigkeit wird $v \approx 800$ m sec^{-1} (im Laborsystem). Da die Breite der unteren Niveaus schwerer Kerne $\Gamma < 0{,}1$ eV beträgt, fällt die von einem Kern ausgesandte γ-Strahlung aus dem Resonanzbereich des betreffenden Isotops heraus, und die Strahlung wird nur sehr wenig von derselben Kernart wieder absorbiert.

In solchen Fällen kann man beobachten, daß die Absorption vergrößert wird

1. durch Steigerung der thermischen Bewegung (d. h. Erhitzung des Emitters oder Absorbers oder von beiden auf möglichst hohe Temperaturen),

2. durch mechanische Bewegung etwa des Emitters in Richtung auf den Absorber, wobei mit Zentrifugen Geschwindigkeiten bis ≈ 800 m/sec erreicht wurden.

Diese beobachtbare Vergrößerung der Resonanzfluoreszenz durch den Doppler-Effekt erlaubt die direkte Messung der Linienschärfe Γ_γ. Die durch die natürliche Γ-Breite verursachte Streuung der Rückstoßgeschwindigkeit v beträgt $\Delta v = v\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma}$, im obigen Beispiel also $\Delta v \approx 800\frac{0{,}1}{5\cdot 10^5} = 1{,}6\cdot 10^{-4}$ m/sec. Die

thermische Bewegung (die bei Zimmertemperatur schon die Größenordnung 100 m/sec hat) läßt daher auf jeden Fall nur das Resonanzintegral über die γ-Linie beobachten. Hierzu tragen praktisch nur diejenigen Atome von Quelle und Streuer bei, deren Relativgeschwindigkeit sehr nahe bei $v = \frac{E_\gamma}{Mc}$ liegt. Bewegen sich nämlich zwei Kerne vor dem γ-Austausch mit dieser Geschwindigkeit aufeinander zu, so bewegen sie sich nach dem γ-Austausch mit derselben Geschwindigkeit voneinander fort. Es wird dann durch das γ-Quant nur die *innere* Energie der Kerne ausgetauscht. Ist $\vec{u}$ die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Streuer als Ganzes, w die zu $\vec{u}$ parallele Komponente der thermischen Relativbewegung zwischen einem Quellen- und einem Streuatom, so beträgt die Abweichung der absorbierten Energie von dem genauen Resonanzwert E_r nach der Doppler-Formel

$$(E - E_r) = (u + w - v)\,\frac{E_\gamma}{c}\,.$$

Wir nehmen dabei an, daß Quelle und Streuer sich genau aufeinander zu bewegen und ihre Dimensionen klein gegenüber ihrem gegenseitigen Abstand sind, daß also nur praktisch parallel zu $\vec{u}$ emittierte γ-Quanten zur Beobachtung kommen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei der Temperatur T zwei Atome der Masse M eine zu $\vec{u}$ parallele Komponente w der thermischen Relativgeschwindigkeit zwischen w und $w + dw$ haben, lautet:[1])

$$W(w)\,dw = \sqrt{\frac{M}{4\pi kT}}\, e^{-\frac{Mw^2}{4kT}}\, dw\,.$$

Der Streuquerschnitt wird daher mit (33.1), $\Gamma_s = \Gamma_\gamma$ und $\Gamma_\varepsilon = 0$ gesetzt,

$$\sigma = g\pi \lambda^2 \Gamma_\gamma^2 \int\limits_{w=-\infty}^{+\infty} \frac{W(w)\,dw}{\frac{E_\gamma^2}{c^2}(u + w - v)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\gamma^2}\,.$$

Wegen des scharfen Maximums des Resonanzfaktors an der Stelle $w = v - u$ kann man $W(w)$ durch $W(v - u)$ ersetzen und vor das Integral ziehen. Mit $\lambda = \frac{\hbar c}{E_\gamma}$ ergibt sich

$$\sigma = \frac{g\, 2\pi^2 \hbar^2 c^2 \Gamma_\gamma}{E_\gamma^3} \sqrt{\frac{Mc^2}{\pi 4 kT}}\, e^{-\frac{M(u-v)^2}{4kT}}\,. \tag{35.2}$$

Man findet also für den Streuquerschnitt als Funktion der Geschwindigkeit ein Abbild der *Maxwell-Verteilung* einer Geschwindigkeitskomponente der Wärmebewegung, eine Gaußsche Glockenkurve. Abb. 71 zeigt das Ergebnis einer Messung

---

[1]) Die reduzierte Masse μ ist hier $\mu = \frac{M}{2}$, so daß im Exponenten $\frac{\frac{1}{2}\mu w^2}{kT}$ steht.

an der 411 keV-γ-Strahlung des Hg^{198}, welche im Anschluß an die β-Umwandlung des Au^{198} (Halbwertszeit = 2,7 d) zum Grundzustand führt [M 53-1]. Das Au^{198} war galvanisch niedergeschlagen auf einem Strahlrotor, der mit einer Umfangsgeschwindigkeit bis zu 800 m/sec rotieren konnte. Die in tangentialer Vorwärts-

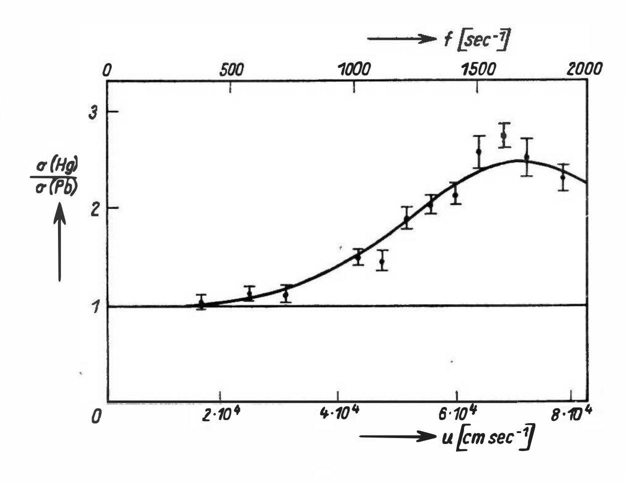


Abb. 71. Die Resonanzfluoreszenz an Hg bei bewegter Quelle Au^{198}. (f = Umdrehungszahl des Rotors, u = Umfangsgeschwindigkeit des Rotors). Die durchlaufende Kurve entspricht (35.2) mit $\Gamma_\gamma = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$ eV und der Annahme von Quadrupolstrahlung: $J_a = 2$ und $J_e = 0$ (Grundzustand)

richtung emittierte γ-Strahlung wurde an ruhendem Hg gestreut. Die Ordinate der Abb. 71 bedeutet die γ-Intensität der von Hg gestreuten Strahlung in Einheiten der Streuintensität an Pb (als Vergleichsnormal ohne Resonanzstreuung). Die Abszisse ist die Geschwindigkeit u der Quelle. Die Rückstoßgeschwindigkeit beträgt hier $v \approx 650$ m/sec. Man sieht deutlich das Auftreten des Streumaximums bei $u \approx v$. Der beobachtbare *maximale* Streuquerschnitt wird durch die thermische Bewegung stark verkleinert. Aus dem gemessenen σ ergab sich $\Gamma_\gamma \approx 2{,}1 \cdot 10^{-5}$ eV, d. h. eine mittlere Lebensdauer des 411 keV-Niveaus von $\tau \approx 3{,}1 \cdot 10^{-11}$ sec.

In letzter Zeit ist es gelungen, durch sehr starke Abkühlung von Quelle und Streuer unter die Debye-Temperatur der betreffenden Substanzen die thermische Verbreiterung der γ-Linie für einen Teil der Strahlung (Mössbauer-Effekt) auszuschließen. Bei hinreichend tiefer Temperatur und kleiner γ-Energie kann nämlich der γ-Rückstoß von dem Kristallverband als Kollektiv – und nicht vom Einzelatom allein – aufgenommen werden, wenn die Rückstoßenergie, welche ein *freier* Atomkern aufnehmen würde, klein ist gegenüber der Energie der Kristallbindung in der Quellen- bzw. Streusubstanz: Zur qualitativen Erklärung denke man sich das γ-Quant emittierende Atom in einer *ortsfesten* Potentialmulde im Kristallgitter bei der absoluten Temperatur $T = 0$ im Grundzustand. Der Kern wird dann keine Rückstoßenergie aufnehmen, solange der γ-Rückstoß nicht ausreicht, um die Energie der Atomschwingung auf das erste angeregte Niveau zu heben. Im wirklichen Kristallgitter können zwar Wärmewellen angeregt werden, aber wegen der großen dabei in Bewegung zu setzenden Masse wird die übertragene Rückstoßenergie verschwindend, und dadurch kommt die volle Schärfe

der natürlichen γ-Linie zur Beobachtung. Ein solcher Effekt wurde an der 129 keV-Strahlung des Ir^{191} bei Abkühlung von Quelle und Streuer auf 88°K beobachtet. Mit Hilfe der „Zentrifugen-Methode" konnte die Halbwertsbreite der effektiven Resonanzkurve mit Relativgeschwindigkeiten zwischen Quelle und Streuer von nur $-1{,}5$ bis $+1{,}5$ cm/sec durchlaufen werden. Dem entspricht ein $\Gamma \approx 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ eV und eine mittlere Lebensdauer $\tau \approx 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ sec (Mössbauer, [M 58-1]).[1]
Eine andere Methode zur Vergrößerung der Resonanzfluoreszenz besteht in der Ausnutzung der Wärmebewegung in der Quellen- und Streusubstanz bei ruhender Quelle und ruhendem Streuer als Ganzes ($u = 0$).
Gleichung (35.2) läßt eine vergrößerte Streuung bei erhöhter Temperatur von Quelle und Streuer erwarten, wenn, wie in den meisten Fällen $\frac{M v^2}{4kT} \gg 1$ ist. Das gleiche gilt, wenn z. B. nur die Quelle erhitzt wird. In der Tat wurde bei einem Versuch mit der oben betrachteten 411 keV-γ-Strahlung des Hg^{198} durch Erhitzung der Au-Quelle auf ihren Schmelzpunkt (1063 °C) eine Vergrößerung der Streuung um 3% (gegenüber der bei Zimmertemperatur) festgestellt [M 52-1].
Beide Verfahren lassen sich zur Bestimmung von Niveaubreiten Γ und damit der Lebensdauer $\tau \left(= \frac{\hbar}{\Gamma}\right)$ anwenden. Als weitere Methoden wurden der *β-Rückstoß* sowie bei γ-Kaskaden der *γ-Rückstoß* des ersten γ-Quants zur Wiederherstellung der Resonanz des nachfolgenden γ-Quants ausgenutzt. Diese Verfahren bilden eine Ergänzung der Lebensdauermessungen durch verzögerte Koinzidenzen, und zwar für kürzere Zeiten, als sie elektronischen Mitteln zugänglich sind.
Einige bisher vorliegende Bestimmungen enthält die Tabelle 14.

Tabelle 14. Lebensdauer einiger Kernniveaus (Nach Siegbahn*)*

Kern	E [keV]	Halbwertszeit $T_{1/2}$ [sec]	Meßmethode
Hg^{198}	411	$(2{,}2 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-11}$	mechanische Bewegung
		$(2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-11}$	Erhitzung
		$(1{,}0 \pm 1{,}7) \cdot 10^{-11}$	verzögerte Koinzidenz
Hg^{199}	209	$(3 \pm 1) \cdot 10^{-11}$	Erhitzung
Cu^{63}	960	$6 \cdot 10^{-13}$	β-Rückstoß in Flüssigkeit
Tl^{203}	280	$(9 \pm 4) \cdot 10^{-10}$	Erhitzung, β-Rückstoß, mechanische Bewegung

Der Bereich der experimentell direkt meßbaren γ-Lebensdauern wurde in letzter Zeit durch verschiedene andere Methoden in Richtung kleinerer Zeiten erweitert. So kann man z. B. an den mit bekannter Geschwindigkeit fliegenden Rückstoßkernen aus Kernreaktionen die Flugstrecke bis zur Emission eines γ-Quants beob-

[1]) Neuerdings fand man an der 14,4 keV-γ-Strahlung des Fe^{57} einen besonders starken „Mössbauer-Effekt", bei dem schon bei Zimmertemperatur über 60% der Atome keine γ-Rückstoßenergie mehr aufnehmen und die Halbwertsbreite der Dopplerkurve nur 0,38 mm/sec beträgt [S 59-1].

achten und daraus die Lebensdauer ermitteln. Oder man vergleicht die γ-Lebensdauer mit der Bremszeit des Rückstoßkernes in einem dichten Medium, was wieder über den Doppler-Effekt zu beobachten ist. Mit diesen und ähnlichen Methoden lassen sich Lebensdauern bis zu etwa 10^{-14} sec messen.
Von diesen kurzen Zeiten führt ein fast stetiger Übergang zu den langlebigen Niveaus mancher Kerne, welche gegen γ-Emission Lebensdauern von sec bis Stunden und mehr erreichen. In diesen Fällen kann man durch γ-Anregung ein langlebiges *Isomer* erzeugen, von denen einige Beispiele in Tabelle 15 aufgeführt sind. (Heute werden unter „*Isomere*" nicht nur die gegen γ-Strahlung langlebigen Kerne mit leicht meßbarer Halbwertszeit, sondern auch die mit Lebensdauern bis zu etwa 10^{-15} sec bezeichnet. Die untere Grenze ist nur eine dem Stande der Meßtechnik angepaßte Konvention.)

Tabelle 15. Einige durch γ-Strahlung herstellbare Isomere

Reaktion	γ-Energie [keV]	Halbwertszeit	Strahlung
Se^{77} (γ, -) Se^{77*}	160	17,5 sec	γ; (i.U.)
Sr^{87} (γ, -) Sr^{87*}	390	2,8 h	γ; (i.U. 15%)
Rh^{103} (γ, -) Rh^{103*}	40	52,0 m	γ; (i.U.)
Ag^{107} (γ, -) Ag^{107*}	93	44,0 sec	γ; (i.U. 96%)
Cd^{111} (γ, -) Cd^{111*}	150; 240	50,0 m	γ; (i.U. 90%)
In^{115} (γ, -) In^{115*}	334	4,5 h	γ; (i.U. 25%
	830		β^- 6%)

* bezeichnet ein Isomer; (i.U.) bedeutet „innere Umwandlung"; die % hinter ‚(i.U.)' geben die Konversions-Faktoren an. Die emittierten Strahlen sind — wie nach (32.9) wegen der angen Lebensdauer auch zu erwarten ist — relativ energiearm.

Die isomeren Kerne geben ihre Anregungsenergie nicht nur durch γ-Strahlung, sondern auch häufig direkt an ein Hüllenelektron ab, welches dann als Konversionselektron beobachtet wird. Der Vorgang wird auch als „*innere Umwandlung*" oder „*innerer Photoeffekt*" bezeichnet (s. Tabelle 15). Auch β-Emission kommt vor.

b) Kernphotoeffekt (Allgemeines)

Übersteigt die γ-Energie die Bindungsenergie eines Nukleons, so kann eine Teilchenemission, d. h. ein Kernphotoeffekt, auftreten.
Im Bilde des Bohrschen Compoundmodells wird man versuchen, den Wirkungsquerschnitt auch hier in zwei Faktoren zu zerlegen: Wirkungsquerschnitt σ_γ für die Absorption des γ-Quants mal Wahrscheinlichkeit des Zerfalls des Compoundkerns auf einem bestimmten Wege durch Emission eines Teilchens b:

$$\sigma(\gamma, b) = \sigma_\gamma \frac{\Gamma_b}{\Gamma}\,.$$

Der durch γ-Quanten angeregte Kern müßte hiernach bezüglich der emittierten Protonen und Neutronen dieselben Eigenschaften aufweisen wie ein durch Reaktionen mit schweren Teilchen erzeugter Compoundkern gleicher Art und Anregungsenergie. Bei Neutronen ist dies auch im wesentlichen erfüllt, sie zeigen etwa ein *Verdampfungsspektrum* mit isotroper Richtungsverteilung. Für Protonen gilt das gleiche nur bei leichteren Kernen wie Al, Mg, ... (niedrige Coulomb-Barriere). In schwereren Kernen, wie Ag, Rh (hohe Coulomb-Barriere), beobachtet man außer einer dem Compoundkernmodell entsprechenden Gruppe niederenergetischer Protonen mit isotroper Richtungsverteilung noch eine schwächere Gruppe höherenergetischer Protonen, deren Intensität aber die Erwartungen nach der „Verdampfungstheorie" weit übersteigt. Diese schnelleren Protonen haben eine bevorzugte Emissionsrichtung senkrecht zur Richtung des einfallenden γ-Strahls. Hiernach gibt es offenbar neben der Reaktion, die zur Compoundkernbildung führt, noch einen weiteren Prozeß, den sog. *Direkteffekt*, bei dem im Extremfall ein einzelnes (vielleicht am Kernrand befindliches) Proton das γ-Quant absorbiert und sogleich aus dem Kern fliegt, ohne seine Energie an die anderen Nukleonen abzugeben. Die bevorzugte Emissionsrichtung wäre dann die des elektrischen Vektors des γ-Quants, also — wie beobachtet und vom Photoeffekt an Elektronen bekannt — senkrecht zur Strahlrichtung. Es mag aber noch angemerkt werden, daß bei hohen γ-Energien oberhalb von etwa 40 MeV die Photoprotonen vom Direkteffekt mehr in Vorwärtsrichtung beobachtet werden, wie es auch theoretisch zu erwarten ist.

Bei leichteren Kernen ist wegen der niedrigen Coulomb-Barriere die Zahl der „*Verdampfungs-Protonen*" relativ groß, so daß der eben betrachtete Direkteffekt noch unmerklich sein kann. Wenn aber bei schweren Kernen die hohe Coulomb-Barriere den Austritt langsamer Protonen stärker behindert, kommt der Anteil der schnellen Protonen vom Direkteffekt mehr zur Beobachtung.

Die Kernphotoreaktion (γ, b) ist der zum (b, γ)-Einfang inverse Prozeß. Für den Wirkungsquerschnitt gilt daher die auch mit Photonen als Reaktionsteilnehmer anwendbare Reziprozitätsbeziehung von § 30, Gl. (30.4):

$$\sigma(\gamma, b) = \frac{(2I_b + 1)(2I_B + 1)}{2(2I_A + 1)} \frac{p_b^2}{p_\gamma^2} \sigma(b, \gamma) .$$

Hierin ist als statistisches Gewicht des Photons, entsprechend den 2 Polarisationsrichtungen, der Faktor 2 anstelle von $(2I_\gamma + 1)$ gesetzt. I_A, I_B und I_b sind die Spins des Zielkerns A, des Restkerns B und des emittierten Teilchens b. Ferner ist

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$$

und

$$p_b^2 = 2\mu(E_\gamma - E_{bB}) = 2\mu W,$$

wo E_{bB} die Bindungsenergie von b an B und μ die reduzierte Masse von b und B bedeuten. $E_\gamma - E_{bB} = W$ ist die kinetische Energie des herausfliegenden Teilchens, vermehrt um die des Restkerns (beides gemessen im Schwerpunktssystem).

Für den Wirkungsquerschnitt des (γ, n)- oder des (γ, p)-Prozesses gilt daher, indem wir b für n bzw. p schreiben,

$$\sigma(\gamma, b) = \frac{2(2I_B + 1)}{(2I_A + 1)} \frac{\mu c^2}{E_\gamma} \frac{E_\gamma - E_{bB}}{E_\gamma} \sigma(b, \gamma) . \tag{35.3}$$

Hiermit läßt sich der Photoquerschnitt auf den bekannteren Einfangsquerschnitt zurückführen.

Je nach der Masse des Restkerns B ist $\mu c^2 \approx 465$ bis ≈ 930 MeV. Bei der Anwendung von (35.3) ist natürlich zu beachten, daß ein $\sigma(\gamma, b)$ mit einem $\sigma(b, \gamma)$ für einander entsprechende Teilchen- und γ-Energien miteinander in Beziehung gesetzt wird.

c) (γ, n)-Prozesse

Für γ-Energien in der Nähe der Schwelle ist $W = E_\gamma - E_{bB}$ sehr klein, und wenn wir speziell einen (γ, n)-Prozeß betrachten, so gilt für den *inversen* Prozeß des Einfanges langsamer Neutronen $\sigma(n, \gamma) \sim W^{-1/2}$; der Photoquerschnitt wird daher $\sigma(\gamma, n) \sim W^{1/2}$, also proportional zur Geschwindigkeit des emittierten Photoneutrons und ist also klein für Energien nahe der Schwelle. Bei größeren Energien nimmt der Photoquerschnitt nach Überschreitung eines Maximums wieder ab, und zwar erstens wegen des Faktors E_γ^2 im Nenner von (35.3) und zweitens wegen der Abnahme von $\sigma(n, \gamma)$ mit wachsender Energie. Als Beispiel ist in Abb. 72 die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der (γ, n)-Reaktion an D^2 dargestellt.

An den Resonanzstellen hat $\sigma(\gamma, b)$ ebenfalls Maxima wie $\sigma(b, \gamma)$. Sie sind jedoch experimentell nicht leicht zu bemerken, weil meist die zur Verfügung stehenden γ-Strahlen recht inhomogen, die Resonanzen dagegen sehr viel schärfer sind. Daher pflegen die *beobachteten effektiven* Photoquerschnitte etwa um einen Faktor 10^3 kleiner zu sein als die mittleren Reaktionsquerschnitte mit Neutronen.

Die Beobachtung der Reaktionsschwelle liefert eine ausgezeichnete Methode zur Bestimmung der Bindungsenergie des Neutrons, die hier mit der Schwellenenergie praktisch übereinstimmt (s. Tabelle 23, S. 176). Bei den leichtesten Kernen kann man auch aus der beobachteten Bewegungsenergie des Rückstoßkernes mit guter Genauigkeit die Energie des Neutrons berechnen. Den γ-Impuls kann man dabei vernachlässigen. Die Bindungsenergie ist dann gleich der γ-Energie, abzüglich der Summe der kinetischen Energien der Reaktionsprodukte. Eine solche Bestimmung gelang erstmalig bei dem von CHADWICK und GOLDHABER mit den 2,62 MeV-γ-Quanten des ThC″ entdeckten Kernphotoeffekt am Deuteron (siehe Abb. 72). JENTSCHKE und STETTER benutzten dies zur damals genauesten Bestimmung der Neutronenmasse. Neuere Messungen lieferten als Bindungsenergie des Deuterons $E_D = 2{,}25$ MeV $= 2{,}42$ TME. Mit den massenspektrographisch ermittelten Werten $m_d = 2{,}01473$ und $m_p = 1{,}00814$ ergibt sich

$$m_n = m_d + E_D - m_p = 1{,}00901 .$$

Neben D^2 hat nur noch Be^9 eine niedrige Reaktionsschwelle. Der Prozeß

$$Be^9(\gamma, n)Be^{8*} \rightarrow 2\,\alpha$$

beginnt bei der Schwellenenergie von 1,67 MeV.

Beide Reaktionen sind, mit monochromatischen γ-Strahlen eingeleitet, brauchbare Neutronenquellen homogener Energie. Die Ausbeute ist allerdings gering. In Reaktoren mit D_2O-Moderator liefert der $D(\gamma.n)$-Prozeß immerhin eine nützliche Quelle zusätzlicher Neutronen.

Im übrigen sind alle anderen (γ, n)-Prozesse an stabilen Kernen stark endotherm. Die Schwellenwerte liegen bei Kernen mit $A \lesssim 100$ bei 7 bis 17 MeV, wobei Kerne mit gerader Neutronenzahl regelmäßig eine höhere Schwelle aufweisen.

Bei den schweren Kernen sind die Schwellenenergien ausgeglichener und betragen zwischen 9,5 und 6 MeV mit einem langsamen Abfall gegen das Ende des Periodischen Systems.

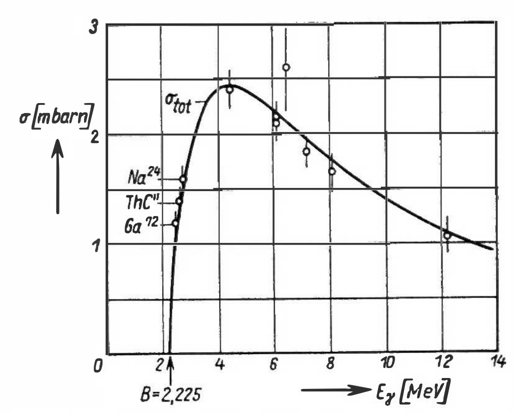


Abb. 72. Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Photospaltung des Deuterons. Punkt B bezeichnet die Schwellenenergie (Na^{24}, ThC″ uud Ga^{72} dienten als γ-Quellen für die drei tiefsten Meßpunkte)

Die Endkerne aus (γ, n)-Reaktionen sind im Massenbereich $A \lesssim 100$ meistens Positronenstrahler und im Bereich $A \gtrsim 100$ Elektronenfänger.

(γ, n)-Prozesse an (u, g)-Kernen führen zu Endkernen, die als (u,u)-Kerne (bis auf die sechs Ausnahmen $_1D^2$; $_3Li^6$; $_5B^{10}$; $_7N^{14}$ sowie $_{23}V^{50}$ und $_{73}Ta^{180}$ stets radioaktiv sind.

d) (γ, p)-Prozesse

Nach dem zu Beginn dieses Paragraphen Gesagten sind (γ, p)-Reaktionen wegen der Coulomb-Barriere praktisch noch stärker endotherm als (γ, n)-Prozesse. Die erste Reaktion dieser Art (abgesehen von der an D) wurde mit der 17 MeV-γ-Strahlung aus dem $Li^7(p, \gamma)$-Prozeß an Mg gefunden:

$$Mg^{26}(\gamma, p)\, Na^{25} \xrightarrow[60\,\text{sec}]{\beta^-\,(3{,}3\,\text{MeV})} .$$

Bei schweren Kernen sind (γ, p)-Reaktionen seltener, um so mehr, als überwiegend die Neutronenemission die Anregungsenergie verbraucht.

e) (γ, α)-Prozesse

Ein Photoeffekt mit α-Emission ist wegen der hohen Coulomb-Barriere nur bei großen γ-Energien zu erwarten. Wir geben nur ein Beispiel:

Mit der Bremsstrahlung eines 33 MeV-Elektronen-Synchrotrons konnte C^{12} in drei α-Teilchen zerlegt werden. Es wurden Resonanzen gefunden bei $E_\gamma = 14{,}7$; 15,8; 16,6; 18,3; 22,7; 24,3 MeV, welche teilweise mit den aus anderen Reaktionen bekannten Niveaus des C^{12} (15,1; 16,1; 16,6; 21,7 MeV) genügend übereinstimmen.

§ 36. Kernreaktionen mit Neutronen

Jedes durch eine Kernreaktion freigesetzte Neutron führt unter gewöhnlichen Laboratoriumsbedingungen fast immer innerhalb etwa einer msec zu einer *Kernreaktion*. Daneben kann das Neutron auch *spontan* in ein Proton, Elektron und Neutrino zerfallen. Da aber die Halbwertsdauer dieses β-Zerfalls ≈ 12 min beträgt, ist dieser Vorgang nur mit eigens dazu konstruierten Apparaten und nur unter besonderen Vorsichtsmaßnahmen beobachtbar. Die Reaktionen mit Neutronen sind je nach deren Energie und der Art des Zielkerns sehr unterschiedlich, was im wesentlichen durch die Verschiedenheit der Abstände, Lage und Schärfe der Resonanzen bedingt wird. Mit wachsender Atomnummer und steigender Anregungsenergie verkleinern sich die Resonanzabstände, und die Resonanzbreiten werden größer, so daß sich schließlich die Niveaus überlappen und ein Kontinuum resultiert. Die Tabelle 16 vermittelt einen schematischen Überblick über die vorkommenden Möglichkeiten.

Tabelle 16. Charakteristik von Reaktionen mit Neutronen verschiedener Geschwindigkeiten

<table>
<tr><th rowspan="2">Ziel-
kern
A</th><th colspan="4">Geschwindigkeit der Neutronen</th></tr>
<tr><th>langsam
$E < 1000$ eV</th><th>mittelschnell
1 keV $< E <$ 0,5 MeV</th><th>schnell
0,5 MeV $< E <$ 10 MeV</th><th>sehr schnell
10 MeV $< E <$ 50 MeV</th></tr>
<tr><td>< 25</td><td colspan="2">Resonanzabstand 1 bis 0,1 MeV
breite Resonanzen</td><td colspan="2">noch auflösbare Resonanzen</td></tr>
<tr><td rowspan="2">25
bis
80</td><td colspan="2">Resonanzabstand 100 bis 1 keV</td><td rowspan="2">Abstand kleiner
Niveaus überlappen
sich</td><td rowspan="2">Kontinuum</td></tr>
<tr><td>einige
Niveaus</td><td>viele Niveaus</td></tr>
<tr><td rowspan="2">>80</td><td colspan="2">Resonanzabstand einige eV bis
1000 eV</td><td colspan="2" rowspan="2">Kontinuum</td></tr>
<tr><td>viele
scharfe
Niveaus</td><td>Niveaus nicht
getrennt</td></tr>
</table>

Wir betrachten nun einige Beispiele zu den verschiedenen Reaktionstypen.

A. NEUTRONENREAKTIONEN MIT EMISSION UNGELADENER PARTIKEL (γ-QUANTEN ODER NEUTRONEN)

a) (n, γ)-Prozesse mit thermischen und langsamen Neutronen

Nach Bildung eines Compoundkerns (Wirkungsquerschnitt σ_n) führt hier eine γ-Emission zum *endgültigen* Neutroneneinfang. Der Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma(n, \gamma) = \sigma_n \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \, .$$

Für Anregungsenergien E_A in der Nähe der Bindungsenergie eines Neutrons findet die γ-Emission meist in $\approx 10^{-14\pm1}$ sec statt. Entsprechend ist $\Gamma_\gamma \approx 0{,}1 \cdot 10^{\pm1}$ eV. Im Mittel fällt Γ_γ mit steigendem Atomgewicht A, wie Abb. 73 zeigt, worin die beim Einfang langsamer Neutronen auftretenden Γ_γ-Werte für verschiedene Elemente mit $A > 100$ eingetragen sind. Für höhere Anregungsenergien E_A vergrößert sich Γ_γ. Oft erfolgt der Übergang zum Grundzustand über eine Kaskade von sukzessiven γ-Strahlen. Manchmal wird dabei ein γ-metastabiles Niveau erreicht und dadurch ein Isomer erzeugt (s. S. 145). In anderen Fällen ist der Endkern stabil, wie im Fall $Cd^{113}(n, \gamma)\,Cd^{114}$.

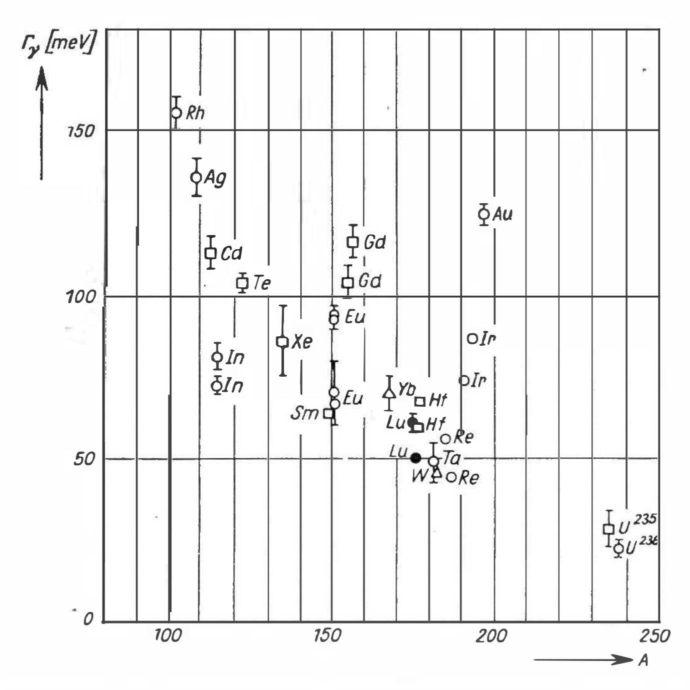


Abb. 73. Allgemeiner Abfall der beim Einfang langsamer Neutronen auftretenden Γ_γ-Breiten mit zunehmendem Atomgewicht im Gebiet mittelschwerer bis schwerer Kerne

Am häufigsten entstehen jedoch instabile Kerne. Der (n, γ)-Prozeß an einem stabilen Kern ungerader Ordnungszahl Z (ausgenommen ${}_1H^1$; ${}_3Li^6$; ${}_5B^{10}$; ${}_7N^{14}$; ${}_{23}V^{50}$; ${}_{73}Ta^{180}$) führt stets zu einem radioaktiven Kern, der mit Ausnahme von ${}_1T^3$ dem (u,u)-Typ angehört. In seltenen Fällen entstehen β^+-strahlende und zugleich E-einfangende Kerne, manchmal auch reine E-Fänger. Unter den (u,u)-Kernen gibt es einige wenige (wie Cu^{64}) die von demselben Zustand aus Elektronen und Positronen emittieren und auch Elektronen einfangen. Beispiele zu jedem Typ zeigt Tabelle 17.

Tabelle 17. Zum unterschiedlichen Verhalten der Kerne aus (n,γ)-Reaktionen

Erzeugende Reaktion	Endkern	Halbwerts-zeit	Art der Strahlung	Energie [MeV]
Cd^{113} (n, γ)	Cd^{114}	stabil	keine	—
Au^{197} (n, γ)	Au^{198}	2,69 d	β^-	0,97
Cd^{108} (n, γ)	Cd^{109}	470 d	E	0,230
Zn^{68} (n, γ)	Zn^{69*}	17,6 h	γ (94%) i.U. (6%)	0,44
Eu^{151} (n, γ)	Eu^{152*}	9,2 h	β^- (75%) E (25%)	1,9; 1,6; 0,6
Cd^{106} (n, γ)	Cd^{107}	6,7 h	β^+ (0,3%) E (99,7%)	0,32
Co^{59} (n, γ)	Co^{60*}	10,47 min	β^- (0,3%) γ (1%) i.U. (98,7%)	1,56 0,06
Cu^{63} (n, γ)	Cu^{64}	12,9 h	β^- (38%) β^+ (19%) E (43%) γ (nach K)	0,571 0,657 1,34

Ein * bezeichnet ein Isomer, E bedeutet Elektroneneinfang und (i. U.) eine innere ,,Umwandlung", d.h. Emission eines Hüllenelektrons mit der scharf definierten Energie des γ-Überganges — abzüglich der Bindungsenergie in der Atomhülle. Bei Co^{60*} führt der γ-Übergang zu dem bekannten β-Strahler Co^{60} mit 5,2 a Halbwertszeit.

Die meisten (n, γ)-Prozesse führen zu β^--Strahlern, von denen in Tabelle 18 einige praktisch wichtige Beispiele zusammengestellt sind.

Besonders stark aktivierbare Kerne mit experimentell günstigen Halbwertszeiten, werden viel als Indikatoren für langsame Neutronen verwendet. Einige weitere Verwendungsmöglichkeiten sind in der letzten Spalte der Tabelle 18 vermerkt. Die (n, γ)-Reaktionen langsamer Neutronen benutzt man heute in *Reaktoren* zur Herstellung radioaktiver Isotope und neuer, in der Natur nicht vorkommender Elemente. In einzelnen Fällen lassen sich auch isotopenreine Modifikationen von Elementen erzeugen, die sonst nur als Mischelemente bekannt sind. Manchmal läßt sich auf diese Weise eine Isotopentrennung umgehen: Ein *isotopenreines* Element nächst höherer Ordnungszahl erhält man stets, wenn durch den (n, γ)-Prozeß an einem *Reinelement* ein β^--Strahler entsteht. Beispiele dafür sind die drei ersten Kerne (Na, P, Co) und der letzte Kern (Au) in Tabelle 18. Aus Au^{197} z. B kann man das isotopenreine Quecksilber Hg^{198} erhalten, das keinen Spin und somit auch keine optischen Hyperfeinstrukturlinien besitzt. Auf diese Weise hergestelltes Quecksilber eignet sich daher besonders gut zur Füllung von Hg-Lampen zur Festlegung wohldefinierter Wellenlängenstandards.

Tabelle 18. Auswahl praktisch wichtiger (n, γ)-Reaktionen

Erzeugende Reaktion	Endkern	Halbwertszeit	Art der Strahlung	Energie [MeV]	therm. [barn]	Verwendung
Na^{23} (n, γ)	Na^{24}	15,0 h	β^- γ	1,4 1,4; 2,7	0,5	B. Md.
P^{31} (n, γ)	P^{32}	14,3 d	β^- keine γ	1,7	0,17	B. Md.
Co^{59} (n, γ)	Co^{60}	5,2 a	β^- γ	0,3 1,16; 1,32	22	Md. MT.
C^{13} (n, γ)	C^{14}	5570 a	β^-	0,16	0,1	B. MT.
Ca^{44} (n, γ)	Ca^{45}	152 d	β^-	0,25	0,6	B. Md.
Dy^{164} (n, γ)	Dy^{165}	2,3 h	β^-	1,2 bis 0,4	2600	
Rh^{103} (n, γ)	Rh^{104}	44 sec	β^-	2,3	150	
In^{115} (n, γ)	In^{116*}	54 min	β^-	0,85	145	
Ag^{107} (n, γ)	Ag^{108}	2,3 min	β^-	2,8	50	
Ag^{109} (n, γ)	Ag^{110}	24,2 sec	β^-	2,6	100	Nachweis langsamer Neutronen
Ta^{181} (n, γ)	Ta^{182}	115,1 d	β^- γ	0,5 Komplex	21	
Au^{197} (n, γ)	Au^{198}	2,7 d	β^- γ	0,97 0,41	100	

Die γ-Strahlung (nicht immer vermerkt) stammt vom Folgekern. Außer P^{32} haben hier noch C^{14} und Ca^{45} keine γ's. In der Rubrik „Verwendung" bedeuten: B. = Biologie; Md. = Medizin; MT. = Meßtechnik.

Ein Hauptzweck der heutigen *Reaktortechnik* ist die Herstellung *spaltbarer Materialien* durch (n, γ)-Prozesse an U^{238} und Th^{232}. Hier führt der Neutroneneinfang zu einer Kaskade von zwei β^--Prozessen, ehe ein β-stabiler Kern entsteht:

$$U^{238}(n, \gamma) \xrightarrow[23\,\text{min}]{\beta^-} Np^{239} \xrightarrow[2{,}3\,\text{d}]{\beta^-} Pu^{239} \xrightarrow[24000\,\text{a}]{\alpha},$$

$$Th^{232}(n, \gamma) \xrightarrow[23\,\text{min}]{\beta^-} Pa^{233} \xrightarrow[27\,\text{d}]{\beta^-} U^{233} \xrightarrow[1{,}6 \cdot 10^5\,\text{a}]{\alpha}.$$

Die entstehenden Isotope Pu^{239} und U^{233} sind neben U^{235} die technisch wichtigsten spaltbaren Kerne. Auch diese Kerne absorbieren Neutronen durch (n, γ)-Prozesse; sie führen aber, im Gegensatz zu den obigen Beispielen, **unmittelbar** zu langlebigen α-Strahlern als Endprodukten:

$U^{233}(n, \gamma)\, U^{234} \xrightarrow[2{,}3 \cdot 10^5\text{a}]{\alpha}$ in 12% aller Fälle von Absorption therm. Neutronen,

$U^{235}(n, \gamma)\, U^{236} \xrightarrow[2{,}5 \cdot 10^7\text{a}]{\alpha}$ in 15% aller Fälle von Absorption therm. Neutronen,

$Pu^{239}(n, \gamma)\, Pu^{2\ 0} \xrightarrow[6 \cdot 10^3\text{a}]{\alpha}$ in 32% aller Fälle von Absorption therm. Neutronen.

Da die Endkerne U^{234}, U^{236} und Pu^{240} nicht mit langsamen Neutronen spalten, sind diese (n, γ)-Prozesse vom Standpunkte der Energiegewinnung technisch unerwünscht. Die restlichen Fälle von Neutronenanlagerung führen hier zur *Kernspaltung* (s. Abschn. 3).

Der Wirkungsquerschnitt von (n, γ)-Reaktionen mit *langsamen Neutronen* befolgt oft das $\frac{1}{v}$-*Gesetz*. Hier kommt als weiterer konkurrierender Prozeß nur noch die elastische Streuung in Frage, ein Vorgang, der mit abnehmender Neutronenenergie i. allg. immer unwahrscheinlicher wird.

Der Verlauf des Wirkungsquerschnitts für schnelle Neutronen an schweren Kernen wurde in § 33 bereits besprochen: Wir haben ein Kontinuum mit dem Wirkungsquerschnitt nach Gl. (33.6). Für langsame Neutronen zeigen sich dagegen ausgesprochene Resonanzeigenschaften bei den mittleren und schweren Kernen. Leichte Kerne haben keine oder nur schwache Resonanzen. Ihre Wirkungsquerschnitte sind sehr klein. Einige dieser Werte für epithermische und thermische Neutronen enthält die Tabelle 19.

Tabelle 19. (n, γ)-Wirkungsquerschnitte einiger leichter Elemente für thermische und epithermische Neutronen

Zielkern	H^1	D^2	He^4	Li^7	Be^9
σ [barn]	0,3	$3 \cdot 10^{-4}$	≈ 0	0,33	$8 \cdot 10^{-3}$
Zielkern	Be^{11}	C^{12}	N^{14}	O^{16}	O^{18}
σ [barn]	0,05	$3{,}5 \cdot 10^{-3}$	0,1	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$

Bei der (n, γ)-Reaktion an H^1 wird die Bindungsenergie des Deuterons als γ-Quant von 2,2 MeV ausgestrahlt. Entsprechendes ist auch bei den anderen Kernen zu beobachten.

Wegen ihres sehr kleinen Absorptionsquerschnitts und ihrer geringen Kernmassen werden C und D_2O als Moderator in Kernreaktoren verwendet (s. Bd. III, Kap. I).

Mit schwerer werdendem Kern tritt der (n, γ)-Prozeß gegenüber allen anderen Prozessen immer mehr in den Vordergrund. In vielen Fällen wird dann die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts langsamer Neutronen durch das $\frac{1}{v}$-Gesetz und die Resonanzen beherrscht. Die Gestalt dieser Abhängigkeit wurde in § 33, Gl. (33.4), erörtert. Tabelle 20 zeigt die Konstanten der *Breit-Wigner-Formel* für einige wichtige Resonanzen und den Wirkungsquerschnitt bei thermischen Neutronen von 0,025 eV. Die σ-Werte beziehen sich, wenn kein spezielles Isotop genannt ist, auf das natürliche Isotopengemisch des betreffenden Elements.

Das als Absorber für thermische Neutronen oft benutzte Cd hat wegen $\Gamma \approx E_r$ nach früherem (s. S, 150) eine relativ scharfe „*Absorptionskante*" zwischen 0,2

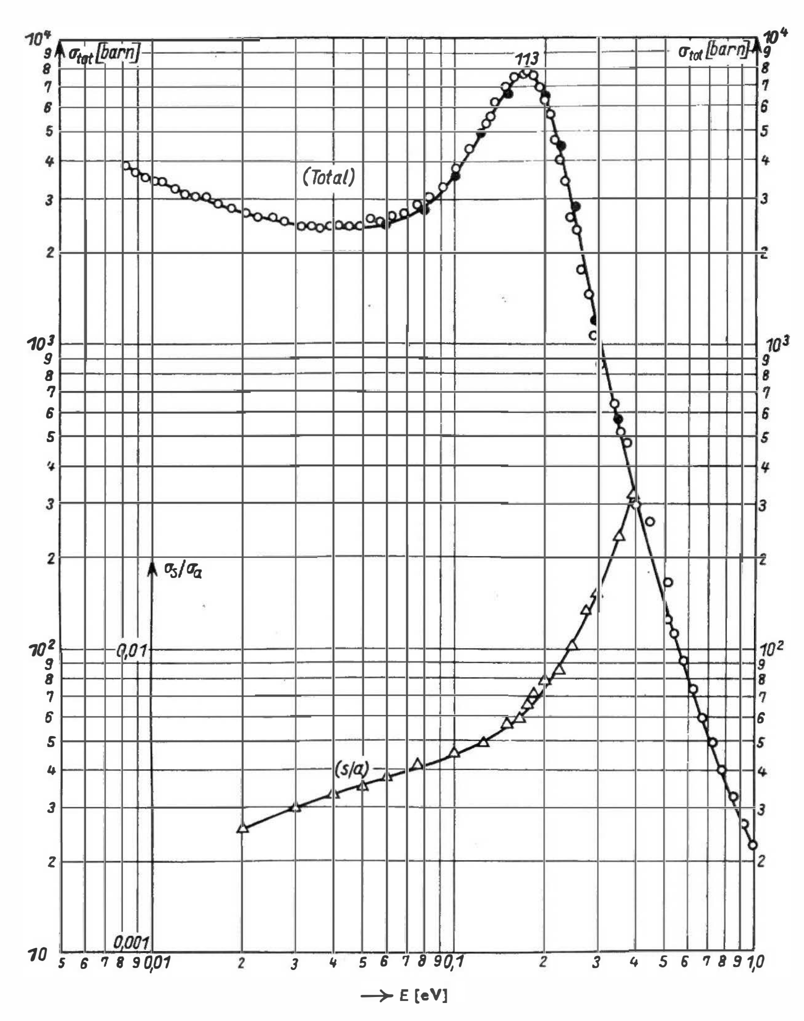


Abb. 74. Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von Cd. Die untere Kurve s/a zeigt das Verhältnis des elastischen Streuquerschnitts zum Absorptionsquerschnitt

und 0,3 eV. Neutronen kleinerer Energien werden mit Einfangsquerschnitten zwischen ≈ 2400 und ≈ 8000 barn stark absorbiert. Abb. 74 zeigt den gemessenen Verlauf. Die durchgehende Linie ist nach der Breit-Wigner-Formel mit den Werten für σ_r, E_r und Γ aus Tabelle 20 berechnet und befindet sich in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den Messungen. Die Absorption des natürlichen Cd stammt übrigens fast ausschließlich von dem Isotop Cd^{113}, welches zu 12,3% im natürlichen Gemisch enthalten ist. Die übrigen Cd-Isotope haben bei langsamen Neutronen Wirkungsquerschnitte von nur 0,2 bis 1,4 barn.

Von den Ir-Resonanzen ist die bei 1,30 eV dem Ir^{193}, die bei 0,654eV dem Ir^{191} zuzuordnen. Hier entstehen die β^--Strahler Ir^{194} mit 19 h und Ir^{192} mit 74,4 d Halbwertszeit.

Tabelle 20. Die Resonanzparameter einiger Resonanzen und der Wirkungsquerschnitt bei thermischen Neutronen

Element	σ_r [barn]	E_r [eV]	Γ [eV]	σ [barn] bei 0,0253 eV
Cd	7200	0,176	0,155	2400
Cd^{113}	58000	0,176	0,115	20000
In	27000	1,44	0,085	150
Ag	24000	5,2	0,063	65
Rh	2500	1,26	0,20	150
Au	30600	4,94	0,16	100
Ir	5300	0,654	0,074	430
	6400	1,30	0,087	
U^{238}	23000	6,70	0,026	11
	19000	21,0	0,034	
	16000	36,8	0,060	
Pu^{240}	$1{,}4 \cdot 10^5$	1,06	0,035	370
Th^{232}	7300	22,0	0,036	20
	10300	23,6	0,043	
Xe^{135}	$3{,}4 \cdot 10^6$	0,084	0,11	$3{,}0 \cdot 10^6$
Hg		—2	0,1	400

Bei Mischelementen ist meist nur eines der Isotope der eigentliche Neutronenabsorber. Eine Verkleinerung des σ_r ist dann durch Bezugnahme auf das gesamte natürliche Isotopengemisch bedingt.

U^{238} hat mehrere äußerst scharfe und intensive Resonanzlinien. Außer den drei in der Tabelle angegebenen niedrigsten, liegen weitere bei 66,2; 81,1; 103 eV und höheren Energien.

Die sehr starke Resonanzabsorption des Pu^{240} wirkt sich im Kernreaktor merklich nachteilig auf die Neutronenbilanz aus.

Die außerordentliche Schärfe der Resonanzen (bei U^{238} und Pu^{240} z. B. 26 und 35 meV!) macht bei genaueren Betrachtungen die Berücksichtigung der thermischen Bewegung der Zielkerne notwendig. Der Wirkungsquerschnitt hängt nur von der Relativgeschwindigkeit bzw. von der *Energie der Relativbewegung*, E_{rel}, ab. Es sei m die Masse, v die Geschwindigkeit und E die Energie des Neutrons im Labor-System, ferner V die thermische Geschwindigkeitskomponente des Zielkerns entgegen der Richtung von $\vec{v}$. Dann gilt, wenn die Masse des Zielkerns $M \gg m$ und weiter $\frac{v}{V} \gg 1$ angenommen wird,

$$E_{rel} = \frac{m}{2}(v + V)^2 = E + \sqrt{2mE}\,V \qquad (v \gg V). \tag{36.1}$$

Ist das betrachtete Medium ein Gas oder ein Festkörper oberhalb der Debye-Temperatur, so beträgt der Bruchteil der Atome mit der Geschwindigkeitskomponente V im Intervall dV bekanntlich

$$f(V)\,dV = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{MV^2}{2kT}}\,dV$$

oder, mit Benutzung von (36.1) auf die Energieskala umgeschrieben,

$$f(E_{\text{rel}})\,dE_{\text{rel}} = \frac{1}{\pi^{1/2}\,\Gamma_{\text{Dop}}}\,e^{-\left(\frac{E_{\text{rel}}-E}{\Gamma_{\text{Dop}}}\right)^2} dE_{\text{rel}}\,,$$

wobei zur Abkürzung steht

$$\Gamma_{\text{Dop}} = 2\sqrt{\frac{kTE}{A}}\,.$$

$A = \frac{M}{m}$ ist die Massenzahl des Zielkerns. Die „Doppler-Breite" Γ_{Dop} erweist sich nun bei vielen Resonanzen größer als die natürliche Linienbreite Γ. Für die U-Resonanz bei $E = 6{,}7$ eV ist bei Zimmertemperatur ($kT = \frac{1}{40}$ eV; $A = 238$) z. B. $\Gamma_{\text{Dop}} = 53$ meV, also wesentlich größer als die natürliche Linienbreite von 26 meV. Nimmt man für die wahre Form der Resonanzkurve in der Nähe einer Einzelresonanz die Breit-Wigner-Formel $\sigma(E_{\text{rel}}) = \sigma_0\left[1 + \frac{(E_{\text{rel}} + E_r)^2}{(\frac{1}{2}\,\Gamma)^2}\right]^{-1}$ an, so gilt für den effektiven Wirkungsquerschnitt $\bar{\sigma}$ (wenn wir die Zahl der Reaktionen pro sec und pro Kern $= v\,\bar{\sigma}$ schreiben und einen Faktor $\left(1 \pm \frac{V}{v}\right)$ im Mittel $= 1$ setzen).

$$\bar{\sigma}(E) = \int \sigma(E_{\text{rel}})\,f(E_{\text{rel}})\,dE_{\text{rel}} = \frac{\sigma_0}{2\pi^{1/2}}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{Dop}}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left[\frac{\Gamma}{2\Gamma_{\text{Dop}}}(z-x)\right]^2\right\}\frac{dx}{1+x^2}\,,$$

wo zur Abkürzung $x = \frac{E_{\text{rel}} - E_r}{\frac{1}{2}\Gamma}$ und $z = \frac{E - E_r}{\frac{1}{2}\Gamma}$ stehen. Die beobachtbare Form der Resonanzkurve wird also durch die Wärmebewegung verändert: Sie wird flacher und breiter. Die *integrale Resonanzabsorption*, d. i. die Fläche unter der σ-E-Kurve, bleibt jedoch erhalten. Im einzelnen gelten folgende Näherungswerte:

1. Falls $\Gamma \ll \Gamma_{\text{Dop}}$, wird genau in der Resonanz

$$\bar{\sigma}(E_r) = \sigma_0\,\frac{\pi^{1/2}}{2}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{Dop}}}\ (\text{bei } E = E_r)\,,$$

in der Nähe der Resonanz ist

$$\bar{\sigma}(E) = \sigma_0\,\frac{\pi^{1/2}}{2}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{Dop}}}\,e^{-\left(\frac{E-E_r}{\Gamma_{\text{Dop}}}\right)^2};$$

solange $|E - E_r| \ll \Gamma_{\text{Dop}}\left(\frac{\Gamma_{\text{Dop}}}{\Gamma}\right)$ bleibt;

weit entfernt von der Resonanz gilt

$$\bar{\sigma}(E) = \sigma(E)\,,$$

wenn $|E - E_r| \gg \Gamma_{\text{Dop}}\left(\frac{\Gamma_{\text{Dop}}}{\Gamma}\right)$.

2. Im Falle $\Gamma \gg \Gamma_{\text{Dop}}$ bleibt natürlich das ursprüngliche σ erhalten.

Im Bereich des $\frac{1}{v}$-Gesetzes macht sich die thermische Bewegung nicht auf $\bar{\sigma}$ bemerkbar: Die von einem Strom von Neutronen der Geschwindigkeit v und der Dichte 1 Neutron pro cm^3 an einem Targetkern erzeugte Reaktionsrate N_r beträgt laut Definition des effektiven Wirkungsquerschnittes $N_r = v\,\bar{\sigma}(v)$. Bei bewegtem Targetkern gilt aber andererseits genauer $N_r = v_{\mathrm{rel}}\,\sigma(v_{\mathrm{rel}})$, worin v_{rel} die Relativgeschwindigkeit zwischen den Stoßpartnern bezeichnet. Im Falle des $\frac{1}{v}$-Gesetzes, $\sigma(v) = \frac{c}{v}$ $(c = \mathrm{const})$, wird daher genau $N_r = c$ und somit gemäß der Definition $\bar{\sigma}(v) = \frac{N_r}{v} = \frac{c}{v} = \sigma(v)$. Der effektive Wirkungsquerschnitt hängt also nicht von der thermischen Geschwindigkeit der Zielkerne ab, solange alle Relativgeschwindigkeiten v_{rel} im Gebiet des $\frac{1}{v}$-Gesetzes liegen.

Ungewöhnlich starke Absorption ist zu erwarten, wenn eine Resonanzstelle im thermischen Gebiet oder dicht bei Null liegt. Beispiele solcher Fälle sind Cd^{113}, Sm^{149}, Eu^{151}, Eu^{153} und Gd^{157}. Unter diesen zeigt Gd^{157} den größten bei einem stabilen Kern bekannten Wirkungsquerschnitt von 230000 barn.

Der Kern mit dem absolut größten bisher beobachteten Absorptionsquerschnitt ist aber das mit 9,2^{h} Halbwertszeit β^--aktive Xe^{135}, dessen σ-E-Kurve ähnlich wie die von Cd verläuft und ein flaches Resonanzmaximum von $3{,}4 \cdot 10^6$ barn bei 0,007 eV erreicht. Die starke Neigung zum Neutroneneinfang hängt hier offenbar mit der *magischen Zahl* 82 zusammen. $_{54}Xe^{135}$ hat 81 Neutronen: Das nächste Neutron wird daher besonders stark gebunden, und das zeigt sich in dem auffallend großen Wirkungsquerschnitt. In der Elektronenhülle tritt ein analoger Fall bei der Elektronenaffinität der Halogene auf.

Die nach Tabelle 20 *negative Resonanzenergie* des Hg wurde bereits auf den S. 151 u. 152 erwähnt. Solange die Neutronenenergie unterhalb der niedrigsten Anregungsenergie des Zielkerns liegt, ist außer dem (n, γ)-Prozeß nur noch die elastische Streuung möglich, welche wir nun näher betrachten wollen.

b) (n, n)-Prozesse, elastische Streuung

Wie bereits in den §§ 32 und 33 erwähnt wurde, kann man die *totale elastische Streuung* auffassen als die Summe aus der sog. *Potentialstreuung* und der *Resonanzstreuung* (s. §§ 70 und 71). Der Einfluß der Interferenz der diesbezüglichen Streu-Wellen auf den Wirkungsquerschnitt wird genauer in § 70 behandelt. — Interferenzen treten ferner auch als Folge der Molekül- und Kristallstruktur der bestrahlten Stoffe auf.

Der Potentialstreuquerschnitt beträgt für therm. Neutronen $\approx 4\pi R^2$ (R = Kernradius, s. § 70). Wenn die nächstgelegene Resonanz noch relativ weit entfernt ist und keine merkliche Absorption vorliegt, wird man also einen Wirkungsquerschnitt der Größenordnung $4\pi R^2$ erwarten. Dies ist in der Tat über das gesamte Periodische System der Fall. Nur H macht eine Ausnahme. Einige Zahlen in Tabelle 21 mögen die Verhältnisse veranschaulichen. Sie bestätigen — abgesehen von den leichtesten Kernen — die größenordnungsmäßige Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Erwartung.

Tabelle 21. Elastische Streuquerschnitte für thermische Neutronen

Zielkern	H^1	D^2	He^4	Be^9	C^{12}	O^{16}	Al^{27}	Ar^{40}	Fe^{56}	Ag^{109}	U^{238}
σ_{nn} [barn]	20,4	3,3	1,4	6,1	4,7	3,7	1,35	0,8	12,5	6	8,2
$4\pi R^2$ [barn]	—	—	0,2	1,2	1,4	1,7	2,4	3,2	4,0	6,2	10,5

An Resonanzstellen kann eine starke *Resonanzstreuung* auftreten, sobald $\Gamma_n \gtrsim \Gamma_\gamma$ wird, was bei mittelschweren Kernen oft zutrifft. Der maximal mögliche Streuquerschnitt beträgt

$$\sigma_{\text{Str}} = 4\pi \lambda^2 g = 2{,}62 \cdot 10^6 \frac{g}{E_r} \text{ [barn]}$$

(E_r in eV; g ist ein statistischer Faktor der Größenordnung $\frac{1}{2}$; s. (Gl. 33.2) und § 44). Einige beobachtete Streuresonanzen zeigt Tabelle 22.

Tabelle 22. Daten einiger Streuresonanzen

Zielkern	Spin I	E_r [eV]	Γ_n [eV]	$\frac{\Gamma_n}{\Gamma}$	Spin des Compound-Kerns	σ_{Str} [barn]	
						experimentell	berechneter max. Wert
Na^{23}	$\frac{3}{2}$	3300	340	0,99	2	550	540
Mn^{55}	$\frac{5}{2}$	345	20	0,99	3	4 bis 5000	4400
Co^{59}	$\frac{7}{2}$	123	4	0,94	(4)	12500	12200
W^{186}	0	19	0,25	0,62	$\frac{1}{2}$	90000	135000
Bi^{209}	$\frac{9}{2}$	770	35	1			1700

Bei schweren Kernen verkleinern sich die Niveaubreiten Γ_n derart, daß im allgemeinen bei langsamen Neutronen $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$ wird und der (n, γ)-Prozeß überwiegt. In der Nähe der magischen Zahlen kann jedoch Γ_n auch bei schweren Kernen wieder so groß werden, daß eine merkliche elastische Streuung eintritt: Bei $_{83}Bi^{209}$ scheint dies der Fall zu sein.

Bei mittelschnellen und schnellen Neutronen wird die elastische Streuung durch das Auftreten anderer konkurrierender Prozesse immer seltener. Auch das Resonanzverhalten verschwindet. Mit Neutronenenergien oberhalb der ersten Anregungsstufe des Zielkerns beginnen

c) (n, n')-Prozesse oder unelastische Stöße

Die Beobachtung von Energie und Richtung der gestreuten Neutronen würde bei bekannter Richtung und Geschwindigkeit der Primärneutronen in der früher in den §§ 28 und 29 erörterten Weise die Bestimmung der Energieniveaus der Kerne ermöglichen. Die Herstellung und Ausmessung genau definierter Neutronenenergien ist jedoch, besonders bei höheren Energien, sehr schwierig, so daß

Versuche dieser Art bei weitem noch nicht die mit geladenen Teilchen erreichte Präzision erlangt haben. Die Reaktion kann man, außer an den gestreuten Neutronen, auch über die γ-Strahlung des durch den unelastischen Stoß angeregten Zielkerns beobachten. Hierbei ist manchmal das Entstehen isomerer Kerne festzustellen. Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes wird durch die Niveaus im Gebiet der Anregungsenergie bestimmt.

Wenn nicht gerade Resonanz vorliegt, sind die Wirkungsquerschnitte klein. Zur Illustration geben wir mit der folgenden kleinen Zusammenstellung eine Auswahl unelastischer Streuquerschnitte $\sigma(n, n')$, welche mit Neutronen von 2,5 MeV beobachtet wurden.

Zielkern	Be	C	F	Mg	S	Cr	Fe	Cu
$\sigma(n, n')$ [barn]	0,014	0,006	0,5	0,7	0,4	1,2	1 bis 2	1,2

Überschreitet die Energie des Zusammenstoßes (im Schwerpunktssystem) die Bindungsenergie E_B eines Kernneutrons, so beginnen die $(n, 2n)$-Reaktionen.

d) $(n, 2n)$-Reaktionen

Aus der Schwellenenergie dieser Prozesse läßt sich die Bindungsenergie E_B des aus dem Zielkern A emittierten Neutrons ermitteln. Wir vergleichen sie mit der Photoschwelle nach § 35 c. Es gilt

$$E_B = E_{\text{Schw}}(\gamma, n) = \frac{A}{A+1} E_{\text{Schw}}(n, 2n).$$

Einige experimentelle Beispiele sind in Tabelle 23 angeführt.

Die erste Zeile enthält die experimentell gemessene Schwellenenergie der $(n, 2n)$-Prozesse. Die daraus berechnete Bindungsenergie (zweite Zeile) stimmt mit der Schwellenenergie der (γ, n)-Prozesse (dritte Zeile) ausgezeichnet überein.

Tabelle 23. Einige Schwellenenergien aus $(n, 2n)$- und (γ, n)-Prozessen

Kern		D^2	Li^7	Be^9	Co^{40}	Ag^{109}	U^{238}
$E_{\text{Schw}}(n, 2n)$ exp.	[MeV]	3,34	8,2	1,85	16,3	9,1	6,0
E_B aus $E_{\text{Schw}}(n, 2n)$	[MeV]	2,22	7,2	1,67	15,9	9,0	6,0
$E_{\text{Schw}}(\gamma, n)$ exp.	[MeV]	2,23	7,15	1,67	15,9	9,5	6,0

Die $(n, 2n)$-Schwellenenergien liegen für die schweren Kerne mit $A > 100$ bei 9 bis 6 MeV, für die leichteren $(10 < A < 100)$ schwankt sie stark zwischen 7 und 17 MeV, wobei Kerne mit gerader Neutronenzahl N eine um 4 bis 8 MeV höhere Schwelle aufweisen, als die mit ungeradem N. Bei den leichtesten Kernen mit $A < 10$ sind die Schwellenenergien kleiner. Die niedrigste Schwelle hat Be^9.

Die Reaktion

$$Be^9(n, 2n)Be^{8*} \rightarrow 2\alpha$$

beginnt schon bei 1,85 MeV (im Labor-System) und kann zur Neutronenvermehrung ausgenützt werden.

Die $(n, 2n)$-Prozesse an Ausgangskernen ungerader Ordnungszahl vom Typ (u, g) führen zu den stets radioaktiven (u, u)-Kernen (wenn nicht gerade eine der sechs Ausnahmen von S. 165 entsteht). Auch sonst ist das Endprodukt oft radioaktiv. So folgt einem $(n, 2n)$-Prozeß an U^{238} eine β^--Strahlung mit 6,8 d Halbwertszeit, wodurch die ersten Spuren der Entstehung eines Transuranelementes Np^{237} schon vor 1939 bemerkt wurden [N 40-1]:

$$U^{238}(n, 2n)\,U^{237} \xrightarrow[6{,}8\,d]{\beta^-} Np^{237} \xrightarrow[2{,}2 \cdot 10^6 a]{\alpha}.$$

Sichergestellt wurde das Element Np aber erst 1940 als Folgeprodukt der Reaktion $U^{238}(n, \gamma)\,U^{239} \rightarrow \beta^-(23\,\text{min}) \rightarrow Np^{239}$.

Bei noch höheren Neutronenenergien, die zu $(n, 3n)$- und weiteren Prozessen ausreichen, sind die zu erwartenden Vorgänge durch die „*Verdampfungstheorie*" beschreibbar und werden in den §§ 60 und 61 behandelt.

B. NEUTRONENREAKTIONEN MIT EMISSION GELADENER TEILCHEN

e) (n, p)-und (n,α)-Reaktionen mit mittelschnellen und schnellen Neutronen

Bei hohen Neutronenenergien können neben ungeladenen auch geladene Teilchen emittiert werden, wenn die Anregungsenergie zur Überwindung der Coulomb-Barriere ausreicht. Als geladene Teilchen kommen Protonen und α-Teilchen in Frage. Deuteronen und Tritonen werden erst bei hochenergetischen Prozessen häufiger beobachtet. Im Gebiet unter 50 MeV kommen sie selten vor. Der Verlauf des Wirkungsquerschnittes wird durch die Resonanzen des Compoundkerns und durch den *Gamow-Faktor* für das *auslaufende* Teilchen bestimmt.

(n, p)-*Reaktionen* an stabilen Zielkernen (Z, N), ausgenommen $_{49}In^{113}$ und $_{52}Te^{123}$, ergeben stets β-instabile Reaktionsprodukte $(Z-1,\ N+1)$. Denn nach einer der Mattauchschen Isobarenregeln existiert zu einem stabilen Kern Z, abgesehen von den genannten Fällen, kein stabiles Isobar mit $Z-1$. Nur in seltenen Fällen ist der Restkern ein Positronenstrahler (und E-Fänger) – wie in dem Beispiel $Cd^{106}(n, p)\,Ag^{106} \rightarrow \beta^+$ – oder ein reiner E-Fänger. Fast immer ist der Restkern ein Elektronenstrahler, der sich also in den Zielkern zurückverwandelt. Bei einem solchen Zyklus wird als Gesamtresultat ein freies Neutron in ein freies Proton umgewandelt und die β-Zerfallsenergie W dem dabei entstehenden Neutrino und dem Elektron als kinetische Energie mitgegeben. Der Q-Wert der Reaktion beträgt daher $(m_n - m_p)c^2 = 1{,}29$ MeV abzüglich der Gesamtenergie von Elektron und Neutrino, $m_e c^2 + W$; also mit $m_e c^2 = 0{,}51$ MeV,

$$Q = (m_n - m_p - m_e)c^2 - W = 0{,}78\ \text{MeV} - W.$$

Die (n, p)-Reaktionen können demnach sowohl exotherm als auch endotherm sein. Ihre Wirkungsquerschnitte variieren unregelmäßig im Bereich leichter bis mittelschwerer Kerne. Die größten Querschnitte z. B. mit 14,5 MeV-Neutronen wurden an Zn^{64} (0,386 barn) und Pd^{105} (0,743 barn) gemessen. Bei schwereren Elementen verringert sich der Querschnitt wegen der Behinderung der auslaufenden Protonen durch die Coulomb-Barriere auf die Größenordnung von millibarn. Aus dem gleichen Grunde können auch selbst exotherme oder schwach endotherme *(n, α)-Reaktionen* oft erst nur mit *schnellen Neutronen* zur Beobachtung gelangen. Ein Beispiel dazu liefert die zuerst entdeckte Neutronenreaktion

$$N^{14}(n, \alpha)B^{11},$$

welche erst oberhalb 1 MeV gut beobachtbar wird, obgleich der Q-Wert nur $Q = -0{,}26$ MeV beträgt. Eine Wilson-Kammer-Aufnahme dieses Prozesses zeigt Abb. 75. Der Knick zwischen der dicken Spur des B^{11}-Kerns und der langen dünnen Spur des α-Teilchens zeigt sehr deutlich, daß eine ungeladene Partikel mit einem großen Impuls von links herkommend einen Kern des Kammergases N^{14} getroffen haben muß. Eine ähnliche Reaktion ist $Ne^{20}(n, \alpha)\,O^{17}$.



Abb. 75.
Wilson-Kammer-Aufnahme der Reaktion $N^{14}(n, \alpha)\,B^{11}$. Das Neutron kommt von links und trifft an der Knickstelle im Bilde auf einen Kern des N^{14}. Die lange Spur nach unten rührt vom α-Teilchen her, die dicke nach oben vom Rückstoßkern B^{11}

Fällt die Schwellenenergie (bei endothermen Reaktionen) in den Bereich schneller Neutronen, so wird nach Überschreitung der Schwelle ein schneller Anstieg des Wirkungsquerschnittes beobachtet. Sie rührt her von der starken Abnahme des Gamow-Faktors mit wachsendem Energieüberschuß über der Schwelle. Auch nach Überschreitung der „Spitze" des Coulomb-Walls setzt sich die Steigerung des Wirkungsquerschnitts fort, weil dann auch Teilchen mit immer höheren Drehimpulsen (p-, d-Wellen usw.) den Kern verlassen, während in der Nähe der Schwelle nur radial auslaufende Partikel (s-Wellen) emittiert werden können.

Die Endkerne nach (n, α)-Reaktionen sind, da im allgemeinen Kerne mit Neutronenüberschuß entstehen, überwiegend *Elektronenstrahler*.

Als Beispiele seien genannt

$$Al^{27}(n, \alpha)\,Na^{24} \xrightarrow[15{,}0\,h]{\beta^-} Mg^{24},$$

$$P^{31}(n, \alpha)\,Al^{28} \xrightarrow[2{,}3\,min]{\beta^-} Si^{28}.$$

f) Das $\frac{1}{v}$-Gesetz bei (n, p)- und (n, α)-Reaktionen mit langsamen Neutronen

Während langsame Neutronen mittelschwere und schwere Kerne wegen ihrer hohen Coulomb-Barriere nicht zur Emission geladener Teilchen veranlassen können, gibt es eine Reihe *exothermer Reaktionen an leichten Kernen* mit Emission geladener

Partikel: Die Reaktionsenergie ist in vielen Fällen so groß, daß die geladenen Teilchen den *Coulomb-Berg „überfliegen"*. In jedem Falle ist Q groß genug (abgesehen von der $B^{10}(n, p)$-Reaktion – über 0,6 MeV!), daß im Bereich *langsamer Neutronen* der Gamow-Faktor für die austretenden Teilchen b, und damit Γ_b, unabhängig von der Neutronenenergie wird. Ein konkurrierender (n, γ)-Prozeß ist i. allg. bei stark exothermen Reaktionen mit Teilchenemission sehr unwahrscheinlich. Daher wird die Gesamtbreite Γ praktisch identisch mit Γ_b bzw. mit der Summe zweier Partialbreiten, falls, wie im Falle des B^{10}, zwei verschiedene Teilchen emittiert werden. In jedem Falle ist Γ weitgehend energieunabhängig.

Für den (n, b)-Prozeß erhalten wir mit Benutzung des Wirkungsquerschnitts für die Compoundbildung σ_n also

$$\sigma(n, b) = \frac{\sigma_n \Gamma_b}{\Gamma} \sim \sigma_n \sim \frac{1}{v}.$$

Die Reaktionen befolgen im wesentlichen das $\frac{1}{v}$-Gesetz.

g) (n, p)-Prozesse mit langsamen Neutronen

Die Wirkungsquerschnitte und Q-Werte der vier bekannten Reaktionen dieser Art sind in Tabelle 24 zusammengestellt.

Tabelle 24. Daten der 4 bekannten (n, p)-Prozesse mit langsamen Neutronen

Reaktion	Q [MeV]	σ [barn] bei $\frac{1}{40}$ eV	Aktivität des Endkerns	
			Strahlung	Halbwertszeit
$He^3(n, p)H^3$	0,764	5100	β^-	12,4 a
$B^{10}(n, p)Be^{10}$	0,227	$<0{,}2$	β^-	$2{,}7 \cdot 10^6$ a
$N^{14}(n, p)C^{14}$	0,626	1,76	β^-	5570 a
$Cl^{35}(n, p)S^{35}$	0,62	0,3	β^-	87 d

Der Prozeß an N^{14} findet in der freien Natur mit den Neutronen aus der kosmischen Strahlung und dem Luftstickstoff in merklichem Maße statt. Der Hauptanteil des C^{14} wird in 10 bis 13 km Höhe erzeugt und kommt in Form von $C^{14}O_2$ durch atmosphärische Turbulenz nach unten. Der am Boden entstehende Anteil an C^{14} ist dagegen vernachlässigbar gering. Das entstandene C^{14} gibt der Luftkohlensäure und damit auch dem Kohlenstoff in lebenden Substanzen eine geringe Aktivität, welche etwa 12,5 β^--Teilchen pro sec und Gramm Kohlenstoff ergibt.

In toten organischen Substanzen, die ja in keinem Stoffaustausch mit der Umgebung stehen, klingt die C^{14}-Aktivität mit der Halbwertszeit von 5570 a ab. Ihre Intensität kann also zur *Altersbestimmung* herangezogen werden (sog. C^{14}-Methode)

Wichtiger als die (n, p)-Reaktionen sind in der Laboratoriumspraxis die

h) (n, α)-Prozesse mit langsamen Neutronen

Es gibt deren drei, die in Tabelle 25 aufgezählt sind.

Tabelle 25. Daten der 3 bekannten (n, α)-Prozesse mit langsamen Neutronen

Reaktion	Q [MeV]	σ [barn]
$Li^6\ (n, \alpha)\ H^3$	4,6	$118\,(E_{eV})^{-1/2}$ für $E < 10^3$ eV
$B^{10}\ (n, \alpha)\ Li^7$	2,78	$11{,}5\,(E_{eV})^{-1/2}$ für $E < 5$ eV
$O^{17}\ (n, \alpha)\ C^{14}$	1,7	$\sim$0,5 bei therm. Neutronen

Die klassische σ-E-Kurve für B^{10} wurde schon in Abb. 57 (s. S. 129) dargestellt. Sie beweist die ausgezeichnete Gültigkeit des $\frac{1}{v}$-Gesetzes. Die Reaktionen an Li^6 und B^{10} sind zum *Nachweis langsamer Neutronen* besonders geeignet. Der Li-n-Prozeß ist auch vorteilhaft zur *Darstellung von* T^3 in einem Reaktor zu benutzen. Die oben erwähnte Bildung des C^{14} in der Atmosphäre wird durch den Prozeß an O^{17} unterstützt. Wegen der geringen Isotopenhäufigkeit des O^{17} von nur $\approx 0{,}04\%$ ist aber der Vorgang praktisch unwesentlich.

§ 37. Kernumwandlungen mit Protonen

a) (p, γ)-Prozesse

Die einfachste p-Reaktion ist der (p, γ)-Prozeß. Die γ-Ausbeute gibt hier ein Maß für den Wirkungsquerschnitt der Compoundbildung. Die radioaktiven Endkerne sind meist β^+-Strahler, wie zu erwarten ist, da sie ein Proton mehr als der stabile Ausgangskern enthalten. In seltenen Fällen entstehen auch β^--Strahler, z. B. das Sc^{47} aus der Reaktion $Ca^{46}(p, \gamma)\,Sc^{47} \rightarrow \beta^-$ (3,43 d).

An dem Beispiel $Al^{27}(p, \gamma)\,Si^{28}$ wurde schon (s. S. 104, Abb. 42) das häufige Vorkommen des *Resonanzeinfanges* bis zu einigen MeV Protonenenergie dargelegt. Die schmalen Resonanzlinien zeigen unmittelbar die Schärfe und damit die lange Lebensdauer der Compoundniveaus. Bei niederen Protonengeschwindigkeiten zeigt sich der exponentielle Anstieg des Wirkungsquerschnitts mit der Energie E (gemäß (34.3)). Dies ist bei leichteren Kernen mit ihren weiter auseinander liegenden Resonanzen am besten zu beobachten.

Einer der ältesten und bekanntesten Prozesse mit Protonen ist die als Quelle homogener γ-Strahlen viel gebrauchte Reaktion $Li^7(p, \gamma)\,Be^8 \rightarrow 2\alpha$, deren Anregungskurve in Abb. 76 dargestellt ist. Der hoch angeregte Compoundkern Be^{8*} emittiert einen γ-Strahl der Energie 17,1 MeV $+ E_p$ (wo E_p die kinetische Energie der

Relativbewegung vor dem Stoß bedeutet). Der anfängliche Anstieg des Wirkungsquerschnitts läßt sich durch die Gamow-Formel (34.3) recht gut darstellen.[1]) Der weitere Verlauf führt auf eine scharfe Resonanzspitze bei 440 keV im Laborsystem, bzw. bei 370 keV im Schwerpunktssystem: Aus dem Resonanzniveau wird eine schmale γ-Linie von 17,5 MeV sowie eine breite γ-Linie von $\approx 14{,}5$ MeV emittiert. Der erste Übergang führt zum Grundzustand, der zweite auf ein etwas unscharfes Niveau bei ≈ 3 MeV über dem Grundzustand. Von beiden Zuständen aus erfolgt ein Zerfall in zwei α-Teilchen. Der Grundzustand zerfällt mit einer Energietönung von nur 90 ± 4 keV.

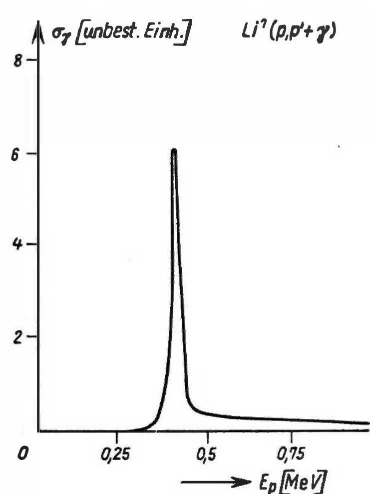


Abb. 76. Energieabhängigkeit der (p, γ)-Reaktion an Li in der Nähe der Resonanz bei 0,44 MeV (halbschematisch)

Der Wirkungsquerschnitt für den (p, γ)-Prozeß beträgt im Resonanzfall nach der Breit-Wigner-Formel, wenn neben dem (p,γ)-Prozeß nur noch elastische Streuung vorliegt (s. Gl. 33.1),

$$\sigma_\gamma(E_r) = \frac{2\pi \lambda\!\!\!^{-2}\, \Gamma_p \Gamma_\gamma}{(\Gamma_p + \Gamma_\gamma)^2} \left(\frac{2 I_C + 1}{2 I_A + 1}\right).$$

Gemessen wurde $\sigma_\gamma(E_r) \approx 7{,}2 \cdot 10^{-3}$ barn. Aus der elastischen $Li^7(p, p)$-Resonanzstreuung bei 440 keV, die zusammen mit der (p, γ)-Resonanz auftritt, findet man $\Gamma_p \approx 12$ keV. Der Spin des Li^7 beträgt $I_A = \frac{3}{2}$. Zur Abschätzung nehmen wir den Spin des Compoundkernes zu $I_C = 1$ an, was durch die beobachtete starke γ-Strahlung nahegelegt wird. Daraus ergibt sich eine γ-Breite des Be^8-Resonanzniveaus von $\Gamma_\gamma = 30$ eV. Diese ist so klein, daß die γ-Strahlung praktisch verschwinden müßte, wenn — wie von anderen Niveaus — auch hier ein α-Zerfall des Compoundkerns möglich wäre; denn die α-Breite, hätte die Größenordnung $\Gamma_\alpha \approx 1$ MeV (s. S. 184, die Li(p, α)-Reaktion), und es wäre $\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \approx 0$ zu erwarten, d. h., der Kern sollte längst in zwei α-Teilchen zerfallen sein, ehe ein γ-Quant emittiert ist. Die Existenz der starken γ-Strahlung zeigt also, daß ein α-Zerfall aus diesem Niveau offenbar „verboten" ist. Näheres hierüber s. §§ 43 und 44.

b) (p, n)-Prozesse

Die (p, n)-Prozesse an stabilen Kernen sind immer stark endotherm und setzen meist erst bei ≈ 2 MeV merklich ein. Die Endkerne sind bei stabilen Ausgangskernen nach einer der *Mattauchschen Isobaren-Regeln*, wonach zu einem stabilen Kern Z kein stabiles Isobar mit $Z \pm 1$ existiert, immer radioaktiv (Ausnahmen bilden Cd^{113} und Sb^{123} als Ausgangskerne).

---

[1]) Die Prüfung von (34.3) soll aber nicht an diesem Beispiel erfolgen, da andere Erfahrungen bei der Li-p-Reaktion auf p-Wellen deuten, für die (34.3) nicht genau zutrifft.

Während in seltenen Fällen Elektronenstrahler entstehen, wie bei $Ca^{48}(p, n)Sc^{48} \rightarrow \beta^-$, ergeben sich in der überwiegenden Mehrzahl Positronenstrahler und E-Fänger, welche sich somit in die Ausgangskerne zurückverwandeln. Die Schwellenenergie des (p, n)-Prozesses beträgt, wenn *E-Fänger* entstehen,

$E^E_{\text{Schw}} = 0{,}78$ MeV + Neutrinoenergie des E-Einfanges

und wenn β^+-*Strahler* entstehen,

$E^{\beta^+}_{\text{Schw}} = 1{,}80$ MeV + maximale β^+-Energie.

Sie ist also stets größer als 0,78 MeV (bei E-Fängern) bzw. 1,80 MeV (beim β^+-Strahler).

Nach Rückverwandlung des Endkerns in den Ausgangskern ist nämlich als Gesamtresultat ein p in ein n verwandelt, wozu 1,29 MeV verbraucht werden. Ferner wurde ein e^- vernichtet bzw. ein β^+ erzeugt, was $\mp 0{,}51$ MeV zur Schwellenenergie beisteuert. Schließlich ist noch die Neutrinoenergie beim E-Einfang bzw. die maximale kinetische Energie der β^+-Partikel (= Energie des β^+-Überganges) aufzubringen. Daraus ergeben sich die oben angegebenen Schwellenwerte.

(p, n)-*Reaktionen* mit künstlich beschleunigten Protonen sind oft benutzte und in vielen Fällen (dünne Targets vorausgesetzt) monoenergetische *Neutronenquellen.* Wegen der niedrigen Coulomb-Barriere werden leichte Kerne bevorzugt. Da die Reaktionen endotherm sind, erhält man Neutronen relativ kleiner Geschwindigkeit, wenn man die Protonenenergie nur wenig oberhalb der Schwelle wählt. Die Neutronenenergie im Laborsystem ist wegen der Schwerpunktsbewegung noch von der Emissionsrichtung abhängig. Ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit V_s größer als die Geschwindigkeit v_{ns} des emittierten Neutrons relativ zum Schwerpunkt, so findet man (im Laborsystem) die Neutronen nur in der Vorwärtsrichtung innerhalb eines gewissen Winkelbereiches und darin in jeder bestimmten Richtung zwei verschiedene Geschwindigkeiten. Im anderen Falle $V_s < v_{ns}$ sind alle Richtungen (im Laborsystem) möglich und eindeutig nur mit einer Geschwindigkeit vertreten (s. § 28).

Einige der viel untersuchten (p, n)-Reaktionen sind in Tabelle 26 aufgeführt.

Die Reaktion $D(p, n)\,2\,H^1$ ergibt wegen der schnellen Schwerpunktsbewegung sowie der Dreiteilung des Compoundkerns eine besonders starke Richtungsabhängigkeit und eine Unschärfe der Neutronenenergie.

Seitdem T^3 aus Kernreaktoren verfügbar geworden ist, hat man eine ausgezeichnete Neutronenquelle in der Reaktion

$$T^3(p, n)\,He^3; \qquad Q = -0{,}764 \text{ MeV}.$$

Das radioaktive T^3(β^--Strahler, $T_{1/2} \approx 12{,}4$ a) wird hierbei am besten in einer kleinen Gaskammer oder in Form eines geeigneten Metallhydrids, absorbiert im Targetmaterial (z. B. Zr) bestrahlt. Die emittierten Neutronen sind (im Schwerpunktssystem) energetisch homogen. Bei den Arbeiten mit dieser Quelle ist die intensive 20 MeV-γ-Strahlung aus der $T^3(p, \gamma)$-Reaktion zu beachten. Eine häufig benutzte Quelle für mittlere Neutronenenergien liefert die Reaktion

$$Li^7(p, n)\,Be^7; \qquad Q = -1{,}67 \text{ MeV}.$$

Tabelle 26. Eigenschaften einiger (p, n)-Reaktionen nach [SEGRÈ Bd. II]

Zielkern	Produkt	$E_{p,\,\mathrm{Schw}}$ [MeV] beobachtet	$-Q$ [MeV]	$E_{n,\,\min}$ [keV]	$E'_{n,\,\max}$ [keV] bei 0°	niedrigstes Niveau [MeV]
$_1D^2$	$2\,_1H^1$	3,339 ± 0,015	2,225	371	1979	
$_1T^3$	$_2He^3$	1,019 ± 0,001	0,764	63,7	286,5	>2,5
$_3Li^7$	$_4Be^7$	1,882 ± 0,002	1,646	29,4	120,1	0,435
$_4Be^9$	$_5B^9$	2,059 ± 0,002	1,852	20,6	83,4	>1,5
$_6C^{12}$	$_7N^{12}$	20,0 ± 0,1	18,5	118	477	
$_9F^{19}$	$_{10}Ne^{19}$	4,18 ± 0,25	3,97	10,5	42	
$_{19}K^{41}$	$_{20}Ca^{41}$	1,25 ± 0,02	1,22	0,7	2,8	1,95
$_{23}V^{51}$	$_{24}Cr^{51}$	1,562 ± 0,006	1,532	0,58	2,3	0,775
$_{25}Mn^{55}$	$_{26}Fe^{55}$	1,18 ± 0,01	1,16	0,38	1,5	

$E_{p,\mathrm{Schw}}$ = Energie der einfallenden Protonen an der Reaktionsschwelle (Schwellenenergie im Laborsystem). $E_{n,\,\min}$ = Neutronenenergie an der Reaktionsschwelle, verursacht durch die Schwerpunktsbewegung; $E'_{n,\,\max}$ = Neutronenenergie genau in der Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) in dem Fall, daß die im S-System rückwärts ($\vartheta = 180°$) emittierten Neutronen im Laborsystem die Geschwindigkeit Null haben.

Ihre Anregungskurve ist in Abb. 77 wiedergegeben. Die Neutronen sind im wesentlichen monoenergetisch, aber es ist auch eine schwache Gruppe von etwa 9 bis 10% langsamerer Neutronen vorhanden, die dem Übergang in das 435 keV-Niveau

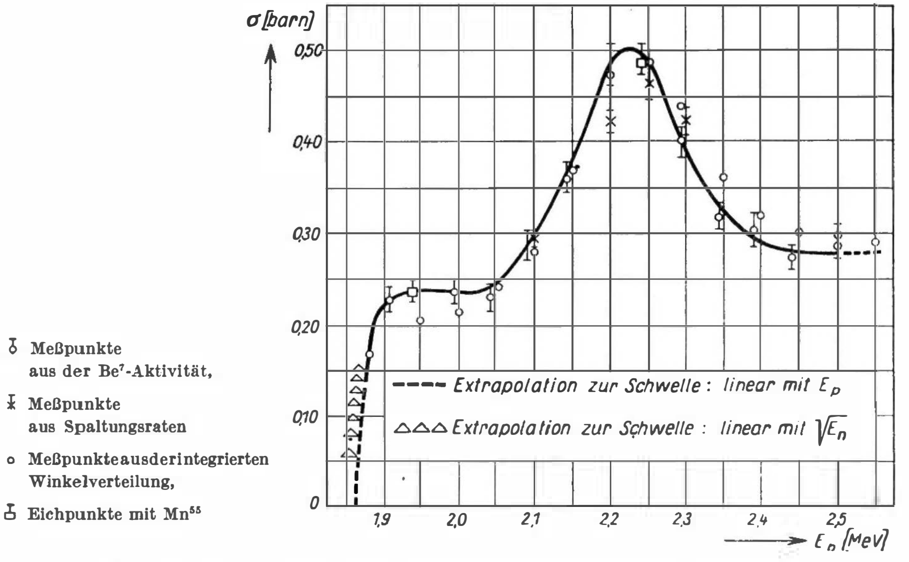


Abb. 77. Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Reaktion $Li^7\,(p, n)\,Be^7$

des Be^7 entspricht. Der Restkern Be^7 ist der leichteste E-Fänger und ist als solcher mehrfach zu einem der eindrucksvollsten Nachweise des Neutrinorückstoßes benutzt worden (s. § 43).
Die Reaktion $Be^9(p, n)B^9$ verhält sich sehr ähnlich wie die an Li^7, nur mit dem Unterschied, daß bis 1,5 MeV Protonenenergie keine niederenergetische Neutronengruppe auftritt. Die Ausbeute ist jedoch geringer als bei Li^7.
Will man in allen Raumwinkeln langsamere Neutronen im Bereich von ≈ 1 keV erhalten, so muß man schwerere Zielkerne nehmen, welche eine langsamere Schwerpunktsbewegung ausführen. Wegen ihrer günstigen Wirkungsquerschnitte wurden hierfür z. B. Sc, V und Mn eingehender untersucht.

c) (p, α)-Prozesse

Die (p, α)-Reaktionen sind an leichten Kernen wegen der niedrigen Coulomb-Barriere und der oft großen positiven Energietönung schon mit langsamen Protonen zu finden. Bei schweren Kernen überwiegt die Neutronenemission derart, daß α-Teilchen nur bei sehr hohen Protonenenergien austreten (s. § 61).
Die historisch erste Kernreaktion mit künstlich beschleunigten Teilchen erzielten 1932 Cockcroft und Walton an Li. Beide Li-Isotope führen zu (p, α)-Prozessen. Mit Li^7 ergibt sich

$$Li^7 + H^1 \dashrightarrow Be^{8*} \dashrightarrow 2\,\alpha, \quad Q = 17{,}2 \text{ MeV}.$$

Die Reaktion ist stark exotherm, und der Be^8-Zwischenkern zerfällt in zwei sehr schnelle α-Teilchen, welche bei kleinen Protonenenergien je 8,4 cm Reichweite in Luft unter Normalbedingungen aufweisen. Das sind 8,6 MeV pro Teilchen; der Q-Wert ist also 17,2 MeV. Diese ungewöhnlich große Energietönung bedingt eine sehr kurze Lebensdauer des Compoundniveaus und damit die flache „Resonanzkurve" der Reaktion mit etwa 1,2 MeV Halbwertsbreite und einem Maximum bei ≈ 3 MeV (s. Abb. 87, S. 206). Eine Wilson-Kammer-Aufnahme des Vorganges zeigt Abb. 78.

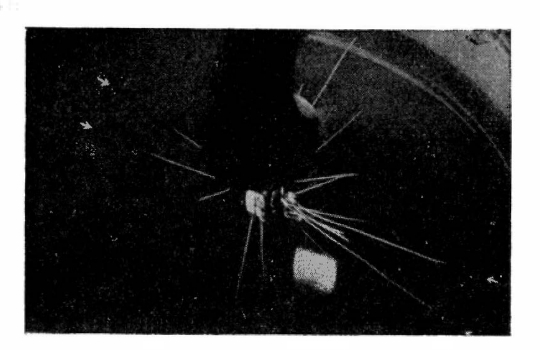


Abb. 78. Wilson-Kammer-Aufnahme der Reaktion $Li^7 + H^1 \rightarrow He^4 + He^4$.
Das Ende des Beschleunigungsrohres ragt von oben in die Wilson-Kammer hinein. Die entstehenden α-Strahlen fliegen durch dünne „Fenster" hindurch in das Kammergas. Zweimal zwei um 180° auseinanderstehende Pfeile weisen auf je zwei zusammengehörige α-Bahnen

Bemerkenswert ist, daß man die α-Teilchen schon bei ≈ 10 keV Protonengeschwindigkeit beobachten kann. Der Reaktionsquerschnitt erweist sich im Gebiet $E \lesssim 200$ keV proportional zu $\frac{1}{E}\,e^{-94/\sqrt{E}}$ (E in keV), was mit Gl. (34.3) für $z = 1$ und $Z = 3$ übereinstimmt.[1])

[1]) Auch hier sind aber, wie schon bei $Li^7(p, \gamma)Be^8$ bemerkt wurde, p-Wellen im Spiel, weswegen (34.3) hier nicht ohne weiteres anwendbar ist (s. hierzu § 44).

Bei der Reaktion mit Li^6 entsteht auch das leichte He-Isotop (He^3):

$$Li^6 + H^1 \rightarrow Be^{7*} \rightarrow He^4 + He^3.$$

Die beiden α-Teilchen haben in Luft (unter Normalbedingungen) bei kleinen Protonenenergien die Reichweiten 0,82 cm (He^4) und 1,19 cm (He^3). Ein Versuch mit natürlichem Li, welches 92% Li^7 und 8% Li^6 enthält, liefert daher (im Schwerpunktssystem gemessen) α-Strahlen von drei verschiedenen Energien.

Eine durch die Emission von *drei α-Teilchen* besonders bemerkenswerte Reaktion findet bei B^{11} statt. Es tritt eine *Dreiteilung* des Zwischenkerns C^{12} ein:

$$B^{11} + H^1 \rightarrow C^{12*} \rightarrow 3\,He^4;\quad Q \approx 8{,}6\,\text{MeV}.$$

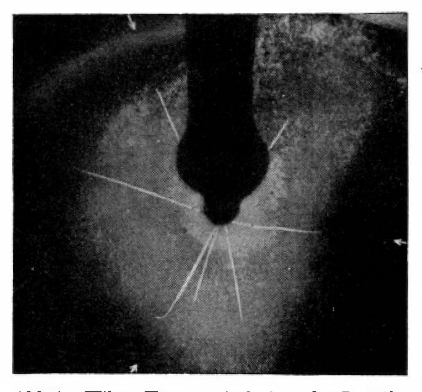


Abb. 79. Wilson-Kammer-Aufnahme der Reaktion $B^{11} + H^1 \rightarrow 3He^4$.
Die Pfeile am Rande kennzeichnen drei zusammengehörige α-Teilchen

In der Wilson-Kammer-Aufnahme der Abb. 79 sind die drei zusammengehörigen α-Teilchen durch Pfeile am Rande gekennzeichnet. Die Energieverteilung der α-Strahlen zeigt außer einer kontinuierlichen α-Gruppe eine quasidiskrete Gruppe um den Mittelwert 3,85 MeV (bei 0,2 MeV Protonenenergie) mit einer mittleren Streuung von $\approx 0{,}25$ MeV.

Bei *gleichzeitigem* Zerfall in *drei α-Teilchen* wäre eine solche Bevorzugung eines bestimmten Energiewertes nicht möglich; alle Energien unterhalb eines Maximums (bei kleinen p-Geschwindigkeiten maximal 5,7 cm Reichweite in Luft unter Normalbedingungen) müßten in statistischer Verteilung auftreten. Die beobachtete Verteilung deutet darauf hin, daß der Zerfall in zwei Schritten erfolgt: Zuerst emittiert das angeregte C^{12*} ein α-Teilchen und erst darauf zerfällt der angeregte Restkern Be^{8*} in zwei He^4:

$$C^{12*} \rightarrow He^4 + Be^{8*};\quad Be^{8*} \rightarrow 2\,He^4.$$

Die α-Teilchen vom ersten Zerfall ergeben die quasidiskrete Gruppe. Daß diese eine nicht völlig scharfe Energie zeigt, rührt — abgesehen von der Schwerpunktsbewegung des C^{12*} — offenbar davon her, daß entweder die Lebensdauer des Be^{8*}-Niveaus sehr klein ist oder daß der Zerfall auf mehrere dicht nebeneinander liegende nicht „aufgelöste" Niveaus führt. Die kinetische Energie des Be^{8*}-Kerns ist (für 0,2 MeV Protonenenergie) im Mittel die Hälfte von der der diskreten α-Gruppe, d. h. $\frac{1}{2} \cdot 3{,}85 \approx 1{,}9_2$ MeV; die Anregungsenergie des Be^{8*} beträgt also $8{,}8 - (3{,}85 + 1{,}9_2) \approx 3{,}0_3$ MeV. In der Tat hat, wie wir bei der $Li^7(p, \gamma)$-Reaktion schon bemerkten, Be^8 in der Nähe von 3 MeV ein unscharfes Niveau.

Die kontinuierliche α-Gruppe entsteht bei dem Zerfall des im Mittel mit $\approx 1{,}9$ MeV Geschwindigkeit fliegenden Be^{8*}-Kerns in zwei α-Teilchen. Die Überlagerung dieser letzteren, statistisch nach allen Richtungen erfolgenden Zerfallsbewegung mit der Schwerpunktsbewegung des Be^{8*} ergibt das Kontinuum.

§ 38. Kernreaktionen mit α-Teilchen

Wegen des hohen Coulomb-Walles lassen sich Kernprozesse nur mit schnellen α-Teilchen erzielen.
Mit den energiereichsten natürlichen α-Strahlen (8,8 MeV von ThC') kann man Kernreaktionen an allen leichten Elementen unterhalb Kalium ($Z = 19$; Potentialwall gegen α-Teilchen ≈ 11 MeV), außer an H und He, beobachten. α-Teilchen von Zyklotrons mit Energien um 30 MeV und mehr ergeben auch an den schwersten Elementen Umwandlungen mit guter Ausbeute, da der höchste vorkommende Potentialwall, etwa an U, rund 28 MeV beträgt.
Wenn ein α-Teilchen überhaupt zur Compoundbildung führt, ist bereits die Anregungsenergie praktisch stets so hoch, daß mit großer Wahrscheinlichkeit eine Teilchenemission erfolgt. Eine einfache direkte Absorption durch einen (α, γ)-Prozeß wird daher wenig beobachtet, wenngleich sie auch an leichten Kernen gelegentlich vorkommt wie im Falle $N^{14}(\alpha, \gamma) F^{18}$.

a) (α, n)-Prozesse

Die Entdeckung des Neutrons an der Reaktion

$$Be^9(\alpha, n) C^{12}, \qquad Q = 5{,}65 \text{ MeV},$$

wurde bereits eingangs erwähnt. Auch heute noch ist dieser Prozeß eine viel benutzte Neutronenquelle, die durch Mischung von Be-Pulver mit einem Ra- oder Po-Salz hergestellt wird. Wegen der im Vergleich zu Ra sehr viel geringeren Störung durch γ-Strahlen ist die Po-Quelle für viele Zwecke geeigneter. Allerdings ist ihre kurze Halbwertsdauer von nur 138 Tagen ein empfindlicher Nachteil.
Die Endkerne aus (α, n)-Prozessen sind — abgesehen von den schwersten Kernen — meist Positronen-Strahler, was auch zu erwarten ist, weil sie aus stabilen Kernen durch Aufnahme von relativ zu vielen Protonen (2 Protonen gegen 1 Neutron) entstehen.
So wurde z. B. die künstliche Radioaktivität an der Positronenemission der Endkerne von (α, n)-Prozessen entdeckt (F. Joliot und I. Curie, 1934). Es waren dies die Reaktionen

$$\begin{aligned} &B^{10}(\alpha, n) N^{13}; && N^{13}(\beta^+;\ 10 \text{ min}) \rightarrow C^{13},\\ &Mg^{24}(\alpha, n) Si^{27}; && Si^{27}(\beta^+;\ 5 \text{ sec}) \rightarrow Al^{27},\\ &Al^{27}(\alpha, n) P^{30}; && P^{30}(\beta^+;\ 2{,}2 \text{ min}) \rightarrow Si^{30}. \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel ist die mit dem bekannten $N(\alpha, p)$-Prozeß von Rutherford parallel laufende Reaktion

$$N^{14}(\alpha, n) F^{17}; \quad F^{17}(\beta^+;\ 1{,}2 \text{ min}) \rightarrow O^{17}.$$

Mit hinreichend schnellen Zyklotron-α-Strahlen kommen neben (α, n)-Prozessen auch $(\alpha, 2n)$- und $(\alpha, 3n)$-Prozesse usw. vor (s. S. 136, Abb. 66).

Mittels solcher Reaktionen wurden u. a. das Element Astatin, $_{85}$At, und die Transurane Am, Cm, Bk, Cf erstmalig hergestellt.

1. Das At erhielt man über $_{83}Bi^{209}(\alpha, 3n)_{85}At^{210}$ mit 29 MeV-α-Strahlen. (At^{210} ist das langlebigste At-Isotop. Es geht mit 8,3 h Halbwertszeit durch *E*-Einfang in $_{84}Po^{210}$ über.)

Die oben genannten Transurane wurden mit 35 bis 40 MeV-α-Strahlen über die folgenden Reaktionen gewonnen:

2. $_{92}U^{238}(\alpha, n)\,_{94}Pu^{241} \xrightarrow[12\,a]{\beta^-} {}_{95}Am^{241} \xrightarrow[458\,a]{\alpha}$,

3. $_{94}Pu^{239}(\alpha, n)\,_{96}Cm^{242} \xrightarrow[150\,d]{\alpha}$,

4. $_{95}Am^{241}(\alpha, n)\,_{97}Bk^{244} \xrightarrow[4{,}4\,h]{\alpha}$,

5. $_{96}Cm^{242}(\alpha, 2n)\,_{98}Cf^{244} \xrightarrow[25\,min]{\alpha}$.

Ebenso wurde das Element $_{101}$Md durch Beschuß von $_{99}$Es mit 41 MeV-α-Strahlen erhalten.

b) (α, p)-Prozesse

Die Pionierreaktion Rutherfords vom Jahre 1919,

$$N^{14}(\alpha, p)\,O^{17},$$

wurde bereits mehrfach erwähnt (s. S. 97). In der Wilson-Kammer-Aufnahme der Abbildung 80 bildet die Spur des Protons einen stumpfen Winkel zur Flugrichtung des α-Teilchens. Schon daraus ist zu erkennen, daß es sich nicht um einen gewöhnlichen Zusammenstoß handelt. Über ein Jahrzehnt lang waren die (α, p)-Prozesse, welche man anschließend an fast allen Elementen unterhalb Ca (außer an H, He, Li, Be, C und O) feststellte, die einzigen bekannten Kernreaktionen.



Abb. 80. Wilson-Kammer-Aufnahme der Reaktion $N^{14}(\alpha, p)O^{17}$

Unter diesen fand H. Pose 1929 [P 30-1] an der Reaktion

$$Al^{27} + He^4 \rightarrow P^{31*} \rightarrow Si^{30} + H^1$$

erstmalig eine *Resonanzerscheinung* bei einem Kernprozeß.

Nach späteren Messungen werden sechs α-Resonanzenergien beobachtet. Zu jeder α-Energie zeigen sich 4 Protonengruppen, die offenbar Übergängen nach 4 niedrigeren Niveaus des Restkerns Si^{30} entsprechen. Zum Beispiel findet man für die niedrigste α-Resonanz die Protonenenergien 9,34; 6,98; 5,5 und 4,2 bis 4,65 MeV. Die erste (energiereichste) Gruppe führt zum Grundzustand, die anderen zu angeregten Zuständen des Si^{30}, aus denen der Endkern anschließend durch γ-Strahlung in seinen Grundzustand übergeht. Bei diesen Gruppen kann man daher auch eine p-γ-Koinzidenz beobachten, nicht dagegen bei der ersten Gruppe.

c) (α, α')-Prozesse

Unelastische Stöße von α-Teilchen können immer auftreten, sobald die Energie der Relativbewegung die niedrigste Anregungsenergie des Zielkerns übersteigt. Dieser strahlt dann die aufgenommene Energie als γ-Quant aus. Ein solcher Prozeß wurde erstmalig 1930 von BOTHE und BECKER an der $Be^9(\alpha;\ \alpha' + \gamma)$-Reaktion entdeckt. Sie war die erste Kernreaktion, welche aus dem Rahmen der bis dahin bekannten (α, p)-Prozesse hinausführte und gab schließlich den Anstoß zur Entdeckung des Neutrons, das zugleich mit der γ-Strahlung durch die parallel laufende $Be(\alpha, n)$-Reaktion entsteht.

§ 39. Kernreaktionen mit Deuteronen

Das *Deuteron* zeigt bei Kernreaktionen besonders auffällige Wirkungen. Die Ursachen dafür sind

1. seine auffallend kleine Bindungsenergie von nur 2,25 MeV und

2. seine sehr ausgedehnte Struktur: Der mittlere Abstand zwischen Proton und Neutron beträgt $4{,}3 \cdot 10^{-13}$ cm (!), während die mittlere Reichweite der Kernkräfte etwa halb so groß ist.

Da die beim Einfang eines freien Nukleons auftretende Bindungsenergie rd. 6 bis 8 MeV beträgt, führt der Einfang eines Deuterons zur Anregung des Compoundkerns mit etwa 10 bis 14 MeV, was heftige Reaktionen verursacht. Vergleichsweise liefert ein α-Teilchen — wegen seiner starken Eigenbindung von 28 MeV — bei leichten und mittelschweren Kernen nur eine schwache Anlagerungsenergie. Bei den schwersten, α-instabilen Kernen wird diese sogar negativ.
Wegen der großen Anlagerungsenergie sind (d, γ)-Prozesse sehr unwahrscheinlich; es kommt fast stets eher zu einer Teilchenemission.

a) (d, n)-Reaktionen bei kleinen Energien

Die (d, n)-Reaktionen sind viel benutzte Neutronenquellen, deren Ergiebigkeit die der entsprechenden (p, n)-Prozesse weit übertrifft. Die wohl meistgebrauchte Quelle monoenergetischer Neutronen liefert die D-D-*Reaktion*

$$D^2(d, n)He^3; \quad Q = 3{,}28 \text{ MeV}.$$

Die Reaktionsenergie von 3,28 MeV erteilt schon bei den kleinsten Geschwindigkeiten der d-Teilchen den Neutronen eine Energie von 2,4 MeV (im Schwerpunktssystem). Ihre Richtungsabhängigkeit im Laborsystem wurde bereits in § 28, S. 117, besprochen.

Eine noch wesentlich bessere Quelle liefert der D-T-*Prozeß*:

$$T^3(d, n)\,He^4; \quad Q = 17{,}6\ \text{MeV}.$$

Man erhält homogene Neutronen, je nach d-Energie ab 14,1 MeV (im Schwerpunktssystem). Zur Bestrahlung wird zweckmäßig eine T^3-Gas-Kammer oder ein mit T^3-beladenes Metall verwendet (s. auch § 37, (p, n)-Prozesse). Der Wirkungsquerschnitt der D-T-Reaktion erreicht im Bereich $\lessapprox$ 100 keV rund das 220- bis 260fache des vom D-D-Prozeß.

Eine Quelle monoenergetischer Neutronen mit einer Energie zwischen denen der vorgenannten Reaktionen hat man in

$$N^{14}(d, n)\,O^{15}; \quad Q = 5{,}1\ \text{MeV}.$$

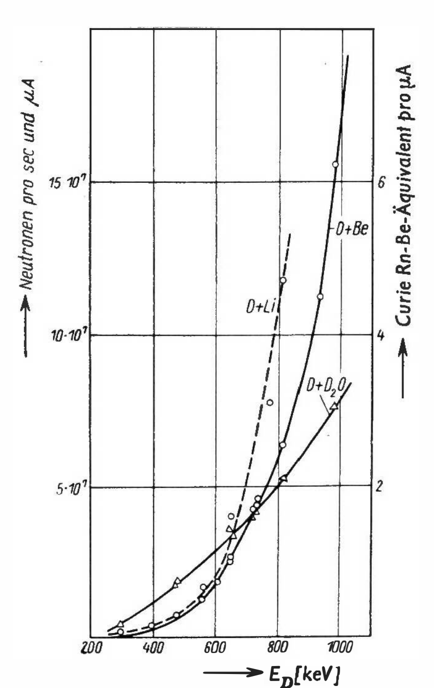
Nachteilig ist allerdings der kleine Wirkungsquerschnitt. Dagegen erhält man gute Ausbeuten bei den Reaktionen

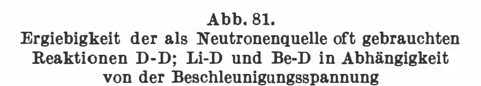
$$Li^7(d, n)\,2\,He^4; \quad Q = 14{,}5\ \text{MeV},$$

$$Be^9(d, n)\,B^{10}; \quad Q = 4{,}2\ \text{MeV}.$$

Die Neutronenenergien sind hier aber *nicht homogen*. Bei Li^7 liegt dies offenbar an der Kurzlebigkeit des bei der Neutronenemission entstehenden Be^{8*}, welches dann in $\approx 10^{-21}$ sec in 2 He^4 zerfällt. Das entspricht dem „verwaschenen" Niveau des Be^{8*} bei ≈ 3 MeV (s. auch S. 185). – Im Falle des Be^9 sind bei der Neutronenemission mehrere Endniveaus des B^{10} im Spiel.

In Abb. 81 sind die Neutronenausbeuten bei den Reaktionen D (d,n); Li (d, n) und Be (d, n) als Funktionen der primären Deuteronen-Energie dargestellt. Die Reihenfolge des Anstiegs der Wirkungsquerschnitte bei kleinen Energien entspricht der Verringerung der Durchlässigkeit des Coulomb-Walles mit steigender Ladung des Zielkerns.




Abb. 81.
Ergiebigkeit der als Neutronenquelle oft gebrauchten Reaktionen D-D; Li-D und Be-D in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung

b) (d, p)-Prozesse bei kleinen Energien

Die Reaktion $$D(d, p)\,T^3; \quad Q = 4{,}0\ \text{MeV}$$

und der oben genannte (d, n)-Prozeß wurden zuerst 1934 von OLIPHANT, HARTECK und RUTHERFORD beobachtet und erregten besonderes Interesse durch die Tatsache, daß sie bereits bei ungewöhnlich kleinen Spannungen auftreten. So konnte man schon bei 5000 Volt eine Kernreaktion beobachten (DÖPEL). Abb. 82 zeigt eine Wilson-Kammer-Aufnahme der H^1- und T^3-Bahnen aus der $D(d,p)$-Reaktion. Die Reichweite des Protons beträgt (bei $E \ll Q$) bezogen auf Luft unter Normalbedingungen 14,3 cm (3,0 MeV), die des Tritons 1,6 cm (1,0 MeV).

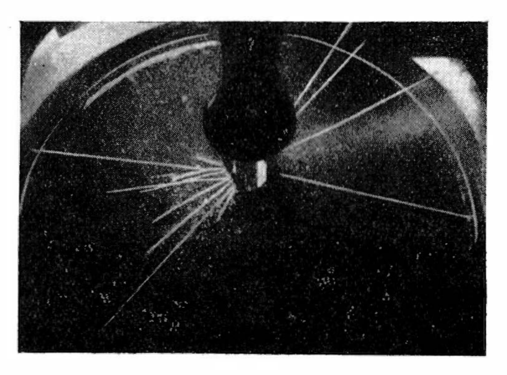


Abb. 82.
Wilson-Kammer-Aufnahme der Reaktion $D^2 + D^2 \to H^1 + T^3$. Anordnung wie bei Abb. 78. Die langen Nebelspuren stammen von H^1-Teilchen, die kurzen von T^3-Partikeln. Je zwei zusammengehörige Spuren gehen um 180° auseinander

Ähnlich verläuft die Reaktion

$$He^3(d, p)He^4,$$

deren Wirkungsquerschnitt wir im folgenden zusammen mit denen der oben genannten (d, n)-Prozesse genauer betrachten wollen.

c) Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

Der Verlauf des Wirkungsquerschnitts mit der Energie läßt sich durch Gl. (34.8) bzw. durch die später (§ 73) angegebene wellenmechanische Theorie darstellen. Für unsere kleinen Energien sind Reaktionen bei zentralem Stoß (s-Wellen) weitaus am wahrscheinlichsten. Nach (34.8) gilt hier (wir schreiben E für E_a und B für B_a)

$$\sigma = \frac{F_2}{E}\, e^{-\frac{B}{\sqrt{E}}}\, e^{-\frac{B_b}{\sqrt{E_b}}}. \tag{39.1}$$

Wenn wir die Energien in keV messen, ist zu setzen

$$B = 31{,}4\, zZ\sqrt{\bar{a}}\,[\text{keV}]^{1/2}. \tag{39.2}$$

Für den Fall des ruhenden Zielkerns bezeichnet $\bar{a}$ die Massenzahl a (genauer, das relative Atomgewicht) der Geschoßpartikel und E deren Energie im Laborsystem. Bewegen sich beide Partikel, so bedeutet E die Energie der Relativbewegung, $\bar{a}$ die reduzierte Massenzahl von Geschoß und Zielkern a_{red}, und F_2 multipliziert sich mit $\frac{a_{\text{red}}}{a}$. Eine entsprechende Gleichung wie (39.2) gilt auch für B_b. Die Energie E_b des auslaufenden Teilchens ist in allen hier betrachteten Fällen praktisch allein durch den großen Q-Wert der Reaktion bestimmt und hängt nur ganz geringfügig

von der Primärenergie E ab. Das gleiche gilt daher für den Faktor $\exp\left(-\frac{B_b}{\sqrt{E_b}}\right)$. Für den Wirkungsquerschnitt ist also mit Zusammenfassung aller von E praktisch unabhängigen Faktoren in

$$C_1 = F_2 \exp\left(-\frac{B_b}{\sqrt{E_b}}\right)$$

zu erwarten:

$$\sigma = \frac{C_1}{E} e^{-\frac{B}{\sqrt{E}}} \qquad (39.3)$$

oder, anders geschrieben,

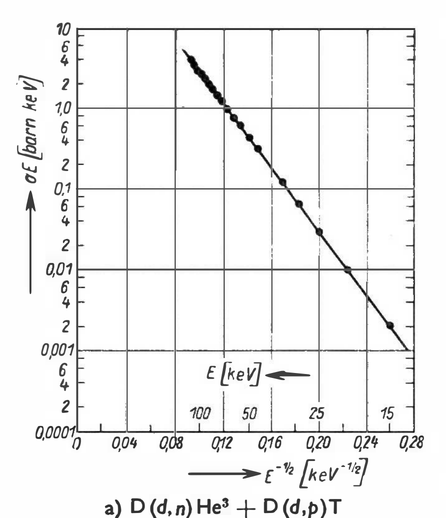
$$\ln(\sigma E) = \ln C_1 - \frac{B}{\sqrt{E}}. \qquad (39.4)$$

In den Abbn. 83a bis c sind für die Reaktionen

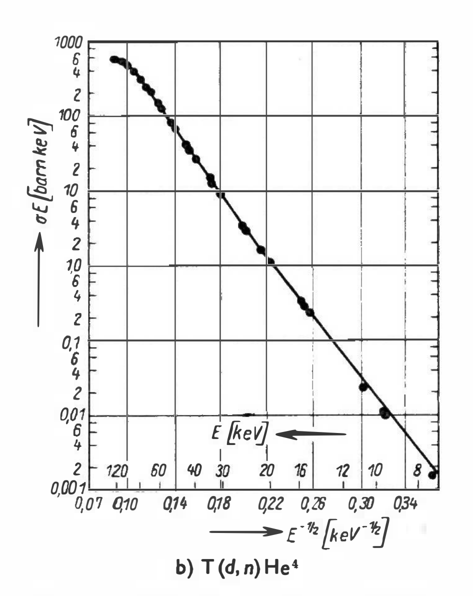
$$D(d, n)He^3 + D(d, p)T,$$

$$T(d, n)He^4 \quad \text{und} \quad He^3(d, p)\,He^4$$

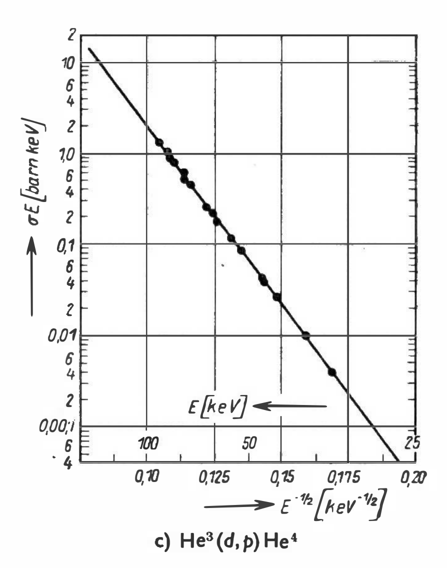
nach neueren Meßdaten [A 54-1] $\ln(\sigma E)$ gegen $\frac{1}{\sqrt{E}}$ aufgetragen.



a) $D(d, n)He^3 + D(d, p)T$



b) $T(d, n)He^4$



c) $He^3(d, p)He^4$

Abb. 83. Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von a) D an D, b) D an T und c) D an He³ bei kleinen D-Energien *E* (im Laborsystem)

Die durchgezogenen geraden Linien entsprechen

$$\sigma = \frac{288}{E} \exp(-45{,}8 E^{-1/2}) \quad \text{für} \quad \mathrm{D}(d, n)\,\mathrm{He}^3 + \mathrm{D}(d, p)\,\mathrm{T}, \tag{39.5}$$

$$\sigma = \frac{2{,}75 \cdot 10^4}{E} \exp(-44{,}4 E^{-1/2}) \quad \text{für} \quad \mathrm{T}(d, n)\,\mathrm{He}^4, \tag{39.6}$$

worin σ in barn und E in keV (gemessen im Laborsystem) einzusetzen sind. Bei der D-D-Reaktion ist mit σ die Summe der Wirkungsquerschnitte der beiden Prozesse $\mathrm{D}(d, n)\mathrm{He}^3$ und $\mathrm{D}(d, p)\mathrm{T}$ gemeint. Beide kommen praktisch gleich häufig vor: Das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte steigt nämlich linear mit E von $\sigma(d, n) : \sigma(d, p) = 0{,}94$ (bei 20 keV) nur bis 0,99 (bei 100 keV) an. Gleichung (39.2) liefert für die beiden Reaktionen (39.5) und (39.6) $B = 31{,}4\,\sqrt{2} = 44{,}4\,(\mathrm{keV})^{1/2}$, was in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten 45,8 und 44,4 $(\mathrm{keV})^{1/2}$ steht. Die Neigung der Kurve für die $\mathrm{He}^3(d, p)$-Reaktion sollte nach (39.2) dem Wert $B = 31{,}4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 88{,}8\,(\mathrm{keV})^{1/2}$ entsprechen. Experimentell fand sich 91,0 $(\mathrm{keV})^{1/2}$. Alle drei Reaktionen ergeben also eine ausgezeichnete Bestätigung der Theorie des Tunneleffektes. Die kleinen Abweichungen liegen im Sinne der genaueren Gleichung (39.1), welche wegen des Faktors mit E_b einen mit wachsendem E etwas stärkeren Anstieg von σ erwarten läßt als (39.3).

d) D-Reaktionen bei größeren Energien, $(d, 2n)$-Prozesse

Wegen der großen Anlagerungsenergie treten bei Reaktionen mit Deuteronen leicht $(d, 2n)$-Prozesse auf. Die erstmalige Erzeugung des Elementes $_{94}\mathrm{Pu}$ erfolgte auf dem Wege einer solchen Reaktion an U^{238} über das Np^{238}:

$$_{92}\mathrm{U}^{238}\,(d, 2n)\ _{93}\mathrm{Np}^{238} \xrightarrow[2{,}1\,\mathrm{d}]{\beta^-} {}_{94}\mathrm{Pu}^{238} \xrightarrow[86{,}4\,\mathrm{a}]{\alpha} {}_{92}\mathrm{U}^{234} \ldots .$$

Mit Zyklotron-d-Strahlen erhielt man 1940 in den USA erstmals einige μg Pu^{238}, mit denen die damals für den Bau der Pu-Trennanlagen dringend benötigten chemischen Eigenschaften des neuen Elementes erforscht wurden.

e) Oppenheimer-Phillips-Prozesse und Stripping-Reaktionen

Bei den bisher betrachteten D-Reaktionen kann man an der Bohrschen Vorstellung festhalten, daß das Deuteron als Ganzes mit dem Zielkern zu einem Compoundkern verschmilzt und daß erst aus diesem ein Neutron oder ein Proton ausgesandt wird. Die einzige Besonderheit lag allein in der hohen Reaktionsenergie. Die Compoundkernresonanzen mit D an leichteren Zielkernen bestätigen in der Tat auch diese übliche Compoundvorstellung.

D-Prozesse an schweren Kernen bieten dagegen Erscheinungen, die im *Widerspruch zum Compoundmodell* stehen: Abb. 84 zeigt als ein solches Beispiel den Wirkungsquerschnitt der (d, p)- und der (d, n)-Reaktion an $_{79}\mathrm{Au}^{197}$ in Abhängigkeit von der Energie.

Zwei Widersprüche zur Compoundbildung sind zu erkennen:

1. Der entscheidende Gamow-Faktor für die einlaufenden Deuteronen lautet hier (mit E in keV) $\exp \frac{-3500}{E^{1/2}}$ und ist z. B. bei 6000 keV gleich $10^{-19,6}$. Es sollte also selbst bei $E = 6$ MeV kaum ein (d, p)- oder (d, n)-Prozeß zu beobachten sein.

2. Noch bei 8 MeV sind die emittierten *Protonen* 20mal *häufiger als Neutronen*, und bei kleineren Energien ist das Verhältnis noch extremer. Das ist das genaue Gegenteil dessen, was die Compoundvorstellung erwarten läßt. Denn bei einem so schweren Kern müßte die Neutronenemission weit überwiegen, da die Coulomb-Barriere die Protonen am Auslaufen praktisch vollständig hindert, wie man aus (39.1) mit (39.2) leicht nachrechnet.

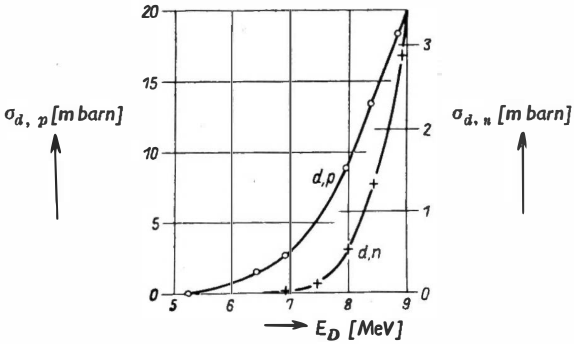


Abb. 84. Vergleich der Anregungsfunktion von (d, p)-Reaktionen mit der von (d, n)-Prozessen an schweren Kernen am Beispiel Au^{197}

Nach OPPENHEIMER und PHILLIPS ist der Vorgang – analog zur Ionisation von Atomen in starken elektrischen Feldern — dadurch zu verstehen, daß das *Deuteron* wegen seiner kleinen inneren Bindungsenergie und seiner ausgedehnten Struktur schon im elektrischen Felde des Zielkerns zerfällt, längst bevor es dessen Oberfläche erreicht. In diesem Falle kann nämlich das Neutron unbehindert vom Coulomb-Wall den Kern erreichen, während das Proton – durch die Kernladung abgestoßen – mit großer Wahrscheinlichkeit am Kern vorbeifliegen wird. Das Überwiegen der (d, p)-Prozesse gegenüber den (d, n)-Prozessen wird damit verständlich. Und ebenso ist die auffallende Häufigkeit der (d, p)Prozesse erklärt, denn das Deuteron braucht hierbei nicht die gesamte Breite des „Gamow-Berges" zu „durchtunneln", sondern nur einen Teil desselben.

Die Deuteron-Bindung wird in einem elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ wegen der Trägheit des Neutrons mit einer Kraft $\frac{1}{2} e \mathfrak{E}$ auf Zerreißen belastet. Der mittlere Abstand der Nukleonen des Deuterons beträgt $\bar{r} \approx 4{,}3 \cdot 10^{-13}$ cm. Zweifellos wird das Deuteron (evt. durch Tunneleffekt) dissoziieren, wenn die durch die Coulomb- und die Trägheitskräfte bewirkte Erniedrigung des Potentials der Bindungskräfte bei mittlerem Proton-Neutron-Abstand $\bar{r}$ etwa die Größe der normalen Bindungsenergie erreicht; sobald also $\frac{1}{2} e \mathfrak{E} \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-13} \approx$ Bindungsenergie $= 2 \cdot 10^6$ eV wird, d. h. bei $\mathfrak{E} \approx 10^{19}$ Volt/cm. Die Feldstärke an der Kernoberfläche

beträgt $\mathfrak{E}_{0\,b} \approx 7 \cdot 10^{18} \frac{Z}{A^{2/3}}$ [Volt/cm], bei $_{79}Au^{197}$ also $\mathfrak{E}_{0\,b} \approx 1{,}6 \cdot 10^{19}$ Volt/cm. Wenn man hinzunimmt, daß der Proton-Neutron-Abstand mit 50% Wahrscheinlichkeit größer als $4{,}3 \cdot 10^{-13}$ cm ist, wird das noch vor Erreichen des Zielkerns erfolgende Dissoziieren des Deuterons recht plausibel.

Auch wenn das elektrische Feld allein nicht zu einer Zerreißung führt, so wird es das hantelförmige Deuteron doch so ausrichten, daß es vorwiegend mit dem Neutron zuerst die Kernoberfläche trifft oder streift. In diesem Fall kann die eigentliche Kernkraft das Neutron „abreißen", während ihr Einfluß auf das $\approx 4 \cdot 10^{-13}$ cm entferntere Proton gering bleibt. Mit dieser Vorstellung stimmt die Tatsache überein, daß die emittierten Teilchen eine bevorzugte Vorwärtsstreuung aufweisen, was wiederum mit dem Compoundmodell nicht zu vereinen ist.
Diese Vorwärtsstreuung tritt besonders deutlich bei großen Geschwindigkeiten der Deuteronen hervor, wenn weder die Kernkräfte noch (bei Protonen) das Coulomb-Feld das nicht eingefangene Nukleon wesentlich aus seiner geraden Trägheitsbahn ablenkt. Dann wird nämlich dasjenige Nukleon, welches beim Vorbeiflug des Deuterons den Zielkern trifft oder streift, von diesem eingefangen, das in diesem Augenblick vom Zielkern weiter entfernte andere Nukleon wird dagegen fast ungestört in seiner alten Richtung weiterfliegen. Bei diesem als „*Deuteron stripping*" bezeichneten Prozeß treten Neutronen und Protonen gleich häufig als gestreute Teilchen auf, weil bei diesen Energien die Protonen nicht mehr selektiv durch den Coulomb-Wall aufgehalten werden. Besonders einfach lassen sich die „Stripping"-Neutronen beobachten, da sie nicht durch Kammerwände und dgl. abgebremst werden.
Richtet man z.B. einen 190 MeV-Deuteronenstrahl auf ein schweres Target (bei 190 MeV entstehen noch keine Mesonen), so findet man einen scharf vorwärts gebündelten schmalen Neutronenstrahl mit einem halben Öffnungswinkel von etwa 6°, wie er zuerst mit dem Synchrozyklotron in Berkeley beobachtet wurde. Diese Streuung ist gerade so groß, wie man sie erwarten sollte, wenn durch einen Stripping-Prozeß das Proton *plötzlich* durch den Zielkern weggefangen würde, ohne dabei die Bewegung des Neutrons zu stören [S47-1].
Wir machen dazu folgende einfache Abschätzung: Im Moment des Proton-Einfangs ist der Ort des Neutrons durch die Deuteron-Eigenfunktion Ψ_D gegeben. Da sich das Neutron im Deuteron zum größeren Teil außerhalb der mittleren Reichweite der Kernkräfte (außerhalb des Potentialtopfes) befindet, kann man $\Psi_D \approx \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{r} e^{-\alpha r}$ setzen. Darin ist $\alpha = (M\mathcal{E})^{1/2}\,\hbar^{-1}$, wo M die Masse eines Nukleons und $\mathcal{E} = 2{,}2$ MeV die Bindungsenergie des Deuterons bedeuten. Der Neutronenort ist damit auf $\Delta x \approx \frac{1}{\alpha}$ definiert. Stellt man diese Ortsverteilung durch ein Wellenpaket dar, so kommen darin gemäß der Unbestimmtheitsbeziehung von Heisenberg im Mittel Impulse der Größenordnung $p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} = \hbar\alpha = (M\mathcal{E})^{1/2}$ vor, die von der Nullpunktsbewegung des Neutrons im Verbande des Deuterons herrühren. Diese Impulse p überlagern sich vektoriell dem Translationsimpuls p_0

des Neutrons, den es durch die Deuteronenbewegung mit der Energie E_D (= 190 MeV) besitzt. Es ist $p_0 = (M E_D)^{1/2}$. Die *seitliche Winkelstreuung* wird daher etwa $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\mathcal{E}}{E_D}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{190}\right)^{1/2}$, d.i. rund 6°, betragen, was dem beobachteten Wert entspricht.

In der Vorwärtsrichtung setzt sich der resultierende Impuls zu $p_0 \pm p$ zusammen, und daraus ergibt sich für die Energie der „Stripping-Neutronen"

$$E\,(\text{Neutron}) = \tfrac{1}{2}\,(E_D^{1/2} \pm \mathcal{E}^{1/2})^2 \approx 90 \pm 20\,\text{MeV}.$$

Es entsteht also eine Energiestreuung um ± 20 MeV, die ebenfalls beobachtet werden konnte. Der Stripping-Prozeß ist ersichtlich ein ausgezeichnetes Mittel zur Erzeugung extrem schneller Neutronen relativ guter Homogenität.

Im Bereich niedriger Energien von einigen bis etwa 50 MeV geben die Strippingprozesse bei Ausmessung der Winkelverteilung der emittierten Teilchen ein viel benutztes Verfahren zur Bestimmung der Quantenzahlen der Kernniveaus, worauf zum Schluß hingewiesen sei (vgl. Kap. IX, § 113).

f) Inverse Stripping-Reaktionen oder „pickup-Prozesse"

Nach dem Prinzip der Reziprozität müssen auch inverse Stripping-Reaktionen – sog. „pickup-Prozesse" – vorkommen. Zwei Beispiele seien angeführt: Läßt man Neutronen von etwa 90 MeV auf C, Cu oder Pb auftreffen, so beobachtet man *in Vorwärtsrichtung* herauskommende Protonen, Deuteronen und in geringer Zahl auch Tritonen [H 50-2]. Die D-Ausbeute ist sehr viel größer, als man es nach der „Monte-Carlo-Methode" oder nach der Verdampfungstheorie erwarten sollte. Außerdem müßte bei einer Kernverdampfung die Richtungsverteilung isotrop sein, während in Wirklichkeit 50% der Deuteronen im Winkelbereich nach vorn zwischen 0 und 25° und 80% innerhalb 45° emittiert werden.

Dieser (n, d)-Austauschvorgang läßt sich als inverse Stripping-Reaktion verstehen [C 50-1]: Ein den Kern oder dessen Randgebiet durchquerendes Neutron vereinigt sich mit einem Kern-Proton *passender Geschwindigkeit* und fliegt als Deuteron weiter. Hierbei macht sich die innere Impulsverteilung der Kernnukleonen (s. § 57, Fermigas-Modell) entscheidend bemerkbar, denn die Deuteronbildung wird nur mit einem Kern-Proton möglich sein, welches zum äußeren Neutron nur eine kleine Relativgeschwindigkeit aufweist.

Ganz analoge „pickup-Reaktionen" mit Protonen, (p, d)-Prozesse, wurden am He, Be, C, Al, Si, Cu und Pb beobachtet [S 57-1]. Die oben angegebene Deutung bewährte sich auch hier quantitativ.

§ 40. Kernreaktionen mit „schweren Ionen"

Kernreaktionen mit schweren Ionen, wie die von N^{14} oder O^{16}, haben gegenüber den Reaktionen mit H-, D- und He-Kernen oder mit Neutronen einige Besonderheiten:

1. Man erhält einen Endkern, der gleich um sehr viele Masseneinheiten schwerer ist als der Anfangskern, wodurch sich diese Prozesse besonders zur Herstellung von Transuranen eignen.

2. Der Compoundkern wird sehr stark angeregt. Das Spektrum der emittierten Teilchen wird wenigstens bei schweren Kernen mehr der statistischen Verdampfungstheorie entsprechen, als bei *p*- oder *d*-Reaktionen gleich hoher Energie, denn die Gleichverteilung der Energie im Compoundkern wird bei Beschuß mit schweren Teilchen von vornherein wahrscheinlicher sein.

3. Bei Beschuß *schwerer Elemente* entstehen vorwiegend Kerne mit Neutronendefizit, und zwar aus zwei Gründen:

Erstens bringen die Geschoßteilchen Neutronen und Protonen im Verhältnis $\approx 1:1$ mit, während für ein stabiles Endprodukt das Verhältnis $\approx 1{,}5:1$ sein müßte.

Zweitens verdampfen im Mittel mehr Neutronen als Protonen. Dadurch lassen sich oft auf anderem Wege nicht erreichbare Kerne mit Protonenüberschuß herstellen.

4. Ein Teil der Reaktionen kann so erfolgen, daß sich nicht ein Compoundkern aus den beiden vollständigen Kernen bildet, sondern – durch einen „Streifschuß" – nur aus Bruchstücken derselben. Im Extremfall wird dabei vielleicht nur ein einzelnes Nukleon von einem Kern zum anderen hinüberwechseln wie beim Stripping-Prozeß mit Deuteronen.

Die Coulomb-Barriere der Reaktionen beträgt $\frac{1{,}0 \cdot Z_1 Z_2}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}}$ [MeV], wo die Indizes 1 und 2 sich auf Geschoß- und Zielkern beziehen. Da diese Energie im Schwerpunktssystem aufgebracht werden muß, erhöht sich die notwendige Energie des Geschoßkernes um den Faktor $1 + \frac{A_1}{A_2}$. Umgerechnet pro Nukleon des Geschoßkerns ist die erforderliche Energie etwa ebenso groß wie bei *d*- oder α-Teilchen, eher etwas geringer.

Die erste bekannt gewordene Kernreaktion mit schweren Ionen wurde mit C^{12}-Ionen an Au erzielt: Au^{197} (C^{12}, 4 *n*) At^{205}, [M 50-1]. Die hierbei verwendeten 70 MeV-Ionen wurden im Zyklotron beschleunigt und auf ein Innentarget aus Au geschossen.

Auf gleiche Weise lassen sich auch Transuranelemente erzeugen. So wurden z.B. Cf-Isotope über U^{238}(C^{12}, 6*n*) Cf^{244} und U^{238}(C^{12}, 4*n*) Cf^{246}, [G 51-1], ferner Isotope des Elements 99, Fermium, mit $(N^{14})^{6+}$-Ionen, [G 54-1] und [G 54-2], sowie Isotope des Elements 100, Einsteinium, mit $(O^{16})^{6+}$-Ionen erhalten, [A 54-1]. Bei diesen schwersten Kernen wird durch Kernspaltung die Ausbeute allerdings schon empfindlich verkleinert.

Auch an leichten und mittelschweren Kernen hat man verschiedene Reaktionen mit schweren Ionen untersucht. Als Beispiel seien in Tabelle 27 einige der beobachteten *radioaktiven Produkte* und verdampften Partikel aufgeführt, welche bei Beschuß von Al^{27} mit N^{14}-Ionen von etwa 25 bis 50 MeV entstehen [C 53-1], [C 54-1]. Die Auswahl eines engeren Energieintervalls war aus Intensitätsgründen nicht möglich, und die Bestrahlung erfolgte im Innern des Zyklotrons.

Zu den aufgeführten Produkten kommen noch eine Anzahl Endkerne mit $A < 27$ hinzu.

Tabelle 27.

Radioaktive Reaktionsprodukte mit Massenzahlen $A > 27$ aus der Reaktion $N^{14} + Al^{27}$

Radioaktiver Endkern	P^{32}	S^{35}	Cl^{38}	K^{38}	Si^{31}	Al^{28}	Cl^{34}	P^{33}	P^{30}	Al^{29}
Art der Aktivität	β^-	β^-	β^-	β^+	β^-	β^-	β^+	β^-	β^+	β^-
Nach d. Compoundmodell *zu erwartende* leichte Partikel	p 2α	$2p$ α	$3p$	$2n$ p	$2p$ 2α	p 3α	$2n$ p α	n $3p$ α	$2n$ p 2α	n $3p$ 2α
gemessene rel. Ausbeute, die von Cl^{34}=100 gesetzt	300	25	†	75	15	140	100	†	25	†
Q[MeV] im Compoundmodell	—2,1	—2,6	—6,4	—9,0	—10,7	—12,0	—16,4	—20,4	—22,5	—31

† bedeutet: gesucht, aber nicht beobachtet.

Das Bemerkenswerte an der Beobachtung sind die großen Ausbeuten bei P^{32} und Al^{28}, die durch die unwahrscheinliche Emission von *nur geladenen* Teilchen (p und α) entstehen müßten, wenn man eine volle Compoundkernbildung annähme. Die Beobachtungen sprechen aber gegen eine solche Compoundbildung, sie scheinen vielmehr darauf hinzuweisen, daß das N^{14} nicht als Ganzes, sondern nur in Teilen eingefangen wird. Und zwar wird anscheinend (wie beim Deuteron-Stripping) das N^{14} durch das Kernfeld des Al^{27} schon vor dem eigentlichen Zusammenstoß in $3\alpha + n + p$ mehr oder weniger „aufgelockert“ und einige der Teile werden eingefangen, während die anderen weiterfliegen. Der Einfang von $(\alpha + n)$ gibt P^{32}. Der Einfang eines Neutrons allein führt zu Al^{28}. Hier müßte N^{13} als der übriggebliebene Rest von N^{14} in den Reaktionsprodukten stark vertreten sein. Das wird auch in der Tat beobachtet. Bei voller Compoundbildung müßten zur Erzeugung eines Restkerns N^{13} unter Aufwand von ≈ 66 MeV mindestens 10 Teilchen, nämlich $3n + p + 6\alpha$, emittiert werden, was höchst unwahrscheinlich ist.

Die durch den Einfang von α, n, p entstehenden Zwischenkerne werden teilweise wieder die gleichen Teilchen emittieren. So kann nach dem Schema

$$Al^{27} + 2\alpha + n \to Cl^{36*} \begin{cases} \nearrow P^{32} + \alpha \\ \to Cl^{35} + n \\ \searrow Cl^{34} + 2n \end{cases}$$

die *gleichzeitig* auftretenden großen Ausbeuten an P^{32} und Cl^{34} verstanden werden. Cl^{35} ist als stabiles Isotop natürlich nicht beobachtet. Cl^{38} kann auf diese Art

nicht erzeugt werden. Und tatsächlich tritt es auch nicht auf. Der üblichen Compoundvorstellung zufolge müßte — den Q-Werten nach — Cl^{38} erheblich häufiger vorkommen als Cl^{34}, was der Beobachtung widerspricht. Ähnliches gilt für die anderen Reaktionsprodukte. Die Möglichkeit einer Reaktion der Art

$$Al^{27} + \alpha + n \rightarrow P^{32*} \begin{cases} \nearrow Al^{28} + \alpha \\ \searrow Si^{31} + p \end{cases}$$

zeigt z. B., daß mit Al^{28} auch Si^{31} häufiger auftreten wird.

Diese wenigen Beispiele lassen bereits die schweren Ionen als ein wirksames Mittel zur Erforschung der Kerneigenschaften und der inneren Vorgänge bei Kernreaktionen erkennen. Für nähere Einzelheiten muß auf die Literatur verwiesen werden (siehe z. B. [W u. F]).

§ 41. Coulomb-Anregung [1])

Ein an einem Zielkern im Abstand d vorüberfliegendes Proton oder α-Teilchen der Geschwindigkeit v erzeugt am Orte des Kerns ein nach Richtung und Stärke zeitlich veränderliches, sich drehendes elektrisches Feld, das in der Hauptsache Frequenzen der Größenordnung $\omega \approx \frac{v}{d}$ enthält und γ-Übergänge mit Energien der Größenordnung $\hbar\omega$ induziert. Bei gleichen Energien regen die schnelleren Protonen höhere Frequenzen an als α-Teilchen. Besonders erfolgreich erwies sich diese Methode der γ-Anregung („Coulomb-Anregung") beim Studium der tieferen Rotationszustände mittelschwerer bis schwerer Kerne. Nach Bohr und Mottelson [B 53-1] sind die so beobachteten Niveaus *keine* gewöhnlichen Rotationsterme, die einer *starren* Rotation des Kernes entsprechen (und im Vergleich zur Beobachtung viel zu große Trägheitsmomente ergeben würden), sondern sind mit einer rotierenden Bewegung einer *Oberflächenwelle* um den Kern verbunden, vergleichbar mit dem Umlauf der von Mond und Sonne erzeugten *Flutwelle* um die Erde (vgl. § 120). Die Coulomb-Anregung ist daher besonders gut an den stark deformierbaren schweren Kernen zu beobachten, die bekanntlich im Periodischen System zwischen den „magischen" Zahlen liegen und meist starke Quadrupolmomente aufweisen.

Die Rotationsenergien E_{rot} betragen, wenn I das effektive Trägheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit der den Kern umlaufenden Oberflächenwelle bezeichnen, „klassisch" geschrieben $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$. Die Übergangsenergie zum Grundzustand folgt dann bei Berücksichtigung der Rotationsquantelung zu

$$E = \frac{\hbar^2}{2I}[J(J+1) - J_0(J_0+1)]. \tag{41.1}$$

---

[1]) 1938 von Weisskopf theoretisch vorausgesagt (Phys. Rev. 53, 1018 (1938)), experimentell erkannt von Huus und Zupancic (Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd 28 (1953), Nr. 1) sowie von C. Mc Cleland and C. Goodmann (Phys. Rev. 91, 760 (1953)).

J_0 ist der Spin des Grundzustandes (= 0 bei (g, g)-Kernen). J kann bei ungeradem A die Werte J_0; $J_0 + 1$; $J_0 + 2$ etc. annehmen; bei geradem A (genauer (g, g)-Kernen) ist $J = 0$; 2; 4 usw.
Der erste beobachtete und bisher mit am besten durch Coulomb-Anregung untersuchte Kern ist $_{73}Ta^{181}$, dessen Neutronenzahl $N = 108$ zwischen den „magischen Zahlen 82 und 126 liegt. Es wurden γ-Quanten mit 137 keV und 166 keV beobachtet. Sie bilden eine Kaskade, und ihre Ausgangsniveaus liegen bei 137 keV und 303 keV. Das Verhältnis dieser Anregungsenergien, 303 : 137 = 2,21, stimmt gut zu dem aus (41.1) mit $J_0(Ta^{181}) = \frac{7}{2}$ folgenden Wert 20 : 9 = 2,22. Wie in diesem Beispiel liegen die γ-Energien bei Coulomb-Anregung der schweren Kerne im Bereich von 50 bis 500 keV. Sie sind z.B. mit Szintillationsspektrometern gut beobachtbar, sobald die Streustrahlung aus anderen Ursachen genügend abgeschirmt ist.

§ 42. Kernprozesse mit Elektronen

Elektronen bis zu mehreren MeV kinetischer Energie erzeugen noch keine spezifischen Kernprozesse. Ausnahmen bilden nur die E-einfangenden Kerne, die eine wirkliche Kernreaktion mit Elektronen ausführen. Solche E-Fänger müssen aber stets durch besondere Kernprozesse neu erzeugt werden. Diesbezügliche Beispiele enthält § 63, Tabelle 17.
Sehr energiereiche Elektronen können — ähnlich wie bei Coulomb-Anregung durch Protonen — zur Kernanregung führen, wobei sie dann eine unelastische Streuung erfahren. Die Energieabgabe langsamerer Elektronen ist wegen ihrer kleinen Masse zu geringfügig. In den letzten Jahren wurden von HOFSTÄDTER u. a. [H 54-1], [H 55-1], s.a. [H 56-1], durch *unelastische Streuung* von Elektronen mit Energien bis zu 187 MeV an Be, C, Mg, Si, S, Se eine Anzahl Energieniveaus im Bereich 1 bis 10 MeV beobachtet.
Die *elastische Streuung* hochenergetischer Elektronen von ≈ 85 bis ≈ 180 MeV und mehr wurde von HOFSTÄDTER u. a. [H 53-1] zur Bestimmung des von den Protonen im Kern eingenommenen Raumes benutzt. Wenn die de Broglie-Wellenlänge λ der Elektronen in die Größenordnung des Kernradius kommt, sind starke Abweichungen der beobachteten Streuung von der an einer idealen Punktladung zu erwarten, falls die Protonen des Zielkerns ein *endliches Volumen*, etwa eine Kugel mit dem sog. *Protonen-Radius* R_p, einnehmen. (Bei kleinen Energien verdeckt der starke Anteil der durch die gewöhnliche *Rutherford-Streuung* außerhalb des Kernvolumens abgelenkten Elektronen alle feineren Details.)
Wie bei der Lichtstreuung an kleinen Wassertröpfchen zeigt die Streustrahlung Interferenzeffekte, wenn die Wellenlänge $\lambda \lesssim \frac{R}{4}$ wird. Die Ausmessung der gestreuten Elektronen und ihrer Winkelverteilung gibt die Möglichkeit einer Bestimmung der Ladungsverteilung im Kerninnern. Für den Protonenradius ergab sich auf diese Weise

$$R_p = r_0 A^{1/3} \quad \text{mit} \quad r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Dieses r_0 ist merklich kleiner als der zuvor allgemein angenommene Wert $r_0 = 1{,}45 \cdot 10^{-13}$ cm.
Hierzu ist aber zu bemerken, daß nach einer neueren Anpassung der halb-empirischen Massenformel von BETHE-WEIZSÄCKER an die empirischen Daten der Coulomb-Term $0{,}750 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ [TME] lautet, was einem $r_0 = 1{,}23 \cdot 10^{-13}$ cm entspricht [G 53-1]. Auch die Radien, die aus Prozessen mit μ-Mesonen abgeleitet werden, führen zum gleichen Wert, wie im Bd. 1, Kap. II (Bestimmung der Kernradien), näher ausgeführt ist.

§ 43. Kernreaktionen mit Neutrinos

Das Neutrino wurde 1934 von PAULI als hypothetisches Teilchen zur Aufrechterhaltung des Energie- und Impulssatzes beim β-Prozeß postuliert. Der Elementarakt der spontanen β^--Emission besteht in der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton unter Emission eines Elektrons und eines *Antineutrinos* $\tilde{\nu}$: [1])

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Das entstehende Elektron zeigt erfahrungsgemäß ein *kontinuierliches* Energiespektrum, obgleich die Energiedifferenz zwischen n und p festliegt. Hier sorgt das Antineutrino $\tilde{\nu}$ für die Erhaltung von Energie und Impuls.
Bei der spontanen Umwandlung eines Protons in ein Neutron wird entsprechend mit dem Positron zusammen ein Neutrino emittiert:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu.$$

Allerdings kommt dieser Prozeß aus Energiegründen nur bei den im Kern gebundenen Protonen vor. Neben diesen Emissionsprozessen ist gemäß dem Reziprozitätsprinzip auch die Existenz von Prozessen anzunehmen, bei denen Neutrinos von Neutronen – bzw. Antineutrinos von Protonen – absorbiert werden und Protonen und Elektronen – bzw. Neutronen und Positronen – entstehen:

$$n + \nu \rightarrow p + e^-, \tag{43.1}$$

$$p + \tilde{\nu} \rightarrow n + e^+. \tag{43.2}$$

Der letztere Vorgang ist endotherm, da bereits das Neutron allein schon schwerer als das Proton ist und außerdem noch ein Positron erzeugt werden muß.
Liest man (43.1) von rechts nach links für den inversen Vorgang, so hat man den Elementarakt des E-Einfanges vor sich:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu.$$

Diese Kernreaktion mit einem Elektron tritt allerdings nur bei gewissen künstlich-radioaktiven Kernen auf.

---

[1]) Ursprünglich schrieb man $n \rightarrow p + e^- + \nu$. Aus Gründen der Symmetrie in der Theorie des β-Zerfalls wird die obige Schreibweise bevorzugt.

Die Neutrino- oder Antineutrinoemission macht sich durch einen Rückstoß auf den emittierenden Kern bemerkbar. Der Rückstoßimpuls beträgt $\frac{E_\nu}{c}$ und die Rückstoßenergie $\frac{E_\nu^2}{2Mc^2}$, wenn man nur ein einziges Neutrino pro Prozeß annimmt (E_ν = Neutrinoenergie, M = Kernmasse). Bei Emission mehrerer Neutrinos würde eine kontinuierliche Verteilung der Rückstoßenergie bis zum Maximalwert $\frac{E_\nu^2}{2Mc^2}$ entstehen. Die Beobachtung der Energieverteilung der Rückstoßkerne beantwortet daher die Frage, ob pro Prozeß nur ein Neutrino entsteht oder deren mehrere emittiert werden.

Da die Energie des Rückstoßkerns um so größer wird, je kleiner dessen Masse ist, hat ALLEN (1942) seine Beobachtungen an dem leichtesten der E-Einfänger, an Be^7, ausgeführt. Es wird aus der Reaktion $Li^7(p, n)Be^7$ gewonnen und wandelt sich mit einer Halbwertszeit von 53,6 Tagen durch E-Einfang in Li^7 um. Aus dem Q-Wert der Reaktion (— 1,65 MeV) und der Massendifferenz zwischen Proton und Neutron $m_n - m_p$ = 1,29 MeV folgt als Neutrinoenergie

$$E_\nu = (-Q) - (m_n - m_p) + m_e c^2 = 0{,}87 \text{ MeV}.$$

Die entsprechende Rückstoßenergie des Be^7 beträgt etwa 57 eV (wenn ein Neutrino pro Prozeß angenommen wird). Die Beobachtungen an aufgedampften Be^7-Schichten zeigten in der Tat Rückstoßenergien bis zu dieser Größe, leider aber auch ein starkes Kontinuum nach kleineren Energien, welches offenbar durch Energieverluste der Be-Atome beim Verlassen der Aufdampfschicht hervorgerufen wird und weitergehende Schlußfolgerungen erschwert.

Für die Entscheidung der Frage nach der Anzahl der in einem Elementarprozeß emittierten Neutrinos sind die Rückstoßmessungen an dem gasförmigen E-Fänger Ar^{37} (herstellbar über $Cl^{37}(p, n)\,Ar^{37}$) geeigneter ([R 52-1], [K 54-1]). SNELL und PLEASONTON [S 55-2] erhielten für die Rückstoßenergie die Verteilungskurve der Abb. 85. Die gemessene Linienbreite ist praktisch allein durch die apparative Streuung gegeben. Die wahrscheinlichste Rückstoßenergie wurde experimentell zu 9,36 ± 0,06 eV bestimmt, während aus dem Q-Wert der Reaktion, bei Annahme einer Neutrino-Ruhemasse Null, 9,65 ± 0,05 eV zu erwarten ist. Das Ergebnis zeigt überzeugend, daß je Prozeß nur ein Neutrino nicht meßbarer Ruhemasse emittiert wird, denn eine endliche Ruhemasse würde

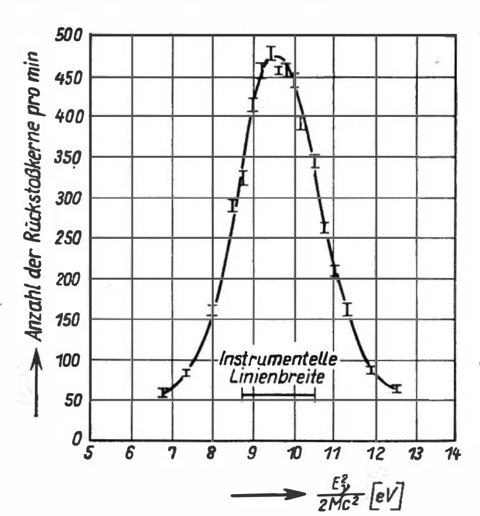


Abb. 85. Häufigkeitsverteilung der Neutrino-Rückstoßenergie bei Ar^{37} nach [S 55-3]

einen größeren Rückstoß erzeugen, und bei mehreren Neutrinos wäre die Rückstoßenergie zu einem Kontinuum „verwaschen".
Auch beim β-Zerfall wurde der Neutrino-Rückstoß an vielen Kernen beobachtet; der Impuls des Elektrons ist aber in mancher Hinsicht störend.
Der Nachweis einer direkten Kernreaktion mit Antineutrinos[1]) gelang erst 1956 mit dem intensiven Antineutrinostrom eines großen Kernreaktors [R 56-2]. Nach Gleichung (43.2) entsteht bei Absorption eines Antineutrinos durch ein Proton ein Neutron und ein Positron. Die Schwellenenergie dieses Prozesses beträgt 1,80 MeV, der Wirkungsquerschnitt schätzungsweise $6 \cdot 10^{-44}$ cm² $\pm$ 25%. Der Nachweis der stattgefundenen Kernreaktionen durch die Beobachtung der gleichzeitigen Entstehung eines Neutrons und eines Positrons geschah dadurch, daß die beiden γ-Quanten aus der Vernichtungsstrahlung des Positrons und die beim Einfang des Neutrons in Cd entstehende γ-Kaskade in verzögerter Koinzidenz registriert wurden. Die γ-Emission des Cd ist gegenüber den Vernichtungsquanten im Mittel um etwa 5,5 µsec verzögert, d. h. um die Zeit, in der der Hauptteil der Neutronen erst auf thermische Geschwindigkeit abgebremst und dann vom Cd absorbiert wird. Die Abbremszeit des Positrons ist hiergegen zu vernachlässigen. Die experimentelle Anordnung ist in Abb. 86a skizziert.
Zwischen drei großen Bottichen, gefüllt mit einer Szintillatorflüssigkeit (Triäthylbenzen-Lösung von Terphenyl mit Zusatz eines Szintillations-Spektralwandlers „Popop"[2])) befanden sich zwei Schichten Wasser mit gelöstem $CdCl_2$ in flachen

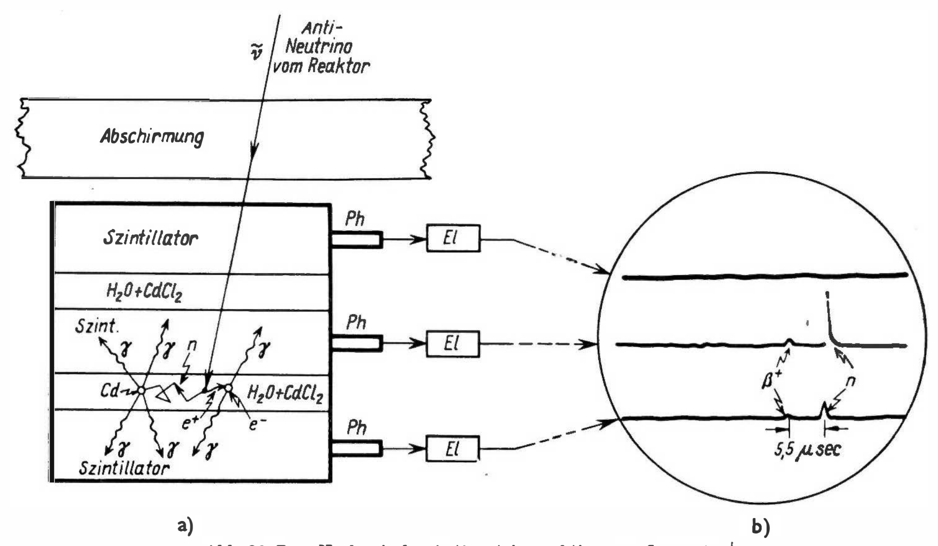


Abb. 86. Zum Nachweis der Antineutrinoreaktion $p + \bar{\nu} \rightarrow n + e^+$.
a) Reaktionsgefäß (*Ph* = Photomultiplier zur Registrierung der γ-Quanten, *El* = Elektronik)
b) Dreistrahloszillograph; Schirmbild für das in a) dargestellte Ereignis

[1]) In der Nomenklatur von Gl. (43.2).
[2]) 1,4-Di[-2-(5-Phenyloxazolyl)-]Benzol

Kästen aus Polyäthylen. Jeder der 3 Bottiche wurde von 110 parallelgeschalteten Photomultipliern beobachtet, deren Impulse über einen Impulshöhenselektor an je einen der 3 Strahlen eines Dreistrahloszillographen gegeben wurden. Eine Reaktion in der unteren Wasserschicht z. B. erzeugte dann auf dem Oszillographen die in Abb. 86b angegebenen Impulse an den beiden unteren Strahlen. Nur *wenn je zwei* Zeilen des Oszillographen zwei synchrone, durch den Impulshöhenselektor nach der Energie vorgewählte Impulse im Abstand von 5,5 $\approx \mu$sec anzeigten, wurde das Ereignis als von der gesuchten Reaktion stammend gewertet. Es wurden nur solche Ereignisse gezählt, bei denen die γ-Quanten paarweise nach oben und unten liefen. Es ergaben sich bei einem Strom von 10^{15} Antineutrinos pro cm^2 und sec $2{,}8 \pm 0{,}2$ Ereignisse pro Stunde. Deren Anzahl erwies sich proportional zur Reaktorleistung und betrug etwa 20mal mehr als die höchstmögliche Zahl der zufälligen Koinzidenzen von der direkten Neutronen- und γ-Strahlung des Reaktors, welche gesondert gemessen und im übrigen *sehr weitgehend abgeschirmt* war.
Die durch Positronenvernichtung und Neutronenabsorption am Oszilloskop auftretenden Impulse wurden, um ihre Identifizierung zu sichern, durch besondere Versuche mit Positronen aus Cu^{64} und mit Neutronen aus einer Pu-Be-Quelle geeicht. Da die Zahl der gesuchten Ereignisse proportional zu der Zahl der *freien Protonen* in der Wasserschicht sein muß, wurde zur weiteren Probe die Dichte der freien Protonen durch Ersatz von H_2O durch HDO halbiert, wobei dann auch die Zahl der Neutrinoreaktionen auf die Hälfte sank. Die Reaktion (43.2) findet nämlich an den *gebundenen* Protonen in D oder O^{16} sehr viel seltener statt, weil die Schwellenenergien bei D um 2,2 MeV und bei O^{16} um $\approx$ 8,5 MeV höher liegen als der Wert 1,80 MeV beim *freien* Proton.
Durch besondere Versuche mit schnellen Neutronen aus einer Am-Be-Quelle und durch zusätzliche Abschirmung wurde weiter sichergestellt, daß weder die direkten Neutronen- und γ-Strahlen aus dem Reaktor noch evtl. Höhenstrahlen die Neutrinoereignisse vortäuschen konnten. Damit wird die Realität der Antineutrinoreaktion (43.2) als gesichert betrachtet.

§ 44. Erhaltungssätze bei Kernreaktionen

Vergleicht man die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der verschiedenen Typen von Kernprozessen an ein und demselben Kern, so findet man insbesondere bei leichten Kernen oft anscheinend eklatante Widersprüche zu den Erwartungen des Compoundmodells. Sie bestehen darin, daß energetisch an sich mögliche Niveaus oder Prozesse n i c h t auftreten, und zeigen damit das Bestehen von *Auswahlregeln*. Wir haben zu berücksichtigen, daß bei Kernreaktionen neben der Erhaltung von Ladung, Nukleonenzahl, Energie und linearem Impuls noch die Erhaltungssätze für Statistik, Gesamtdrehimpuls (Spin + Bahndrehimpuls) und Parität gewährleistet sein müssen. Gleiches gilt, wenn auch meistenteils weniger streng, für den Isospin. Zur Erläuterung betrachten wir einige Beispiele.

a) Die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

Bei allen Kernreaktionen bleibt die Quantenzahl J des Gesamtdrehimpulses und dessen Komponente J_z in einer (z. B. durch ein Magnetfeld) ausgezeichneten z-Richtung, als welche wir die des einfallenden Teilchenstromes wählen, erhalten. Diese Tatsache macht sich besonders dann bemerkbar, wenn die Reaktion $\mathrm{A} + a \to \mathrm{C} \to b + \mathrm{B}$ über einen scharf definierten Compoundzustand C führt. Die Spins der beteiligten Partikel seien I_A; I_a; I_C; I_b und I_B mit den resp. z-Komponenten $I_{\mathrm{A}z}$ etc. und den Spinvektoren $\vec{I}_\mathrm{A}$ etc. Ferner seien l bzw. l' die Bahndrehimpulse der Teilchenpaare (A, a) bzw. (B, b).

Die „Vektorsumme" $\vec{S} = \vec{I}_\mathrm{A} + \vec{I}_a$ wird oft als „*Kanalspin*" (channel spin) vor der Reaktion bezeichnet. S, der Betrag von $\vec{S}$, liegt im Intervall

$$|I_\mathrm{A} - I_a| \leqq S \leqq I_\mathrm{A} + I_a, \tag{44.1}$$

und jedes $\vec{S}$ hat $2\,S+1$ verschiedene Unterzustände $(S;\, S_z)$ mit $S_z = S; S-1; \ldots; 1; 0; -1; \ldots; -S$. Ihre Gesamtzahl beträgt $(2\,I_\mathrm{A} + 1)\,(2\,I_a + 1)$ und ist gleich der Anzahl der möglichen Zustände des Systems der zwei voneinander unabhängigen Spins I_A und I_a. Ein unpolarisierter Primärstrahl besteht aus einer inkohärenten, gleichmäßigen Mischung aller Zustände S. Jedes S kann sich mit dem Bahndrehimpuls l zum Gesamtdrehimpuls des Systems, J, zusammensetzen. Die möglichen J-Werte liegen im Intervall

$$|l - S| \leqq J \leqq l + S. \tag{44.2}$$

Hat das Resonanzniveau einen scharf definierten Spin I_C, so tragen zur Compoundbildung nur diejenigen l und S bei, die sich zu $J = I_\mathrm{C}$ zusammensetzen können. Das sind für ein gegebenes l alle S im Intervall

$$|I_\mathrm{C} - l| \leqq S \leqq I_\mathrm{C} + l \tag{44.3}$$

bzw. bei vorgegebenem S, alle l im Intervall

$$|I_\mathrm{C} - S| \leqq l \leqq I_\mathrm{C} + S. \tag{44.4}$$

Dabei ist stets $S_z = I_{\mathrm{C}z}$, da $l_z = 0$ ($l_z =$ Komponente des Bahndrehimpulses in der Strahlrichtung z).

Die Beiträge zur Compoundbildung von den verschiedenen S sind inkohärent, und es addieren sich daher ihre Intensitäten.

Die Beiträge der verschiedenen l-Wellen sind dagegen kohärent, weil sie alle ein und derselben Planwelle e^{ikz} angehören. Hier sind daher die Wahrscheinlichkeits-Amplituden der Compoundbildung zu addieren.

Dieselben Beziehungen (44.1) bis (44.4) gelten für die auseinanderlaufenden Teilchen (B, b) mit den entsprechenden Größen l' und S'. Bemerkenswert ist nun, daß im Falle $I_\mathrm{C} > 0$ selbst für eine elastische Streuung $l' \neq l$ sein kann, worauf wir weiter unten nochmals zurückkommen werden. Zunächst betrachten wir einen möglichst einfachen Fall:

Bei den (n, γ)-Reaktionen mit langsamen Neutronen werden vorwiegend nur s-Wellen, d.h. zentral mit $l = 0$ auffallende Neutronen, eingefangen. Es bilden sich

daher nur solche Compoundzustände, bei denen $I_C^{\pm} = I_A \pm \frac{1}{2}$. Dabei bezeichnet $I_C^{\pm}$ den Spin des Compoundniveaus, I_A den Spin des Zielkerns, und $\frac{1}{2}$ ist der Spin des Neutrons, I_n. Durch die Erhaltung des Drehimpulses wird der statistische Gewichtsfaktor g in (33.1) festgelegt: Die Zahl der möglichen (entarteten) Zustände des Zielkerns (Zahl der Spineinstellungen von I_A in einem gedachten äußeren Felde der Stärke $\to 0$) beträgt $2 I_A + 1$; von diesen kann jeder mit $I_n = +\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ kombinieren. Die Zahl der Gesamtzustände des Systems Neutron-Zielkern vor dem Stoß ist daher $2(2 I_A + 1)$. Hiervon führen $(2 I_C^+ + 1)$ zu den Niveaus mit I_C^+ und $(2 I_C^- + 1)$ zu den mit I_C^-. Die relative Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein gebildetes Compoundniveau zum Spin I_C^+ bzw. zu I_C^- gehört, ist daher unter der Annahme, daß alle vorkommenden Unterzustände von I_C mit gleicher Häufigkeit zur Reaktion beitragen,

$$g^{\pm} = \frac{2 I_C^{\pm} + 1}{2(2 I_A + 1)} = \frac{2 I_A \pm 1 + 1}{2(2 I_A + 1)} = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{1}{2 I_A + 1}\right]. \tag{44.5}$$

Compoundkernniveaus, deren Spin nicht gerade die Werte $|I_A \pm \frac{1}{2}|$ besitzen, werden nicht angeregt; die mit langsamen Neutronen experimentell beobachteten Resonanzniveaus stellen daher nur eine bestimmte Auswahl aus den vorhandenen Compoundniveaus dar. Weitere Niveaus mit $I_C = |I_A \pm \frac{1}{2} \pm l|$ können durch Wellen mit $l > 0$ angeregt werden, doch wird hier der Wirkungsquerschnitt bei thermischen Neutronen verschwindend klein. Erst mittelschnelle und schnelle Neutronen geben eine merkliche Anregung dieser Niveaus. — Außer durch die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses folgen weitere Einschränkungen durch:

b) Die Erhaltung der Parität und der Statistik

Da bei Kernreaktionen die Nukleonenzahl sich nicht ändert, bleibt die Statistik des Gesamtsystems erhalten. Es gilt sowohl für das Gesamtsystem als auch für jede Partikel einzeln die *Bose-Statistik* bei gerader und die *Fermi-Statistik* bei ungerader Nukleonenzahl des jeweiligen Gebildes.

Ferner bleibt bei einer Kernreaktion die *Parität* π_Σ des Gesamtsystems erhalten. Es gilt daher

$$\pi_\Sigma = \pi_A \, \pi_a \, (-1)^l = \pi_C = \pi_B \, \pi_b \, (-1)^{l'}, \tag{44.6}$$

wo π_A usw. die Parität des Kerns A usw. darstellt. $(-1)^l$ bzw. $(-1)^{l'}$ sind die Paritäten der Wellenfunktionen der Relativbewegung der Teilchen (A, a) bzw. (B, b) mit den Bahn-Drehimpulsen l bzw. l' Die Parität von Neutron, Proton, Deuteron und α-Teilchen ist $+1$.

Betrachten wir z. B. die elastische Streuung, so müssen l und l' nach (44.6) gleichzeitig gerade oder ungerade sein. Es ist also nicht möglich, daß etwa ein Neutron mit $l = 0$ einen elastischen Prozeß beginnt und am Ende mit $l' = 1$ wegfliegt, obgleich dies in vielen Fällen nach dem Drehimpulssatz allein erlaubt wäre. Ist z. B. $I_A = \frac{3}{2}$; $I_a = \frac{1}{2}$ und $l = 0$, so sind $I_C = S = 1$ und 2 möglich. Im Falle $I_C = 1$ z. B. sind für $S' = 1$ nach (44.4) $l' = 0$; 1; 2 erlaubt. Die Erhaltung

der Parität schließt $l' = 1$ aus. $l' = 2$ ist zugelassen. Trotzdem ist eine elastische Streuung mit einer Drehimpulsänderung $\Delta l = 2$ praktisch experimentell unwesentlich: Denn hier müßte l oder l' mindestens 2 sein; bei langsamen Neutronen, wo die elastische Streuung von wesentlicher Bedeutung ist, wird eine Reaktion für l oder $l' \geqq 2$ wegen der Behinderung durch die Zentrifugal-Barriere (s. §§ 69 u. 74) sehr unwahrscheinlich. Und für höhere Energien wird die elastische Streuung ohnehin unwesentlich, da dann sehr viele andere Reaktionsmöglichkeiten offenstehen.

Bei der elastischen Streuung von langsamen Neutronen $l = 0$ an (g, g)-Kernen, wo $I_A = 0$, wird $I_C = S = \frac{1}{2}$. Nach (44.4) allein wären hier $l' = 0$ oder 1 erlaubt. Die Berücksichtigung der Paritätserhaltung läßt aber nur die eine Möglichkeit $l' = 0$, d. h. Streuung ohne Änderung des Bahndrehimpulses, zu.

Wir notieren diese Ergebnisse zur Begründung unserer späteren Ausführungen über Neutronenstreuung im Abschnitt 4 von Kap. VI, wo wir uns auf den Fall $l = 0$ beschränken werden.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Protonenreaktion an Li^7. In Abb. 87 sind die Energieabhängigkeiten für alle an Li^7 beobachteten Reaktionen dargestellt. Insbesondere ist es **nicht** ohne weiteres zu verstehen, warum die mit 17,5 MeV höchst exotherme (p, α)-Reaktion nicht die intensive (p, γ)-Resonanz bei 440 keV praktisch auslöscht. Der Be^8-Compoundkern besitzt nämlich für dieses Niveau eine γ-Breite von $\Gamma_\gamma \approx 30$ eV, während die Gesamtbreite der Resonanzlinie (gegen γ-Strahlung und elastische (p, p)-Streuung) $\Gamma_p + \Gamma_\gamma \approx 12$ keV beträgt.

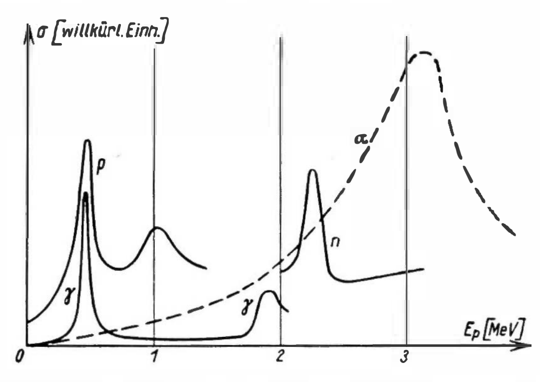


Abb. 87. Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Reaktionen (p, γ); (p, p); (p, n) und (p, α) an Li^7

Wäre ein α-Zerfall aus diesem Niveau möglich, so zerfiele es höchstwahrscheinlich entsprechend der aus der (p, α)-Reaktion bekannten α-Breite von $\Gamma_\alpha \approx 1$ MeV schon in $\approx 6 \cdot 10^{-22}$ sec, und für die γ-Emission würde keine Zeit mehr verbleiben: Der Anteil der γ-Strahlung an der Gesamtreaktion wäre nur auf $(\Gamma_\gamma : \Gamma_\alpha) \approx 3 \cdot 10^{-5}$ zu veranschlagen, so daß der (p, γ)-Prozeß schwer beobachtbar sein sollte. Offenbar sind hier strenge *Auswahlregeln* wirksam, die den α-Zerfall verhindern.

Ein Zustand des Be^8, der in zwei α-Teilchen zerfällt, muß *gerade* Parität haben: Da nämlich die emittierten α-Teilchen (Spin = 0) die Bose-Statistik befolgen, ändert sich die Wellenfunktion bei Vertauschung der Teilchen nicht. Eine solche Vertauschung ist äquivalent mit einer Paritätsoperation (Spiegelung am Koordinaten-Nullpunkt). Nach der Reaktion ist die Parität also gerade. Sie war daher auch gerade für das angeregte Niveau des Be^8 und ebenso für das System Proton-Li^7 vor der Reaktion.

Der Bahndrehimpuls der beiden emittierten α-Teilchen ist ferner wegen der Bose-Statistik $l = 0; 2; 4; \ldots$ Die möglichen Kernspins der α-zerfallenden Be^8-Niveaus sind daher $I_C = 0; 2; 4; \ldots$ *Die α-zerfallenden Niveaus haben also gerade Parität und geraden Kernspin I_C.*

Nach den Erfahrungen, welche dem Schalenmodell zugrunde liegen, hat der *Grundzustand* des Li^7 *ungerade Parität* und den Kernspin $I = \frac{3}{2}$. Wenn ein Proton mit dem Bahndrehimpuls l und dem Spin $\frac{1}{2}$ das Compoundniveau erzeugt, so wird $I_C = |\frac{3}{2} \pm l \pm \frac{1}{2}|$. Die Parität des erzeugten Niveaus wird, da die l-Wellenfunktion die Parität $(-1)^l$ besitzt, gleich $(-1)^{(l+1)}$. Zur Erzeugung eines α-zerfallenden Niveaus (gerade Parität) ist also ein ungerades $l = 1; 3; \ldots$ erforderlich. Von diesen ist $l = 1$ wegen der kleinsten Zentrifugalbarriere am wahrscheinlichsten. $l = 1$ wird auch durch die Energieabhängigkeit der Anregungsfunktion der $Li^7(p, \alpha)$-Reaktion gefordert, die bis etwa 3 MeV ansteigt, während der Gamow-Faktor G_0 für s-Wellen schon bei etwa 1 MeV eine „Sättigung" der σ-E-Kurve zeigen müßte. Von den zu $l = 1$ möglichen $I_C = 0; 1; 2; 3$ kommen nach Obigem für α-Niveaus in Frage: $I_C = 0; 2 \ldots$

Das *γ-emittierende Niveau* hat offenbar keine der soeben für die α-Niveaus bestimmten möglichen Kombinationen von Paritäts- und Spinwerten. Es kommen in Frage

1. bei Reaktionen mit s-Wellen ($l = 0$), $I_C = 1$ oder 2, Parität ungerade,

2. bei Reaktionen mit p-Wellen ($l = 1$), $I_C = 1$ oder 3, Parität gerade.

In beiden Fällen sind die notwendigen Bedingungen für den α-Zerfall nicht erfüllt: Die α-Lebensdauer wird so groß, daß die relativ langsame γ-Emission erfolgen kann. Hierbei ändert sich die Parität[1]) derart, daß sie für die Endniveaus nach der γ-Emission — nämlich für das Grundniveau und für das angeregte, „verwaschene" Niveau bei 3 MeV über dem Grundzustand — „gerade" wird, denn aus diesen Zuständen erfolgt ein Zerfall in zwei α-Teilchen. Da letztere nur eine Coulomb-Barriere von etwa $2 \cdot 4^{-1/3} \approx 1{,}3$ MeV zu überwinden haben, die wesentlich unter der Niveauhöhe von ≈ 3 MeV liegt, ist jetzt auch die „Verwaschenheit" dieses Be^8-Niveaus verständlich.

Welche der möglichen Indizierungen für die γ-strahlenden Niveaus wirklich zutrifft, können nur weitere Daten entscheiden. Als solche kommen die Winkel-

[1]) Bei Emission oder Absorption einer elektrischen 2^lPol-Strahlung ändert sich die Parität bei ungeradem l, sie ändert sich nicht bei geradem l. Bei magnetischer Strahlung ist es gerade umgekehrt.

Tabelle 28. Niedrigste l′-Werte für p und α aus $N^{14}(n, p)C^{14}$ und $N^{14}(n, \alpha)B^{11}$

l_{Neutr} \ I_{Comp}		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
0	l_p'	0	2		
	l_α'	1	1		
1	l_p'	1	1	3	
	l_α'	2	0	2	
2	l_p'	0	2	2	4
	l_α'	1	1	1	3

Die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion ist um so größer, je kleiner die l'-Werte der beteiligten Teilchen sind.

verteilung und die Energieabhängigkeit der γ-Strahlung sowie die der gleichzeitig elastisch gestreuten Protonen in Frage. Nach einigen diesbezüglichen Beobachtungen scheint die scharfe γ-Resonanz einem Niveau mit $I_C = 1$ und gerader Parität anzugehören.

Unter den leichten Kernen sind viele weitere Fälle bekannt, bei denen am gleichen Compoundkern *scharf getrennte* Resonanzen für die *verschiedenen Reaktionsarten* vorkommen. Zum Beispiel zeigt die Reaktion $N^{14}(n, p)C^{14}$ bei 1,4 MeV eine ausgesprochene Resonanz, für die Reaktion $N^{14}(n, \alpha)B^{11}$ liegt sie aber bei 1,8 MeV. Dabei laufen beide Prozesse über denselben Compoundkern N^{15} (s. Abb. 88). Auch hier liegt die Ursache in den Auswahlregeln für Spin und Parität. Diese sind im Grundzustande für $N^{14}: I = 1(^+)$; für $C^{14}: I = 0(^+)$; für $B^{11}: I = \frac{3}{2}(^-)$.

Neutronen mit geradem (ungeradem) l ergeben hier, ausgehend von N^{14}, gerade (ungerade) Parität des Compoundniveaus von N^{15}. Die hiermit auf Grund der Erhaltungssätze kleinstmöglichen l'-Werte der auslaufenden p- oder α-Teilchen sind in Tabelle 28 angegeben.

Man sieht, daß die Zustände mit $I_C = \frac{1}{2}$ die p-Emission begünstigen, weil von ihnen aus die Protonen radial emittiert werden können ($l_p' = 0$!). Die Zustände mit $I_C = \frac{3}{2}$ begünstigen dagegen die α-Emission aus dem gleichen Grunde ($l_\alpha' = 0$!).

c) Die Erhaltung des Isospins

Auswahlregeln, welche durch die Erhaltung des Isospins[1]) bedingt sind, leiteten Oppenheimer und Serber bereits 1938 ab, aber erst 1952 gelang es Adair ihr Wirken in einer Anzahl von Kernreaktionen nachzuweisen. Bei Kernreaktionen mit schweren Teilchen bleibt der Betrag des Isospins T erhalten:[2]) Es gilt $\Delta T = 0$, und außerdem ist natürlich $\Delta T_3 = 0$ (Ladungserhaltung; wobei $T_3 = \frac{1}{2}(N - Z)$ ist). Die Regel gilt *streng*, wenn die in Frage stehenden Niveaus bezüglich des Isospins *reine* Zustände darstellen.

---

[1]) Siehe Kapitel XIII, § 93.

[2]) Der Isospin eines Systems von 2 Teilchen A und a, denen die Isospins T^A und T^a zukommen, kann die Werte annehmen

$$T = T^A + T^a; \quad T^A + T^a - 1; \quad \ldots |T^A - T^a|.$$

Ferner ist $T_3 = T_3^A + T_3^a$.

Da d- und α-Teilchen den Isospin $T=0$; $T_3=0$ haben, führen Reaktionen vom Typ (d, d'); (α, α'); (d, α) oder (α, d) zu keiner Änderung des Isospins beim Übergang vom Anfangs- zum Endkern.

Protonen bzw. Neutronen haben $T=\frac{1}{2}$; $T_3=-\frac{1}{2}$ bzw. $T=\frac{1}{2}$; $T_3=+\frac{1}{2}$. Daher sind durch Reaktionen vom Typ (n, n'); (p, p'); (p, n); (n, p); (d, n) oder (d, p) auch Endniveaus erreichbar, welche sich im Isospin vom Anfangskern in bestimmter Weise unterscheiden.

Die meisten höher angeregten Niveaus sind bezüglich des Isospins keine reinen Zustände, sondern Gemische von verschiedenen Spinzuständen. Bei einer Kernreaktion werden mehrere davon angeregt, die dann in Endniveaus mit verschiedenen T übergehen können. Aus diesem Grunde werden auch Reaktionen vom Typ (p, α); (n, α); (p, d) i. allg. ebenfalls zu Endzuständen verschiedenen Isospins führen.

Untersucht man bei den Reaktionen $N^{14}(p, p')N^{14*}$ und $N^{14}(d, d')N^{14*}$ bei gleichbleibender Primärenergie das Energiespektrum der unelastisch gestreuten Teilchen, so findet man das 2,31 MeV-Niveau in N^{14} wohl mit Protonen, aber überraschenderweise nicht mit Deuteronen, obgleich das benachbarte 3,95 MeV-Niveau in N^{14} in beiden Fällen auftritt. Weder der Unterschied in den Spins, noch der der Paritäten dieser Niveaus (resp. 0^+ und 1^+), noch eine Verschiedenheit der Gamow-Schwellen kann für das Fehlen des 2,31 MeV-Niveaus bei Beobachtung mit Deuteronen verantwortlich sein. Auch in der Reaktion $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$ findet sich selbst mit 20 MeV-Deuteronen, wobei die Gamow-Schwelle die α-Teilchen gewiß nicht

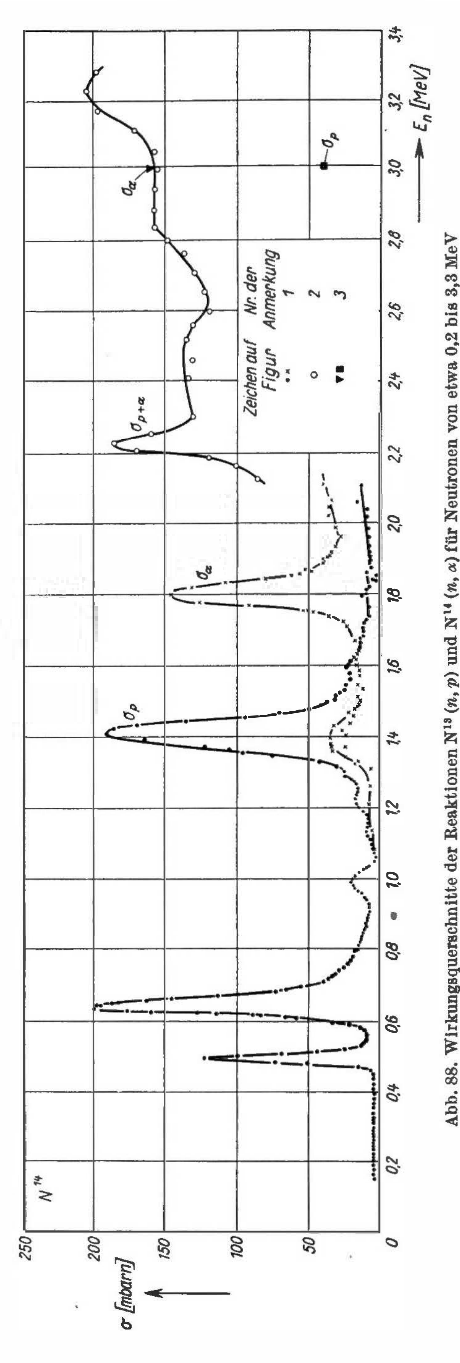


Abb. 88. Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $N^{13}(n, p)$ und $N^{14}(n, \alpha)$ für Neutronen von etwa 0,2 bis 3,3 MeV

mehr behindert, keine Andeutung des 2,31 MeV-Niveaus in N^{14}. Dieses Niveau hat nach allem bisher Bekannten $T=1$; $T_3=0$ und ist daher z. B. über (d, d')-Prozesse — ausgehend vom Grundzustand des N^{14} mit $T=0$; $T_3=0$ — nicht erreichbar.

Ein ähnliches, nur durch Isospin-Auswahlregeln erklärbares Verhalten zeigen auch Li^6 und B^{10}, denen im Grundzustand ebenfalls die Quantenzahlen $T=0$ und $T_3=0$ zukommen.

In B^{10} wird das aus Beobachtungen von γ-Kaskaden bekannte 1,74 MeV-Niveau bei (d, d')- und (d, α)-Reaktionen nicht angetroffen. Das 3,58 MeV-Niveau des Li^6 sollte nach den übrigen Erhaltungssätzen α-instabil sein, trotzdem erfolgt γ-Emission, und mit (d, d')-Prozessen ist es nicht anregbar. Die erwähnten angeregten Niveaus haben höchstwahrscheinlich genau $T=1$; $T_3=0$, so daß sie über (d, d')- und (d, α)-Prozesse nicht vom Grundzustand $(T=0)$ aus erreichbar sind. Eine α-Emission aus Li^6 kann dann auch nicht auftreten, weil die Zerfallsprodukte α und d (beide haben $T=0$; $T_3=0$) nicht von einem Zustand $T=1$ herrühren können.

Die *γ-Emission* wird durch die Erhaltung des Isospins, auch wenn diese „gute Quantenzahlen" darstellen, praktisch nicht beeinflußt, weil die Auswahlregeln fast immer von selbst erfüllt sind. Letztere lauten (Radicati, [R 52-2]):

Für elektrische Dipolübergänge $\Delta T = \pm 1$, wenn $T_3 = 0$;

für alle Multipolübergänge $\Delta T = 0; \pm 1$, wenn $T_3 \neq 0$.

Es ist anzumerken, daß dieselben Auswahlregeln auch für die *γ-Absorption* gelten und damit beim Kernphotoeffekt zur Auswirkung gelangen können.

§ 45. Thermonukleare Reaktionen

Unter thermonuklearen Reaktionen verstehen wir Kernreaktionen, bei denen die kinetische Stoßenergie der Reaktionspartner aus der Wärmebewegung stammt. Wir betrachten sie in diesem und in dem nachfolgenden Paragraphen wegen ihrer überragenden Bedeutung für das Problem der Energiequellen sowohl in der Natur als auch möglicherweise in einer zukünftigen Technik. Sie geben zugleich Gelegenheit für eine nützliche Anwendung der Theorie der Kernreaktionen geladener Teilchen.

Ebenso wie chemische Reaktionen in heißen Gasen, können bei hinreichend hoher Temperatur auch Kernreaktionen durch thermische Zusammenstöße eintreten. Die mittleren kinetischen Energien der Gasatome sind allerdings selbst bei Temperaturen von der Größenordnung 10^6 bis 10^7 °K noch so klein, daß bei den meisten Zusammenstößen die elektrische Abstoßung der Atomkerne eine Kernreaktion verhindert. Denn selbst bei 10^7 °K beträgt die mittlere kinetische Energie der Zusammenstöße nur $\approx 1{,}7$ keV. Aber mehrere Faktoren ermöglichen trotzdem den Eintritt einer merklichen thermonuklearen Reaktion in hocherhitzten Gasen:

1. Auch geladene Teilchen haben vermöge des *wellenmechanischen Tunneleffektes* selbst bei niedrigen Energien eine endliche, wenn auch sehr geringe Wahrscheinlichkeit,

eine Kernreaktion hervorzurufen. So wurden z. B. D-D-Reaktionen schon bei ≈ 5 keV beobachtet.

2. Nach *Maxwells Verteilungsgesetz* der Geschwindigkeiten gibt es stets einen endlichen Prozentsatz von Gasatomen mit kinetischen Energien, welche den Mittelwert $\frac{3}{2}\,kT$ wesentlich übertreffen.

3. Die *außerordentliche Häufigkeit* der gaskinetischen Zusammenstöße in einem hocherhitzten Gase nicht zu kleiner Dichte kann sehr wohl die Kleinheit der Reaktionswahrscheinlichkeit bei einem einzelnen Stoß ausgleichen.

Wir geben im folgenden eine Abschätzung der zu erwartenden Effekte. Der Wirkungsquerschnitt beim Zusammenstoß geladener Teilchen beträgt nach (39.3), wenn wir, wie dort, nur hinreichend exotherme Reaktionen in Betracht ziehen und unter E die kinetische Energie der *Relativbewegung* verstehen,

$$\sigma = \frac{C_1}{E}\, e^{-\frac{B}{\sqrt{E}}}\,. \tag{45.1}$$

Hierin ist die Zerfallswahrscheinlichkeit des Compoundkerns bzw. die Γ-Breite $\Gamma_b(E)$ des *auslaufenden* Teilchens b als *unabhängig* von der Energie E der stoßenden Teilchen angenommen. Das ist um so mehr berechtigt, als wir lediglich stark exotherme Reaktionen betrachten und de facto Gl. (45.1) nur in einem sehr schmalen Energieintervall benutzen werden. Die Zahl dN der gaskinetischen Zusammenstöße pro cm³ und sec zwischen Gasatomen der Sorten 1 und 2, bei denen die kinetische Energie der Relativbewegung im Intervall E bis $E + dE$ liegt, beträgt nach der kinetischen Gastheorie[1])

$$dN = C_2\, \sigma_{\text{Stoß}}\, E\, e^{-\frac{E}{kT}}\, dE\,, \tag{45.2}$$

mit

$$C_2 = \frac{4 n_1 n_2}{(2\pi\mu)^{1/2}\,(kT)^{3/2}}\,. \tag{45.3}$$

Darin bedeuten n_1 und n_2 die Atomzahlen pro cm³ für die Atomsorten 1 und 2, ferner μ die reduzierte Masse der beiden stoßenden Teilchen, T die Gastemperatur und $\sigma_{\text{Stoß}}$ den gaskinetischen Stoßquerschnitt.

Nach (45.2) beträgt die *mittlere kinetische Energie der Relativbewegung* bei den Zusammenstößen $= 2kT$. Oft drückt man kT in eV aus, indem man laut Definition $kT = eV$ setzt. Es entspricht dann

$$1 \text{ keV} \to 1{,}16 \cdot 10^7\ {}^\circ\text{K}.$$

Ersetzen wir nun $\sigma_{\text{Stoß}}$ durch σ aus (45.1), so erhalten wir die Zahl dN_r der Kernreaktionen pro cm³ und sec im Energieintervall dE bei E:

$$dN_r = C_1 C_2\, e^{-\left(\frac{B}{\sqrt{E}} + \frac{E}{kT}\right)}\, dE\,. \tag{45.4}$$

---

[1]) Die Form der E-Abhängigkeit von dN ist leicht zu ersehen, wenn die *gestoßenen Atome ruhen.* Dann ist dN proportional der Geschwindigkeit $(\sim\sqrt{E})$ mal der Zahl der stoßenden Atome mit E im Intervall dE $\left(\sim \sqrt{E}\exp\left(\frac{-E}{kT}\right)\, dE\right)$. Das Produkt ergibt (45.2). Zum allgemeinen Fall siehe z. B. Fowler, Statistische Mechanik, Leipzig 1931, § 16.2.

Der Exponent hat ein Minimum bei

$$E_m = (\tfrac{1}{2}\, BkT)^{2/3},$$

worin $B = 31{,}4 \cdot zZ\,\sqrt{a_{\text{red}}}\,[\text{keV}]^{1/2}$ ist (s. (39.2); $a_{\text{red}} = \dfrac{\mu}{m_p}$ ist die reduzierte Massen*zahl*, μ die reduzierte Masse der beiden Stoßpartner; m_p = Masse eines Protons). In der Umgebung des Minimums erhalten wir durch Entwicklung nach $E - E_m$ bis zur zweiten Ordnung, d.h. bei Annäherung mittels einer oskulierenden Parabel,

$$dN_r = C_1 C_2\, e^{-\frac{3E_m}{kT}}\, e^{-\frac{3E_m}{4kT}\left(\frac{E - E_m}{E_m}\right)^2} dE. \tag{45.5}$$

Da in praktischen Fällen $\dfrac{E_m}{kT} \gg 1$ ist, wird die Exponentialfunktion in (45.5) eine schmale Gaußsche Fehlerkurve. Abb. 89 veranschaulicht das Zustandekommen des scharfen Maximums durch Multiplikation der stark mit wachsenden E abfallenden Kurve der Maxwell-Verteilung mit dem gleichzeitig stark ansteigenden Wirkungsquerschnitt σ_r. Als Gesamtzahl der Reaktionen pro cm³ und sec erhalten wir – mit dem bekannten Wert für das Gaußsche Fehlerintegral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ – nach passender Umformung unter Beibehaltung der experimentell beobachtbaren Größen C_1 und B

$$N_r = 8\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n_1 n_2 \frac{C_1}{B\,\mu^{1/2}} \left(\frac{B^2}{4kT}\right)^{2/3} e^{-3\left(\frac{B^2}{4kT}\right)^{1/3}}.$$

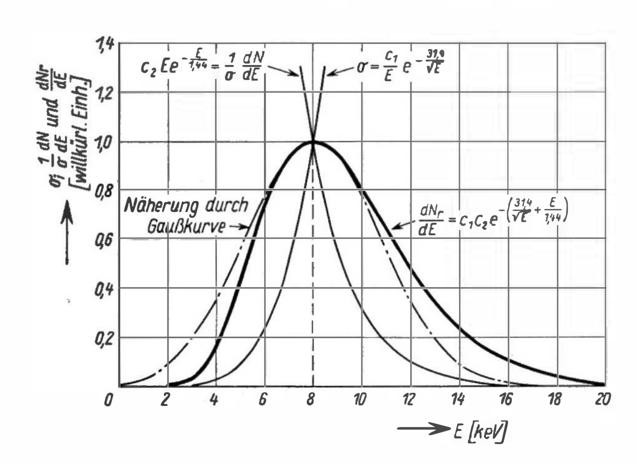


Abb. 89. Ein numerisches Beispiel zu Gl. (45.1; 2; 4 und 5) für $a = 1$; $z = Z = 1$ und $E_m = 8$ keV, d. h. $kT = 1{,}44$ keV ($T = 16{,}7 \cdot 10^6$ °K). C_1 und C_2 sind so gewählt, daß alle Kurven bei $E = E_m$ die Ordinate 1 erhalten. Die Näherung durch die Gaußsche Glockenkurve ist ausreichend, da es nur auf die unter ihr liegende Fläche ankommt.

Wir schreiben dafür auch

$$N_r = C\,\Theta^2 e^{-\Theta} \tag{45.6}$$

mit

$$C = \frac{8 \cdot 2^{1/2}}{9 \cdot 3^{1/2}} \frac{n_1 n_2}{a^{1/2}} \frac{C_1}{B\, m_p^{1/2}}, \qquad \Theta = \frac{3}{4^{1/3}} \left(\frac{B^2}{kT}\right)^{1/3}.$$

Θ ist dimensionslos. Um C in $\mathrm{cm}^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$ zu erhalten, ist bei Wahl des cgs-Systems in (45.2) und (45.3) C_1 in cm^2 erg, B in $\mathrm{erg}^{1/2}$ und m_p in g einzusetzen. Zur numerischen Auswertung wollen wir aber E, kT und B^2 in keV und C_1 in cm^2 keV messen, um leichteren Anschluß an (39.5) zu gewinnen. Die Umrechnung ergibt (mit 1 keV $= 1{,}60 \cdot 10^{-9}$ erg; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g) numerisch

$$C = 7{,}16 \cdot 10^5\, C_1 \frac{n_1 n_2}{z Z a}\,, \qquad \Theta = 18{,}8\,(zZ)^{2/3}\left(\frac{a_{\mathrm{red}}}{kT}\right)^{1/3} \tag{45.7}$$

(kT in keV, C_1 in keVcm², n_1 und n_2 in cm^{-3}, C in $\mathrm{cm}^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$).

Sind alle stoßenden Teilchen miteinander identisch, so hat man $\frac{1}{2}n^2$ anstelle von $n_1 n_2$ zu setzen: Bei zwei verschiedenen Teilchensorten „1" und „2" gibt es $n_1 n_2$ Teilchenpaare, deren Zusammenstöße uns interessieren. Die sekundliche Stoßzahl wird dann proportional zu $n_1 n_2$. Sind aber n identische Teilchen im gleichen Raum wie oben eingeschlossen, so wird die Stoßzahl proportional zu $\frac{n^2}{2}$, da jetzt $\binom{n}{2}$ Teilchen-Paare zur Reaktion vorhanden sind, was bei großem n gerade $\frac{n^2}{2}$ ergibt.

Die Temperaturabhängigkeit der Reaktion wird im wesentlichen durch den e-Faktor bestimmt. Wenn man in einem hinreichend kleinen T-Intervall (45.6) durch ein Potenzgesetz annähert und

$$N_r = \left(\frac{N_r}{T^m}\right)_0 T^m$$

setzt, so findet man für den Exponenten m

$$m = \frac{d(\ln N_r)}{d(\ln T)} = \frac{1}{3}(\Theta - 2)\,.$$

Bei der numerischen Auswertung wird man den Faktor C_1 in (45.1) experimentellen Daten entnehmen, da die Theorie z.Z. nur seine Größenordnung verständlich machen kann. Die theoretische *Form* der E-Abhängigkeit steht dagegen in sehr guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Man extrapoliert so mit Hilfe der Beziehung (45.1) die im Bereich von etwa 20 bis 200 keV gemessenen σ-Werte auf das Gebiet $\lesssim 10$ keV. Dieses Vorgehen ist dadurch gerechtfertigt, daß bei den in Frage stehenden Temperaturen um 10^7 °K praktisch nur die leichtesten Kerne als Reaktionspartner in Betracht kommen und bei diesen die Resonanzabstände so groß sind, daß man im Energieintervall von 0 bis einigen keV höchstwahrscheinlich keine Resonanzen zu erwarten hat, wenn in dem gemessenen Bereich von etwa 100 keV abwärts bis zu rd. 20 keV keine Andeutungen von Resonanzen vorliegen und die experimentellen σ-E-Werte sich gut durch (45.1) darstellen lassen. Gegebenenfalls ist ein Resonanzfaktor in σ zu berücksichtigen.

Wir betrachten als Beispiel die D-D-*Reaktion*.

Für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt nach Umschreibung von (39.5) auf die Energie der Relativbewegung E — indem wir dort $2E$ statt E schreiben — für $E < 50$ keV

$$\sigma_{\mathrm{DD}} = 144\,E^{-1} \exp[-32{,}4\,E^{-1/2}]$$

(σ in barn, E in keV; s. auch Abb. 83a).

Daraus ergibt sich nach (45.6) und (45.7) mit $C_1 = 144 \cdot 10^{-24}$ cm² keV und $a_{\text{red}} = 1$ als Reaktionsgeschwindigkeit im Bereich $E < 50$ keV

$$N_r = n^2\, 1{,}82 \cdot 10^{-14}\, (kT)^{-2/3} \exp\left[-18{,}8\, (kT)^{-1/3}\right]$$

(kT in keV; n = Zahl der D-Atome/cm³). Der wesentlichste Beitrag stammt von den Zusammenstößen mit einer Energie in der Nähe von

$$E_m = kT \cdot \frac{6{,}25}{(kT)^{1/3}} \tag{45.8}$$

(E_m und kT in keV), während die mittlere thermische Energie $E_{\text{therm}} = \frac{3}{2}\, kT$ beträgt. Den Hauptbeitrag liefern in den praktisch vorkommenden Fällen die Zusammenstöße mit einem Mehrfachen der mittleren Energie der Gasteilchen; bei $kT = 1$ keV z.B. die mit einer rd. 4fachen der mittleren thermischen Energie.

Die D-D-Reaktion besteht aus den beiden möglichen Prozessen D(d, p) T³, $Q = 4{,}0$ MeV, und D(d, n) He³, $Q = 3{,}25$ MeV, die mit fast gleicher Häufigkeit auftreten. Die mittlere Energieerzeugung pro Reaktion beträgt einschließlich der kinetischen Energie der Neutronen (wenn wir den Energiegewinn durch *sekundäre* Prozesse der freigemachten Neutronen nicht mitzählen) also $= 3{,}6$ MeV $= 5{,}8 \cdot 10^{-13}$ Watt sec pro Prozeß. Bei einer Dichte von z. B. 0,14 g/cm³, was der Dichte flüssigen Deuteriums entspricht, ist

$$n = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}14 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{23} = 0{,}42 \cdot 10^{23}/\text{cm}^3,$$

und die erzeugte Leistungsdichte ergibt sich zu

$$W = 1{,}9 \cdot 10^{19}\, (kT)^{-2/3} \exp\left(-18{,}8\, (kT)^{-1/3}\right) [\text{Watt/cm}^3].$$

Bei z. B. $kT = 1$ keV $\rightarrow 1{,}16 \cdot 10^7$ °K ist $W \approx 1{,}4 \cdot 10^{11}$ Watt/cm³ (oder $\approx 1 \cdot 10^{12}$ Watt/g). Der Temperaturgang ist in Abb. 90 dargestellt. In ähnlicher Weise können — unter möglichster Anlehnung an die experimentellen Daten über Wirkungsquerschnitte — auch Reaktionen mit anderen leichten Kernen berechnet werden.

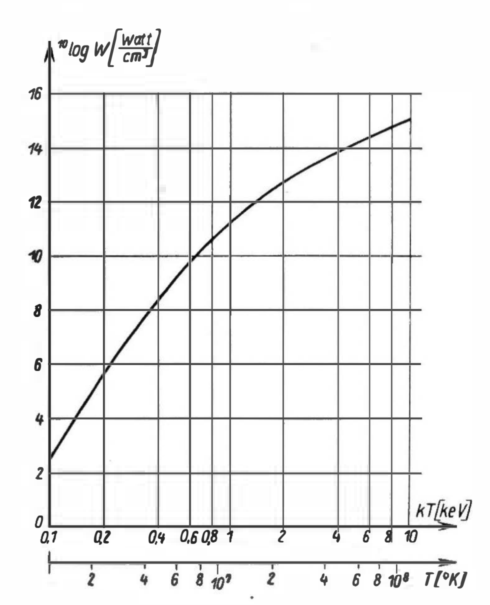


Abb. 90. Leistungsdichte der thermonuklearen D-D-Reaktion als Funktion der Gastemperatur T bei einer angenommenen Dichte = 0,14 g/cm³. Sekundäre Neutronenprozesse sind nicht mitgerechnet. Sie würden W mindestens verdoppeln. (Umrechnung kT in °K nach $kT = eV$)

Nach Abb. 83 hat die D-T-Reaktion einen um über 100 mal größeren Wirkungsquerschnitt als der D-D-Prozeß

bei gleicher Energie bzw. Temperatur. Eine echte thermonukleare Reaktion ist daher — unter den hier betrachteten Prozessen — praktisch am ehesten in einem D-T-Gemisch zu verwirklichen.

In Tabelle 29 sind einige im Zusammenhang mit thermonuklearen Reaktionen in Frage kommende Prozesse und ihre Q-Werte zusammengestellt. Die Reaktionen mit leichtem Wasserstoff besprechen wir im nächsten Paragraphen.

Tabelle 29. Q-Werte einiger thermonuklearer Prozesse

Reaktion	Q [MeV]	Reaktion	Q [MeV]
D^2 (p, γ) He^3	5	Li^6 (d, α) He^4	22,4
D^2 (d, n) He^3	3,25	Li^6 (d, p) Li^7	5,2
D^2 $(n, 2n)$ H^1	— 2,19	Li^7 (d, p) 2 He^4	17,3
D^2 (d, p) T^3	4,0	Li^7 (p, γ) 2 He^4	17,2
T^3 $(t, 2n)$ He^4	11	Li^7 (p, α) He^4	17,2
T^3 (d, n) He^4	17,6	Li^7 (d, n) 2 He^4	14,6
He^3 (d, p) He^4	18,3	Li^7 (p, n) Be^7	— 1,65
Li^6 (n, α) T^3	4,56	Be^9 $(n, 2n)$ 2 He^4	— 1,66

Um eine gesteigerte Wirkung zu erzielen, kann man die thermonukleare Reaktion auch mit anderen Kernprozessen koppeln, welche eine *Reaktionskette* auslösen können und darüber hinaus das für den eigentlichen thermonuklearen Prozeß erforderliche Material nachliefern, falls dieses sonst schwer herstellbar ist.

In einem Gas, welches D^2, T^3 und Li^6 enthält, werden die Reaktionen $T^3(d, n)$ He^4 mit ihrem großen Wirkungsquerschnitt und Li^6 (n, α) T^3 mit der Schwellenenergie Null (kein Coulomb-Wall!) bevorzugt ablaufen. Das Neutron für die Li^6-n-Reaktion kann von der ersten T-D-Reaktion stammen und das hierbei verbrauchte T durch den zweiten Prozeß an Li^6 wiedergewonnen werden. Bei diesem Zyklus werden $Li^6 + D^2$ schließlich in 2 He^4 verwandelt, wobei T^3 und n als „Katalysatoren" fungieren. Der direkte Prozeß Li^6 (d, α) He^4 ist durch die dreifache Ladung des Li stark gehemmt. Als „Neutronenquelle" für den Li^6-n-Prozeß kann auch die Reaktion T^3 $(t, 2n)$ He^4 dienen oder auch eine andere, z.B. die D(d,n)- oder die Be^9 $(n, 2n)$-Reaktion. Ferner eignet sich dazu auch die Spaltung von U^{238} durch schnelle Neutronen mit mehr als 1,1 MeV, wobei zusätzlich eine beträchtliche Spaltungsenergie frei würde (s. Abschnitt 3 von Kap. VI, Kernspaltung).

Lithiumhydrid in der Form Li^6D^2 mit evtl. einem gewissen Anteil Li^6T^3 erscheint daher als eine aussichtsreiche Ausgangssubstanz zur Erzeugung einer thermonuklearen Reaktion. Die eigentlich thermische Reaktion findet im T-D-Prozeß (oder D-d-Prozeß) statt, während die Li^6-n-Reaktion für die Nachlieferung des (sonst sehr kostspieligen und technisch unbequemen) Tritiums sorgt.

Bei diesem zyklischen Reaktionsablauf vergrößert sich nicht die Zahl der T-Atome, sie bleibt konstant, sofern Neutronenverluste aus dem Reaktionsvolumen kompensiert werden können. Eine der oben genannten *neutronenvermehrenden* Reaktionen,

evtl. unterstützt durch einen Neutronen-Reflektor um den Reaktionsraum, kann zur Kompensation der Verluste oder gar zur Überkompensation derselben dienen. Im letzteren Falle würde eine besonders rasante – nach Art autokatalytischer *Kettenreaktionen* lawinenartig anwachsende – *Reaktionsgeschwindigkeit* auftreten und zu einer extrem effektiven Explosion führen (H-Bombe).
Zur technischen Nutzbarmachung thermonuklearer Energie ist dagegen ein steuerbarer Reaktionsablauf notwendig, eine Aufgabe, welche z. Z. noch der Lösung harrt. Ihre erfolgreiche Durchführung erhöbe die D-D-Reaktion bzw. den D-T-Prozeß zu einer unerschöpflichen Quelle praktisch unbegrenzter Energiemengen, da in gewöhnlichem Wasser etwa 0,016% Deuterium enthalten ist, welches sich noch relativ bequem durch Isotopentrennung rein darstellen läßt.
Die Realisierung eines solchen Projektes ist zunächst mit einem D-T-Gasgemisch zu erwarten. Es erscheint als möglich, mit Hilfe der aus der $T^3(d,n)He^4$-Reaktion entstehenden 14,1 MeV-Neutronen, nach einer Neutronenvermehrung durch $(n,2n)$-Prozesse z. B. an Be, Pb oder Bi, mittels der (n,α)-Reaktion an Li^6 mehr als die jeweils verbrauchte Tritiummenge wieder zu gewinnen. Bis zur Erschöpfung des Vorrats an Li^6 wäre demnach die D-T-Reaktion als die technisch aussichtsreichste thermonukleare Energiequelle zu betrachten.

§ 46. Thermonukleare Reaktionen als Quelle der stellaren Energie

Bis zur Entwicklung der Physik der Kernreaktionen kannte man als mögliche Quelle der Sonnenstrahlung – abgesehen von der durch J. R. MAYER (1846) zuerst erkannten Energie der auf die Sonne stürzenden interstellaren Massen, Meteore usw., deren Beitrag allerdings schwer abzuschätzen ist – nur die von H. v. HELMHOLTZ (1861) aufgezeigte, bei der Kontraktion eines Gasballes freiwerdende Gravitationsenergie. Da aber auf diese Weise die Strahlungsleistung der Sonne mit der gegenwärtigen Intensität höchstens für einige 10^7 Jahre gesichert ist, dagegen alle geologischen und astronomischen Tatsachen als bisheriges Lebensalter der Sonne mehr als $4 \cdot 10^9$ Jahre fordern, ist die Gravitation bei weitem keine ausreichende Energiequelle.
Nach heutiger Kenntnis kommen für sonnenähnliche Sterne in der Hauptsache nur Kernprozesse als Energiequellen in Betracht. Man nimmt an, daß im heißesten, zentralen Teil der Sterne die Energie durch thermonukleare Reaktionen der leichtesten Kerne mit dem Hauptbestandteil der Sternmaterie, dem (leichten) Wasserstoff, erzeugt wird. Eine erste quantitative Berechnung wurde von ATKINSON und HOUTERMANS [A 29-1] angestellt und später von v. WEIZSÄCKER, GAMOW und TELLER, BETHE, CRITCHFIELD, SALPETER systematisch ausgebaut. In Tabelle 30 sind (s. auch H. BETHE [B 39-1] und G. GAMOW [G 39-1]) einige der unter den Bedingungen im Sonnenzentrum möglichen Kernreaktionen mit ihren Q-Werten und ihren Reaktionszeiten zusammengestellt.

Tabelle 30. Q-Werte und Reaktionszeiten einiger Kernreaktionen im Sonneninnern

Reaktion	Mittlere Reaktionszeit	Q [MeV]	Reaktion	Mittlere Reaktionszeit	Q [MeV]
H^1 (p, β^+) D^2	$1{,}5 \cdot 10^{10}$ a	1,18	C^{13} (p, γ) N^{14}	$5 \cdot 10^4$ a	7,6
D^2 (p, γ) He^3	2 sec	5,4	N^{14} (p, γ) O^{15} β^+	$4 \cdot 10^6$ a	7,3
T^3 (p, γ) He^4	0,2 sec	19,8	N^{15} (p, α) C^{12}	20 a	4,8
Li^6 (p, α) He^3	5 sec	3,8	O^{16} (p, γ) F^{17} β^+	10^{12} a	0,5
Li^7 (p, α) He^4	1 min	17,3	F^{19} (p, α) O^{16}	$3 \cdot 10^7$ a	8,2
Be^9 (p, α) Li^6	15 min	2,2	Ne^{22} (p, γ) Na^{23}	$2 \cdot 10^{13}$ a	10,0
B^{10} (p, γ) C^{11} β^+	10^3 a	8,6	Mg^{26} (p, γ) Al^{27}	10^{17} a	7,5
B^{11} (p, α) 2 He^4	3 d	8,8	Si^{30} (p, γ) P^{31}	$3 \cdot 10^{20}$ a	6,5
C^{11} (p, γ) N^{12} β^+	10^8 a	0,4	Cl^{37} (p, γ) Ar^{38}	$2 \cdot 10^{25}$ a	11,0
C^{12} (p, γ) N^{13} β^+	$2{,}5 \cdot 10^6$ a	1,9			

Die für Tabelle 30 angenommenen Zustandsgrößen zur Berechnung der mittleren Reaktionszeiten sind $T = 2 \cdot 10^7$ °K, Dichte $= 80$ g/cm³, Wasserstoffgehalt $= 35\%$. Wegen der $H^1(p,\beta^+)$-Reaktion s. weiter unten.

Alle Elemente außer He und solchen, die zu (p,α)-Prozessen führen, bauen sich durch (p,γ)-Reaktionen mit eventuell nachfolgender Emission eines β^+-Teilchens sukzessive auf. Die β^+-strahlenden Endkerne mit ihren mittleren Lebensdauern sind C^{11} (29,4 min); N^{12} (0,018 sec); N^{13} (14,5 min); O^{15} (2,98 min) und F^{17} (1,59 min). Sie kommen im Sonneninnern als Targetkerne ebensowenig wie T^3 in Frage, weil sie zu schnell spontan zerfallen. Man bemerkt nun, daß die Isotope unterhalb C bei fortschreitendem Aufbau sich zuletzt in He^4 verwandeln. Jeder der Kerne unterhalb C führt entweder direkt zu He^4 oder irgendeinmal zum *Zwischenkern* Be^{8*} oder C^{12*}, die beide momentan in α-Teilchen zerfallen. He^3, das in Tabelle 30 nicht als Zielkern angeführt ist, kann sich u. a. wie folgt in He^4 umwandeln:

$$He^3 + He^4 \rightarrow Be^7 + \gamma; \quad Be^7 + e^- \rightarrow Li^7; \quad Li^7 + H^1 \rightarrow 2\,He^4.$$

Eine andere Möglichkeit ist in Tabelle 31 (S. 220) angegeben.

Reaktionen von H^1 mit He^4 kommen nicht vor, weil Li^5 als Endkern nicht existenzfähig ist. Die oben (in Tabelle 30 links) genannten Reaktionen erfolgen — im astronomischen Zeitmaß gesehen — so schnell, daß die Elemente unterhalb C^{12} (ausgenommen H^1 und He^4) heute *im Sonnenzentrum* alle aufgebraucht sein müssen — bis auf geringfügige Reste, die durch die weiter unten zu besprechenden Prozesse dauernd nachgebildet werden. Das gleiche gilt für F^{19}. Von diesem Sonderfall (F^{19}) abgesehen, verlaufen andererseits alle Reaktionen oberhalb N^{15} so langsam, daß sie keinen merklichen Beitrag zur Energieerzeugung liefern können.

Bei den Kernen von C^{12} bis N^{15} erkannten nun v. WEIZSÄCKER [W 38-1] und BETHE [B 39-1] die Möglichkeit einer zyklischen Reaktionskette (C-N-*Zyklus*), in deren Verlauf als Endresultat vier H^1-Kerne zu He^4 zusammentreten, während dabei die als „Katalysatoren" wirkenden Isotope C^{12}, C^{13}, N^{14} und N^{15} im Zyklus sich stets reproduzieren.

Die Abbildung 91 veranschaulicht den Vorgang: C^{12} fängt ein H^1 unter γ-Emission ein und verwandelt sich dadurch in N^{13}, welches durch β^+-Strahlung in C^{13} übergeht.[1]) Aus diesem entsteht wiederum durch H^1-Einfang N^{14} und hieraus durch einen nochmaligen (p, γ)-Prozeß das β^+-aktive Isotop O^{15}, welches sich spontan in N^{15} umwandelt. Bei der darauf folgenden Aufnahme eines H^1 kommt nun überraschenderweise eine α-Emission zustande, wodurch sich der Kohlenstoff C^{12} regeneriert, so daß er noch einmal denselben Prozeß katalysieren kann usw. Bei jedem Zyklus, der – je nach der Temperatur – in einigen 10^7 bis 10^8 Jahren abläuft, entsteht aus 4 H^1-Kernen ein He^4. Dabei gehen rund 0,7% der Masse des umgewandelten Wasserstoffs (= 25 MeV pro He^4) letztlich in Wärmeenergie über, und 1 g umgewandeltes H liefert $6 \cdot 10^{18}$ erg.
Etwa 7% der gesamten entwickelten Energie, d. h. $\approx 1{,}7$ MeV pro Zyklus ($= \frac{5}{8}$ der Gesamtenergie der β-Umwandlungen), gehen in Form von *Neutrinostrahlung*

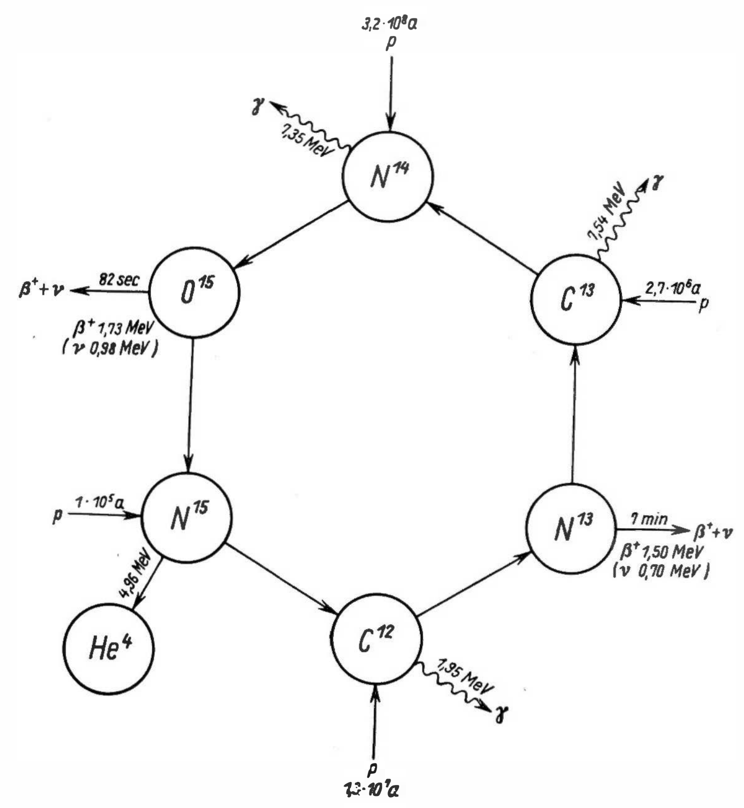


Abb. 91. C-N-Zyklus. Die angegebenen Zeiten bedeuten bei β^+ mittlere Lebensdauern und bei p die mittleren Reaktionszeiten im Sonneninnern

[1]) Die in Abb. 91 angegebenen Reaktionszeiten entstammen einer neueren Arbeit [F 54-2], in der $T = 1{,}3 \cdot 10^7$ °K und eine H-Dichte von 100 g/cm³ angenommen werden.

verloren, da diese in der Sonne nicht absorbiert wird. In den etwa $4 \cdot 10^9$ Jahren, während der die Sonne im heutigen Zustand existiert, müssen $8 \cdot 10^{31}$ g H in He^4 umgewandelt worden sein, was $\approx 4\%$ der Sonnenmasse oder $\approx 10\%$ ihres gesamten Wasserstoffs ausmacht. (Sonnenmasse $= 2{,}0 \cdot 10^{33}$ g; Strahlung $= 3{,}7 \cdot 10^{33}$ erg/sec $= 3{,}7 \cdot 10^{23}$ kW $= 4{,}1 \cdot 10^6$ t/sec.)

Die genauere Berechnung des C-N-Zyklus zeigt nun, daß sie die tatsächlich beobachtete Strahlungsleistung der Sonne erklären kann. Die Mittelpunktstemperatur ist gemäß den heutigen Theorien über den Sternaufbau mit etwa (1,3 bis) $2 \cdot 10^7$ °K, der Wasserstoffgehalt mit etwa 40 bis 50% anzunehmen. Dann reicht schon eine relative C-Konzentration von $\approx 1\%$ aus, um im Zentralgebiet der Sonne etwa 100 erg/g · sec zu erzeugen. Da die zur Erklärung der Sonnenstrahlung notwendige Leistungsdichte in dieser Größenordnung liegt, wird ersichtlich, daß die anzunehmende C- (und N-) Konzentration im Sonneninnern nicht im Widerspruch zu anderen astrophysikalischen Beobachtungen steht. Im übrigen können Fehler im angenommenen C-Gehalt schon durch eine kleine Änderung der Mittelpunktstemperatur wieder kompensiert werden, da beim C-N-Zyklus die Energieproduktion mit T^{18} (bei $2 \cdot 10^7$ °K) bis T^{20} (bei $1{,}3 \cdot 10^7$ °K) ansteigt.

Eine *zweite mögliche Quelle* der stellaren Energie wurde von BETHE und CRITCHFIELD [B 38-1] in der $H^1(p, \beta^+)D^2$-*Reaktion* erkannt. Ein (p, β^+)-Prozeß an H^1 ist im Laboratorium nicht beobachtet. Da He^2 nicht einmal als β^+-instabiler Kern existiert, kommt eine $H^1(p, \gamma)He^2$-Reaktion nicht vor, und die β^+-Emission muß während des Zusammenstoßes der beiden H^1-Kerne stattfinden, um ein D^2 entstehen zu lassen. Nun erfolgt aber eine β-Emission i. allg. um einen Faktor der Ordnung 10^{14} bis 10^{20} langsamer als ein γ-Prozeß, weswegen eine $H^1(p, \beta^+)$-Reaktion ein äußerst seltenes Ereignis darstellt. Trotzdem kann – wegen der außerordentlichen Häufigkeit der gegenseitigen Zusammenstöße der Protonen im Sterninnern – die Reaktion

$$H^1 + H^1 \rightarrow D^2 + \beta^+ + \nu \tag{46.1}$$

($\nu =$ Neutrino) eine merkbare Intensität erreichen.

Für diesen Prozeß steht aus der Massendifferenz zwischen zwei Protonen und einem Deuteron die Energie von $1{,}83\ m_e c^2 = 0{,}93$ MeV zur Verfügung. Von dieser Energie wird ein Positron (0,51 MeV) mit der kinetischen Energie 0,16 MeV erzeugt und der Rest (0,26 MeV) durch das Neutrino abgeführt. Das entstandene Positron zerstrahlt praktisch momentan zusammen mit irgendeinem Elektron unter Entwicklung von 1,02 MeV. Der beobachtbare Teil der im Gefolge der Reaktion (46.1) freigesetzten Energie beträgt daher 1,18 MeV (s. Tabelle 30). Die Gesamtenergie einschließlich der Neutrinostrahlung entspricht dagegen mit 1,44 MeV dem Dublett-Abstand $H_2 - D = 1{,}54$ TME. Der Reaktionsquerschnitt läßt sich aus der Energiedifferenz von $1{,}83\ m_e c^2$ in (46.1) unter einigen Annahmen über die Art des β^+-Prozesses mittels der Theorie des β-Zerfalls abschätzen. Das einmal nach (46.1) entstandene D „verbrennt" dann durch weitere Reaktionen zu He^4. Die dabei vorkommenden Prozesse und Reaktionszeiten sind

(für $T = 1{,}3 \cdot 10^7$ °K; Dichte mal Molkonzentration des Wasserstoffs = 100 g/cm³) in Tabelle 31 zusammengestellt, [U 57-1].

Tabelle 31. Energieerzeugung durch die H-H-*Reaktion*

Reaktion	Q [MeV]		mittlere Reaktionszeit
$H^1\ (p,\ \beta^+)\ D^2$	0,16 + (0,26)	×2	$14 \cdot 10^9$ a
$\beta^+ + e^- \rightarrow 2\,\gamma$	1,02	×2	0
$D^2\ (p,\ \gamma)\ He^3$	5,5	×2	5,7 sec
$He^3\ (He^3,\ 2\,p)\ He^4$	12,8	×1	10^6 a

Die Neutrinoenergie ist eingeklammert.

Insgesamt entsteht aus 4 H^1 ein He^4, wobei die ersten drei Prozesse der Tabelle 31 doppelt vorkommen. Die Energietönung ist 26,2 MeV pro He^4. (Der Energieverlust durch Neutrinos beträgt hier 0,52 MeV, d.h. um 1,2 MeV weniger als beim C-N-Zyklus.) Der Temperaturgang der H-H-Reaktion ist in der Nähe von $1{,}3 \cdot 10^7$ °K proportional zu T^4 und ist also wesentlich schwächer als beim C-N-Zyklus.

Es wird derzeit als wahrscheinlich angesehen, daß bei sonnenähnlichen Sternen der C-N-Zyklus im Vergleich zur H-H-Reaktion die größere oder wenigstens eine etwa gleich starke Energiequelle darstellt. Bei $T \approx 1{,}5 \cdot 10^7$ °K halten sich beide Prozesse die Waage. Bei tieferen Temperaturen überwiegt die H-H-Reaktion, bei höheren der C-N-Prozeß.

Bei Temperaturen über $2 \cdot 10^8$ °K kann ein weiterer Prozeß, der sog. *Salpeter-Prozeß* (E. E. Salpeter, 1951), hinzukommen. Hier verwandeln sich drei He^4-Kerne in einer Art „Dreierstoß" wie folgt in C^{12}:

$$He^4 + He^4 + 95\ \text{keV} \rightarrow Be^8 + \gamma;$$

$$Be^8 + He^4 \rightarrow C^{12} + \gamma + 7{,}4\ \text{MeV}.$$

Die letzte Reaktion muß dabei während der kurzen Lebenszeit des (α-instabilen!) Be^8 erfolgen, welches im thermodynamischen Gleichgewicht in dem zentralen Teil gewisser Sterne mit der rel. Konzentration $\approx 10^{-10}$ vorkommen soll.

Hiermit ist die Reihe der Prozesse abgeschlossen, welche heute im wesentlichen als die wichtigsten Kernreaktionen bei der Energieerzeugung im Innern der Sterne erkannt sind.

3. KERNSPALTUNG

§ 47. Die Tatsachen der Kernspaltung

Bei Reaktionen mit den schwersten Kernen am Ende des Periodischen Systems der Elemente beobachtet man nicht nur Prozesse mit Emission von α-Teilchen, Neutronen oder Protonen; der entstehende Compoundkern kann auch durch *Kernspaltung* in zwei etwa gleiche Teile zerfallen.

Im Rahmen der Bohrschen Compoundvorstellung läßt sich dieser Vorgang nach dem *Modell des schwingenden Tröpfchens* verstehen: Der durch den Einfang etwa eines Neutrons entstandene Compoundkern (z. B. U^{236}) ist mindestens mit der Bindungsenergie des absorbierten Neutrons angeregt. Offenbar kann die Anregungsenergie nicht nur, wie bisher angenommen wurde, in Form einer fast statistisch ungeordneten Bewegung der Kernnukleonen aufgespeichert sein, sie kann auch als eine Schwingung des Kerntröpfchens als Ganzes auftreten. Wenn dabei die Schwingungsamplitude hinreichende Stärke erreicht, kann der Kern – wie ein makroskopischer Tropfen – sich im Mittelteil einschnüren und darauf in zwei annähernd gleich große Teile zerspalten.

Die Kerne am Ende des Periodischen Systems sind für einen solchen Zerfall prädestiniert, weil die Abstoßungskräfte ihrer starken Ladungen einem derartigen Prozeß Vorschub leisten. So spalten die Kerne U^{233}, U^{235}, Pu^{239}, Pu^{241} und weitere noch schwerere Kerne wie Am^{242} Cm^{242} schon bei Anlagerung eines *langsamen* Neutrons. Th^{232}, U^{238} oder Pu^{240} sind nur durch *schnelle* Neutronen mit Energien über etwa 1 MeV spaltbar.

In diesem Massenbereich gilt die Regel, daß Kerne mit *ungerader* Neutronenzahl bereits mit *langsamen* Neutronen spalten; die Kerne mit *gerader* Neutronenzahl aber nur mit *schnellen* Neutronen. Dies ist offensichtlich die Folge der sog. „Paarungsenergie" von der Größenordnung 1 MeV, die bei der Absättigung eines unpaarigen Neutrons freigesetzt wird. Hierdurch ist die Bindungsenergie eines Neutrons an einen schweren Kern mit ungerader Neutronenzahl um etwa 1 MeV größer als die an einen mit gerader Neutronenzahl. Obige Regel macht es also wahrscheinlich, daß die Spaltung in den genannten Fällen bei etwa gleicher Anregung des Compoundkerns auftritt.

Eine neuere Nebelkammeraufnahme des Spaltungsvorganges zeigt Abb. 92. Die beiden um 180° auseinanderfliegenden U-Trümmer entstammen einer sehr dünnen U-Schicht. Die Reichweiten der Trümmer betragen in Luft unter Normalbedingungen im Mittel 25 mm für die leichte und 19 mm für die schwere Komponente (s. § 50).

Außer durch Neutronen, lassen sich auch mit allen anderen schweren Teilchen sowie mit γ-Quanten Kernspaltungen hervorrufen. Mit genügend energiereichen Teilchen spalten auch leichtere Kerne. Langsame Neutronen und sonstige

Teilchen geringer Energie erzeugen — wenn überhaupt — vorwiegend eine *unsymmetrische Spaltung* in zwei ungleiche Bruchstücke. Sehr energiereiche Partikel von mehreren 100 MeV erzeugen bevorzugt eine *symmetrische Spaltung* in zwei gleiche Bruchstücke.

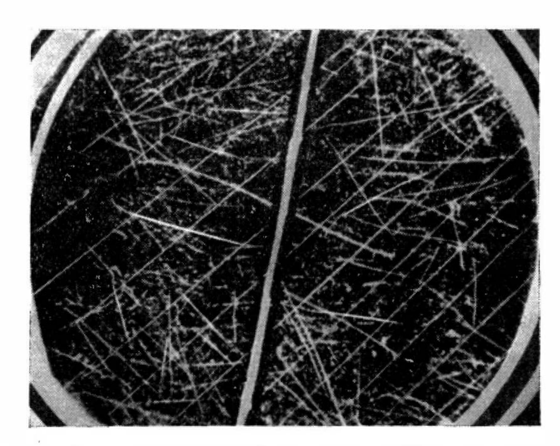


Abb. 92. Nebelkammeraufnahme der Uran-Spaltung. Die beiden um 180° auseinanderfliegenden Urantrümmer entstammen einer sehr dünnen U-Schicht, die auf einer dünnen Al-Trägerfolie aufgebracht war

Die schwersten Kerne unterliegen auch einer ohne jeden äußeren Anlaß erfolgenden *spontanen Spaltung* (s. Kap. V, § 21).

Von besonderer Bedeutung ist die *sofortige Emission von 2 bis 3 Neutronen* bei der Spaltung („*prompt neutrons*") und die *verzögerte Emission* einer — wenngleich nur schwachen — Gruppe von Neutronen nach dem Spaltungsvorgang („*delayed neutrons*"). Die *starke Radioaktivität* der Spaltprodukte ist einerseits eine für mancherlei Anwendungen recht nützliche, andererseits aber bei unsachgemäßer Handhabung eine äußerst gefährliche und unerwünschte Zugabe der Kernspaltung.

Auf den folgenden Seiten besprechen wir im einzelnen die genannten Erscheinungen.

§ 48. Energetik der Kernspaltung

Die späte Auffindung der Uranspaltung erscheint rückschauend um so merkwürdiger, als eine einfache Stabilitätsbetrachtung mit Hilfe der *Bethe-Weizsäckerschen Formel* für die Bindungsenergie sogleich ein außerordentlich großes „*Energiegefälle*" bei der Spaltung schwerster Kerne offenbart und somit bei allen Spekulationen über das Ende des Periodischen Systems der Elemente ein Gegenstand sorgfältiger Betrachtung hätte sein müssen. Die gesamte Bindungsenergie eines Kernes beträgt nach dem *Tröpfchenmodell* gemäß jener halbempirischen Formel

$$W = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c A^{5/3} \left(\frac{Z}{A}\right)^2 - a_a A \left(1 - 2\frac{Z}{A}\right)^2; \tag{48.1}$$

hierin stellen dar:

der Term mit $a_v = (14{,}1 \pm 0{,}2)$ MeV die Volumenenergie,
der Term mit $a_s = (13 \pm 1)$ MeV die Oberflächenenergie,
der Term mit $a_c = (0{,}595 \pm 0{,}02)$ MeV die Coulomb-Energie,
der Term mit $a_a = (19{,}0 \pm 0{,}9)$ MeV die „Asymmetrieenergie".

Der letzte Term ist $\sim \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2$ und verschwindet bei $Z = N$. Wir denken uns nun den Kern A in zwei Teile (1) und (2) mit den Massenzahlen $A_1 = \eta A$ und $A_2 = (1-\eta)A$ geteilt, wo η eine konstante Zahl, $0 < \eta < 1$, bedeutet. Nehmen wir an, daß bei der großen Geschwindigkeit der Spaltung das Verhältnis $\frac{Z}{A}$ in der Kernmaterie unverändert bleibt, was übrigens nach Ausweis aller bisherigen Erfahrungen recht genau zutrifft, so beträgt die frei werdende Reaktionsenergie Q (in MeV)[1])

$$Q = -\Delta W = -13 A^{2/3}\{(1-\eta)^{2/3} + \eta^{2/3} - 1\} + 0{,}60 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \{1 - \eta^{5/3} - (1-\eta)^{5/3}\}.$$

Bei einer Halbierung, $\eta = 0{,}5$, wird

$$Q_{1/2} = -13 A^{2/3}(2^{1/3} - 1) + 0{,}60 \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3})$$
$$= -3{,}4 A^{2/3} + 0{,}22 \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Die eigentliche *Spaltungsenergie ist elektrostatischen Ursprungs* und ist durch den (positiven!) zweiten Term gegeben. Der erste Term rührt von den Oberflächenkräften, also von den spezifischen *Kernkräften* her und vermindert nur die Reaktionsenergie. Die Volumenenergie liefert keinen Beitrag, ebensowenig die Asymmetrieenergie, da wir $\frac{Z}{A} = \text{const}$ gesetzt und somit von der Energie der Radioaktivität der Spaltprodukte abgesehen haben.

Für Uran ($Z = 92$; $A = 239$) beträgt der elektrostatische Anteil ≈ 300 MeV; davon werden gegen die Oberflächenkräfte ≈ 130 MeV, also etwa 43%, verbraucht, so daß eine Reaktionsenergie der symmetrischen Spaltung von „nur" $Q_{1/2} \approx 170$ MeV übrigbleibt. Die Q-Werte bei unsymmetrischer Teilung mit gleichbleibendem $\frac{Z}{A}$ sind für einige Werte von η aus folgender Zusammenstellung zu ersehen:

η	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,80	0,90	1,00
Q [MeV]	171	170	164	150	138	94	42	0

Man bemerkt, daß eine symmetrische Teilung zwar energetisch bevorzugt ist, daß aber selbst bei einem Massenverhältnis $A_1 : A_2 = 3 : 2$, entsprechend $\eta = 0{,}6$,

[1]) Für die wirklich entwickelte Gesamtenergie käme noch die Bindungsenergie des Geschoßteilchens und seine kinetische Energie hinzu.

die Verringerung der Reaktionsenergie gegenüber ihrem Maximalwert nach (48.1) nur etwa 4 % beträgt. (Siehe hierzu aber S. 238, Pkt. 1.)

Die Dynamik der Spaltung ist naturgemäß nicht allein durch die Energieverhältnisse gegeben, und die offensichtlich energetisch nur recht schwache Bevorzugung der symmetrischen Teilung kann daher durch andere z.Z. noch nicht genau bekannte Einflüsse leicht verändert werden. In der Tat beobachtet man bei Spaltung mit langsamen Neutronen ein mittleres Massenverhältnis von etwa 3 : 2. Allerdings wird die oben gemachte Voraussetzung der Konstanz von $\frac{Z}{A}$ bei der Spaltung nicht genau zutreffen. Man findet aber leicht aus (48.1), daß durch die Annahme verschiedener $\left(\frac{Z}{A}\right)$-Werte für die beiden Bruchstücke die unsymmetrische Spaltung nicht erklärt werden kann: Die oben angegebenen Q-Werte liegen nämlich auch bei Variation von $\frac{Z}{A}$ schon sehr nahe dem Maximum. Nur bei sehr großen Neutronenenergien findet man die energetisch zu erwartende symmetrische Spaltung. Wir wollen zunächst von dieser Komplikation absehen und die Dynamik des symmetrischen Teilungsvorganges etwas genauer betrachten. Es hat sich gezeigt, daß der Spaltungsprozeß — abgesehen von Einzelheiten — aus dem Tröpfchenmodell schon klassisch-mechanisch zu verstehen ist (FRENKEL [F 39-2], BOHR und WHEELER [B 39-2]).

Daß trotz der enormen Energieentwicklung bei der Spaltung der schwersten Kerne nicht augenblicklich eine Art Kernexplosion eintritt, liegt an einer gewissen Stabilität des Kernes gegenüber kleinen Deformationen. Die Stabilität erzeugende Kraft ist — analog den Verhältnissen bei einem Wassertropfen — die *Oberflächenspannung der Kernmaterie*, welche etwa $s = \frac{a_s}{4\pi r_0^2} \approx 5{,}3 \cdot 10^{25}$ MeV/cm² ($\approx 10^{11}$ t/cm!) beträgt. Nach der Bedeutung des zweiten Gliedes in Gl. (48.1) ist nämlich $a_s A^{2/3} = 4\pi R^2 s$, wobei $R = r_0 A^{1/3}$ ist.

In Abb. 93 ist die potentielle Energie in Abhängigkeit vom Schwerpunktsabstand r der beiden Kernhälften aufgetragen, in die der Kern durch Spaltung zerfällt. Ein so definiertes r ist ein für alle Phasen des Vorganges brauchbares Maß der Deformation des Kerns. Die einzelnen Stadien a, b, c, d des Tröpfchenzerfalls sind in Abb. 93 oben schematisch dargestellt. Im undeformierten Zustand (a) ist $r = r_a = \frac{3}{4} R$, wo R den Radius des Compoundkerns bezeichnet ($\frac{3}{4} R$ ist der Schwerpunktsabstand zweier mit der Basis aufeinanderliegender Halbkugeln vom Radius R).

Abb. 93. Schematische Darstellung der Potentialbarriere gegen Kernspaltung: Deformationsenergie E_f als Funktion des Schwerpunktsabstandes r der Kernhälften. E_{fs} ist die „klassische" Aktivierungsenergie E_{Akt}. ($r_a = \frac{3}{4} R$; $R' = 2^{-1/3} R$)

Die Gesamtenergie beträgt hier bei U (s. o.) etwa 170 MeV, wenn wir die Energie von dem Zustand aus rechnen, in dem nach der Spaltung die zwei gleichen Spaltprodukte in „unendlicher" Entfernung *ruhen*.

Mit wachsender Deformation steigt die potentielle Energie zunächst etwa quadratisch mit $(r - r_a)$ an; später aber wird der Anstieg immer schwächer. An dem Punkte, an welchem bei einer weiteren kleinen Verschiebung der Energiegewinn durch die Coulombsche Abstoßung gerade den Energieaufwand zur Vergrößerung der Oberfläche kompensiert, wird die Kurve horizontal. Die zugehörige Tröpfchengestalt, etwa Abb. 93 b, nennen wir die „*kritische*". Die bis zur Erreichung dieses Zustandes aufgewandte Deformationsarbeit ist die für eine Spaltung notwendige *Aktivierungsenergie* E_{Akt} ($=E_{fs}$ in Abb. 93, wenn wir zunächst von einer Nullpunktsenergie (s. w. u.) absehen). Bei weiterer Vergrößerung des Abstandes r fällt die potentielle Energie wieder ab, und wenn die beiden Tropfenhälften voneinander getrennt sind und Kugelgestalt (Radius $R' = 2^{-1/3} R$) angenommen haben, bleibt nur noch für $r \gg 2 R'$ die elektrostatische Energie $E = \frac{(eZ)^2}{4r}$ übrig. Und diese verschwindet mit $r \to \infty$ wie $\frac{1}{r}$.

Von der beobachteten Reaktionsenergie von rd. 180 MeV (nach obigem 176 MeV bei U mit langsamen Neutronen, die Bindungsenergie zu 6 MeV gerechnet) finden sich etwa 167 MeV als kinetische Energie der Spaltprodukte wieder; 6 MeV gehen im Mittel in die kinetische Energie der Spaltneutronen, etwa 7 MeV werden als γ-Strahlung während des Spaltungsvorganges abgestrahlt. In der Gesamtenergiebilanz tritt weiter die Energie der Radioaktivität der Spaltprodukte mit rd. 21 MeV auf, die aber erst nach dem Spaltprozeß in Erscheinung tritt. Es ist dies die Energie, welche nach (48.1) frei wird, wenn das Verhältnis $\frac{Z}{A}$ der Spaltprodukte, das unmittelbar nach der Spaltung denselben Wert wie für den primären Kern besitzt, durch radioaktiven β-Zerfall sich ständig vergrößert, bis schließlich ein stabiler Kern entstanden ist. Die primär entstehenden Bruchstücke haben nämlich wie Uran etwa 55% mehr Neutronen als Protonen, die *stabilen Isobaren* der Spaltprodukte dagegen nur 30 bis 40%, so daß i. allg. die Spaltprodukte anfangs stark β-aktiv sein müssen.

Die Aufteilung der Gesamtenergie der Spaltung auf die einzelnen Posten zeigt die folgende Zusammenstellung:

Kinetische Energie der Spaltprodukte	167 MeV
Energie der γ-Strahlung während der Spaltung	7 MeV
Energie der Spaltneutronen	6 MeV
Energie der γ-Strahlung der Spaltprodukte	6 MeV
Energie der β-Strahlung der Spaltprodukte	5 MeV
Energie der Antineutrinostrahlung der Spaltprodukte	10 MeV
Summe =	201 MeV

Bemerkenswert ist, daß etwa 5% der gesamten Energie der Spaltung in Form von (praktisch unbeobachtbarer!) Antineutrinostrahlung entweicht.

§ 49. Tröpfchenmodell und Dynamik der Spaltung

Über die *Dynamik der Tröpfchenschwingung* können wir folgende *Ähnlichkeitsbetrachtung* anstellen. Es sei ϱ_m die Massendichte, ϱ_e die elektrische Ladungsdichte der Kernmaterie, $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor vom Kernschwerpunkt zu einem Volumenelement dv, $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ die elektrische Feldstärke am Orte $\mathfrak{r}$, $P(\mathfrak{r})$ der durch die Oberflächenspannung und die Volumenkräfte hervorgerufene hydraulische Druck am Orte $\mathfrak{r}$ und t die Zeit.

Die Bewegungsgleichung lautet, wenn das Protonen-Neutronen-Gemisch als einheitliche Kernmaterie strömt und die Viskosität zu vernachlässigen ist,

$$\varrho_m \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \varrho_e \mathfrak{E} - \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} P. \tag{49.1}$$

Die aus anderen Erscheinungen experimentell in erster Näherung erwiesene Inkompressibilität der Kernmaterie führt zur Forderung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \quad \left(\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right).$$

Weiter ist wegen (49.1) rot $\mathfrak{v} = 0$, wenn — wie wir voraussetzen können — anfangs keine Wirbel existierten. Die noch fehlende Grenzbedingung für P erhalten wir daraus, daß unmittelbar unter der gekrümmten Oberfläche P allein durch den Kapillardruck bestimmt sein muß:

$$P_{\text{Oberfl}} = \frac{s}{R_{\text{Oberfl}}}; \tag{49.2}$$

s = Oberflächenspannung; R_{Oberfl} = harmonisches Mittel aus den Hauptkrümmungsradien der Tröpfchenoberfläche. $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ ist durch die Ladungsverteilung gegeben. Die Gleichungen reichen jetzt im Prinzip aus, $\mathfrak{v}$ und P als Funktionen von $\mathfrak{r}$ und t sowie die Bahn $\mathfrak{r}(t)$ eines materiellen Teilchens zu ermitteln.

Um das Verhalten verschieden großer Tropfen leichter miteinander vergleichen zu können, denken wir uns einen *Modelltropfen* (Index 0!) mit $Z = Z_0$ und $A = A_0$. Der Radiusvektor heiße hier $\mathfrak{x}$, die Feldstärke $\mathfrak{E}_0(\mathfrak{x})$, der Druck $P_0(\mathfrak{x})$. Für einen mit dem Modell geometrisch ähnlichen Tropfen, aber mit anderen A und Z, gilt an homologen Punkten (da sich die Lineardimensionen im Verhältnis $\left(\frac{A}{A_0}\right)^{1/3}$ vergrößern)

$$\mathfrak{r} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^{1/3} \mathfrak{x},$$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}) = \frac{Z}{A^{2/3}} \frac{A_0^{2/3}}{Z_0} \mathfrak{E}_0(\mathfrak{x}).$$

Ferner ist, da die Oberflächenspannung nicht von A und Z abhängt, nach (49.2)

$$P(\mathfrak{r}_{\text{Oberfl}}) = \left(\frac{A_0}{A}\right)^{1/3} P_0(\mathfrak{x}_{\text{Oberfl}}).$$

Die letzte Gleichung (als Grenzbedingung) legt es nahe, sie versuchsweise auch für alle $\mathfrak{r}$ anzusetzen und hernach zu prüfen, unter welchen Bedingungen ein solcher Ansatz gelten kann:

$$P(\mathfrak{r}) = \left(\frac{A_0}{A}\right)^{1/3} P_0(\mathfrak{x}) . \tag{49.3}$$

Führen wir noch ein neues Zeitmaß τ ein durch

$$t = \left(\frac{A}{A_0}\right)^{1/2} \tau,$$

so folgt aus (49.1) mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\text{grad}_{\mathfrak{r}} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^{1/3} \text{grad}_{\mathfrak{x}} \quad \text{und} \quad \varrho_e = \frac{Z}{A}\frac{A_0}{Z_0}(\varrho_e)_0$$

die Gleichung

$$\varrho_m \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d\tau^2} = (\varrho_e)_0 \frac{Z^2}{A}\frac{A_0}{Z_0^2}\mathfrak{E}_0(\mathfrak{x}) - \text{grad}_{\mathfrak{x}} P_0(\mathfrak{x}) . \tag{49.4}$$

Erfahrungsgemäß ist ϱ_m unabhängig von Z und A. Die Dynamik der Tröpfchenschwingung ist nach (49.4) also nur von der Größe des Parameters $\frac{Z^2}{A}$ abhängig: *Alle Tropfen mit gleichem $\frac{Z^2}{A}$ verhalten sich untereinander dynamisch ähnlich,* sie zeigen also z. B. ähnliche Schwingungsformen, ähnlichen Druckverlauf wie P_0 usw. Damit ist auch der Ansatz (49.3) für alle Kerntröpfchen mit gleichem $\frac{Z^2}{A}$ gerechtfertigt. Die Frequenz der Bewegung ändert sich proportional $A^{-1/2}$ $\left(\text{bei konstantem } \frac{Z^2}{A}\right)$. Insbesondere ist die *kritische Gestalt des Tropfens,* die zur Spaltung führt, *eine eindeutige Funktion von* $\frac{Z^2}{A}$. Bei der Deformation der Kernkugel bis zur kritischen Form vergrößert sich nach dem Gesagten die Oberfläche und damit die Oberflächenenergie um

$$\Delta E_s = A^{2/3} F_s\left(\frac{Z^2}{A}\right),$$

die Coulomb-Energie ändert sich um

$$\Delta E_C = -\frac{Z^2}{A^{1/3}} F_C\left(\frac{Z^2}{A}\right),$$

wo F_s und F_C Funktionen von $\frac{Z^2}{A}$ allein sind. Die bis zur Deformation in die kritische Gestalt aufzuwendende *Aktivierungsenergie* beträgt also

$$E_{\text{Akt}} = A^{2/3}\left\{F_s\left(\frac{Z^2}{A}\right) - \frac{Z^2}{A} F_C\left(\frac{Z^2}{A}\right)\right\} = A^{2/3} F\left(\frac{Z^2}{A}\right).$$

Hierin ist F als Abkürzung für den Ausdruck in der geschweiften Klammer wieder eine Funktion von $\frac{Z^2}{A}$ allein.

Wir fragen zunächst, bei welchem Wert von $\frac{Z^2}{A}$ die Aktivierungsenergie verschwindet, das Tröpfchen also spontan instabil wird. Die elektrostatische Energie

von Z punktförmigen Elementarladungen, die im Innern einer Kugel vom Radius R statistisch gleichmäßig verteilt sind, beträgt[1])

$$(E_c)_0 = \frac{1}{2} Z(Z-1) \frac{6}{5} \frac{e^2}{R}. \tag{49.5}$$

Die Annahme der gleichmäßigen Verteilung ist zwar nach neueren Ergebnissen nicht genau erfüllt; die Abweichungen sind aber im Rahmen unserer Betrachtungen zu vernachlässigen. Ebenso ist es nicht notwendig, in (49.5) zwischen $Z-1$ und Z zu unterscheiden; wir schreiben daher weiterhin einfach

$$(E_c)_0 = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R}. \tag{49.6}$$

Denkt man sich die Ladungen nicht durch die Kernkräfte, sondern durch eine undurchdringliche Hülle von außen zusammengehalten, so lastet auf dieser ein spezifischer Druck von

$$p = -\frac{d(E_c)_0/dR}{4\pi R^2} = \frac{3Z^2 e^2}{20\pi R^4} = \frac{(E_c)_0}{4\pi R^3}.$$

Je zwei Kugelhälften, in die man sich den Kern geteilt denken kann, werden durch die elektrostatische Kraft

$$K_{el} = \pi R^2 p = \frac{3}{20} \frac{Z^2 e^2}{R^2} = \frac{(E_c)_0}{4R}$$

auseinandergetrieben. Demgegenüber steht die zusammenhaltende Kraft der Oberflächenspannung s (entlang des „Äquators“)

$$K_s = 2\pi R s = \frac{(E_s)_0}{2R},$$

worin $(E_s)_0 = 4\pi R^2 s$ die Oberflächenenergie des undeformierten Kerns bezeichnet. Die Stabilität des Kerntröpfchens ist durch das Verhältnis x dieser Kräfte K_{el} und K_s bestimmt, wo

$$x = \frac{K_{el}}{K_s} = \frac{(E_c)_0}{2(E_s)_0} = \frac{3}{40\pi} \frac{e^2}{s r_0^3} \frac{Z^2}{A}. \tag{49.7}$$

---

[1]) $\frac{1}{2} Z(Z-1)$ ist die Anzahl Paare, die man aus Z Protonen herausgreifen kann. Der mittlere reziproke Abstand $r_{1,2}$ dieser Paare beträgt $\overline{\left(\frac{1}{r_{1,2}}\right)} = \frac{6}{5} \frac{1}{R}$, womit (49.5) erklärt ist. Es ist nämlich

$$\overline{\left(\frac{1}{r_{1,2}}\right)} = \left(\frac{4\pi}{3} R^3\right)^{-2} \int \frac{dv_1\, dv_2}{r_{1,2}} \quad (dv_1 \text{ und } dv_2 \text{ sind Volumenelemente}).$$

Das Integral stellt gerade das doppelte Potential einer kugelförmigen Raumladung der Dichte 1 dar und hat den bekannten Wert $\left(\frac{4\pi}{3} R^3\right)^2 \frac{6}{5R}$, woraus obiger Ausdruck für $\overline{\left(\frac{1}{r_{1,2}}\right)}$ folgt.

Hier wurde in $(E_c)_0$ und $(E_s)_0$ zuletzt $R = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm) gesetzt. Numerisch ergibt sich

$$x = 0{,}021 \frac{Z^2}{A},$$

wenn wir aus der Bethe-Weizsäcker-Formel als Oberflächenspannung den Wert $s = 5{,}3 \cdot 10^{25}$ MeV cm^{-2} $\approx 0{,}9 \cdot 10^{20}$ Dyn cm^{-1} annehmen. (Zum Vergleich: Die Oberflächenenergie des U-Kerns ist dann 520 MeV.)

Ein Kern mit $x = 1$ ist bereits statisch instabil: Man findet hier eine *obere Grenze des Periodischen Systems* der Elemente durch Kernspaltung. Da bei den schwersten Kernen $A \approx 2{,}5\,Z$ ist, folgt für die maximal möglichen Werte $Z_{max} \approx 119$ und $A_{max} \approx 298$. Experimentell wurde bisher $Z = 102$, $A \approx 250$ erreicht.

Im Falle $x < 1$ ist das Tröpfchen *stabil gegen kleine Deformationen*: Wenn aus irgend einem Grunde z.B. eine kleine „Ausbuchtung" der Kernkugel entsteht, so wird der mittlere Krümmungsradius an dieser Stelle kleiner als der frühere Kugelradius R; der rücktreibende Druck der Oberflächenspannung übersteigt damit örtlich den Gleichgewichtsdruck, der zum Kugelradius R gehört, und die Deformation geht zurück. Entsprechendes gilt für eine „Einbuchtung". Bei großen Schwingungsamplituden kann aber einmal eine solche birnenförmige Deformation (s. Abb. 93 b) entstehen, bei der die weitreichende Coulombsche Abstoßung die zusammenhaltende Kraft der Oberflächenspannung an der Einschnürungsstelle übertrifft und eine Teilung des Kerntropfens in zwei etwa gleiche Teile erfolgt. — Die bis zur Erzeugung dieser kritischen Deformation erforderliche Aktivierungsenergie wurde nach dem Tröpfchenmodell zuerst von N. Bohr und J. A. Wheeler [B 39-2] und später auch von anderen genauer berechnet. Wir geben kurz den Ansatz und die Ergebnisse dieser Überlegungen an.

Wenn wir die symmetrische Spaltung betrachten, so läßt sich eine rotationssymmetrische Deformation in Polarkoordinaten (r, ϑ) in der Form darstellen

$$R(\vartheta) = R_0 \{1 + \alpha_0 + \alpha_2 P_2(\cos\vartheta) + \alpha_4 P_4(\cos\vartheta) + \dots\}, \tag{49.8}$$

sofern wir uns nur auf solche hinreichend kleine Deformationen beschränken, bei denen die Radialentfernung der Oberflächenpunkte, $R(\vartheta)$, noch eine eindeutige Funktion von ϑ bleibt.

Die P_l sind Kugelfunktionen (Legendresche Polynome von $\cos\vartheta$). Die ungeraden P_l fehlen wegen der vorausgesetzten Symmetrie um $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$. Die Konstanz des Volumens

$$V = 2\pi \int_{r=0}^{R(\vartheta)} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr \tag{49.9}$$

kann bei gegebenem $\alpha_2, \alpha_4, \dots$ durch passende Wahl von α_0 erreicht werden. Die Oberflächenenergie E_s und die Coulomb-Energie E_c des deformierten Tröpfchens betragen

$$E_s = 2\pi s \int R \left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\vartheta}\right)^2\right]^{1/2} \sin\vartheta \, d\vartheta,$$

$$E_c = \frac{1}{2} \varrho_e^2 \int \frac{dv_1 \, dv_2}{r_{1,2}};$$

$r_{1,2}$ ist die gegenseitige Entfernung zwischen den Volumenelementen dv_1 und dv_2.

Die Ausrechnung ergibt für die Deformationsarbeit $E_f = E_s - (E_s)_0 + E_C - (E_C)_0$, wenn die Entwicklung in (49.8) bis α_4 einschließlich getrieben wird,

$$E_f = (E_s)_0\left[\frac{2}{5}\alpha_2^2 + \frac{116}{105}\alpha_2^3 + \frac{101}{35}\alpha_2^4 + \frac{2}{35}\alpha_2^2\alpha_4 + \alpha_4^2 + \cdots\right]$$
$$- (E_C)_0\left[\frac{1}{5}\alpha_2^2 + \frac{64}{105}\alpha_2^3 + \frac{58}{35}\alpha_2^4 + \frac{8}{35}\alpha_2^2\alpha_4 + \frac{5}{27}\alpha_4^2 + \cdots\right]. \quad (49.10)$$

$(E_s)_0$ und $(E_C)_0$ sind die resp. Werte ohne Deformation. Zu jedem α_2 gibt es ein bestimmtes α_4, welches das kleinste E_f liefert. Das ist der Fall bei

$$\alpha_4 = -\frac{243}{595}\alpha_2^2.$$

Für diese Werte α_4 ist E_f eine Funktion von α_2 allein und hat ein Maximum bei einem bestimmten $(\alpha_2)_{\text{krit}}$. Abb. 94 gibt eine graphische Darstellung der Verhältnisse:

Denkt man sich E_f nach (49.10) über der α_2-α_4-Ebene aufgetragen, so entsteht eine Sattelfläche, und es ist anzunehmen, daß die Spaltung über die „Paßstraße" erfolgt.

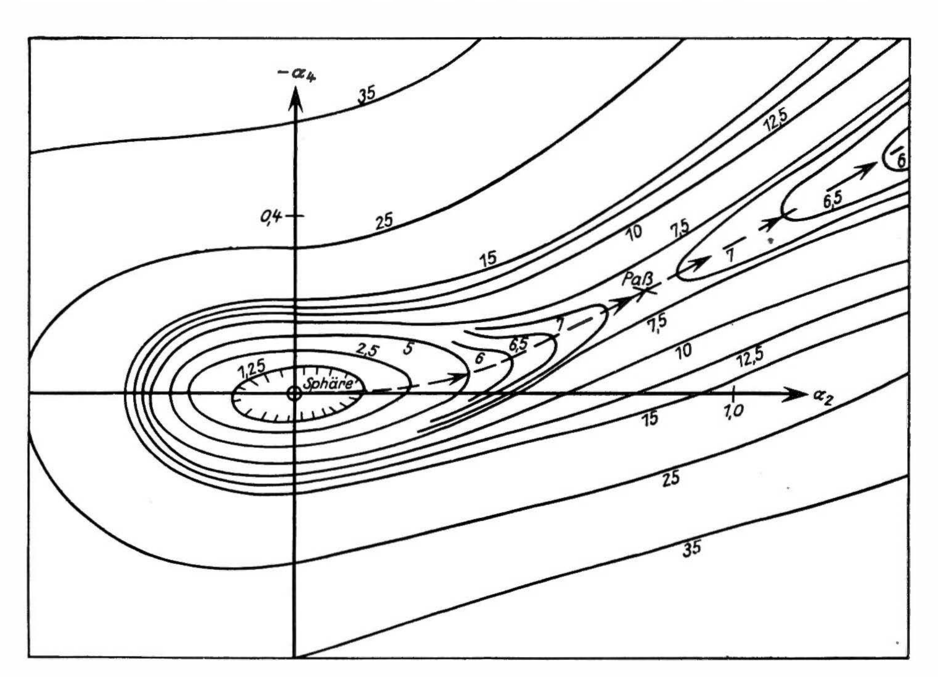


Abb. 94. Deformationsenergie als Funktion der Deformationsparameter α_2 und α_4. Die Energiefläche hat eine Mulde am Nullpunkt und eine „Paßstraße" nach rechts entlang der Einsattelung. Die Zahlen bedeuten Potentiale der Höhenlinien in MeV für einen Kern $Z = 90$

Die zum Übergang über die „Paßhöhe" bei $(\alpha_2)_{krit}$ notwendige Energie ist (abgesehen von der Energie der Nullpunktsschwingung) die Aktivierungsenergie E_{Akt}.
Bei den zur Spaltung notwendigen großen Amplituden besteht auf Grund der Bewegungsgleichungen eine Kopplung zwischen den verschiedenen Harmonischen α_2 und α_4. Die Spaltung wird praktisch dann eintreten, wenn α_4 im Laufe der Bewegung den zum Minimum von E_f gehörigen Wert (s. oben) annimmt und außerdem α_2 die kritische Größe $(\alpha_2)_{krit}$ erreicht. Die hierzu erforderliche Energie E_{Akt}, die Paßhöhe von (49.10), ergibt sich für x-Werte in hinreichender Nähe von $x = 1$, für die der Ansatz (49.8) allein sinnvoll ist, zu [1])

$$\frac{E_{Akt}}{(E_s)_0} = 0{,}728\,(1 - x)^3 - 0{,}329\,(1 - x)^4 \cdots, \tag{49.11}$$

wo x aus (49.7) bekannt ist. Abb. 95 zeigt den Verlauf von $\frac{E_{Akt}}{(E_s)_0}$ mit x.
Gl. (49.11) ist für $x \lesssim 0{,}6$ nicht mehr zuständig.
Für sehr kleine $x (\to 0)$ läßt sich aber eine einfache Abschätzung für E_{Akt} durchführen. Hier ist nämlich die kritische Tropfenform gegeben durch zwei sich berührende Kugeln vom Radius $R/2^{1/3}$, und es wird

$$E_s - (E_s)_0 = (E_s)_0\,(2^{1/3} - 1) = 0{,}260\,(E_s)_0$$

sowie

$$E_C - (E_C)_0 = (E_C)_0 \left[1 - \frac{5}{12}\,2^{-2/3} - 2^{-2/3}\right] = -0{,}108\,(E_C)_0.$$

Mit $(E_C)_0 = 2\,x (E_s)_0$ folgt daher anstelle von (49.11) für $x \ll 1$

$$\frac{E_{Akt}}{(E_s)_0} = 0{,}260 - 0{,}217\,x = 0{,}217\,(1{,}20 - x).$$

Diese Gerade ist in Abb. 95 gestrichelt eingetragen. Im Mittelteil ist der Verlauf graphisch interpoliert. E_{Akt} ist die nach der klassischen Mechanik für den Übergang

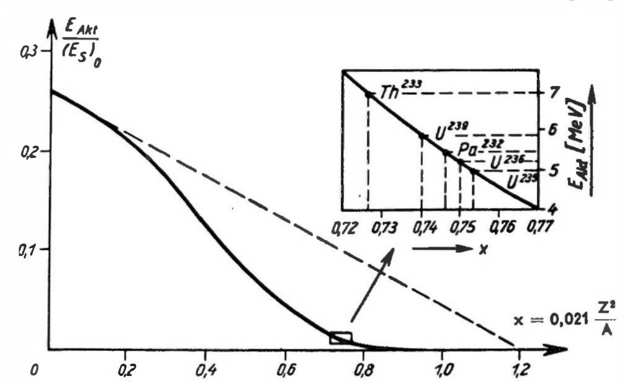


Abb. 95.
Die Aktivierungsenergie als Funktion von x. Das uns interessierende x-Intervall ist rechts oben vergrößert dargestellt

[1]) Hill und Wheeler [H 53-2] fanden bei Berücksichtigung weiterer Glieder

$$\frac{E_{Akt}}{(E_s)_0} = 0{,}728\,(1 - x)^3 - 0{,}661\,(1 - x)^4 + 3{,}33\,(1 - x)^5 - \cdots$$

über die „Paßhöhe" aufzuwendende ***Aktivierungsenergie***. Die wirklich erforderliche, von außen experimentell zur Einleitung einer Spaltung zuzuführende Aktivierungsenergie oder „*Spaltungsbarriere*" $(E_W)_{\text{Akt}}$ wird aber durch zwei quantenmechanische Effekte etwas erniedrigt. Zunächst kann durch Tunneleffekt schon für kleinere Energien als E_{Akt} eine Spaltung eintreten. Wegen der großen Massen und Ladungen der Spaltprodukte wird aber der Effekt erst dann leicht beobachtbar, wenn E_f schon so nahe an E_{Akt} herankommt, daß sich eine genauere Unterscheidung erübrigt. Dagegen ist der Einfluß der Nullpunktsenergie der Tröpfchenschwingung, E_{Nullpkt}, durchaus merklich und erleichtert die Spaltung. Es gilt

$$(E_W)_{\text{Akt}} = E_{\text{Akt}} - E_{\text{Nullpkt}}.$$

Da $(E_W)_{\text{Akt}}$ die zur Spaltung gerade noch ausreichende Anregung des Compoundkerns darstellt, findet man sie experimentell als Summe von Schwellenenergie und Bindungsenergie des einfallenden Teilchens:

$$(E_W)_{\text{Akt}} = E_{\text{kin, Schwelle}} + E_{\text{Bindung}}.$$

Bei sehr kleinen Amplituden der Grundschwingung ($\alpha_2 \ll 1$; $\alpha_4 \to 0$) wird nach (49.10) und (49.7)

$$E_f = \tfrac{2}{5}\,(E_s)_0\,(1 - x)\,\alpha_2^{\,2}\,. \tag{49.12}$$

In Abb. 94 ist die Potentialsenke um den Nullpunkt zu erkennen. Man hat also für $x < 1$ ein Oszillator-Potential, aus dem sich die Frequenz ω_0 der Grundschwingung errechnen läßt. Die zugehörige Nullpunktsenergie ergibt sich bei Kernen in der Nähe von U zu $\hbar\omega_0 \approx 0{,}4$ MeV. Da experimentell die Aktivierungsenergie rund 6 MeV, also etwa das 15fache der Nullpunktsenergie beträgt, ist die näherungsweise Gültigkeit der oben angegebenen rein klassischen Berechnung der Tröpfchenschwingung gesichert.

Die Rechnungen von N. Bohr und J. A. Wheeler wurden später von S. Frankel und N. Metropolis [F 47-3], D. L. Hill und J. A. Wheeler [H 53-2], zum Teil unter Verwendung der elektronischen Rechenmaschine ENIAC, genauer wiederholt und in der Hauptsache bestätigt. In Abb. 96 ist nach diesen Rechnungen die ***kritische Gestalt*** des Tröpfchens kurz vor der Teilung für verschiedene x dargestellt. Man sieht, wie mit abnehmendem x die kritische Form immer langgestreckter wird.

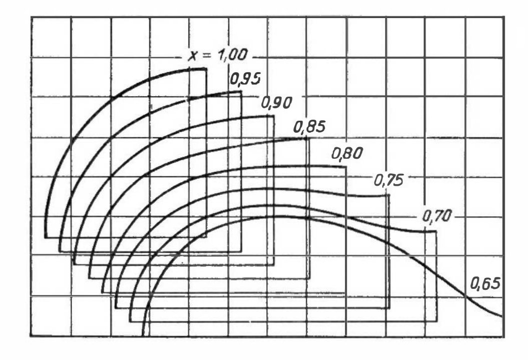


Abb. 96. Kritische Tröpfchenformen für verschiedene Kurvenparameter x. Dargestellt ist die Meridiankurve des Tröpfchens im zweiten Quadranten

Den Ausdruck (49.11) für die Aktivierungsenergie kann man am besten an einen gut bekannten experimentellen Wert anschließen, um die Unsicherheit in den Konstanten s, r_0 und den sonstigen Annahmen möglichst zu eliminieren. Wenn man dazu die beobachtete Spaltungsbarriere bei U^{238}, nämlich 5,5 $\pm$ 0,2 MeV, benutzt und die Nullpunktsenergie zu $\approx 0{,}4$ MeV annimmt, wird der Bezugspunkt $E_{\text{Akt}}(U^{238}) = 5{,}9$ MeV. Die vergrößerte Darstellung des uns interessierenden x-Intervalls in Abb. 95 ist auf diesen Punkt bezogen. Die auf diese Weise berechneten Spaltungsbarrieren[1]) einiger Kerne sind in den letzten Spalten der Tabellen 32 a und b zum Vergleich mit den experimentellen Werten (nach [H 62-2]) eingetragen.

Tabelle 32. Spaltungsbarrieren einiger Kerne von Th *bis* Pu

a) Spaltungsbarrieren einiger schwerer Kerne

Zielkern	Compound-Kern	Energien in MeV			
		Neutronen-Schwelle $E_{n,\,\text{Schw}}$	Neutronen-Bindung E_B	gemessene Barriere $E_{n,\,\text{Schw}} + E_B$	berechnete Barriere nach (49.11)
${}_{90}Th^{232}$	${}_{90}Th^{233}$	1,05	4,9 $\pm$ 0,2	6,0 $\pm$ 0,2	6,5
${}_{91}Pa^{231}$	${}_{91}Pa^{232}$	0,45	4,9 $\pm$ 0,4	5,4 $\pm$ 0,4	5,0
${}_{92}U^{238}$	${}_{92}U^{239}$	0,92	4,6 $\pm$ 0,2	5,5 $\pm$ 0,2	5,5
${}_{92}U^{234}$	${}_{92}U^{235}$	0,28	4,9 $\pm$ 0,4	5,2 $\pm$ 0,4	4,5
${}_{93}Np^{237}$	${}_{93}Np^{238}$	0,25	5,0 $\pm$ 0,4	5,3 $\pm$ 0,4	4,2

b) Spaltungsbarrieren aus der Photospaltung

Zielkern = Compoundkern	Schwelle für Photospaltung [MeV]	
	gemessen	berechnet nach (49.11)
${}_{90}Th^{232}$	5,40 $\pm$ 0,22	6,21
${}_{92}U^{233}$	5,18 $\pm$ 0,27	4,19
${}_{92}U^{235}$	5,31 $\pm$ 0,27	4,53
${}_{92}U^{238}$	5,08 $\pm$ 0,15	5,24
${}_{94}Pu^{239}$	5,31 $\pm$ 0,25	3,40

Tabelle 32 a, Spalte 3, enthält die experimentelle Schwellenenergie für Spaltung. Spalte 4 gibt die Bindungsenergie des eingefangenen Neutrons, gemessen an (γ, n)- und (d, p)-Reaktionen; sie sind zum Teil aus den Daten benachbarter Kerne inter- und extrapoliert. Die Summe beider Energien steht als „gemessene Barriere“ in Spalte 5.

---

[1]) Gemeint ist $(E_W)_{\text{Akt}} = E_{\text{Akt}}$ minus Nullpunktsenergie. Angesichts der verschiedenen Unsicherheiten der Rechnung ist die additive Nullpunktsenergie für den vorliegenden Zweck nicht besonders wichtig.

Tabelle 32b, Spalte 2, enthält die experimentellen Schwellenwerte für Photospaltung.
Als Resultat ist eine gewisse Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen und dem Modell des schwingenden Tropfens zu verzeichnen. Die berechneten Werte zeigen aber im Vergleich zur Beobachtung einen merklich steileren Abfall der Aktivierungsenergie mit $\frac{Z^2}{A}$: Sie fällt von Th bis Pu um über $2\frac{1}{2}$ MeV, während die beobachteten Werte innerhalb der Fehlergrenzen keine Änderung zeigen, sofern man von Th^{233} absieht. Die Ursache dieser Abweichungen vom Tröpfchenmodell und die Fluktuationen von Kern zu Kern liegen vermutlich in einem noch nicht geklärten „Schaleneffekt", der mit der letzten magischen Neutronenzahl 126 und der magischen Protonenzahl 82 zusammenhängt.
Die Kerne werden im allgemeinen um so stabiler sein, je näher sie zum *doppelt magischen* Kern $_{82}Pb^{208}$ liegen. Dies erklärt den steilen Anstieg der Schwellenenergie zur Spaltung der Kerne unterhalb Thorium. Weiter unterhalb Pb bedingt bereits das Tröpfchenmodell eine sehr geringe Spaltbarkeit.
Auch die Existenz der Quadrupolmomente zeigt bereits, daß das Tröpfchenmodell einer Verfeinerung bedarf. Quadrupoldeformationen im Grundzustand von der Größe[1] $\alpha_2 \approx 0{,}03$ bewirken bereits Änderungen der Spaltungsschwelle um ≈ 1 MeV [H 53-2].
Trotz aller genannten Mängel in den feineren Details bleibt aber das Tröpfchenmodell immer noch eine im großen und ganzen zutreffende Vorstellung.
Da man von (49.11) praktisch doch nur ein enges Intervall von x benötigt, gibt Seaborg [S 52-1] die folgende in x lineare empirische Interpolationsformel:

$$(Ew)_{\mathrm{Akt}} = 19{,}0 - 0{,}36\,\frac{Z^2}{A}\,[\mathrm{MeV}].$$

Darin ist die schwache Abhängigkeit der Aktivierungsenergien von $\frac{Z^2}{A}$ berücksichtigt.

Die spontane Spaltung Flerow und Petrshak [F 40-1] ist ebenfalls im Modell des schwingenden Tröpfchens enthalten: Die Nullpunktsschwingung kann, vermöge des wellenmechanischen Tunneleffektes, zu einem Zerfall in zwei etwa gleich große Teile führen. Da die Potentialbarriere bei der Spaltung in Höhe und Breite im wesentlichen nur von $\frac{Z^2}{A}$ abhängt, wird ihre Durchlässigkeit und damit die Lebensdauer gegen spontane Spaltung, τ_{sp}, etwa eine Exponentialfunktion von $\frac{Z^2}{A}$ sein. In der Tat gilt nach einer halbempirischen Formel von Seaborg für alle (g, g)-Kerne [S 52-2]

$$\log \tau_{sp} = 157 - 3{,}75\,\frac{Z^2}{A} \qquad (\tau_{sp}\text{ in sec})$$

(siehe auch Kapitel V, § 21). Die spontane Spaltung zeigt, daß für die Kernspaltung eine Schwellenenergie im strengen Sinne nicht existiert. Nur die äußerst starke Energieabhängigkeit des Spaltungsquerschnitts täuscht experimentell eine

---

[1]) Siehe Gl. (49.8), S. 229.

„Schwelle" vor. Die Existenz der spontanen Spaltung setzt dem Periodischen System der Elemente eine obere Grenze – bereits weit unterhalb der auf S. 229 errechneten absoluten Schranke bei $Z \approx 119$. Im Gebiet der Transurane über $Z = 102$ kann aber möglicherweise wegen der magischen Protonenzahl $Z = 126$ die Stabilität gegen spontane Spaltung gegenüber den Erwartungen des Tröpfchenmodells wieder zunehmen, so daß die Erzeugung höherer, wenn auch sehr kurzlebiger Elemente nicht völlig unmöglich erscheint.

§ 50. Die Asymmetrie der Spaltung

Wie schon weiter oben erwähnt, ergibt die Spaltung mit thermischen Neutronen und mit Neutronen bis zu mehreren MeV ein mittleres *Massenverhältnis der Spaltprodukte* von etwa 3 : 2. Eine symmetrische Spaltung tritt bei U^{235} rd. 600 mal seltener auf. Die Verteilung der Massen der Spaltprodukte von U^{235} zeigt die durchgezogene Kurve der Abb. 97. Unter „Häufigkeit der Massenzahl A in %" ist die Zahl der durch Spaltung entstandenen Kerne der betreffenden Masse auf je 100 Spaltungen gemeint. Die Urantrümmer liegen im Bereich der Massenzahlen zwischen 70 und 160 und sind um die wahrscheinlichsten Massen 97 und 138 verstreut. Zwischen den Massenzahlen 110 und 125 liegt ein tiefes Minimum der

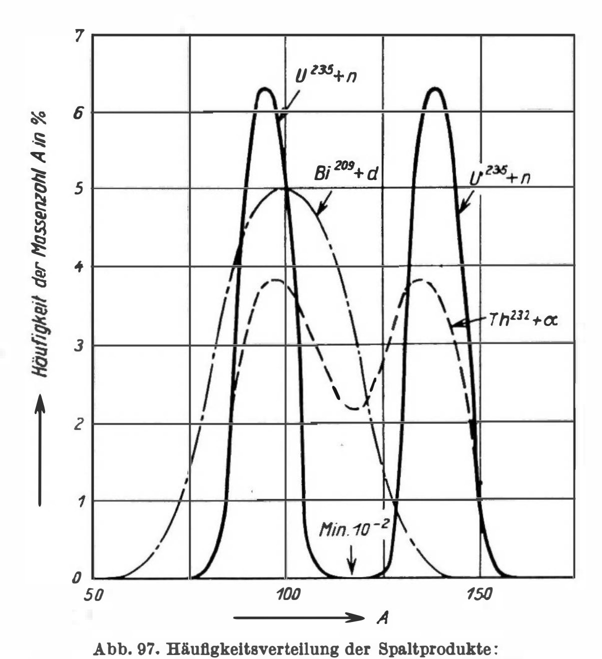


Abb. 97. Häufigkeitsverteilung der Spaltprodukte:
1. Spaltung von U^{235} mit langsamen Neutronen; 2. Spaltung von Th^{232} mit 38 MeV-α-Strahlen; 3. Spaltung von Bi^{209} mit 200 MeV-Deuteronen. (Der Schwerpunkt der Verteilungskurve liegt hier wegen der durch die hohe Anregung zahlreich verdampfenden Neutronen, Protonen (und α?) merklich unter $A = \frac{1}{2}(209) + 2) = 105{,}5$)

Tabelle 33. Zur Charakteristik der Spaltungsasymmetrie einiger mit langsamen Neutronen bzw. mit Neutronen in der Nähe der Schwellenenergie gespaltener Kerne. (*Nach* A. TURKÈWITSCH *und* J. B. NIDAY)

Zielkern	wahrscheinlichste Massenzahl		Verhältnis der wahrscheinlichsten Massenzahlen	Halbwertsbreite der Massenverteilung	Verhältnis der Ausbeute im Maximum zu der im Minimum
	leicht	schwer			
Th^{232}	91	140	1,54	14	110
U^{233}	93	137	1,48	14	400
U^{235}	97	138	1,42	15	600
U^{238}	98	140	1,43	17	100
Pu^{239}	99	138	1,39	16	140

Häufigkeit. In Tabelle 33 sind die für die Asymmetrie charakteristischen Parameter für die wichtigsten Kerne zusammengestellt: Zu jedem Zielkern sind die wahrscheinlichste oder häufigste Massenzahl der leichten und der schweren Fraktion, das Verhältnis dieser Massen, die Halbwertsbreite der Verteilungskurven der beiden Fraktionen und das Verhältnis der Ausbeuten im Maximum der Häufigkeit zu der im Minimum angegeben. Die häufigsten *Ordnungszahlen* (Atomnummern) *Z* sind etwa 38 (Sr) und 54 (Xe). Die *mittlere Ionenladung* der Trümmer ist aber kleiner und beträgt etwa 20 bzw. 22 Elektronenladungen.

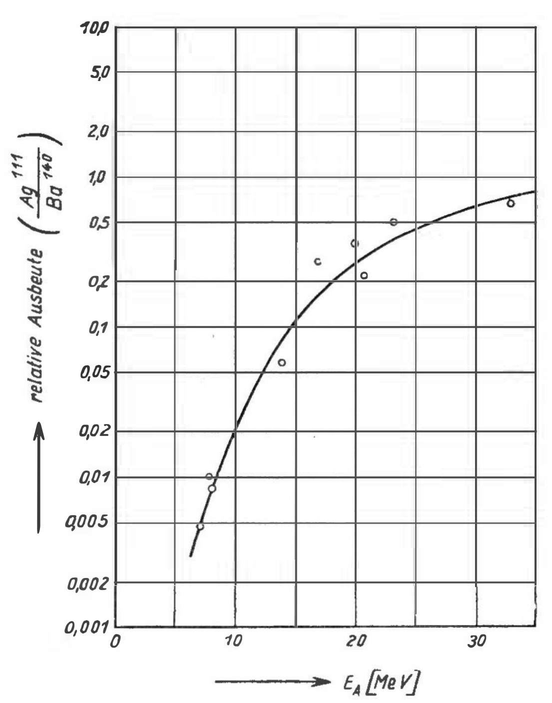


Abb. 98. Die Abhängigkeit der Spaltungsasymmetrie von der Anregungsenergie E_A

Die Verteilungskurve der Massenhäufigkeit wird mit steigender Anregung des Compoundkerns immer symmetrischer. Das Minimum der Massenhäufigkeit flacht sich ab. So steigt die Massenausbeute im Minimum der Verteilungskurve bei Spaltung von U^{235} mit 14 MeV-Neutronen um das 100fache gegenüber der mit thermischen Neutronen an. Erzeugt man den Compoundkern U^{236} durch Beschuß von Th^{232} mit 38 MeV-α-Teilchen, so findet man die gestrichelte Kurve der Abb. 97 als Massenausbeute der Reaktion Th^{232} (α,f). Bei Beachtung der Energie des α-Zerfalls des U^{236} von 4,58 MeV ist anzunehmen,

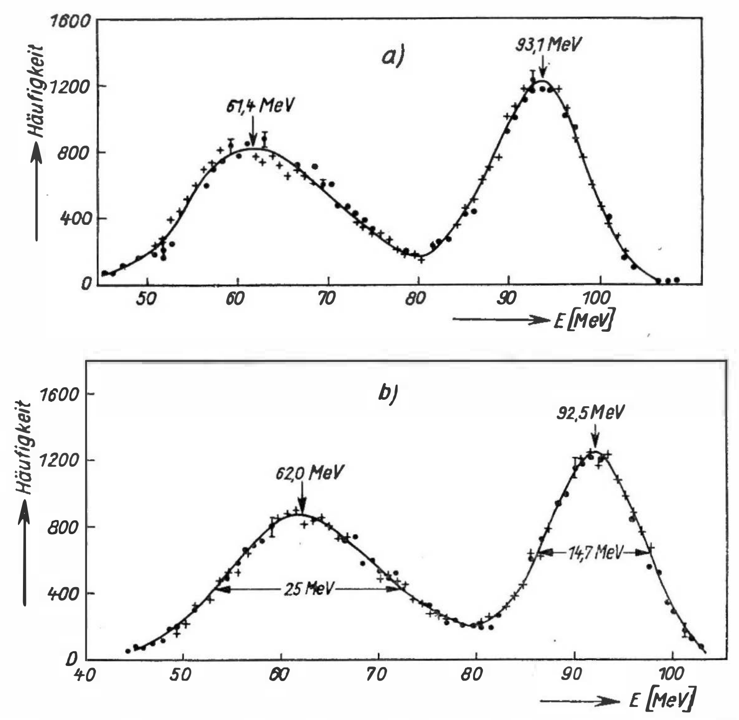


Abb. 99. Das Energiespektrum der Spaltprodukte von U^{235} a) bei Spaltung mit langsamen Neutronen b) bei Spaltung mit schnellen Neutronen. Die Ungleichheit der Verteilungskurven für die leichten und schweren Fragmente rührt im wesentlichen davon her, daß die Gesamtenergie der Spaltung von dem Massenverhältnis $\frac{A_1}{A_2}$ abhängt und für große $\frac{A_1}{A_2}$-Werte stark abnimmt (s. a. S. 238, Punkt 1)

daß der so erzeugte Compoundkern U^{235} etwa um 28 MeV stärker angeregt ist als ein durch Einfang langsamer Neutronen erhaltenes U^{236} ($E_A \approx 5{,}3$ MeV). Diese Anregung bringt das Verhältnis der maximalen zur minimalen Massenhäufigkeit von 600 : 1 auf 2 : 1. Noch wesentlich energiereichere Teilchen führen zur symmetrischen Spaltung: So findet man eine völlig symmetrische Häufigkeitsverteilung mit nur einem Maximum in der Mitte bei Beschuß von Bi^{209} mit 200 MeV-Deuteronen – wie die strichpunktierte Linie der Abb. 97 zeigt. Ähnliches gilt auch bei Spaltung von U mit derart energiereichen Teilchen.

Das allmähliche Verschwinden der Asymmetrie der Spaltung von U^{236} mit steigender Anregung veranschaulicht Abb. 98. Hier ist als Maß der Asymmetrie das Verhältnis der Häufigkeiten der Spaltprodukte Ag^{111} und Ba^{140} gewählt. Ag^{111} liegt fast im Minimum, Ba^{140} im Maximum der Häufigkeitskurve.

Die Spaltprodukte von asymmetrischen Spaltungen haben natürlich nach dem Impulssatz im umgekehrten Verhältnis ihrer Massen verschiedene Energien. Abb. 99 zeigt die Energieverteilung der Spaltprodukte von U^{235}, wie man sie aus Ionisationsmessungen mit Proportionalzählern erhält. Die leichtere Gruppe hat

ihr Maximum bei ≈ 93 MeV, die schwerere Gruppe bei ≈ 62 MeV. Wegen der Symmetrie der Verteilungen um das jeweilige Maximum geben die genannten Zahlen zugleich die mittleren kinetischen Energien der beiden Gruppen an. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Verteilungskurven für „langsame" und „schnelle" Neutronen (hier ≈ 1 MeV) besteht nicht.

Eine befriedigende Erklärung der Asymmetrie der Spaltung bei kleinen und mittleren Energien wurde bisher nicht gefunden. Wir erwähnen kurz einige diesbezügliche aus der Literatur bekannte Überlegungen und Versuche zur Erklärung dieser auffallenden Erscheinung:

1. Die nach der üblichen Massendefektskurve zu erwartende *kinetische Energie* der Spaltstücke weist, wie schon in § 48 gezeigt wurde, ein schwaches Maximum bei symmetrischer Spaltung auf und sollte daher diese Spaltungsart begünstigen. Die kinetischen Energien der *verschiedenen Paare* von Spaltprodukten sind auch direkt experimentell gemessen worden: Während früher ihre Unabhängigkeit vom Massenverhältnis der Spaltprodukte festgestellt schien, zeigen neuere Messungen ein merkliches Maximum mit rd. 10 MeV Überhöhung für das Massenverhältnis 1 :1,2 bis 1 :1,3 [B 49-1], [S 57-1], wohingegen das häufigste Massenverhältnis selber bei etwa 1 :1,5 auftritt. In jedem Falle scheint aber die Energietönung für die Erklärung der Asymmetrie nicht auszureichen.

2. Frankel und Metropolis [F 47-3] haben die Höhe der Potentialbarriere bei kleinen Abweichungen von der symmetrischen Teilung numerisch mit einer elektronischen Rechenmaschine berechnet und finden, daß sie gegenüber dem symmetrischen Fall *ansteigt*. Dies spricht dagegen, daß mit Coulombkräften und Oberflächenspannung allein die asymmetrische Spaltung zu verstehen ist.

3. Mit *hydrodynamischen Effekten* wurde auch eine Erklärung der Asymmetrie versucht: Nach Durchgang des Tröpfchens durch die kritische Gestalt soll im Laufe der weiteren Bewegung dadurch eine Asymmetrie entstehen können, daß bisher als konstant behandelte Größen, wie Oberflächenspannung der Kernmaterie und ihre „Viskosität", die wir bislang zu Null annahmen, vom Anregungszustand abhängen und vielleicht durch eine unterschiedliche Anregung der beiden Spaltstücke eine asymmetrische Teilung begünstigen [H 53-2].

4. M. G. Mayer [M 48-1] u. a. haben die *Schaleneffekte* zur Erklärung der Asymmetrie herangezogen: Die Bruchstücke sollen sich um die magischen Neutronenzahlen 50 und 82 scharen. Es wird angenommen, daß hierbei die größtmögliche Energie freigesetzt und dadurch die Bildung dieser magischen Kerne bevorzugt wird. Es ist aber nicht erwiesen, daß die üblichen magischen Zahlen, die sich auf die Grundzustände der Atomkerne beziehen, auch bei so stark deformierten und hochangeregten Kernen, wie sie im Moment der Spaltung vorliegen, eine wesentliche Rolle spielen, zumal die Eigenzustände stark deformationsabhängig sind. Eigenzustände in deformierten Kernen und ihre Auswirkungen auf die Kernspaltung wurden in [W 55-1] und anderen untersucht.

5. S. FRANKEL [F 46-1] und E. BAGGE [B 47-1] u. a. führen die Asymmetrie der *spontanen* Spaltung auf den *Tunneleffekt* zurück. Die spontane Spaltung ist offenbar ohne Tunneleffekt nicht möglich. Hier kann eine Massenasymmetrie wegen der verkleinerten reduzierten Masse zu einer Bevorzugung der unsymmetrischen gegenüber der symmetrischen Spaltung führen. Die Potentialschwelle wird nach 2. wenigstens für kleine Abweichungen von der Symmetrie anscheinend nicht erniedrigt. Dann aber ist nur der Effekt der reduzierten Masse μ maßgebend. Der Unterschied in μ zwischen den Teilungen 1 : 1 und 3 : 2 beträgt jedoch nur $\approx 4\%$, und der Exponent im Gamow-Faktor ändert sich daher um $\approx 2\%$. Wenn diese kleine Änderung aber einen Faktor $\gtrsim 6 \cdot 10^2$ in der Häufigkeit der Massenverteilung hervorrufen soll (s. oben), dann muß der Durchlässigkeitsfaktor selbst, absolut genommen, $< 10^{-100}$ betragen, und eine spontane Spaltung wäre nicht möglich. Bei der induzierten Spaltung ist andererseits die Anregungsenergie gleich so hoch, daß der Tunneleffekt nicht mit einem Faktor $6 \cdot 10^2$ in der Häufigkeitsverteilung zur Wirkung kommen sollte.

6. Neuerdings wurden neben dem Tunneleffekt *statistische Gesichtspunkte zum Tröpfchenmodell* zur Erklärung der Spaltungsasymmetrie eingeführt. Die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der verschiedenen Massenverhältnisse der Bruchstücke im kritischen Stadium vor der endgültigen Trennung (reduzierte Breiten) werden in vorläufiger Näherung als massenunabhängig angenommen und die Entstehung der Asymmetrie auf den weiteren Verlauf des Spaltungsvorganges verlegt. Die Spaltungswahrscheinlichkeit wird proportional zum Produkt der Niveaudichten der beiden Teilkerne nach der Spaltung, d. i. zum statistischen Gewicht des Endzustandes, angenommen. Die Niveaudichten ihrerseits sind durch die Anregungsenergien der Spaltprodukte gegeben. Allerdings scheint die Abhängigkeit dieser Faktoren vom Massenverhältnis zusammen mit einem Tunneleffekt der auseinanderlaufenden Spaltstücke auch noch keine befriedigende Erklärung der Spaltungsasymmetrie zu ermöglichen [F 56-1], [N 56-1], [C 58-1].

7. In letzter Zeit wurde versucht, den Einfluß der Kernkräfte zwischen den Spaltstücken auf den Tunneleffekt halbempirisch mit zu berücksichtigen. Danach scheinen Schaleneffekte über das Kernkraftpotentional für die Spaltungsasymmetrie verantwortlich zu sein [B 60-1].

Alle diese Überlegungen führten aber angesichts der überaus vielfältigen Möglichkeiten und Unsicherheiten in den vereinfachenden Annahmen bisher nicht zu endgültigen Resultaten.
Dagegen ist jetzt experimentell sichergestellt, daß kleine Abweichungen der Massenhäufigkeitskurve von einem glatten Verlauf (die sog. Feinstruktur) auf *Schaleneffekte bei den magischen Zahlen* 82 und 50 zurückzuführen sind. So beobachtet man bei Spaltung von U^{233}, U^{235} und Pu^{239} mit thermischen Neutronen eine merkliche „Ausbeutespitze" im Bereich der schweren Trümmer bei der Massenzahl 134 durch bevorzugte Bildung von Kernen mit der Neutronenzahl 82. Die komplementäre „Spitze" bei den leichten Bruchstücken findet sich z. B. für U^{235} bei $A = 100$ (Mo^{100}), was einer Abdampfung von 2 „prompt neutrons" bei der

Spaltung entspricht. Es handelt sich hier aber nur um eine Erhöhung der Häufigkeit um etwa 30 % gegenüber einem glatten Kurvenverlauf, während die oben betrachtete eigentliche Spaltungsasymmetrie einen Faktor 600 betrifft.

Die Kr- und Xe-Isotope zeigen als primäre Spaltprodukte anomal niedrige Häufigkeiten bei den Neutronenzahlen 51 und 83: Offenbar wird hier das erste Neutron nach dem Schalenabschluß besonders leicht abgedampft.

Auf andere Weise macht sich der Schalenabschluß bei der Massenzahl $A = 136$ geltend, die mit der an sich normalen Gesamthäufigkeit von 6,5% vertreten ist. Hiervon entfallen aber nur 3,1% auf die Entstehung der Zerfallsreihe J^{136} (83 sec) $\dashrightarrow$ Xe^{136} (stabil), 3,4% dagegen auf die direkte Bildung des stabilen Xe^{136}. Ohne den Einfluß der magischen Zahl $N = 82$ sollte man annehmen, daß sich praktisch nur J^{136} als Primärprodukt bildet. Tatsächlich aber wird bei J^{136} das 83te Neutron besonders leicht abdampfen und dadurch die Ausbeute verkleinern. Dafür bildet sich das stabile Xe^{136} mit 82 Neutronen als energetisch besonders ausgezeichnete Konfiguration direkt bei der Spaltung — entgegen der allgemeinen Regel, wonach die Primärkerne instabil sind und zu einer Kaskade von mehreren β-Zerfällen Anlaß geben.

§ 51. Die ternäre Spaltung

Ein α-Teilchen, das während der Spaltung gerade auf der letzten „Brücke" zwischen den beiden auseinanderfliegenden Teilen erscheint, befindet sich fast auf dem Gipfel des „Coulomb-Berges" von rund 20 MeV und kann relativ leicht etwa senkrecht zur Richtung der Verbindungslinie der beiden großen Kerntrümmer entweichen. Die Energie der emittierten α-Teilchen sollte daher um 20 MeV liegen. Das Abdampfen auch schwererer Partikel ist energetisch möglich.

Tabelle 34. Arten ternärer Spaltungen (n = Neutron; γ = Photon)

Compoundkern	Massenzahl der dritten Partikel	Energie [MeV]	Zahl der binären Spaltungen pro ternäre Spaltung
U^{235} + langs. n	40 bis 90	40	$7 \cdot 10^6$
U^{233} } + langs. n	13 ± 3		75
U^{235} } + langs. n	13 ± 3		75
Th^{232} + 2,5 MeV-n	8	20	1000
U^{235} + 23 MeV-γ	8	20	10000
U^{233} } + langs. n	4	5 bis 25	400
U^{235} } + langs. n	4		500
Pu^{239} } + langs. n	4		450
Th^{232} } + 2,5 MeV-n	4	5 bis 23	~400
U^{238} } + 2,5 MeV-n	4	5 bis 21	~400
Th^{232} } + 23 MeV-γ	4	17	~400
U^{238} } + 23 MeV-γ	4		
U^{235} + langs. n	1		5000

(Messergebnisse verschiedener Autoren; zusammengestellt von D. L. Hill und J. A. Wheeler)

Kleinere geladene Bruchstücke als He^4 sind unwahrscheinlich, da deren Bindung an die Kernmaterie stark ist, während α-Teilchen bekanntlich schwach gebunden sind und gegenüber den schwersten Kernen sogar eine negative Bindungsenergie aufweisen. Sie dampfen also besonders leicht weg, sobald nur die Coulomb-Barriere sie nicht mehr entscheidend zurückhält.

Tabelle 34 gibt in Spalte 2 eine Aufstellung über die beobachteten leichten Teilchen bei einer Dreifachteilung. Die Messungen wurden teils mit Kernspuremulsionen, teils mit Ionisationskammern ausgeführt. Z. B. beobachteten FARWELL, SEGRÉ und WIEGAND [F 47-4] α-Teilchen in Koinzidenz mit den schweren Spaltprodukten. Aus Spalte 4 der Tabelle, welche die Zahl der binären Spaltungen auf eine ternäre Spaltung angibt, ersieht man, daß die Emission eines dritten geladenen Teilchens ein sehr seltener Vorgang ist. Bei 400 bis 500 normalen Spaltungen entsteht z. B. nur ein α-Teilchen.

§ 52. Wirkungsquerschnitte der verschiedenen Neutronenreaktionen: (n,γ); (n,n); (n,n'); (n,α); (n,f)

Nach Absorption eines Neutrons kann der Compoundkern verschiedene Prozesse ausführen. Die wichtigsten darunter sind

1. die γ-Emission,

2. die Reemission eines elastisch oder unelastisch gestreuten Neutrons,

3. die α-Emission,

4. die Spaltung.

Die entsprechenden Wirkungsquerschnitte sind im Sinne der Bohrschen Hypothese darstellbar durch

$$\sigma(n,i) = \sigma_C \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$$

$$\sigma(n,f) = \sigma_C \frac{\Gamma_f}{\Gamma}$$

i steht für γ, n, n', α, und der Index f bedeutet „*fission*" oder „*Spaltung*". σ_C ist der Wirkungsquerschnitt der Compoundbildung, dessen Energieabhängigkeit, wie schon früher besprochen, die Resonanzen und das $\frac{1}{v}$-Gesetz enthält. Zum Vergleich der verschiedenen Wirkungsquerschnitte von U sind in Abb. 100 [B 39-2] die verschiedenen Γ_i in Abhängigkeit von der Anregungsenergie E_A aufgetragen. Nur $\Gamma_{n'}$ und Γ_n haben Schwellenwerte auf der Skala der *Anregungsenergie*; die Teilbreiten Γ_γ, Γ_f, Γ_α existieren bei jeder Energie. Die Wirkungsquerschnitte für Spaltung, Neutroneneinfang und Streuung sind für die technisch wichtigsten spaltbaren Kerne weiter unten in Tabelle 37, zusammen mit weiteren Daten, zu finden.

Von praktisch großem Interesse ist der Quotient $\alpha = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_f}$, der das Verhältnis der mit einer endgültigen Neutronenabsorption ohne Spaltung endenden Prozesse

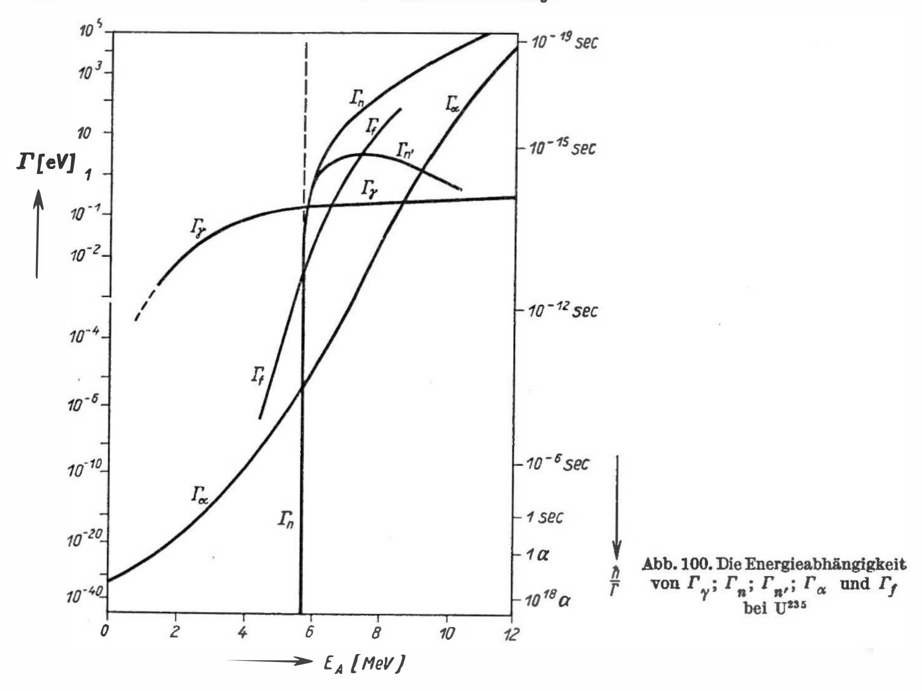


Abb. 100. Die Energieabhängigkeit von Γ_γ; Γ_n; $\Gamma_{n'}$; Γ_α und Γ_f bei U^{235}

zu der Zahl der Spaltungen angibt. α ist daher ein Maß der für eine Kettenreaktion (z. B. im Reaktor) verlorenen Neutronen. Die α-Werte bei thermischen Neutronen betragen für die Kerne

	U^{233}	U^{235}	Pu^{239}
$\alpha =$	0,115	0,180	0,439.

Abgesehen von dem Anteil der compoundelastischen Streuung führt der Bruchteil $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ aller Neutroneneinfänge durch den Zielkern zur Bildung der langlebigen, nicht mit langsamen Neutronen spaltbaren α-Strahler U^{234}, U^{236} und Pu^{240} (s. § 36, S. 169).

Nach Seaborg [S 50-5] besteht eine Beziehung zwischen $\frac{\Gamma_f}{\Gamma_\gamma}$ oder $\frac{\sigma_{(n,f)}}{\sigma_{(n,\gamma)}}$ und der Differenz zwischen der Anregungsenergie E_A und der Aktivierungs-

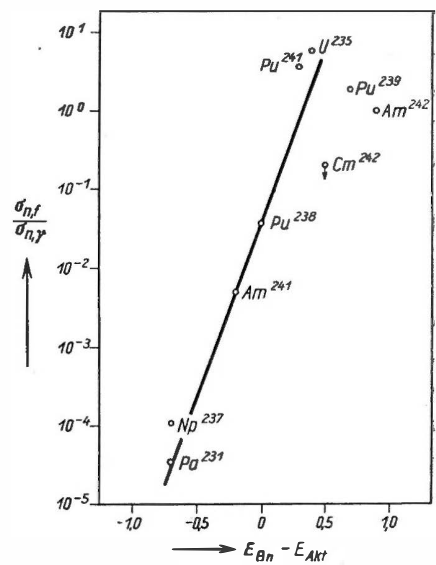


Abb. 101. Beziehung zwischen $\frac{\sigma(n,f)}{\sigma(n,\gamma)}$ und dem Energieüberschuß ($E_{Bn} - E_{Akt}$) der Bindungsenergie E_{Bn} des Neutrons gegenüber der Aktivierungsenergie E_{Akt} (Abzisse in MeV)

energie E_{Akt} gegen Spaltung. Dies ist plausibel, da von dem Energieüberschuß $E_D = E_A - E_{\text{Akt}}$ die Dynamik des Spaltungsvorganges, insbesondere bis zur Erreichung der kritischen Phase, wesentlich bestimmt sein wird. Im Falle langsamer Neutronen ist $E_D = E_{\text{Bn}} - E_{\text{Akt}}$. Abb. 101 zeigt besagte Beziehung graphisch. Da Γ_γ nur wenig von der Neutronenenergie abhängt, ist $\frac{\Gamma_f}{\Gamma_\gamma}$ etwa proportional zu Γ_f. Die Abb. 101 veranschaulicht daher auch den Grad der Spaltbarkeit der verschiedenen Kerne durch langsame Neutronen.

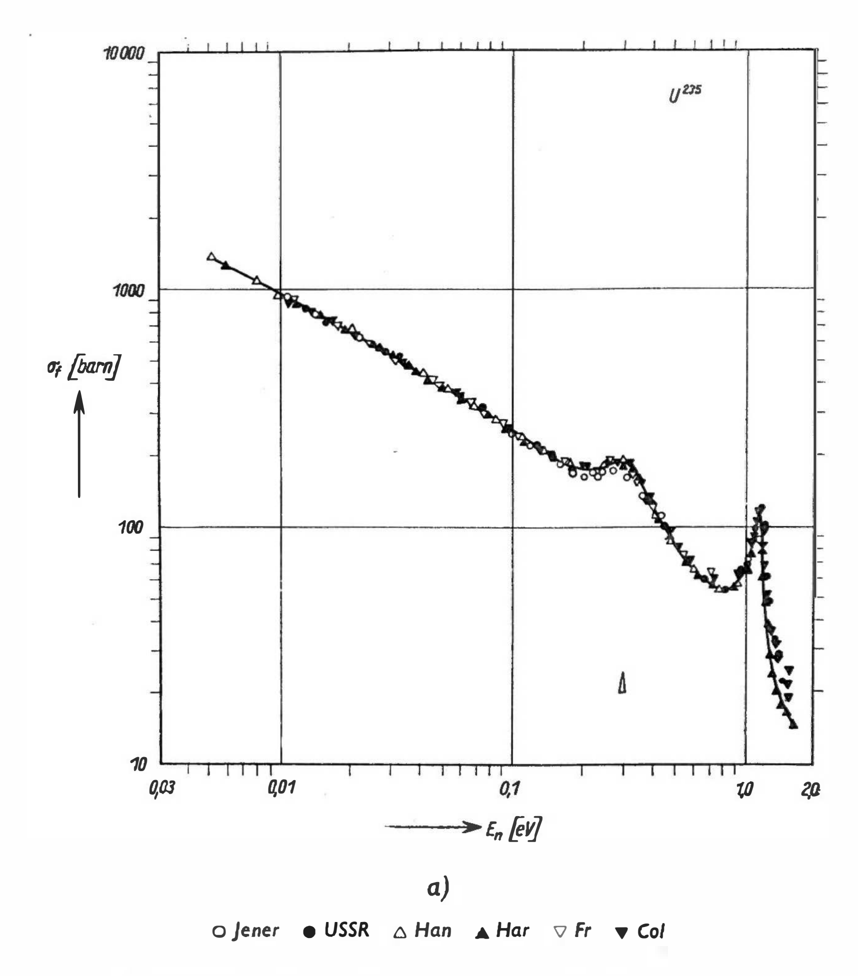
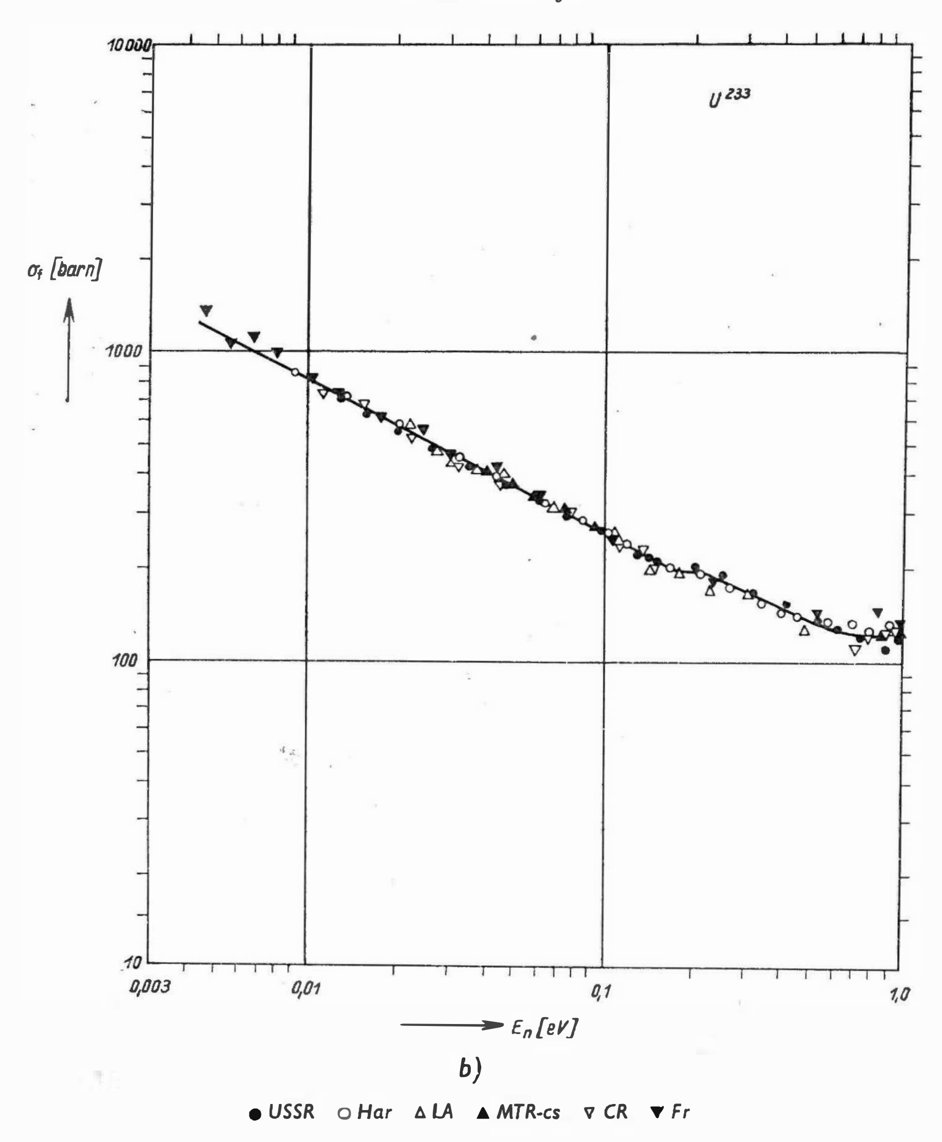


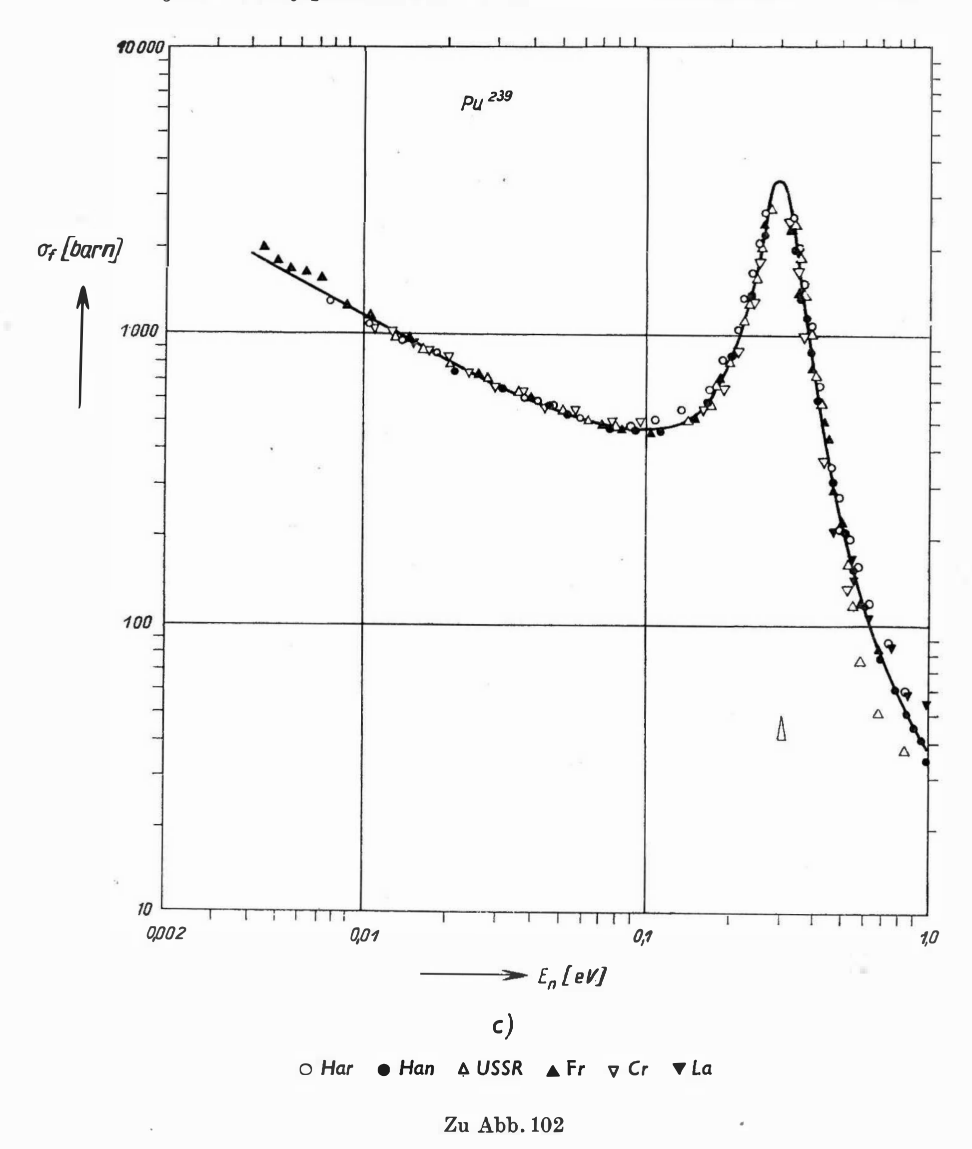
Abb. 102. Wirkungsquerschnitte für Spaltung mit thermischen und epithermischen Neutronen

a) für U^{235}, b) für U^{233}
und c) für Pu^{239}



Zu Abb. 102

Die Energieabhängigkeit des Spaltquerschnitts der Isotope U^{233}, U^{235} und Pu^{239} im thermischen und epithermischen Gebiet ist aus den Abbildungen 102 a, b und c zu ersehen. Im thermischen Gebiet gilt das $\frac{1}{v}$-Gesetz; im epithermischen Bereich treten schwache Resonanzen auf.



Zu Abb. 102

Die Spaltbarkeit der nur mit schnellen Neutronen zu spaltenden Kerne zeigt nach Überschreitung der Schwelle einen schnellen Anstieg bis zu einem Maximum nach Art einer Sättigungskurve.

In der Abb. 103 sind die Energieabhängigkeiten der Spaltquerschnitte für die Kerne Pa^{231}, Th^{232}, U^{234}, U und Np^{237} dargestellt.

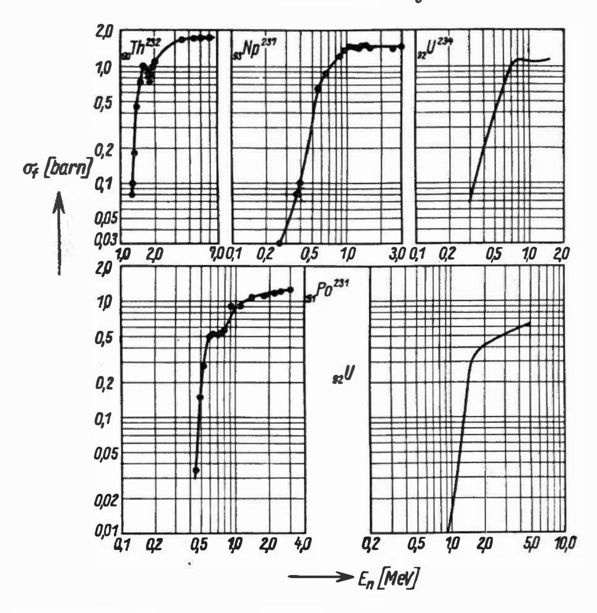


Abb. 103. Die Energieabhängigkeit der Spaltquerschnitte der nur mit schnellen Neutronen spaltbaren Kerne Th^{232}, Po^{231}, U^{234}, U und Np^{237}

§ 53. Photospaltung und sonstige Kernspaltungen

Die *Spaltung* von schweren Kernen durch *γ-Quanten* wurde schon weiter oben mehrfach erwähnt. Die Beobachtung der Reaktionsschwelle gibt eine besonders zuverlässige Bestimmung der Aktivierungsenergie für den Spaltungsvorgang (s. Tabelle 32b). Auch hier bemerkt man mit steigender Energie eine Tendenz zur symmetrischen Spaltung. So fand man bei Bestrahlung von U^{238} (in Form von $UO_2(NO_3)_2$) mit Betatron-γ-Strahlen verschiedener Maximal-Energien für das Verhältnis V der Ausbeuten im Maximum zu der im Minimum der Massenhäufigkeitskurve folgende Werte (nach [S 53-1]):

$E_{\gamma\max}$ [MeV]	10	16	22	48	100
V	126	121	20	10	7

Die Anregung durch γ-Quanten kann außer zur Spaltung auch zur Emission von Neutronen, Protonen oder α-Teilchen führen. Bei schweren Kernen ist die Neutronenemission vorherrschend. Die Energieabhängigkeit der γ-Wirkungsquerschnitte von U^{238} für Spaltung und Neutronenemission ist in Abb. 104 dargestellt [D 53-1]. Der Prozeß $U^{238}(\gamma, n)U^{237}$ zeigt ein Resonanzmaximum bei 11 MeV, der Spaltungsprozeß eine breite Resonanz bei rd. 14 MeV.

Bei den leichtesten Kernen kommen häufiger Emissionen geladener Teilchen vor, die an eine Kernspaltung erinnern. Das Beispiel der Dreiteilung des C^{12}-Kerns und die Spaltung von D durch γ-Quanten wurden weiter oben schon besprochen (s. § 35, S. 164 und 165).

Da die Spaltung einen allg. möglichen Zerfallsmodus der schwersten Compoundkerne darstellt, ist der Vorgang mit allen bekannten Teilchen (n, p, d, α usw.) erzielbar, wenn diese nur die notwendige Anregung des Compoundkerns hervorrufen. Bei Absorption von π^--*Mesonen* sind Ereignisse beobachtet worden, die den Charakter hochenergetischer Spaltungen aufweisen. Dies ist auch zu erwarten, da bei der Reaktion eines Kernprotons mit einem π^--Meson ein Neutron mit einer Energie der Größenordnung 100 MeV entsteht. Spaltungen mit μ^--Mesonen wurden, obgleich sie vorkommen sollten, bisher nicht mit Sicherhcit nachgewiesen.

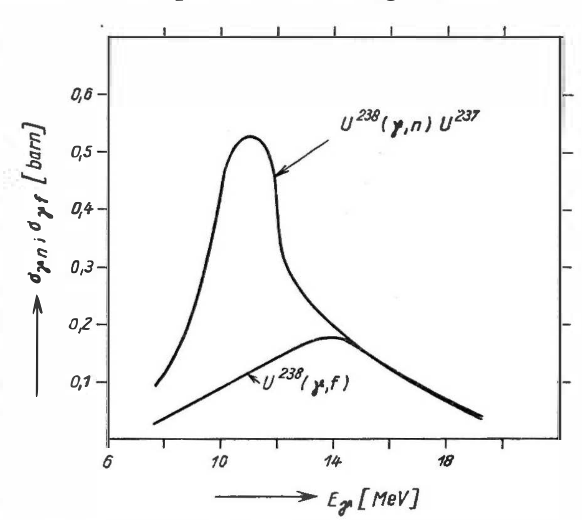


Abb. 104. Wirkungsquerschnitte der (γ, n)- und (γ, f)-Reaktion an U^{238} als Funktion der γ-Energie

§ 54. Die Radioaktivität und andere Eigenschaften der Spaltprodukte

a) β-Zerfallsreihen

Die Produkte der Uranspaltung befinden sich unmittelbar nach ihrer Entstehung in hochangeregten Zuständen und haben einen starken Neutronenüberschuß; denn die Uran-Kerne und ihre unmittelbaren Trümmer enthalten etwa 55%, die *stabilen Isobaren* der Spaltprodukte aber nur 30 bis 40% mehr Neutronen als Protonen. Die Spaltprodukte sind daher fast immer starke Elektronen- und γ-Strahler: Die Kernneutronen verwandeln sich dabei so lange in Protonen, bis schließlich eine stabile Konfiguration erreicht wird. Nur ausnahmsweise entstehen bei der Spaltung von vornherein stabile Kerne wie das auf S. 240 erwähnte Xe^{136}. Die *Umwandlungsketten* führen im Mittel zu Kaskaden von 3, maximal aber bis zu 6 β^--Zerfällen.

Insgesamt sind etwa 260 verschiedene Isotope zwischen Zn und Gd in diesen Umwandlungsketten enthalten. Etwa 200 von ihnen konnten einzeln identifiziert werden. Ein bestimmtes Isotop kann entweder direkt bei der Spaltung oder durch β-Zerfall aus einem primär gebildeten Isobar niedrigerer Kernladung entstehen.

Die häufiger vorkommenden Elemente sind

bei der leichten Gruppe:

Br, Kr, Rb, Sr, Y, Zr, Nb, Mo, Tc, Ru, Rh,

bei der schweren Gruppe:

Sb, Te, J, Xe, Cs, Ba, La, Ce, Pr, Nd, Pm, Sm.

Die mittleren Elemente jeder Gruppe sind jeweils am stärksten vertreten. Die Elemente zwischen Rh und Sb liegen im Minimum der Häufigkeitsverteilung. Einige bemerkenswerte Zerfallsreihen sind in nachstehender Tabelle 35 aufgeführt.

Tabelle 35. Auswahl einiger bemerkenswerter β-Zerfallsreihen der Spaltprodukte

1. a)	$J^{139} \xrightarrow{2,6\ s} Xe^{139} \xrightarrow{41\ s} Cs^{139} \xrightarrow{7\ m} Ba^{139} \xrightarrow{85\ m} La^{139}$	6,3%
b)	$Xe^{140} \xrightarrow{16\ s} Cs^{140} \xrightarrow{66\ s} Ba^{140} \xrightarrow{12,8\ d} La^{140} \xrightarrow{40,2\ h} Ce^{140}$	6,1%
2.	$Kr^{90} \xrightarrow{33\ s} Rb^{90} \xrightarrow{kurz} Sr^{90} \xrightarrow{27,7\ a} Y^{90} \xrightarrow{65\ h} Zr^{90}$	4,5%
3.	$Y^{95} \xrightarrow{10,5\ h} Zr^{95} \xrightarrow{65\ d} Nb^{95} \xrightarrow{35\ d} Mo^{95}$	6,4%
4.	$Te^{131} \xrightarrow{25\ m} J^{131} \xrightarrow{8,0\ d} Xe^{131}$	2,8%
5.	$Mo^{99} \xrightarrow{67\ h} Tc^{99} \xrightarrow{2,12 \cdot 10^5\ a} Ru^{99}$	6,2%
6.	$Nd^{147} \xrightarrow{11\ d} Pm^{147} \xrightarrow{2,64\ a} Sm^{147}$	2,6%
7.	$Te^{135} \xrightarrow{2\ m} J^{135} \xrightarrow{6,7\ h} Xe^{135} \xrightarrow{9,2\ h} Cs^{135} \xrightarrow{3,0 \cdot 10^6\ a} Ba^{135}$	5,9%
8.	$Br^{89} \xrightarrow{4,5\ s} \overset{\nearrow(n)}{Kr^{89}} \xrightarrow{3,18\ m} Rb^{89} \xrightarrow{14,9\ m} Sr^{89} \xrightarrow{50,5\ d} Y^{89}$	4,6%
9.	$Br^{87} \xrightarrow{56\ s} \overset{\nearrow(n)}{Kr^{87}} \xrightarrow{78\ m} Rb^{87} \xrightarrow{5 \cdot 10^{10}\ a} Sr^{87}$	(0,025%)
10.	$J^{137} \xrightarrow{23\ s} \overset{\nearrow(n)}{Xe^{137}} \xrightarrow{3,8\ m} Cs^{137} \xrightarrow{26,6\ a} Ba^{137}$	(0,17%)

Die %-Zahlen geben die Häufigkeiten des Auftretens der betreffenden Massenzahl auf 100 Spaltungen an. (Ihre Summe über alle entstehenden Zerfallsketten ist = 200%, da pro Spaltung 2 neue Kerne entstehen. Wegen der eingeklammerten %-Zahlen bei den Reihen 9 und 10 siehe S. 256).

Reihen 1a *und* 1b enthalten a) das 85 min-Barium und b) das 12,8 Tage-Barium, durch deren zweifelsfreien chemischen Nachweis HAHN und STRASSMANN seinerzeit die Entdeckung der Uranspaltung gelang. (Das 85 min-Barium konnte auch durch seine Halbwertszeit mit einem bereits aus künstlichen Kernumwandlungen bekannten Ba-Isotop identifiziert werden.)

Reihe 2 ist durch die Entstehung des biologisch gefährlichsten Spaltproduktes, Sr^{90}, bemerkenswert.

Reihe 3 enthält in Zr^{95} und Nb^{95} zwei in bestrahlten Reaktorbrennelementen besonders stark aktive, technologisch störende Isotope mittlerer Halbwertszeit.

Reihe 4 enthält das medizinisch wichtige, langlebigste radioaktive J-Isotop J^{131}.

Reihen 5 *und* 6 führen die Entstehung der in der Natur nicht vorkommenden Elemente Tc^{99} und Pm^{147} vor.

Reihe 7 zeigt die Genetik des z. Z. als stärksten Absorber von thermischen Neutronen bekannten Isotops Xe^{135}.

Reihen 8 *bis* 10 enthalten die weiter unten zu besprechenden Edelgase Kr^{89}, Kr^{87} und Xe^{137}. Außerdem findet sich in Reihe 9 das äußerst langlebige Rb^{87}, in Reihe 10 das als biologisch zweitgefährlichste Substanz unter den Spaltprodukten bekannte Cs^{137}.

Die Skala der Halbwertszeiten der β- und γ-Strahler reicht von den praktisch unmeßbar kurzen Zeiten bis zu vielen 10^{10} Jahren; ebenso kommen alle möglichen Energien bis zu mehreren MeV vor. Die Summe aller dieser Strahlungen befolgt in einem recht weiten Zeitintervall näherungsweise ein einfaches Abfallsgesetz [W 48-1]. Die Aktivität beträgt *t Tage* nach der Spaltung:

$$1{,}9 \cdot 10^{-6} \cdot t^{-1{,}2} \ \gamma\text{-Quanten pro sec und pro Spaltung}$$

oder

$$1{,}3 \cdot 10^{5} \cdot t^{-1{,}2} \ \text{Curie } \gamma\text{-Aktivität pro g Spaltprodukte.}$$

Die mittlere β^--Aktivität ist etwa doppelt so groß wie die der γ-Strahlung. Die γ-Quanten haben eine mittlere Energie von 0,7 MeV, die der β^--Strahlung beträgt 0,4 MeV. Die resultierende radioaktive Strahlungsleistung (Neutrinos nicht mitgerechnet) beläuft sich daher *t Tage* nach der Spaltung auf:

$$W \approx 1{,}2 \cdot 10^{3} \cdot t^{-1{,}2} \ \text{Watt pro g Spaltprodukte.}$$

(Zum Vergleich: 1 g Ra erzeugt zusammen mit seinen Folgeprodukten ungefähr 0,2 Watt.)

Die angegebenen Formeln sind in einem Intervall zwischen 10 sec und 100 d mit einer Genauigkeit innerhalb eines Faktors $1{,}5^{\pm 1}$ als „Faustregeln“ brauchbar. Für größere Zeiten gilt das $t^{-1{,}2}$-Gesetz nicht mehr, und es kommt das exponentielle Zerfallsgesetz der wenigen überlebenden Spaltprodukte, wie Sr^{90}, Cs^{137}, Tc^{99}, Rb^{87} etc., zur Geltung.

b) Neutronenwirkungsquerschnitte einiger Spaltprodukte

Eine zunächst nicht zu vermutende Tatsache ist das Vorkommen einiger Spaltprodukte mit ungewöhnlich großen Wirkungsquerschnitten für thermische Neutronen. Sie sind in Tabelle 36 zusammengestellt.

Tabelle 36. Spaltprodukte mit ungewöhnlich großen Wirkungsquerschnitten

Kern	Cd^{113}	Xe^{135}	Sm^{149}	Gd^{155}	Gd^{157}
Spaltausbeute [%]	0,01	5,9	1,4	0,03	0,002
$\sigma_{\text{abs (therm)}}$ [barn]	20000	$3{,}4 \cdot 10^6$	36000	70000	230000

Die hohe Neutronenaffinität ist um so überraschender, als diese Kerne gerade aus solchen mit großem Neutronenüberschuß entstehen. Xe^{135} zeigt den größten bisher beobachteten Wirkungsquerschnitt, worüber bereits früher (s. S. 174) berichtet wurde. Das Isotop sammelt sich trotz seiner kurzen Halbwertszeit von 9,2 h im Kernreaktor soweit an, daß seine Neutronenabsorption den Betrieb merklich stört. Dadurch wurde seine Existenz von E. Fermi und J. L. Wheeler beim Anlaufen des Hanford-Reaktors zuerst überhaupt erkannt. Die übrigen in Tab. 36 angegebenen Elemente sind stabil. Unter ihnen hat Gd^{157} den größten bei *stabilen* Isotopen bekannten Wirkungsquerschnitt. Der geringen Spaltausbeute wegen ist es aber im Reaktor nicht störend. Dagegen bildet Sm^{149} trotz seines kleineren Wirkungsquerschnitts durch seine größere Häufigkeit das zweitwirksamste „*Reaktorgift*" (Neutronenabsorber). Siehe hierzu auch Bd. III, Teil A (Reaktoren).

§ 55. Die Spaltneutronen (prompt neutrons)

Die praktisch wichtigste Eigenschaft der Kernspaltung ist die Befreiung von zwei bis drei Neutronen während des Prozesses. Sie werden entweder bei der Teilung des Kerntröpfchens selbst, viel wahrscheinlicher aber aus den hochangeregten Kerntrümmern innerhalb von $<10^{-12}$ sec herausgedampft. Diese obere Zeitgrenze konnte aus Beobachtungen des Ortes der Neutronenemission der mit etwa ein Zehntel Lichtgeschwindigkeit auseinanderfliegenden Kerntrümmer geschlossen werden. Nach der Verdampfungstheorie der Neutronen sollte man $\lesssim 10^{-18}$ sec erwarten (s. § 60, S. 265).

a) Energie-Spektrum der Spaltneutronen

Einer empirisch gut bestätigten Formel zufolge beträgt die Zahl $N\,dE$ der Neutronen im Energieintervall E bis $E + dE$ [W 52-1]

$$N\,dE \sim \sinh\sqrt{2E} \cdot e^{-E} dE \quad (E\ [\text{MeV}]),\ \text{gültig für } E \lesssim 16\ \text{MeV}$$

oder, noch einfacher

$$N\,dE \sim \sqrt{E}\, e^{-E/1{,}26} dE \quad (E\ [\text{MeV}]),\ \text{gültig für } E \lesssim 9\ \text{MeV}.$$

Die häufigste Energie liegt nach der letzten Regel bei $\approx 0{,}63$ MeV, die mittlere Energie bei $\approx 1{,}8$ MeV. Eine graphische Darstellung der Beobachtungen gibt Abb. 105.

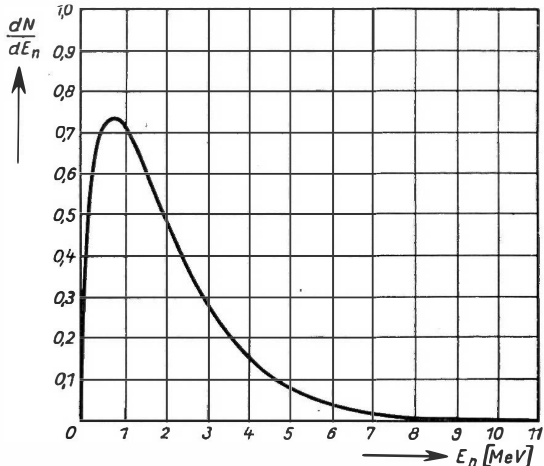


Abb. 105. Energiespektrum der Neutronen aus der Spaltung von U^{235} mit thermischen Neutronen

Im interessierenden Bereich unterhalb 9 MeV stellen beide Formeln die Beobachtungen gleich gut und recht genau dar. Oberhalb 9 MeV wird der relative Anteil der Neutronen praktisch bedeutungslos klein.

Wenn man von der Vorstellung ausgeht, daß die Spaltneutronen nur von den auseinanderfliegenden Spaltfragmenten isotrop nach allen Richtungen (im Fragmentsystem) emittiert werden, so ist es unter verschiedenen vereinfachenden Annahmen möglich, beide oben genannten Ausdrücke durch Überlagerung der Geschwindigkeit der Fragmente (im Laborsystem) und der der Neutronen (im Fragmentsystem) zu erhalten, wobei letztere nach der Verdampfungstheorie berechnet werden. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß die Spaltneutronen im wesentlichen nur aus den Bruchstücken n a c h der Spaltung abgedampft werden.

In diesem Falle müßten ferner die Spaltneutronen (im Laborsystem) bevorzugt in Richtung der auseinanderfliegenden Kerntrümmer zu beobachten sein. In der Tat fand man [W 47-2] bei Messung der Winkelkorrelation zwischen den Spaltneutronen und den mit diesen zeitlich koinzidierenden Fragmenten eine 5fach größere Neutronenzahl in der Flugrichtung der Fragmente als senkrecht dazu. Damit erscheint die Herkunft der Spaltneutronen aus den Kerntrümmern (und nicht aus dem Compoundkern) als gesichert.

Eine der für die Reaktortechnik wichtigsten Größen ist die

b) Zahl η der pro absorbiertes Neutron neu erzeugten Spaltneutronen

Wegen der schon erwähnten (n,γ)-Prozesse ist die Zahl η der *pro absorbiertes Neutron* emittierten Spaltneutronen kleiner als die Zahl ν der *pro Spaltung* erzeugten Spaltneutronen. Die Größe η läßt sich am genauesten durch Versuche mit einem Reaktor bestimmen: Man stelle z. B. eine Mischung aus dem zu untersuchenden Spaltmaterial und Bor in wäßriger Lösung her, bei der *die Bor-Absorption gerade die Neutronenerzeugung durch Spaltung kompensiert.* Die dazu erforderliche Zusammensetzung wird dadurch festgestellt, daß eine solche Mischung im Reaktorinnern, an einer Stelle mit der gewünschten Neutronengeschwindigkeit

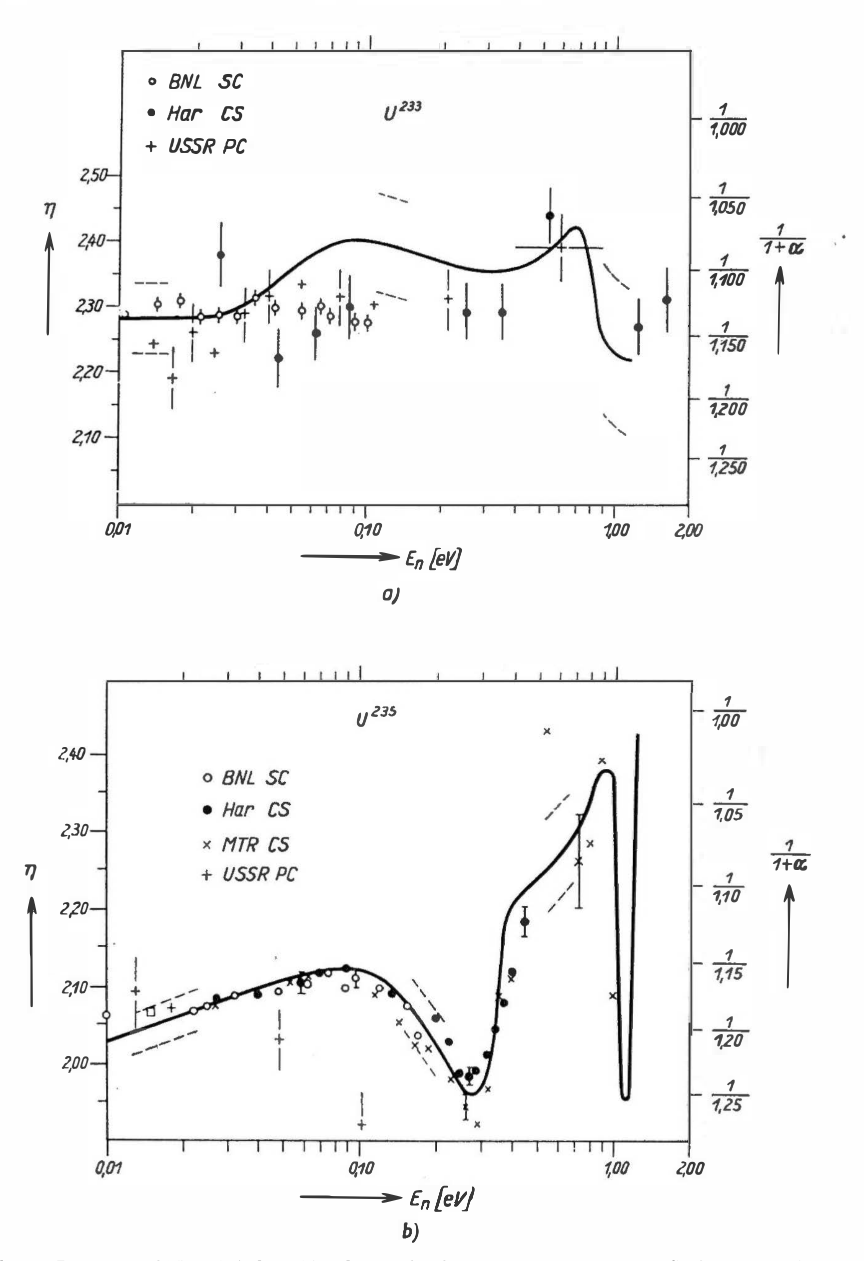
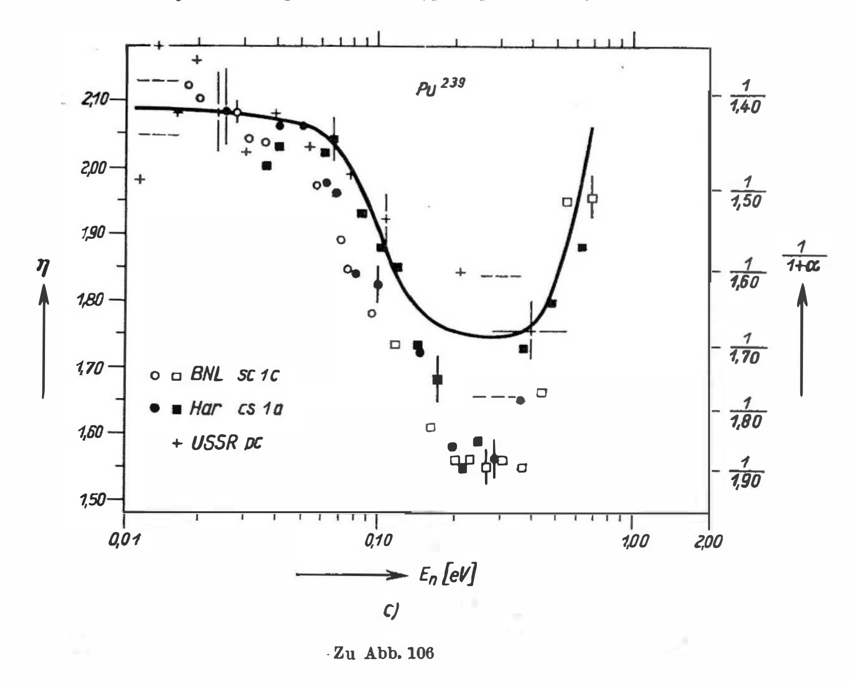


Abb. 106. Die Energieabhängigkeit der Zahl η der pro absorbiertes Neutron emittierten Spaltneutronen im Energiebereich 0,01 bis 2 eV. Die durchgezogene Kurve wurde aus dem Verhältnis α der Wirkungsquerschnitte für reine (n,γ)-Absorption und Spaltung berechnet und gibt den Quotienten $\sigma_f : \sigma_{abs} = \frac{1}{1+\alpha}$ an, wo $\sigma_{abs} = \sigma_f + \sigma_\gamma$ ist. Die Meßpunkte stammen von den verschiedenen in der Abb. angegebenen Arbeitsgruppen



Zu Abb. 106

angeordnet, keine Änderung der Reaktivität des Reaktors verursacht. Aus den relativen Konzentrationen und dem Verhältnis der Absorptionsquerschnitte von Bor und dem Spaltmaterial läßt sich η berechnen.

Zur Messung der *Energieabhängigkeit von* η ließ man z.B. durch einen Monochromator homogenisierte (langsame) Neutronen, deren Intensität von einem B^{10}-Folienzähler kontrolliert wurde, auf eine hinreichend dicke Schicht von Spaltmaterial auffallen. Die Zählung der ausgesandten Spaltneutronen mit einem Detektor für schnelle Neutronen lieferte η. Die Ergebnisse für die technisch wichtigsten Isotope U^{233}, U^{235} und Pu^{239} sind in den Abb. 106 a bis c wiedergegeben. Genauere Zahlenwerte für η und weitere wichtige Daten über Spaltung mit thermischen Neutronen von 293 °K enthält Tabelle 37. Diese Resultate über die Zahl η und ihre Energieabhängigkeit sind für die Reaktortechnik von besonderer Bedeutung, worüber im Bd. III, Teil A, nachzulesen ist.

c) Die Anzahl ν der Spaltneutronen pro Spaltung

Man kann die pro Spaltung emittierte mittlere Zahl der Spaltneutronen z. B. dadurch feststellen, daß man eine dünne Uranschicht in einer Ionisationskammer mit Neutronen bestrahlt und die Impulse von den Spaltprodukten zusammen mit denen der Spaltneutronen in Koinzidenz beobachtet. Die Neutronenzählung kann hierbei außerhalb der Urankammer mit Rückstoßprotonen-Kammern oder

(nach Verlangsamung der Spaltneutronen) mit BF_3-Zählern oder mit einem Szintillationszähler erfolgen. Störungen durch Primär-Neutronen sind durch hinreichende Abschirmung auszuschließen. Genauere Resultate lieferten indirekte Bestimmungen aus σ_f, σ_{abs} (gemeint ist $\sigma_{abs} = \sigma_f + \sigma_\gamma$) und der Zahl η, woraus $\nu = \eta \frac{\sigma_{abs}}{\sigma_f}$ zu errechnen ist. Die Ergebnisse sind in der Spalte 7 der Tabelle 37 zusammengestellt. Mit zunehmendem Atomgewicht A nimmt ν im großen und ganzen zu. Für die schwersten (g,g)-Kerne von Pu^{236} über Pu^{238}, Pu^{240}, Pu^{242}, Cm^{242}, Cm^{244} bis Cf^{252} steigt ν etwa linear mit A von $\nu = 1{,}89 \pm 0{,}20$ bei Pu^{236} bis $\nu = 3{,}52 \pm 0{,}16$ bei Cf^{252} an. Die mittlere Steigung beträgt $\frac{d\nu}{dA} = 0{,}11$ bis 0,12 [C56-1].

d) Die Energieabhängigkeit von ν

Es ist anzunehmen, daß die Zahl der Spaltneutronen mit steigender Anregungsenergie E_A wächst. Nach der Verdampfungstheorie verbraucht ein emittiertes Neutron durchschnittlich eine Energie von $E_B + 2kT$, worin E_B die Bindungsenergie des betreffenden Neutrons und T die „Temperatur" des Spaltungskerns (s. §61) n a c h der Verdampfung bezeichnen. E_B und T hängen von der Anzahl der schon verdampften Neutronen ab. Verstehen wir unter $\bar{E}_B$ und $\bar{T}$ die mittleren Werte bei einem Spaltungsprozeß, so ist als Anstieg von ν mit E_A näherungsweise $\frac{d\nu}{dE_A} \approx \frac{1}{\bar{E}_B + 2k\bar{T}} \approx 0{,}11$ MeV zu erwarten, wenn wir annehmen, daß der Zuwachs an Anregungsenergie nur zur Vermehrung der Neutronenverdampfung verbraucht wird, und wir $E_B \approx 7$ MeV für die Spaltprodukte und nach § 55a $2k\bar{T} \approx 1{,}8$ MeV einsetzen.

Ein Vergleich des ν-Wertes bei spontaner Spaltung von Pu^{240} mit dem bei Spaltung von Pu^{239} mit thermischen Neutronen – wobei E_A um die Bindungsenergie eines Neutrons an Pu^{239} (= 6,4 MeV) größer ist – sowie eingehende Versuche mit schnellen Neutronen zeigen, daß ν um rd. 0,11 pro MeV steigt: $\frac{d\nu}{dE_A} \approx 0{,}11\,(\text{MeV})^{-1}$. Die bekannt gewordenen genaueren Werte sind noch etwas unterschiedlich. So haben nach [L 58-1] die Zielkerne U^{233}, U^{235}, U^{238} und Pu^{239} im Energiebereich bis zu ≈ 15 MeV alle den ziemlich gleichen ν-Anstieg, $\frac{d\nu}{dE} = 0{,}12\,(\text{MeV})^{-1}$, resp. genauer $= 0{,}118; 0{,}124; 0{,}127$ und $0{,}121\,(\text{MeV})^{-1}$. Dagegen gibt [H 58-1] für U^{235}

Tabelle 37. Wirkungsquerschnitte und andere Daten über Kernspaltung mit Neutronen von Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung für 293 °K. (Nach HARVEY *und* SANDERS*)*

Zielkern	σ_{Str} b	σ_{abs} b	σ_f b	$1 + \alpha = \frac{\sigma_{abs}}{\sigma_f}$	η Spaltneutronen pro absorbiertes Neutron	ν Spaltneutronen pro Spaltung
U^{233}	8	591 ± 8	530 ± 8	1,115 ± 0,020	2,29 ± 0,03	2,55 ± 0,06
U^{235}	8,2	680 ± 10	576 ± 15	1,180 ± 0,020	2,09 ± 0,02	2,47 ± 0,05
Pu^{239}	8	1108 ± 15	770 ± 15	1,439 ± 0,030	2,02 ± 0,03	2,91 ± 0,06

und Pu^{239} die Werte 0,152 ± 0,012 bzw. 0,11 ± 0,01 an. Im thermischen Bereich ist in jedem Falle ν als konstant zu betrachten, was auch experimentell bestätigt ist.[1])

§ 56. Die verzögerten Neutronen (delayed neutrons)

Schon gleich nach der Entdeckung der Kernspaltung vermutete E. Fermi, daß bei einer der vielen β-Umwandlungen der Spaltprodukte auch einmal ein Kern entstehen kann, dessen Anregungsenergie die Bindungsenergie eines Neutrons übertrifft und damit eine Neutronenemission im Anschluß an einen β-Prozeß auslöst. In der Tat fanden 1939 Roberts, Meyer und Wang [R 39-1] solche *verzögerte Neutronen* mit einer — innerhalb des Meßintervalls — mittleren Halbwertszeit von 12,5 sec. Nach Fermis Vermutung sollte diese Zeit die Halbwertsdauer einer vorangegangenen β-Umwandlung sein.
Inzwischen wurden — besonders mit Hilfe des „Godiva"-Reaktors in Los Alamos[2]) — eingehende Untersuchungen dieser verzögerten Neutronen ausgeführt. Dieser Reaktor ermöglicht eine blitzartige und äußerst intensive Neutronenbestrahlung. Es ergaben sich mehrere Gruppen verzögerter Neutronen mit verschiedenen Halbwertszeiten, welche in Tabelle 38 angeführt sind.

Tabelle 38. Verzögerte Neutronen bei $U^{235} + n$

Halbwertszeit $T_{1/2}$ [sec]	Häufigkeit [%]	Energie [keV]	neutronen-aktiver Kern	N	entstanden aus
55,6	0,025	250	${}_{36}Kr^{87}$	51	Br^{87} (β^-; 56 sec)
22,0	0,166	560	${}_{54}Xe^{137}$	83	J^{137} (β^-; 23 sec)
4,5	0,213	430	${}_{36}Kr^{89}$	53	Br^{89} (β^-; 4,5 sec)
1,5	0,24	620			
0,4	0,09	420			
0,05	0,025				
	$\sum = 0{,}755$				

[1]) Weitere Informationen und Literaturhinweise s. z.B. Harvey und Sanders, Progress in Nuclear Energy, Series I, Vol. I (1956).
[2]) Der „Godiva"-Reaktor ist eine Art selbstlöschende, mit U^{235} arbeitende Atombombe, die nur für so kurze Zeit überkritisch bleibt, daß sie nicht explodiert. Einige seiner Daten sind

1. Halbwertsdauer des Neutronenblitzes = 45 μsec.
2. Freigesetzte Energie pro „Blitz" = rund 10^{16} Spaltungen = 0,1 kWh.
3. Maximale Spalt-Leistung = etwa 10^4 MW.
4. Der Reaktor ist automatisch selbstlöschend durch Erniedrigung der Reaktivität durch thermische Ausdehnung.

(Angaben nach G. R. Keepin in: Progress in Nuclear Energy, Series I, Vol. I, S. 213, London 1956.)

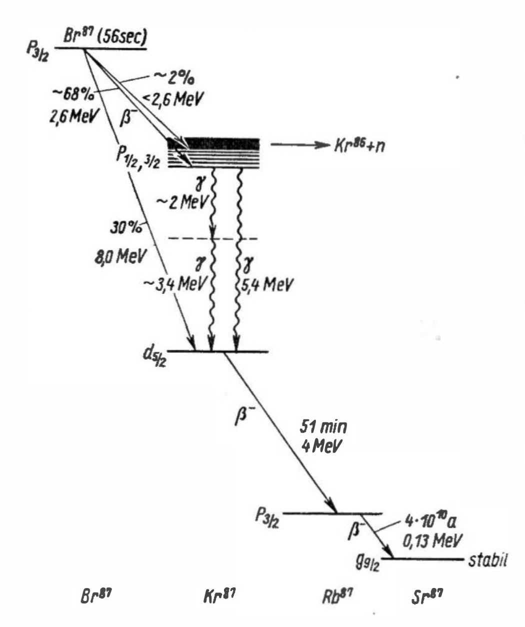


Abb. 107. Der genetische Zusammenhang der Spaltneutronen mit der β-Zerfallsreihe der Spaltprodukte, dargestellt am Beispiel der Massenzahl 87

Die Zahlenangaben der verschiedenen Autoren schwanken etwas. Die obigen Werte stammen von HUGHES u. a. (1948) und wurden mit thermischen Neutronen an 89%igem U^{235} erhalten. Mit Spalt-Neutronen (ohne Abbremsung) fanden KEEPIN und WIMETT (1955) an 99,9%igem U^{235} für die Halbwertszeiten $T_{1/2} = 54{,}3; 21{,}7; 5{,}87; 2{,}18; 0{,}46$ und 0,13 sec.
Insgesamt sind 0,76% *aller Neutronen verzögert.*
Die Gruppe mit der Verzögerungszeit von ≈ 56 sec entstammt dem Kern Kr^{87}, der nach der Zerfallsreihe 9 von S. 248 aus dem primären Kern Br^{87} mit der β-Halbwertszeit von 56 sec entsteht. FERMIS Vermutung wurde also bestätigt. Der genetische Zusammenhang dieser Spaltneutronen mit der Zerfallsreihe der Massenzahl 87 ist in Abb. 107 genauer dargestellt: Aus dem primär entstandenen Spaltprodukt Br^{87} entwickelt sich in der Regel die normale Reihe der β-Zerfälle. Bei etwa 2% der Übergänge aber entsteht ein besonders stark angeregter Zustand des Kr^{87}, aus dem heraus die Neutronenemission stattfindet.
Ganz analog verhält es sich mit der 22 sec-Gruppe von Tabelle 38. Der neutronenaktive Kern ist hier Xe^{137}, welcher nach der Zerfallsreihe 10 von S. 248 aus J^{137} durch β-Zerfall entsteht. Auch diesmal ist die gemessene Halbwertszeit der β-Umwandlung von 23 sec innerhalb der Versuchsfehler mit der der Neutronengruppe identisch, und es führen 7% der β-Übergänge aus J^{137} zu einem Neutronen emittierenden Niveau des Xe^{137}. (Die bei Nr. 9 und 10 auf S. 248 vermerkten Häufigkeiten beziehen sich nur auf diesen neutronenaktiven Zweig!)
Die zweitstärkste Gruppe der verzögerten Neutronen, die 4,5 sec-Gruppe, stammt von Kr^{89}, welches gemäß Reihe 8, S. 248 aus Br^{89} mit 4,5 sec Halbwertszeit entsteht. Die Mutterkerne für die weiteren Gruppen sind noch nicht mit Sicherheit identifiziert.
Die beiden Neutronenstrahler $^{51}Kr^{87}$ und $^{83}Xe^{137}$ geben übrigens ein ausgezeichnetes Beispiel für die *Schalenstruktur der Kerne.* Sie enthalten gerade ein Neutron mehr als die magischen Kerne mit den Neutronenzahlen 50 und 82. Es ist plausibel, daß das erste Neutron nach einem Schalenabschluß, analog dem Leuchtelektron der Alkalien, besonders lose gebunden ist und daher aus dem durch den Entstehungsprozeß stark angeregten Mutterkern abdampft. Auch bei Kr^{89} ist die

Nähe der magischen Zahl 50 offenbar entscheidend.[1]) Hier verdampft ein unpaariges Neutron, das dritte nach dem Schalenabschluß.
Bei der Spaltung von U^{233} und Pu^{239} entstehen im wesentlichen dieselben verzögerten Neutronen wie bei U^{235}. Die *relativen* Anteile der verschiedenen Gruppen erweisen sich von Fall zu Fall nur wenig voneinander verschieden. Die Gesamtanteile sind dagegen merklich geringer als bei U^{235}, nämlich bei Pu^{239} 0,36% und bei U^{233} 0,24%.
Auch bei Spaltung mit schnellen Neutronen findet man qualitativ die gleichen verzögerten Neutronengruppen mit ähnlichen relativen Intensitäten wieder. Die absolute „Ausbeute" ist aber meist größer und beträgt bei U^{238} und Th^{232} etwa das Doppelte der bei U^{235} mit langsamen Neutronen.
In der Reaktortechnik erlauben die verzögerten Neutronen eine leichte und gefahrlose Regelung der Kettenreaktion. Sie haben daher neben ihrer theoretisch-physikalischen Bedeutung auch einen großen praktischen Wert (s. Bd. III, Teil A).

4. ZUR THEORIE DER KERNREAKTIONEN

In den vorhergehenden Abschnitten wurden theoretische Begründungen nur insoweit angegeben, als sie ohne Hilfe der Quantenmechanik möglich waren. Die Resultate wellenmechanischer Rechnungen, welche zum Verständnis der Kernreaktionen nicht entbehrt werden können, wurden in den Paragraphen 32 bis 34 ohne Beweis zusammengestellt und laufend benutzt. Im folgenden soll nun eine elementartheoretische Begründung dieser Formeln und Vorstellungen nachgeholt und in manchen Einzelheiten näher ausgeführt werden. Wegen des begrenzten Umfanges der Darstellung konnten feinere Details nicht berücksichtigt werden. Die behandelten Themen sind im wesentlichen:

A) *Der Compoundkern nach dem Fermigas-Modell und sein Zerfall*

§§ 57 bis 62: „Temperatur" des Compoundkerns, Niveaudichten, Γ-Breiten, Verdampfungstheorie.

B) *Allgemeine Eigenschaften des Wirkungsquerschnitts*

§§ 63 bis 68: Allgemeine Beziehungen, Wirkungsquerschnitte nach einer einfachen Kontinuumstheorie, inverse Reaktionen, Breit-Wigner-Formel und Resonanztheorie.

---

[1]) Es sind noch zwei weitere Neutronenstrahler nach β-Prozessen bekannt, und zwar bei den magischen Zahlen 4 und 8:

$$N^{17} \xrightarrow[4{,}2\,\text{sec}]{\beta^-} O^{17*} \rightarrow O^{16} + n \quad (\text{Alvarez, } 1949)$$

$$Li^{9} \xrightarrow[0{,}17\,\text{sec}]{\beta^-} Be^{9*} \rightarrow Be^{8} + n;\quad Be^{8} \rightarrow 2\,He^{4} \quad (\text{Gardner u. a., } 1951).$$

C) *Kernreaktionen und Einteilchenmodell*

§§ 69 bis 75: Streuung und Absorption von Neutronen am Topfpotential, Durchgang geladener Teilchen durch Potentialbarrieren: Tunneleffekt.

D) *Mathematische Ergänzungen*

§§ 76 und 77: Nachtrag einiger im Text zurückgestellter Beweise.

Wichtige Erscheinungen, z. B. das Resonanzverhalten der Kerne, werden nach verschiedenen Methoden untersucht, da eine von den Grundannahmen ausgehende direkte Durchrechnung, welche alle Fragen beantworten könnte, nicht möglich ist. Von den gestellten Aufgaben sind jeweils nur diejenigen Teile vollständig lösbar, die sich auf die Vorgänge außerhalb des Kerns beziehen wie etwa der Tunneleffekt. Die Vorgänge im Kerninnern lassen sich nur unter Zugrundelegung vereinfachender Annahmen behandeln, deren zweifelsfreie Begründung aus den Grundannahmen der Theorie der Atomkerne z. Z. zwar im Prinzip als möglich erscheint, im allgemeinen aber noch nicht durchgeführt bzw. erst angebahnt ist. Die Schwierigkeit liegt 1. in der heutigen Unkenntnis der Kernkräfte und selbst, wenn diese bekannt wären, 2. in der rein mathematischen Komplikation, die Lösung eines Vielkörperproblems mit bis zu 250 (!) Teilchen zu finden – eine Zahl, die einerseits für eine exakte Lösung zu groß, andererseits aber zu klein ist, um eine in jeder Hinsicht ausreichend genaue statistische Behandlung zu ermöglichen. Man ist daher auf die Einführung von vereinfachenden Annahmen angewiesen, denen die verschiedenen *Kernmodelle* entsprechen. Wir betrachten als einfachstes das Fermigas-Modell.

A) Der Compoundkern nach dem Fermigas-Modell und sein Zerfall

§ 57. Das Fermigas-Modell

Um die Vorgänge bei Kernreaktionen wenigstens in großen Zügen zu verstehen, kann man – wie es sich gezeigt hat – den Kern als eine Gas- oder Flüssigkeitskugel konstanter Teilchendichte mit dem Radius $R = 1{,}4 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ [cm] betrachten und zunächst von Oberflächeneffekten absehen. Wegen der großen Dichte der Kernmaterie hat man diese als *entartetes Gas* zu behandeln. Wir benutzen das Modell, um halbquantitativ den Anstieg der Niveaudichte mit der Nukleonenzahl und mit der Anregungsenergie des Kerns, ferner die Teilchenemission als einen Verdampfungsvorgang zu berechnen. Dadurch erhalten wir eine erste theoretische Begründung für die relativ lange Lebensdauer des Compoundkerns, was bisher zur Erklärung der Beobachtungen ad hoc vorausgesetzt worden war.
Bei der Berechnung wird angenommen, daß – wenigstens bei kleinen Anregungsenergien – die Nukleonen sich praktisch frei im Kern ohne gegenseitige Zusammenstöße bewegen, etwa so wie He^4-Atome in flüssigem He^4 im superfluiden Zustand. Wenn auch eine sichere Begründung dieser Annahme nicht leicht zu geben

ist, so hat sie sich doch besonders beim Schalenmodell ausgezeichnet bewährt. Für den tiefsten Zustand des Kernsystems ist ein solches Verhalten der Nukleonen qualitativ leicht verständlich: Da hier alle energetisch möglichen Zustände eines Teilchens einer bestimmten Sorte unterhalb der Fermischen Grenzenergie (s. unten) vollständig besetzt sind, können bei einem Zusammenstoß von zwei Nukleonen diese gar nicht in andere als in ihre Zustände vor dem Stoß übergehen. Denn die anderen energetisch noch möglicherweise erreichbaren Zustände sind alle bereits besetzt und Übergänge in diese nach dem Pauli-Prinzip unmöglich.

Wenn aber, wie bei Kernreaktionen, beim Zusammenstoß etwa eines eingeschossenen Neutrons (oder Protons) mit einem Kern-Nukleon eine so große Energie zur Verfügung steht, daß der Compoundkern in einen seiner höheren Anregungszustände „gehoben" werden kann, besteht die Möglichkeit einer Wechselwirkung, da nunmehr ein energetisch erreichbarer Endzustand des Systems unbesetzt ist. Aus Gründen der Kontinuität wird ein Nukleon im Innern eines Kerns um so seltener effektive Stöße erleiden, je weniger der Kern angeregt ist; die Kernmaterie wird dann um so durchlässiger.

Diese zunächst fremdartig erscheinende Durchlässigkeit erklärt sich daraus, daß die Kernkräfte doch verhältnismäßig schwach und der eigentliche, undurchdringliche „Kern" der Nukleonen („hard core", Radius $\approx 0{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm) so klein gegenüber deren mittleren Abständen im Kern ($\approx 2{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm) ist, daß die Beweglichkeit der Nukleonen nicht wesentlich herabgesetzt wird (s. [G 58-1] und die dort angegebene Literatur).

Die diesem Bilde scheinbar widersprechende, sehr geringe freie Beweglichkeit der Moleküle in gewöhnlichen Flüssigkeiten und Festkörpern rührt demgegenüber davon her, daß die Kräfte zwischen Flüssigkeitsmolekülen vergleichsweise merklich stärker und obendrein die Moleküldurchmesser nicht viel kleiner sind als die Molekülabstände. Die *relative* Kleinheit der Kernkräfte geht auch aus der Tatsache hervor, daß bei allen zweiatomigen Molekülen hochangeregte Rotationszustände möglich sind, das Deuteron aber schon im ersten Rotationszustand ($l = 1$) durch die Zentrifugalkräfte zerrissen wird.

Die auf ein einzelnes Nukleon von den $A - 1$ übrigen Kernnukleonen ausgeübten Kräfte machen sich in ihrer durchschnittlichen Gesamtwirkung nur durch eine starke Anziehungskraft am Kernrande bemerkbar, während im Kerninneren keine effektive Kraft auf das betrachtete Teilchen zustande kommt. Ein Nukleon im Kerninneren bewegt sich daher wie in einem „Potentialtopf": Die Teilchen sind gleichsam in eine nach innen spiegelnde Kugel eingeschlossen. Die derart in dem kugelförmigen Kernvolumen

$$V = V_0 A \tag{57.1}$$

$$\left(V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3; \quad r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}\right)$$

eingeschlossenen Z Protonen und N $(= A - Z)$ Neutronen bilden – jede Teilchensorte für sich – ein *Fermi-Gas.* Die Zahl aller möglichen Quantenzustände (= Phasen-

volumen/h^3) in diesem Volumen V mit Teilchenimpulsen bis zum Maximalwert $p_{\max}$ beträgt bei Berücksichtigung des Spins ($= \frac{1}{2}\hbar$, Spinfaktor = 2)

$$n = \frac{2}{h^3}\,\frac{4\pi}{3}\,p_{\max}^3\,V = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}\,p_{\max}^3\,V. \tag{57.2}$$

Im Grundzustand sind alle Zustände besetzt, d.h., es ist $n = Z$ bzw. $n = N$. Die maximalen Impulse sind daher

$$p_{\max}^{(\text{Proton})} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{Z}{A}\right)^{1/3}; \quad p_{\max}^{(\text{Neutron})} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{N}{A}\right)^{1/3}. \tag{57.3}$$

Für die maximale Geschwindigkeit der Nukleonen im Kern ergibt sich numerisch

$$v_{\max}^{(\text{Proton})} = 0{,}29\,c\left(\frac{Z}{A}\right)^{1/3} \quad \text{bzw.} \quad v_{\max}^{(\text{Neutron})} = 0{,}29\,c\left(\frac{N}{A}\right)^{1/3},$$

wenn $r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm angenommen wird und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. (Wir sahen hier davon ab, daß nach neueren Ergebnissen die Protonen möglicherweise einen etwas kleineren Raum als die Neutronen einnehmen.)

Die entsprechende maximale kinetische Energie

$$\zeta_0 = \frac{p_{\max}^2}{2M} \tag{57.4}$$

(M = Nukleonenmasse) heißt die *Fermische Grenzenergie*. Sie ist, da Z und N in erster Näherung proportional zu A sind, für alle Kerne etwa gleich, und zwar folgt mit unserem obigen Wert für r_0

$$\zeta_0^{(\text{Proton})} = 38{,}6 \cdot \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} [\text{MeV}] \quad \text{bzw.} \quad \zeta_0^{(\text{Neutron})} = 38{,}6 \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3} [\text{MeV}].$$

Für Protonen ist $\frac{Z}{A}$ im Mittel $\approx \frac{1}{2{,}2}$; für Neutronen gilt $\frac{N}{A} \approx \frac{1}{1{,}8}$; das ergibt

$$\zeta_0^{(\text{Proton})} \approx 23\ \text{MeV}; \quad \zeta_0^{(\text{Neutron})} \approx 26\ \text{MeV}.$$

Die maximalen Geschwindigkeiten der Nukleonen liegen zwischen $v_{\max} = 0{,}21\,c$ und $0{,}24c$. Die kinetische *Gesamtenergie aller Protonen* beträgt

$$E_p = \int_0^{p_{\max}} \frac{p^2}{2M}\,\frac{2 \cdot 4\pi p^2\,dp}{h^3}\,V = \frac{4\pi V}{5 M h^3}\,p_{\max}^5 = \frac{3^{5/3} h^2 Z^{5/3}}{40 M (\pi V)^{2/3}}.$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für Neutronen. Die Summe der Energien von Z Protonen und N Neutronen wird

$$E = \frac{3^{5/3} h^2}{40 M (\pi V)^{2/3}} \left(Z^{5/3} + N^{5/3}\right). \tag{57.5}$$

Schreibt man $Z = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{N-Z}{A}\right)$, $N = \frac{A}{2}\left(1 + \frac{N-Z}{A}\right)$ und entwickelt nach Potenzen von $\frac{N-Z}{A}$, so folgt

$$E = \frac{3^{5/3} h^2}{40 M (2\pi)^{2/3}} A \left(\frac{A}{V}\right)^{2/3} \left\{1 + \frac{5}{9}\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 + \cdots\right\}. \tag{57.6}$$

Da $\frac{A}{V}$ recht gut für alle $A\ (\gtrsim 10)$ konstant ist, erkennt man in dem quadratischen Term von (57.6) den Beitrag der kinetischen Energie zum $(N-Z)^2$-Glied der Bethe-Weizsäckerschen halbempirischen Massenformel. Im vorliegenden Modell hat es seinen Ursprung im Pauli-Prinzip bzw. in der Nullpunktsenergie der Nukleonen.

Die Existenz der *Nullpunktsbewegung* mit der Fermischen Grenzenergie ζ_0 äußert sich wohl am eindrucksvollsten bei den Versuchen zur Erzeugung von *Proton-Antiproton-Paaren* durch Kollision eines Protons extrem hoher Energie mit einem Proton eines Zielkerns. Die Reaktionsschwelle für die Paarerzeugung ist dadurch bestimmt, daß die kinetische Energie der Relativbewegung der Stoßpartner gerade die Ruheenergie der beiden neu entstehenden Teilchen, d. h. $2\,Mc^2$, aufbringen muß. Ist w die Geschwindigkeit der beiden Protonen im Schwerpunktssystem, so muß also gelten

$$2\,Mc^2\left\{\left[1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2\right]^{-1/2} - 1\right\} = 2\,Mc^2 .$$

Daraus folgt $\frac{w}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und die Relativgeschwindigkeit v der beiden Protonen gegeneinander ist – nach dem Additionstheorem relativistischer Geschwindigkeiten –

$$v = \frac{2w}{1 + \frac{w^2}{c^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}\, c = 0{,}9897\ldots \cdot c . \tag{57.7}$$

Würde das Proton des Zielkerns ruhen, so müßte das stoßende Proton im Laborsystem die zu v gehörige Energie besitzen:

$$Mc^2\left\{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} - 1\right\} = 6\,Mc^2 = 5{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{eV}.$$

Fliegt jedoch das Proton des Zielkerns vermöge seiner Nullpunktsbewegung etwa mit der Geschwindigkeit u dem mit der Geschwindigkeit v' ankommenden Geschoß-Proton entgegen, so braucht v' nur so groß zu sein, daß die relativistische Addition von u und v' gerade wieder v (nach (57.7)) ergibt. Die Minimalgeschwindigkeit v', bei der gerade noch eine Paarerzeugung stattfinden kann, ist demnach relativistisch um den Betrag u kleiner als v:

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u\,v}{c^2}} ;$$

die Schwellenenergie ergibt sich damit zu

$$E_{\mathrm{Schw}} = M c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} - 1 \right\} = M c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{1 - \frac{u v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Setzt man hier $\frac{v}{c} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ und $\frac{u}{c} \approx 0{,}2$, so findet man

$$E_{\mathrm{Schw}} \approx 4{,}7\, M c^2 = 4{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{eV}.$$

Nach Abb. 108, welche die beobachtete Energieabhängigkeit der Antiprotonerzeugung bei Proton-Proton-Stößen wiedergibt, wird dieser Wert experimentell recht gut als Schwellenenergie bestätigt, aber nicht $5{,}6 \cdot 10^9$ eV: Die Nullpunktsbewegung der Nukleonen gibt also für das Geschoßteilchen eine „Ersparnis" von $1{,}2 \cdot 10^9$eV (!) und damit einen handgreiflichen Beweis ihrer Existenz.

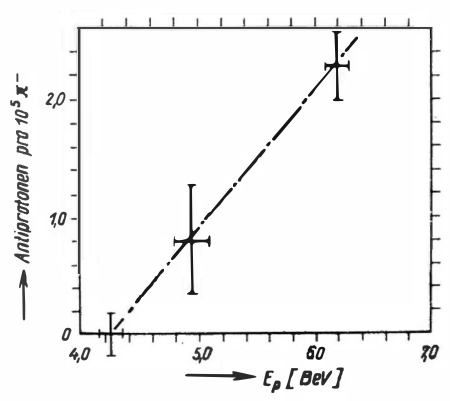


Abb. 108. Anzahl der beim Zusammenstoß Proton-Proton gebildeten Antiprotonen (bezogen auf je 10^5 der gleichzeitig entstehenden π^--Mesonen) als Funktion der Energie der Geschoßprotonen (im Laborsystem). Die π^--Mesonen wurden als Maß für die Intensität der Geschoßprotonen benutzt (s. a. § 81, S. 379)

§ 58. Die „Temperatur" des Compoundkerns

Der Compoundkern befindet sich durch den vorangegangenen Teilcheneinfang in einem angeregten Zustand. Seine Anregungsenergie E_A beträgt z. B. nach Einfang langsamer Neutronen durch schwerere Kerne 6 bis 9 MeV und wird gemäß der Bohrschen Annahme auf viele Partikel des Fermigases statistisch verteilt, was wir durch eine erhöhte „Temperatur T" des Gases beschreiben können. $T = 0$ entspricht dem Grundzustand. Die Belegung der Zustände in der Nähe von ζ_0 erfolgt dann gemäß der

$$\textit{Fermischen Besetzungsfunktion} = \left(e^{\frac{E - \zeta_0}{kT}} - 1\right)^{-1}.$$

Die durch die endliche Temperatur bedingte Erhöhung der kinetischen Gesamtenergie ergibt sich nach der *Fermi-Statistik* für „kleine" T, d.h. $kT \ll \zeta_0$, zu[1])

$$\Delta E_{\text{Prot}} = \frac{\pi^2}{4} Z \frac{(kT)^2}{\zeta_0^{(\text{Prot})}} \quad \text{für die Protonen} \tag{58.1}$$

oder, wenn wir ζ_0 mit Hilfe von (57.4) eliminieren,

$$\Delta E_{\text{Prot}} = \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^{1/3} \frac{M V^{2/3}}{\hbar^2} Z^{1/3} (kT)^2 \approx 0{,}064 A^{2/3} Z^{1/3} (kT)^2 . \tag{58.2}$$

Der letzte Zahlenwert gilt, wenn wir ΔE_{Prot} und (kT) in MeV ausdrücken.

Eine entsprechende Gleichung besteht für die Neutronen, wobei für beide Teilchen offenbar der gleiche kT-Wert gilt. Für die gesamte Anregungsenergie $E_A = \Delta E_{\text{Prot}} + \Delta E_{\text{Neutr}}$ folgt (E_A und kT in MeV gemessen)

$$E_A = 0{,}064 A^{2/3} (Z^{1/3} + N^{1/3}) (kT)^2 . \tag{58.3}$$

Setzen wir vereinfachend die mittleren Werte $Z \approx \frac{A}{2{,}2}$ und $N \approx \frac{A}{1{,}8}$ ein, so wird

$$E_A \approx 0{,}10 A (kT)^2 ; \tag{58.4}$$

$kT = 1$ MeV entspricht einer „Temperatur" von $1{,}16 \cdot 10^{10}$ °K. Bei z.B. $A = 238$; $Z = 92$; $N = 146$ (Uran) und $E_A = 6$ MeV wird $kT \approx 0{,}50$ MeV („T" $\approx 6 \cdot 10^9$ °K). Wenn man einem Freiheitsgrad – wie beim Oszillator – ein kT zuordnet, würden bei Absorption eines Neutrons durch einen U-Kern – klassisch gesprochen – etwa $6/0{,}5 = 12$ Freiheitsgrade angeregt, die übrigen $(3A - 6 - 12 =)$ etwa 700 inneren Freiheitsgrade[2]) bleiben „eingefroren". Die eingangs bei (58.1) gemachte Voraussetzung kleiner T besteht also zu Recht.

§ 59. Das Anwachsen der Niveaudichte mit der Teilchenzahl und mit der Anregungsenergie

Das Anwachsen der Niveaudichte $W(E_A, A)$ mit steigender Teilchenzahl und Anregungsenergie E_A läßt sich qualitativ leicht einsehen, wenn man von der Boltzmannschen Beziehung zwischen Entropie $S(T)$ und der Anzahl der Quantenzustände ausgeht, die dem System bei der zur Temperatur T entsprechenden Energie E_A zugänglich sind. Da diese Anzahl in der Hauptsache $\sim W(E_A, A)$ ist, gilt (mit $W(0) = W(E_A = 0; A)$ und Weglassung des Parameters A)

$$S(T) = k \ln \frac{W(E_A)}{W(0)} . \tag{59.1}$$

---

[1]) Die gesamte kinetische Energie (d.h. einschließlich der Nullpunktsenergie) beträgt

$$E_{\text{Prot}} = \frac{3}{5} Z \zeta_0^{(\text{Proton})} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\zeta_0^{(\text{Proton})}}\right)^2 + \cdots\right],$$

für Neutronen entsprechend. (Siehe z.B. [FERMI], S. 160 (Literaturverzeichnis auf S. 335.)

[2]) ohne Translation des Schwerpunktes und ohne Drehung als Ganzes.

Wenn wir nach (58.4) $E_A = a(kT)^2$ mit $a \approx 0{,}10\,A\,[\mathrm{MeV}]^{-1}$ schreiben, können wir S aus der Thermodynamik wie folgt entnehmen:

$$S(T) = \int_0^T \frac{dE_A}{T} = 2\,a\,k^2\,T = 2\,k\,\sqrt{a\,E_A}\,.$$

Für die Dichte der Zustände gilt also im wesentlichen

$$\frac{W(E_A)}{W(0)} \approx \exp\frac{S}{k} = \exp 2\sqrt{aE_A} \approx \exp\left(0{,}63\sqrt{AE_A}\right), \qquad (59.2)$$

wo zuletzt E_A in MeV einzusetzen ist. Der mittlere Niveauabstand D folgt zu

$$D = \frac{1}{W(E_A)} = \frac{1}{W(0)}\exp\left(-2\sqrt{aE_A}\right). \qquad (59.3)$$

Wenn also in der Nähe des Grundzustandes z.B. für einen mittelschweren Kern mit $A = 100$ der Niveauabstand $D \approx 100$ keV beträgt, wäre beispielsweise bei $E_A = 8$ MeV ein Niveauabstand von $D \approx 1$ meV zu erwarten, was etwa um den Faktor 10^3 zu klein ist. Es ergibt sich also eine viel zu starke Abhängigkeit von E_A (und auch von A). Dies rührt daher, daß (59.1) für ein System im *Temperaturgleichgewicht* gilt und daher für die Zahl der bei der Energie E_A erreichbaren Quantenzustände eines *isolierten* Kerns, bei dem jene Anzahl stark durch die Erhaltungssätze eingeschränkt ist, viel zu hohe Werte liefert. Die Gleichung (59.3) soll uns deshalb auch nur als qualitative Illustration der wirklichen Verhältnisse dienen, und wir begnügen uns damit, daß (59.3) den Gang der Niveaudichte mit A und E_A verständlich macht; sie erklärt auch die Tatsache, daß die Niveauabstände (für gleiche Einfallsenergien) bei den schwersten Kernen mit steigendem A nicht mehr weiter abnehmen: Hier kompensiert nämlich die kleiner werdende Bindungsenergie und damit der Abfall der Anregungsenergie E_A den Einfluß der steigenden Teilchenzahl A (vgl. S. 133 oben).

Gleichung (59.2) läßt sich in der Form

$$W(E_A) = C\exp\left(2\sqrt{aE_A}\right) = C\exp\left(f\sqrt{AE_A}\right) \qquad (59.4)$$

immerhin verwenden, um unter Anpassung der Konstanten C und a $\left(\text{oder } f = 2\sqrt{\frac{a}{A}}\right)$ an die experimentellen Daten einen wenn auch nur ungefähren Überblick über die Niveaudichten zu geben. Nach WEISSKOPF sind hierzu die in Tabelle 39 angegebenen Werte für C und a geeignet, welche an die experimentellen Ergebnisse bei Anregung durch Neutronen oder Protonen mit Energien um 1 MeV angepaßt sind. Die aus a berechnete Größe f in der letzten Spalte sollte nach (59.2) von A unabhängig sein. In der Tat ändert sie sich nur relativ wenig und liegt für schwere Kerne nahe dem in (59.2) abgeschätzten Wert 0,63.

Tabelle 39.
Empirische Werte der Konstanten C, a und f in (59.4) bei verschiedenen Massenzahlen A

A	$C\,[\mathrm{MeV}]^{-1}$	$a\,[\mathrm{MeV}]^{-1}$	$f\,[\mathrm{MeV}]^{-1/2}$
27	0,5	0,45	0,26
63	0,3	2	0,36
115	0,02	8	0,52
181	0,01	10	0,48
231	0,005	12	0,46

§ 60. Die Teilchenemission nach der Verdampfungstheorie

Die Teilchenemission aus einem stark erhitzten Compoundkern kann man – analog dem Verdunsten von Flüssigkeiten – auch als Verdampfung eines Neutrons (oder Protons usw.) beschreiben. Wir können den Vorgang bei Neutronen mit der Elektronenemission aus Glühkathoden vergleichen, da beide Prozesse der Fermi-Statistik bei „kleinen“ Temperaturen gehorchen und in beiden Fällen die Verdampfung aus einem Potentialtopf ohne Coulomb-Wall erfolgt. Nach der bekannten, experimentell gut bestätigten *Richardsonschen Gleichung* beträgt die Zahl j der pro cm² und sec aus einer auf die Temperatur T erhitzten Kathode austretenden Elektronen:[1]

$$j = \frac{2\pi m}{h^3} (k T)^2 e^{-\frac{E_B}{kT}} \tag{60.1}$$

(m = Elektronenmasse, E_B = Austrittsarbeit).

Wir können die Formel auf die Neutronenverdampfung übertragen, indem wir $m = M$ und für E_B die Bindungsenergie des Neutrons einsetzen. $4\pi^2 R j$ stellt offensichtlich die Zahl der pro sec aus dem Kern (vom Radius R) verdampfenden Neutronen, also die Zerfallskonstante w dar, die sich demnach zu

$$w = \frac{8\pi^2 R^2 M}{h^3} (k T)^2 e^{-\frac{E_B}{kT}} \tag{60.2}$$

ergibt, wo kT aus (58.3) zu entnehmen ist.

Der Ausdruck gilt nur für große Anregungsenergien $E_A \gg E_B$, bei denen die durch die Verdampfung eines Neutrons verursachte Änderung von T noch relativ gering ist. Unsere Ausgangsformel (60.1) setzt nämlich voraus, daß T während der Emission eines Elektrons konstant bleibt, was dort selbstverständlich zutrifft. Im Falle der Neutronenverdampfung aus einem Compoundkern kann sich aber T schon merklich bei der Emission eines einzigen Teilchens verringern. Wir beschränken daher die Anwendung von (60.2) zunächst nur auf den Fall hinreichend großer T. (Genauer ist in (60.2) für T die Temperatur des Restkerns nach der Verdampfung eines Teilchens einzusetzen (s. § 61)).

Als numerisches Beispiel betrachten wir einen U-Kern, der ein 14 MeV-Neutron eingefangen hat. Hier ist $R = 9 \cdot 10^{-13}$ cm, daher

$$\frac{8\pi^2 R^2 M}{h^3} = 7{,}5 \cdot 10^{20}\,\text{sec}^{-1}\,(\text{MeV})^{-2}.$$

Da $E_B \approx 6$ MeV, wird weiter $E_A \approx 20$ MeV, $kT \approx 0{,}9$ MeV ($T \approx 10^{10}$ °K), also nach (60.2)

$$w \approx 10^{18}\,\text{sec}^{-1},\ \text{d.h.},\ \tau = \frac{1}{w} \approx 10^{-18}\,\text{sec}.$$

[1]) Hier ist der Durchlässigkeitskoeffizient der Metalloberfläche mal dem Spinfaktor 2 gleich 1 gesetzt, was der Erfahrung entspricht (siehe z. B. Fowler, Statistische Mechanik, S. 249).

Gegenüber der „Elementarzeit“ $\tau_0 \approx 10^{-22}$ sec ist dies immer noch 10^4mal länger: Der betrachtete Compoundkern überlebt im Mittel 10^4 innere Zusammenstöße des eingefangenen Teilchens. Dabei ist anzunehmen, daß die wahre Zerfallsdauer τ größer ist als die nach (60.2) berechnete, weil die dort einzusetzende Temperatur T jedenfalls kleiner als die des Compoundzustandes nach (58.3) sein muß.

Die Lebensdauer gegen Protonenemission ist wegen der Coulomb-Barriere erheblich länger als die gegen Neutronenverdampfung. Ebenso findet (nach § 32) eine γ-Emission weit langsamer statt. Somit erweist sich nach allem die zur Erklärung der Beobachtungen notwendige lange Lebensdauer des Compoundkerns als durchaus verständlich.

§ 61. Das Energiespektrum der verdampften Nukleonen

Nach dem *Fermigas-Modell* ist als *Energieverteilung* der aus einem hochangeregten Kern emittierten Neutronen dieselbe Verteilungsfunktion wie die für Elektronen aus einer Glühkathode anzunehmen, also

$$n(E)\,dE = \text{const} \cdot E\,e^{-\frac{E}{kT}}\,dE\,, \tag{61.1}$$

worin $n(E)\,dE$ die Anzahl der mit Energien zwischen E und $E + dE$ verdampften Neutronen bezeichnet [W 37-1], [W 40-1]. (61.1) gilt genaugenommen nur für einen im Grenzfall aus unendlich vielen Teilchen bestehenden, auf die Temperatur T erhitzten Kern, bei dem die Verdampfung eines einzelnen Teilchens keine merkliche Abkühlung verursacht. Bei wirklichen Kernen ist aber $A \lesssim 240$, und hier führt schon die Verdampfung eines einzelnen Nukleons zu einer merklichen Abkühlung des Restkernes gegenüber dem „aufgeheizten“ Compoundkern. Es zeigt sich nun, daß man in (61.1) genauer die Temperatur des Restkernes, also den kT-Wert n a c h der Verdampfung eines Teilchens, und n i c h t den des Compoundkerns einzusetzen hat.

Zur Begründung denke man sich das Compoundsystem etwa in einem ideal spiegelnden thermodynamischen „Gleichgewichtskasten“ eingeschlossen, dessen Volumen so groß sei, daß das System sich überwiegend im dissoziierten Zustand befindet. Das herausgeflogene Nukleon bildet ein „Gasmolekül“, das mit dem Restkern von Zeit zu Zeit sowohl Zusammenstöße mit Compoundbildung als auch oberflächliche Stöße ohne Bildung eines Zwischenkerns ausführt. Im Zeitmittel ergibt sich dann ein thermisches Gleichgewicht zwischen dem „Nukleonengas“ und dem Restkern. Die mittlere Zahl der aus dem Gasraum auf die Oberfläche des Restkerns mit Energien im Intervall E bis $E + dE$ auffallenden Teilchen wird durch (61.1) gegeben, wobei sich kT auf die Gastemperatur bezieht. Nach dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts muß dann (61.1) auch die Energieverteilung der aus dem Compoundkern herausdampfenden Partikel beschreiben, und zwar mit einem kT, das der oben genannten Gastemperatur bzw. der der letzteren gleich großen Temperatur des Restkerns entspricht.

In Abb. 109 ist die Verteilungskurve nach (61.1) schematisch wiedergegeben. Die verdampfenden Neutronen haben am häufigsten die Energie $E = kT$. Ihre mittlere Energie $\bar{E}$ beträgt

$$\bar{E} = \frac{\int E\, n(E)\, dE}{\int n(E)\, dE} = 2\, k\, T\,. \qquad (61.2)$$

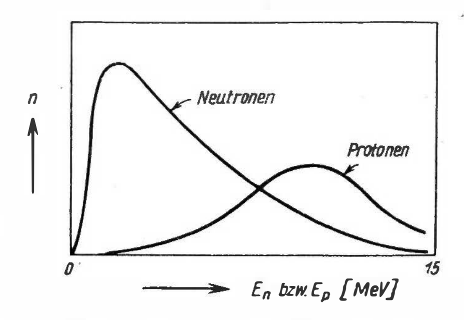


Abb. 109. Verteilungskurven der Energie der verdampfenden Neutronen und Protonen (schematisch) n = relative Anzahl der Neutronen bzw. Protonen, E_n bzw. E_p = kinetische Energie der emittierten Teilchen

Als experimentelles Beispiel zeigt Abb. 110 das Spektrum der Neutronen aus der 16 MeV-Protonen erhaltenen Reaktion $Au^{197}(p, n)Hg^{197}$. Da der Q-Wert hier $-1{,}4$ MeV beträgt, ist die maximal mögliche Energie der verdampften Neutronen $16 - 1{,}4 = 14{,}6$ MeV. Die Beobachtungen bestätigen die näherungsweise Gültigkeit der Gl. (61.1). Die durch die Meßwerte hindurchgelegte Gerade entspricht einer „Temperatur" des Restkerns Hg^{197} mit $kT = 0{,}8 \pm 0{,}1$ MeV. Gleichung (58.3) liefert etwa den gleichen Wert, solange $E_n \ll 14{,}6$ MeV ist.

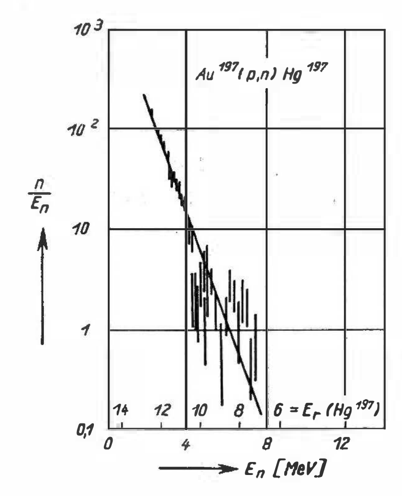


Abb. 110. Energieverteilung der aus dem Compoundkern Hg^{198} verdampfenden Neutronen (E_n = Energie der verdampften Neutronen, E_r = Energie des Restkerns $Hg^{197} = 14{,}6 - E_n$, n = relative Anzahl der Neutronen; nach der Verdampfungstheorie hängt $\ln \frac{n}{E_n}$ linear von E_n ab)

Das *Spektrum* von verdampften *geladenen Teilchen*, wie z.B. Protonen, erhält man näherungsweise aus (61.1) durch Multiplikation mit dem Durchlässigkeitsfaktor der Potentialbarriere (s. S. 155):

$$G \approx \exp\left(-\,\mathrm{const}\cdot\frac{zZ}{\sqrt{E}}\right)$$

(E = Energie der emittierten Teilchen). Dies bedeutet eine starke Schwächung der langsamen Teilchen, wodurch deren Hauptteil nach höheren Energien rückt, wie in Abb. 109 schematisch dargestellt ist.

In schweren Kernen wird bei nicht zu hohen Energien für Protonen $G \ll 1$, und man hat daher vorwiegend Neutronenemission zu erwarten. Protonen erscheinen erst bei um so höheren Energien, je schwerer die Kerne sind. Entsprechendes gilt für α-Teilchen. Aus leichteren Kernen mit niedriger Potentialbarriere können Protonen und Neutronen mit vergleichbarer Häufigkeit austreten. Bei den ganz leichten Kernen treffen die hier gemachten statistischen Voraussetzungen nicht mehr zu, und es zeigen sich starke individuelle Unterschiede.

Emission von mehreren Teilchen. Beträgt die Anregung ein Vielfaches der Bindungsenergie eines Teilchens, so können auch mehrere Partikel emittiert werden. Wird z.B. ein mittelschwerer Kern mit $A \approx 100$, $E_B \approx 8$ MeV auf etwa 20 MeV angeregt, so wird anfangs $kT_a \approx 1{,}3$ MeV. Bei Emission eines Neutrons sinkt die Temperatur im Mittel auf $kT_e \approx 0{,}9$ MeV. Dem entspricht als mittlere Energie der verdampften Neutronen $\bar{E} \approx 1{,}8$ MeV. (Wenn man sich auf T_a bezieht, würde $\bar{E} \approx 2{,}6$ MeV.) Nach der Verdampfung eines Neutrons bleibt noch durchschnittlich eine Anregungsenergie von 10 MeV übrig, die zur Emission eines zweiten Neutrons führen kann, wenn die Energie nicht zuvor durch γ-Strahlung abgeführt wird.
Als erstes Teilchen kann in unserem Beispiel auch ein Proton verdampfen, welches dann einen Coulomb-Wall von ≈ 9 MeV zu durchlaufen hat. Das Proton müßte dazu, wenn wir hier einmal vom Tunneleffekt absehen, $8 + 9 = 17$ MeV aus der Anregungsenergie von 20 MeV auf sich sammeln, was sehr unwahrscheinlich ist. Wenn aber ein Proton verdampft, ist die übrigbleibende Restenergie zu klein, um ein weiteres Teilchen zu emittieren; sie kann nur als γ-Strahlung abgestrahlt werden. Bei der angenommenen Anregungsenergie können also entweder zwei Neutronen oder es kann praktisch nur ein Proton verdampfen.

Im allgemeinen ist zu bemerken, daß das Statistische Modell das Verhalten eines Compoundkerns mit $A >$ etwa 50 recht gut wiedergibt. Die in den Abbildungen 65 und 66, S. 136, dargestellten experimentellen Ergebnisse sind nach Obigem ohne weiteres verständlich.

§ 62. Teilchenemission; Γ-Breiten und Niveaudichten

Zur Ergänzung der soeben angestellten rein thermodynamischen Betrachtungen soll im folgenden etwas genauer auf die *Kinematik der Teilchenemission* eingegangen werden. Dabei wird sich ein nützlicher Zusammenhang zwischen Emissionswahrscheinlichkeit, Niveaudichte und Teilchenenergie ergeben, der im Einklang mit dem experimentellen Verhalten von Resonanzneutronen steht.

Die Emission eines Teilchens aus einem Compoundkern erfolgt verhältnismäßig langsam aus folgenden Gründen:

1. Während der statistisch ungeordneten inneren Bewegung der Nukleonen im Kern muß sich auf ein einzelnes Nukleon zufällig eine so große Energie ansammeln, daß es gegen die Bindungskräfte den Kernverband verlassen kann. Eine derartige Energiekonzentration auf ein einzelnes Teilchen tritt nur selten auf.

2. Selbst ein nach 1) mit genügend Energie versehenes Teilchen kann a) seine Energie auf dem Wege zur Oberfläche wieder verlieren, b) an der Oberfläche in das Innere (wellenmechanisch) reflektiert werden oder muß c), wenn das Teilchen geladen ist, noch den „Gamow-Berg" passieren, wobei die Emissionswahrscheinlichkeit entsprechend dem Faktor G_b (s. § 34) sinkt. Die Durchlässigkeit ξ des

Potentialsprunges am Kernrand (ohne Coulomb-Berg) für ein radial gegen die Oberfläche anlaufendes Teilchen wird, wenn seine kinetische Energie E' nach Verlassen des Kernes sehr klein gegenüber seiner Bewegungsenergie (von mindestens 30 bis 40 MeV) im Kerninnern ist,

$$\xi = \frac{4\,k}{K} = 4\,\frac{\lambda_i}{\lambda} = 4\left(\frac{E'}{V_0 + E'}\right)^{1/2}. \tag{62.1}$$

Hierbei bedeutet k bzw. K die Wellenzahl und λ bzw. λ_i die reduzierte Wellenlänge des Teilchens außerhalb bzw. innerhalb des Kerns ($\lambda\, k = 1$; $\lambda_i K = 1$).

Der Ausdruck (62.1) entspricht der Durchlässigkeit eines ebenen Potentialsprunges für ebene Materiewellen bzw. der eines kugelsymmetrischen Potentialsprungs für radial ein- oder auslaufende Teilchen, wie kurz gezeigt sei:

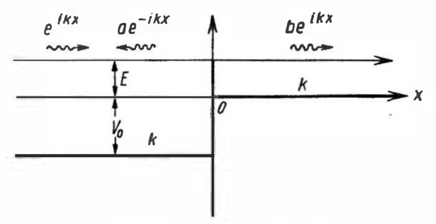


Abb. 111. Reflexion an einem Potentialsprung

Wir bezeichnen im *ebenen Fall* nach Abb. 111 mit

e^{iKx} die von links nach rechts laufende primäre Welle,[1])
$a\,e^{\,iKx}$ die reflektierte Welle,
$\psi_i = e^{iKx} + a\,e^{-iKx}$ ist dann die Wellenfunktion im Kerninnern, $x < 0$,
$\psi = b\,e^{ikx}$ sei die durchlaufende Welle im Außenraum, $x > 0$.

Die Anschlußbedingungen bei $x = 0$ lauten:

$$1 + a = b \qquad \text{aus} \qquad \psi_i(0) = \psi(0),$$

$$1 - a = \frac{k}{K}\,b \qquad \text{aus} \qquad \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0.$$

Daraus folgt $b = \dfrac{2\,K}{(k + K)}$, und die Durchlässigkeit ξ wird, da die Geschwindigkeit der Teilchen $\sim k$ bzw. K ist,

$$\xi = \frac{\text{durchlaufende Teilchen}}{\text{einfallende Teilchen}} = \frac{|\,b\,|^2\,k}{1K} = \frac{4\,K k}{(K + k)^2} \tag{62.2}$$

oder, in reduzierten Wellenlängen geschrieben,

$$\xi = \frac{4\,\lambda\,\lambda_i}{(\lambda + \lambda_i)^2}. \tag{62.3}$$

Es ist bemerkenswert, daß ξ nur symmetrisch von λ und λ_i abhängt und also für beide Richtungen gleich groß ist. Im Falle $\lambda \gg \lambda_i$ folgt der oben angegebene Wert

$$\xi = \frac{4\,\lambda_i}{\lambda}.$$

---

[1]) Wir lassen hier und später stets bei der Darstellung der primären, einfallenden Welle durch e^{ikx} oder e^{ikz} den Amplituden- oder Normierungsfaktor von der Dimension $\mathrm{cm}^{-3/2}$ fort und beziehen uns auf einen Teilchenstrom mit 1 Teilchen pro cm^3.

Im *kugelsymmetrischen Falle* ergibt sich bei radial ein- oder auslaufenden Teilchen derselbe Ausdruck (62.3). Für s-Wellen ($l = 0$) ist nämlich die Schrödinger-Funktion nur durch den Faktor $\frac{1}{r}$ vom ebenen Fall verschieden. Wir schreiben

$$\psi_i = \frac{1}{r} e^{iK(r-R)} + \frac{a}{r} e^{-iK(r-R)} \quad \text{im Kerninnern, } 0 < r \leqq R$$

$$\psi = \frac{b}{r} e^{ik(r-R)} \quad \text{im Außenraum, } r \geqq R.$$

r bezeichnet den Betrag des Radiusvektors zum Aufpunkt, R den Kernradius. Die Anschlußbedingungen bei $r = R$ sind dieselben wie oben bei $x = 0$, und für a und b folgen die gleichen Ausdrücke. Da die Radialgeschwindigkeiten auch hier $\sim k$ bzw. K sind, ergibt sich wieder (62.2) bzw. (62.3).

Für nicht radial bewegte Neutronen oder für geladene Teilchen setzen wir allgemein die Transparenz T des „Potentialgebirges" am Kernrand $\mathsf{T} = \xi\, v_l$. Der so definierte Faktor v_l hat für radial bewegte Neutronen den Wert $v_l = 1$. Bei geladenen Teilchen oder bei nicht radial laufenden Neutronen bedeutet $\xi\, v_l = G_l$ den verallgemeinerten Gamow-Faktor für Teilchen mit einem Bahndrehimpuls $l\hbar > 0$ (S. §74).

Stößt ein Teilchen S-mal pro sec gegen die Kernoberfläche, so ist die Wahrscheinlichkeit seines Herausfliegens $w_b = S\mathsf{T}$. Die Γ-Breite wird daher wegen $\Gamma_b = \hbar\, w_b$

$$\Gamma_b = \hbar\, S\mathsf{T} = \hbar\, S \xi v_l = \gamma_b v_l\, (E')^{1/2}. \tag{62.4}$$

Der in γ zusammengefaßte Faktor $\gamma = \frac{4\,\hbar S}{(V_0 + E')^{1/2}}$ enthält nur die *inneren Eigenschaften* des Compoundkerns und hängt im wesentlichen nur von der Anregungsenergie $E_A = V_0 + E'$ ab. Man schreibt auch unter Einführung des Kernradius R:

$$\Gamma_b = 2\,k\,R\,v_l\,\gamma_b \quad \text{mit} \quad \gamma_b = \frac{2\,S\,\hbar}{R\,K}. \tag{62.5}$$

Die ebenfalls nur von den inneren Kerneigenschaften abhängige Größe γ_b wird als *reduzierte Breite* bezeichnet; sie bestimmt die „Partialbreite" für ungeladene Teilchen, wo $v_l = 1$ ist.

Nach WEISSKOPF [W 50-1] kann man die Stoßzahl S bzw. die „*Wiederkehrzeit*" der inneren Bewegung, $\tau_i = \frac{1}{S}$, mit dem mittleren Abstand D der Energieniveaus E_n in Beziehung setzen: Wir nehmen der Einfachheit halber äquidistante Niveaus an und schreiben

$$E_n = E_0 + n\,D \qquad (n = \text{ganze Zahl}). \tag{62.6}$$

Von diesen seien durch den Teilcheneinfang die ersten N Niveaus mit ihren Wellenfunktionen ψ_n angeregt. Die Gesamtwellenfunktion des Kerns lautet dann

$$\psi = \sum_0^N a_n \psi_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_0 t\right) \sum_0^N a_n \psi_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} n\,D\,t\right), \tag{62.7}$$

worin die Konstanten a_n die relativen Anregungsstärken festlegen. Die letzte $\sum$ wiederholt sich periodisch mit der Wiederkehrzeit

$$\tau_i = \frac{1}{S} = \frac{2\pi\hbar}{D}. \tag{62.8}$$

Hiernach ist $S = \frac{D}{2\pi\hbar} = \frac{D}{h}$, und (62.4) liefert

$$\frac{\Gamma_b}{D} = \frac{\mathrm{T}}{2\pi} = \frac{\xi v_l}{2\pi}. \tag{62.9}$$

Speziell für radial bewegte Neutronen ($v_l = 1$) gilt

$$\frac{\Gamma_b}{D} = \frac{\xi}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{k}{K}. \tag{62.10}$$

$\frac{\Gamma_b}{D}$ bedeutet also im wesentlichen die Durchlässigkeit der Kernoberfläche für die auslaufenden Teilchen. Da $\xi = \frac{4(E')^{1/2}}{(V_0 + E')^{1/2}}$ ist, kann man auch schreiben

$$\Gamma_b = C D (E')^{1/2}, \tag{62.11}$$

wo der Faktor C und der Niveauabstand D nur langsam mit E' variieren. Die qualitative Gültigkeit der Beziehung (62.11) ist unmittelbar an den σ-E-Kurven der Resonanzneutronen zu erkennen.

Die Proportionalität von $\Gamma_b (= \hbar w_b)$ mit $(E')^{1/2}$, d.h. mit der Geschwindigkeit v_b' der auslaufenden Teilchen, folgt auch allgemein aus *Diracs Störungstheorie*. Danach ist nämlich

$$w_b = \frac{2\pi}{\hbar} |H|^2 \frac{dn}{dE}, \tag{62.12}$$

wo

$$H = \int \psi_{\text{Anfang}}\, U\, \psi_{\text{Ende}}\, d\tau \tag{62.13}$$

das Matrixelement des „Störungspotentials" U bedeutet, welches den Übergang des emittierten Teilchens b aus dem Compoundzustand ψ_{Anfang} in den freien Endzustand ψ_{Ende} hervorruft. $\frac{dn}{dE}$ ist die Anzahl der möglichen Endzustände des Systems, d. i. die des freien Teilchens, im Energieintervall Eins. Denkt man sich das System samt dem freien Teilchen in einem sehr großen Volumen $V (\to \infty)$ eingeschlossen, so ist bekanntlich, wenn wir auch die Spins I_b und I_{B} des Teilchens b und des Restkerns B der Vollständigkeit halber mit berücksichtigen,

$$dn = \frac{\text{Phasenvolumen}}{h^3} = \frac{4\pi p_b^2\, dp_b}{(2\pi\hbar)^3} V (2 I_{\mathrm{B}} + 1)(2 I_b + 1).$$

Wegen $dE = v_b\, dp_b$ folgt daher mit der Abkürzung $g_b = (2I_{\mathrm{B}} + 1)(2I_b + 1)$

$$\frac{dn}{dE} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} g_b \frac{p_b^2}{v_b}. \tag{62.14}$$

Es ist also $\frac{dn}{dE} \sim v_b$. Bei Einsetzen in (62.12) fällt nun das willkürlich angenommene Volumen V heraus, weil für ein herausfliegendes Teilchen (ebene Welle!) $\psi_{\text{Ende}} \sim V^{-1/2}$, ferner ψ_{Anfang} als Compoundzustand von V unabhängig ist und daher $|H|^2 \sim V^{-1}$ wird.

$|H|^2$ ist – wenn nicht gerade eine Resonanzstelle vorliegt – für kleine Intervalle von v_b praktisch konstant, so daß für kleine v_b jedenfalls $\Gamma_b \sim v_b$ sein muß. Einschränkend ist jedoch darauf hinzuweisen, daß (62.12) eigentlich nur für kleine Störungen U, wie z. B. bei γ-Prozessen, gültig ist. Für die starken Wechselwirkungen bei Kernreaktionen mit schweren Teilchen kann die Störungstheorie erster Ordnung keineswegs als hinreichend angesehen werden, so daß deren Ergebnisse durch weitere Methoden gesichert werden müssen.

Gl. (62.11) gilt nur für radial auslaufende Neutronen ($l = 0$). Im Falle $l > 0$ tritt in (62.9) für T die mit wachsendem l schnell abnehmende Größe G_l, welche die Durchlässigkeit des gemeinsam durch das Coulomb- und das Zentrifugalpotential gebildeten Potentialberges darstellt. Es wird dann auch für Neutronen $G_l < 1$, und zwar gilt für kleine E' ungefähr $G_l \sim (E')^{l+1/2}$, also auch $\Gamma_b \sim (E')^{l+1/2}$ (s. § 74).

B. Allgemeine Eigenschaften des Wirkungsquerschnitts

§ 63. Durch die Wellennatur der Materie bedingte Eigenschaften der Wirkungsquerschnitte

Über den Wirkungsquerschnitt lassen sich einige allgemeine Aussagen ohne spezielle Annahmen über den Mechanismus der Kernreaktionen – *allein aus der Wellennatur der Teilchen* – herleiten. Diese somit für alle Modelle gültigen Beziehungen sollen hier abgeleitet werden, wobei wir uns auf den Stoß spinloser Teilchen beschränken.

Im Zentrum eines Polarkoordinatensystems (r, ϑ, φ mit $\vartheta \equiv 0$ als z-Achse) befinde sich ein Atomkern. Der einfallende Strom von Teilchen der Masse M werde wellenmechanisch durch eine „laufende" ebene Welle[1])

$$\psi_0(z;t) = \exp(i(kz - \omega t)) \tag{63.1}$$

dargestellt (k = Wellenzahl, ω = Kreisfrequenz, t = Zeit). Ist M gegenüber der Masse des Zielkerns nicht zu vernachlässigen, so ist dafür die reduzierte Masse von Geschoß und Zielkern zu setzen sowie Energie und Impuls im System des Schwerpunktes zu messen. Den Faktor $e^{-i\omega t}$ lassen wir im folgenden weg, da er sich aus den Gleichungen stets heraushebt. Seine Wahl mit $-i$ im Exponenten bedeutet aber, daß e^{ikz} bzw. e^{-ikz} eine in Richtung $+z$ bzw. $-z$ laufende Welle darstellt. Der Impuls der dem ψ_0 zugeordneten Teilchen ist

$$p = \hbar k. \tag{63.2}$$

Unsere Aufgabe ist es, die Streuwelle zu bestimmen, wenn von außen die ebene Welle einfällt:

$$\psi_0 = e^{ikz}. \tag{63.3}$$

[1]) s. Anmerkung S. 269.

Zur Beschreibung der Wellenbewegung um das Störungszentrum ist es zweckmäßig, die primär einfallende Welle als eine Summe von ein- und auslaufenden Kugelwellen darzustellen: In großer Entfernung vom Streuzentrum ($r \to \infty$) gilt die Entwicklung

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2}(2l+1)\frac{i^{l+1}}{kr}\left[e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)} - e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)}\right] P_l(\cos\vartheta)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{i^l}{kr}\sin\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right) P_l(\cos\vartheta); \qquad (63.4)$$

l ist eine Laufzahl; $l = 0, 1, 2, \ldots$ Die $P_l(\cos\vartheta)$ sind die auf $P_l(0) = 1$ normierten (Legendreschen) Kugelfunktionen. Der Beweis von (63.4) ist im mathematischen Anhang, § 76, gegeben. Die Terme mit e^{ikr} stellen – wegen unserer Wahl des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ – auslaufende, die mit e^{-ikr} einlaufende Wellen dar. Es ist von vornherein ersichtlich, daß die Störung im Koordinatenursprung *nur die auslaufenden Wellen* modifiziert, und zwar nach Amplitude und Phase. Der im allgemeinen komplexe Amplitudenfaktor der l-ten auslaufenden Partialwelle heiße η_l. Dann ist die gestörte Welle im Gebiet $kr \gg 1$ gegeben durch

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2}(2l+1)\frac{i^{l+1}}{kr}\left[e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)} - \eta_l\, e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}l\right)}\right] P_l(\cos\vartheta). \qquad (63.5)$$

Diese für $r \to \infty$ gültige asymptotische Darstellung gilt für alle Störpotentiale, die stärker als $\frac{1}{r}$ nach Null gehen (s. §§ 69 u. 73).

Die Anwendung des Operators des Quadrates des Drehimpulses auf ψ zeigt daß der Partialwelle l der Betrag des Drehimpulses $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ zukommt und daß *l eine Drehimpulsquantenzahl* darstellt.

Jedes System einer ein- und auslaufenden Partialwelle l stellt eine unabhängige Lösung der Wellengleichung dar. Aus jeder einlaufenden l-Welle kann bei kugelsymmetrischem Störpotential wieder nur eine l-Welle entstehen (s. a. § 44 b für Spin = 0). Bei der Wechselwirkung mit dem wirklichen Kern sind die möglichen Prozesse elastische Streuung oder eine eigentliche Kernreaktion, einschließlich der unelastischen Streuung. Gleichung (63.5) beschreibt mit der auslaufenden Wellen ur die elastische Streuung. Für diese aber gilt wegen Impuls- und Energiesatz bei spinlosen Teilchen Erhaltung von l und k für jede Partialwelle. Die Amplitude jeder der auslaufenden Partialwellen l kann daher die der einlaufenden l-Welle nicht übersteigen, sie kann nur kleiner werden: Der fehlende Teil zeigt, wie weiter unten dargelegt ist, eine eingetretene Kernreaktion an. Die unelastisch gestreuten Teilchen und die bei Kernreaktionen emittierten Partikel führen zu neuen Wellen mit veränderten Wellenzahlen $k' \neq k$. Diese zu (63.5) hinzutretenden Wellen beeinflussen jedoch wegen der Verschiedenheit der k-Werte bzw. der Teilchen, nicht die nachfolgenden Aussagen über die elastisch gestreuten Partikel. Wir können daher von ihnen absehen. Wenn man in (63.5) $-\eta_l = (1-\eta_l) - 1$ schreibt, so kann man allgemein ψ auch in die Form bringen

$$\psi = e^{ikz} + \Theta(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{kr}, \qquad (63.6)$$

worin

$$\Theta(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} i (2l+1)(1-\eta_l) P_l(\cos\vartheta) \tag{63.7}$$

eine reine Winkelfunktion bezeichnet. Wenn keine Absorption der Wellen stattfindet, ist $|\eta_l| = 1$, d.h. $\eta_l = e^{i2\delta_l}$, wo $2\delta_l$ einen Phasenwinkel, also eine reelle Zahl, bedeutet. $\eta_l = 1$, d.i. $\delta_l = 0$, heißt Abwesenheit jeglicher Streuung. Im Falle von Absorption ist $|\eta_l| < 1$: Wir setzen dann $\eta_l = |\eta_l|\, e^{i2\delta_l}$.
Der zweite Term in (63.6),

$$\psi_{\mathrm{str}} = \Theta(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{kr},$$

ist die gestreute Welle. Der gestreute Teilchenstrom N_{str} ergibt sich durch Integration des allein zur Streuwelle ψ_{str} gehörigen Anteils der Stromdichte über eine Kugeloberfläche mit $r \to \infty$:

$$N_{\mathrm{str}} = \frac{\hbar}{2iM}\int\left(\frac{\partial\psi_{\mathrm{str}}}{\partial r}\psi^*_{\mathrm{str}} - \frac{\partial\psi^*_{\mathrm{str}}}{\partial r}\psi_{\mathrm{str}}\right) 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Mit Benutzung der Beziehungen

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\mu) P_m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{l,m}$$

(wo $\delta_{l,l} = 1$; $\delta_{l,\, m \neq l} = 0$) und $v = \frac{\hbar k}{M}$ ergibt sich

$$N_{\mathrm{str}} = \frac{v\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|1-\eta_l|^2.$$

Der einfallende Teilchenstrom beträgt $N = v$ Partikel/cm² sec; der *Streuquerschnitt* wird daher $\sigma_{\mathrm{str}} = \frac{N_{\mathrm{str}}}{N} = \frac{N_{\mathrm{str}}}{v}$, also wegen $\lambda = \frac{1}{k}$

$$\sigma_{\mathrm{str}} = \pi\lambda^2\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|1-\eta_l|^2. \tag{63.8}$$

Der *Streuquerschnitt für die Partialwelle* l ist

$$\sigma_{\mathrm{str},l} = \pi\lambda^2(2l+1)\,|1-\eta_l|^2. \tag{63.9}$$

Um den Wirkungsquerschnitt für die eigentliche Kernreaktion σ_r[1]) zu bestimmen, berechnen wir den Nettoteilchenstrom N_r durch eine Kugeloberfläche mit großem $r (\to \infty)$:

$$N_r = -\frac{\hbar}{2iM}\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial r}\psi\right) 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

---

[1]) Wir schreiben für σ_r später auch σ_{abs}, um denjenigen Teil der „Absorption" der Primärpartikel in den Zwischenkern anzudeuten, der dann zu einer wirklichen Kernreaktion — also nicht zur compoundelastischen Streuung — führt.

ψ ist aus Gleichung (63.5) zu entnehmen; das Minuszeichen rechts macht N_r positiv für einlaufenden Nettostrom. Für den Fall des nicht verschwindenden Nettostromes präzisieren wir nochmals die Bedeutung von ψ: Hier bezeichnet ψ nicht die Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Teilchen schlechthin, denn sonst wäre im streng stationären Falle $N_r \equiv 0$. Da keine Teilchen vernichtet oder erzeugt werden, müßte letztlich die Zahl der durch die Integrationsfläche einlaufenden Teilchen gleich der der auslaufenden sein. Wir verstehen unter ψ die Wahrscheinlichkeitsamplitude allein der Teilchen mit der Einfallsenergie E (= Energie der Relativbewegung!), so daß ψ nur die primären und die rein elastisch, ohne Energieverlust gestreuten Teilchen beschreibt. Diejenigen Teilchen, welche durch eine Kernreaktion ihre Energie geändert haben, sind laufend aus der vorstehenden ψ-Beschreibung ausgesondert zu denken. (Ihre Wellenfunktionen wären auch nicht mehr kohärent zu ψ, so daß man beide getrennt betrachten kann.) Da $\sigma_r = \frac{N_r}{N} = \frac{N_r}{v}$ ist, erhält man mit (63.5) analog zu (63.8) für den Reaktionsquerschnitt

$$\sigma_r = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,(1 - |\eta_l|^2); \quad |\eta_l| \leq 1\,. \tag{63.10}$$

Der *Reaktionsquerschnitt für die Partialwelle* l beträgt daher

$$\sigma_{r,l} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\,(1 - |\eta_l|^2). \tag{63.11}$$

Dieser Ausdruck stellt, wie es sein muß, gerade den in der auslaufenden Welle von (63.5) im Vergleich zu der von (63.4) fehlenden Anteil der auslaufenden Teilchen dar. Aus (63.11) und (63.9) ergeben sich einige wichtige allgemeine Beziehungen zwischen $\sigma_{\mathrm{str},l}$ und $\sigma_{r,l}$:

Für $\eta_l = -1$ haben wir den

maximalen Streuquerschnitt

$$(\sigma_{\mathrm{str},l})_{\max} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1); \tag{63.12}$$

gleichzeitig wird

$$(\sigma_{r,l}) = 0. \tag{63.13}$$

Für $\eta_l = 0$ ergibt sich der

maximale Reaktionsquerschnitt

$$(\sigma_{r,l})_{\max} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1); \tag{63.14}$$

gleichzeitig ist

$$\sigma_{\mathrm{str},l} = (\sigma_{r,l})_{\max} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1). \tag{63.15}$$

Der *maximale Streuquerschnitt* beträgt also das 4*fache des maximalen Reaktionsquerschnitts*. Allgemein existiert nach (63.9) und (63.11) zu jedem $\sigma_{r,l}$, d.h. $|\eta_l|$, ein möglicher Wertebereich für σ_{str} zwischen den Extremwerten

$$(\sigma_{\mathrm{str},l})_{\max} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\,(1 + |\eta_l|)^2 \quad \text{und} \quad (\sigma_{\mathrm{str},l})_{\min} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\,(1 - |\eta_l|)^2.$$

In Abb. 112 liegen diese Extremwerte auf der durchgezogenen Kurve. Die Zwischenwerte, für welche $|\cos 2\delta_l| < 1$ ist, liegen im schraffierten Gebiet.

Für den *totalen Wirkungsquerschnitt* $\sigma_{\text{tot},l}$ erhält man wegen $\eta_l = |\eta_l|\, e^{i 2\delta_l}$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot},l} &= \sigma_{\text{str},l} + \sigma_{r,l} = 2(2l+1)\pi\lambda^2(1 - |\eta_l| \cos 2\delta_l) \\ &= 2(2l+1)\pi\lambda^2(1 - \Re\, \eta_l).\end{aligned} \tag{63.16}$$

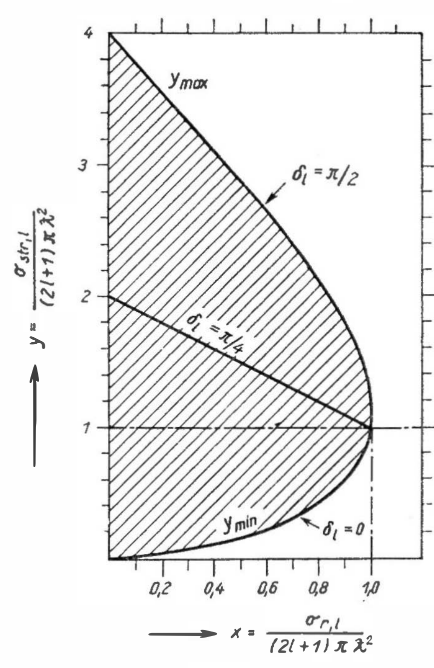


Abb. 112.
Darstellung der Beziehung zwischen $\sigma_{\text{str},l}$ und $\sigma_{r,l}$.

Mit $\eta_l = |\eta_l|\, e^{2i\delta_l}$

ist $y = |1 - e^{2i\delta_l}\sqrt{1-x}|^2$;

$$y_{\substack{\max\\ \min}} = (1 \pm \sqrt{1-x})^2 ;$$

$$\left\{\begin{matrix} + \text{ für } \delta_l = \frac{\pi}{2} \\ - \text{ für } \delta_l = 0 \end{matrix}\right\};$$

$$y\left(\delta_l = \frac{\pi}{4}\right) = 2 - x$$

Wir bemerken noch, daß der *differentielle Wirkungsquerschnitt* für elastische Streuung $\frac{d\sigma_{\text{str}}}{d\Omega}$ für das Raumwinkelelement $d\Omega(\vartheta)$ gegeben ist durch

$$\frac{d\sigma_{\text{str}}}{d\Omega} = \lambda^2 |\Theta(\vartheta)|^2. \tag{63.17}$$

Aus (63.7) ist zu ersehen, daß die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für die verschiedenen l unterschiedlich ist. Die experimentelle Bestimmung der Winkelabhängigkeit gibt daher eine Möglichkeit zur Bestimmung von l: Die Winkelabhängigkeit ist

bei $l = 0$ isotrop;
bei $l = 1$ lautet sie $\sim (\cos\vartheta)^2$;
bei $l = 2$ lautet sie $\sim (3\cos^2\vartheta - 1)^2$,

enthält also Terme mit $(\cos\vartheta)^4$ usw. Experimentell findet man in vielen Fällen eine scharfe Bevorzugung bestimmter l-Werte, welche durch die Erhaltung des Drehimpulses bei der Reaktion bestimmt werden (s. § 44).

Das Bemerkenswerteste an allen Wirkungsquerschnitten ist ihre maximal mögliche Größenordnung von $\pi\lambda^2$, welche den geometrischen Kernquerschnitt um viele Größenordnungen übertreffen kann. Diese auffallende Eigenschaft ist allen Wellenvorgängen eigen und kommt dadurch zustande, daß die Streuwellen bereits in Entfernungen von etwa λ, die groß gegenüber den Dimensionen des Streukörpers sein können, das Feld der ankommenden primären Welle entsprechend beeinflussen (s. a. § 68).

§ 64. Der Wirkungsquerschnitt für die Compoundkernbildung

a) Allgemeine Annahmen

Über den Wirkungsquerschnitt für die Compoundbildung wollen wir nun im Anschluß an § 63, Gl. (63.10), unter Zugrundelegung der Bohrschen Vorstellungen einige konkretere Aussagen nach der sog. *Kontinuumstheorie* herleiten.[1]

Wir nehmen mit BOHR an, daß praktisch jede Geschoßpartikel, die das Innere des Zielkerns erreicht, zur Compoundbildung führt. Die hierzu erforderliche starke Wechselwirkung mit den Nukleonen des Zielkerns ist am ehesten bei hoher Anregung des Compoundsystems zu erwarten. Gleichzeitig stehen dann dem Compoundkern viele Arten von Zerfallsmöglichkeiten offen. Die Reemission einer Partikel vom Typ des Geschoßteilchens mit der Primärenergie, d. h. die compoundelastische Streuung, wird daher bei höherer Anregung sehr unwahrscheinlich. Der Compoundkern zerfällt vielmehr vorwiegend durch Emission unelastisch gestreuter und anderer Teilchen sowie von γ-Quanten.

Praktisch sind diese Verhältnisse gegeben, wenn die Einfallsenergie der Geschoßteilchen bei nicht zu leichten Kernen ($A \gtrsim 50$) etwa 3 MeV überschreitet oder auch bei kleineren Energien, wenn die Reaktionsenergie Q entsprechend hoch ist ($\gtrsim 3$ MeV).

Wir nehmen im folgenden – im Sinne der Kontinuumstheorie der Kernreaktionen – diese Voraussetzungen als erfüllt an.

Da wir hier die compoundelastische Streuung als vernachlässigbar klein ansehen, ist der Compoundquerschnitt gleich dem Reaktionsquerschnitt. Das bedeutet jedoch nicht, daß der gesamte elastische Streuquerschnitt verschwindet. Denn dieser entsteht außer durch compoundelastische Streuung auch noch durch die wellenmechanische, elastische Reflexion der Geschoßteilchen am Kernrand und bei geladenen Teilchen zusätzlich durch Coulomb-Streuung. Diese beiden letzten Anteile sind stets vorhanden.

Für den Reaktionsquerschnitt $\sigma_{r,l}$ (bzw. Compoundquerschnitt $\sigma_{c,l}$) läßt sich folgende Abschätzung geben.

Wenn die gesamte l-Welle beim Auftreffen auf den Kern absorbiert wird, d.h. im Falle $\eta_l = 0$, ist $\pi ƛ^2 (2l+1)$ der Wirkungsquerschnitt dafür, daß ein Teilchen mit einem Bahndrehimpuls $l\hbar$ aus dem Strom eingefangen wird und eine Kernreaktion verursacht. Da wir hier die compoundelastische Streuung vernachlässigen, können wir den Compoundquerschnitt $\sigma_{c,l}$ mit dem Reaktionsquerschnitt $\sigma_{r,l}$ gleichsetzen. Sein maximaler Wert ist daher

$$(\sigma_{c,l})_{\max} = (2l+1)\pi ƛ^2. \tag{64.1}$$

Ist $|\eta_l| > 0$, so wird nur der Bruchteil $1 - |\eta_l|^2$ der mit der l-Welle einlaufenden Teilchen eingefangen und mit dem Kern reagieren. Man kann diesen Bruchteil

[1] Der Name „Kontinuumstheorie" soll darauf hinweisen, daß der Kontinuumteil der Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte erklärt werden soll. Die Kern-Resonanzen stehen außerhalb dieser Theorie.

aller in den Compoundkern (mit einem Bahndrehimpuls $l\hbar$) eingedrungenen und zur Reaktion kommenden Teilchen in zwei Faktoren aufspalten:

$$1 - |\eta_l|^2 = P\,T_l \quad (64.2)$$

P ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein eingedrungenes Teilchen zur Compoundbildung führt. Wir nehmen mit N. BOHR $P = 1$ an. T_l bedeutet die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen durch den vor dem Zielkern gegebenenfalls vorhandenen Potentialwall und durch den Potentialsprung am Kernrand hindurch das Kerninnere erreicht. Für geladene Teilchen und langsamere Neutronen mit Bahndrehimpuls ($l > 0$) ist allgemein $T_l = G_e$ zu setzen, wo G_e die Durchlässigkeit der gemeinsam von der Coulomb- und der Zentrifugalkraft gebildeten Potentialbarriere bezeichnet (s. §§ 73 und 74). Bei radial bewegten Neutronen ($l = 0$) ist $T_0 = \xi$, die Transparenz des Potentialsprunges am Kernrand nach § 62. Auch für Neutronen mit endlichem Bahndrehimpuls ($l > 0$) gilt näherungsweise $T_l \approx \xi$, sobald die Neutronenenergie höher wird als der — zu $l\,(l+1)$ proportionale — Zentrifugalwall (s. § 69), weil dann die Zentrifugalkräfte die Radialwellenfunktion des Neutrons nicht mehr wesentlich beeinflußt.

Für den Gesamtwirkungsquerschnitt der Compoundbildung erhalten wir nun mit (63.10)

$$\sigma_c = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,T_l\,. \quad (64.3)$$

$$\sigma(a, b) = \sigma_c \frac{\Gamma_b}{\Gamma}\,.$$

b) Wirkungsquerschnitt für Neutronen

Wenn wir zunächst die Neutronen betrachten, ist $T_l \approx \xi$ für alle diejenigen Werte l, für die die Höhe der Zentrifugalbarriere unter der verfügbaren Energie liegt, also etwa für $l < l_k$, wo l_k einen bestimmten kritischen Wert bezeichnet. Für wachsende $l > l_k$ wird rasch $T_l \to 0$. Wir schätzen l_k für sehr schnelle Neutronen korrespondenzmäßig ab: Der Stoßparameter a der Teilchen der l-Welle (mit dem linearen Impuls p und dem Drehimpuls $l\hbar$) ist gegeben durch $ap = l\hbar$, so daß $a = \frac{l\hbar}{p} = l\lambda\!\!\!^{-}$. Für $a > R$ (Kernradius) ist $T_l \approx 0$ anzunehmen, da dann die Teilchen am Kern vorbeifliegen. Dagegen wird $T_l \approx \xi$ sein, solange $a \leqq R$ ist. Also gilt $l_k \approx \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}$ [1]). Gleichung (64.3) gibt unter diesen Umständen, wenn wir für alle $l \leqq l_k$ die Durchlässigkeit des Potentialsprunges am Kernrand näherungsweise nach (62.3) $T_l = \xi = \frac{4\lambda\!\!\!^{-}\lambda\!\!\!^{-}_i}{(\lambda\!\!\!^{-} + \lambda\!\!\!^{-}_i)^2}$ setzen (was übrigens auch für kleine Geschwindigkeiten zutrifft),

$$\sigma_c = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \xi \sum_{l=0}^{l_k} (2l+1) = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \xi\,(l_k + 1)^2\,. \quad (64.4)$$

---

[1]) S. hierzu § 74, S. 318.

Mit $l_k = \frac{R}{\lambda}$ folgt

$$\sigma_c = \pi (R + \lambda)^2 \frac{4 \lambda \lambda_i}{(\lambda + \lambda_i)^2} \cdot \qquad (64.5)$$

Das ist die in § 33 angegebene Formel (33.6). Bei schnellen Neutronen im Energiebereich der Größenordnung 10 MeV gilt – wegen praktisch vollständiger Absorption ($\eta_l \approx 0$, s. Gl. (63.15)) – $\sigma_{\text{str}} \approx \sigma_r = \sigma_c$ und daher $\sigma_{\text{tot}} \approx 2\sigma_c$:

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi (R + \lambda)^2 \frac{4 \lambda \lambda_i}{(\lambda + \lambda_i)^2} \cdot \qquad (64.6)$$

Die soeben für den Grenzfall großer Energien abgeleitete Gl. (64.5) für σ_c können wir übrigens im Rahmen der oben unter a) genannten Voraussetzungen – abgesehen an den Resonanzstellen – auch für kleine Energien im Gebiet $\lambda \gg R$ und $\lambda \gg \lambda_i$ anwenden, weil dann die Größe R in $(R + \lambda)^2$, welche durch Überlegungen hineinkam, die für $\lambda \gg R$ nicht mehr zutreffen, ohnehin belanglos wird. Hier führen nämlich nur s-Wellen zur Reaktion. In (64.3) bleibt daher allein der erste Term ($l = 0$) übrig, was wegen $T_0 = \xi$ sogleich zu (64.5) führt. Im Zwischengebiet ist Gl. (64.3) schwer auszuwerten; man wird (64.5) aber als angenäherte Interpolationsformel ansehen können.

Eine wichtige Anwendung und Bestätigung der Gleichungen (64.5) und (64.6) ergab sich im Zusammenhang mit den Arbeiten zur Bestimmung der Kernradien: Durch Messung von σ_{tot} an einer Reihe von Elementen mit schnellen Neutronen bekannter Energie konnte sowohl die Brauchbarkeit der Gl. (64.6) festgestellt, als auch die Größe der Kernradien R bestimmt werden (s. Bd. I, S. 43). Weitere Diskussionen zu (64.5) finden sich in § 33e.

Wie aus der Ableitung von (64.6) ersichtlich, behandelt diese einfachste Form der *Kontinuumstheorie* den Kern als ein Kontinuum, das für die einlaufenden Wellen einen Sprung des Brechungsindex am Kernrande aufweist und im Innern – gemäß der Bohrschen Annahme – sich wie ein absolut „schwarzer" Körper verhält. Daher kann diese Theorie die Mehrteilchenresonanzen nicht wiedergeben. Es ist aber zu erwarten, daß die über die letzteren *gemittelten Wirkungsquerschnitte* wenigstens qualitativ der Formel (64.6) genügen. Dies sollte zutreffen, solange die Wahrscheinlichkeit der Compoundbildung eines bereits eingedrungenen Teilchens wenn auch nicht = 1, so doch im Mittel über viele Resonanzen n i c h t von der Energie abhängt, wie zur Ableitung von (64.3) im wesentlichen vorausgesetzt werden mußte. Die Beobachtungen bei hohen Energien, wo durch starke Überlappung der Resonanzen diese Mittelung von selbst erfolgt, zeigen in vielen Fällen die Brauchbarkeit der vorstehenden Betrachtungen (s. § 33, Abb. 68).

Im allgemeinen aber erweist sich (64.6) auch für die gemittelten Wirkungsquerschnitte einer Korrektur bedürftig. Sie enthält nämlich nicht die *Riesenresonanzen*, welche durch eine gewisse freie Beweglichkeit des eingedrungenen Teilchens im Kerninnern hervorgerufen werden. Man muß also neben der Absorption noch gleichzeitig eine teilweise freie Beweglichkeit des eingedrungenen Teilchens, eine gewisse „Durchsichtigkeit" der Kernmaterie berücksichtigen. Dies führt auf das *Optische Modell* (s. Kap. IX, §§ 130 bis 135).

c) Wirkungsquerschnitt für geladene Teilchen

Bei geladenen Teilchen nicht zu hoher Energie ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie – mit einem Drehimpuls l – in den Kern eindringen, in der Hauptsache durch den *Gamow-Faktor* $G_l = e^{-g_l}$ (vgl. § 74) gegeben, so daß wir $\mathsf{T}_l \approx e^{-g_l}$ setzen können

Damit wird

$$\sigma_c \approx \pi \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, e^{-g_l(E)}\,. \tag{64.7}$$

Hierbei wurden in der Summe Faktoren vor der Exponentialfunktion, welche nicht leicht zu bestimmen sind, bezüglich E als konstant angenommen und so gewählt, daß für sehr große Energien, welche den Coulomb-Wall weit übersteigen, Protonen und Neutronen gleiches Verhalten zeigen; $\exp(-g_l(E))$ wird dann nämlich gleich dem T_l für Neutronen, also $\gtrsim 1$ für gewisse $l < l_k$ und sonst $= 0$ für $l > l_k$, wie weiter oben erörtert wurde.

Bei kleinen Energien vermindert sich der Faktor $\exp(-g_l)$ mit wachsendem l so stark, daß häufig nur der Beitrag der s-Welle ($l = 0$) übrigbleibt:

$$\sigma_c \approx \pi \lambda\!\!\!^{-2}\, e^{-g_0(E)}\,. \tag{64.8}$$

Diese Beziehung ist speziell für leichte Kerne nützlich, da bei diesen schon mit kleinen Energien der Coulomb-Wall überwunden und damit eine Kernreaktion ausgelöst werden kann. Bei schweren Kernen muß, damit überhaupt eine merkliche Kernreaktion eintritt, die Energie bereits so groß sein, daß p-, d- und höhere Wellen von vornherein an der Reaktion beteiligt sind. Dies tritt um so mehr ein, als mit wachsendem Radius die Zentrifugalbarriere sich erniedrigt. Die Beziehungen (64.7) und (64.8) haben sich bei der Beschreibung der experimentellen Ergebnisse gut bewährt, soweit es sich um die Form der Energieabhängigkeit von σ_c handelt (s. § 39, S. 191 und 192). Die richtigen Absolutwerte dagegen kann eine so stark vereinfachte Rechnung natürlich nicht liefern.

§ 65. Wirkungsquerschnitt inverser Reaktionen

Im folgenden leiten wir einige weitere Eigenschaften des Wirkungsquerschnittes – wie in der Thermodynamik – mit Hilfe eines gedachten „*Gleichgewichtskastens*" unter Benutzung des Prinzips vom *detaillierten Gleichgewicht* bzw. des *Reziprozitätstheorems* ab. Wir denken uns die reagierenden Kerne A und a sowie die Reaktionsprodukte B und b in einen sehr großen „Kasten" K eingeschlossen, dessen Gestalt im einzelnen unwesentlich ist, praktischerweise z. B. als Kubus oder Kugel gedacht werden kann. Sein Volumen V soll im Grenzfall ∞ werden. Die Zustände, in denen A und a, bzw. B und b, als freie Teilchen existieren, nennen wir (A)- bzw. (B)-Zustände. Übergänge von (A) nach (B) und umgekehrt, sollen nur über einen der Zustände (C) des Compoundkerns C erfolgen, d.h., direkte

Übergänge (A) $\rightleftarrows$ (B) sollen nicht vorkommen. V ist stets so groß zu denken, daß die „dissoziierten“ (A)- und (B)-Zustände gegenüber den Compoundzuständen (C) weit überwiegen. Strenggenommen sind die Compoundzustände keine reinen stationären Zustände, denn sie haben eine beschränkte Lebensdauer und zerfallen unter Emission schwerer Teilchen oder γ-Quanten; sie sind sog. „virtuelle Zustände“. Sie können exakt nur als Superposition von streng stationären Zuständen des Gesamtsystems dargestellt werden, die für $V \to \infty$ in die Kontinuumszustände übergehen. Wir können sie aber näherungsweise als „quasistationäre“ Zustände behandeln.

Man kann sich die Compoundzustände idealisiert und exakt stationär gemacht denken, indem man den Kern mit einem undurchdringlichen Potentialwall (ähnlich einem sehr hohen Gamow-Berg) umgibt. Die stationären Zustände des Gesamtsystems (Kern im „Kasten“ K) sind dann streng getrennt in Zustände innerhalb und außerhalb des Kerns. Durch ein (gedachtes) „Störungspotential“ H' werde der Potentialberg wieder auf die ursprüngliche Höhe herabgesetzt, wodurch dann die Übergänge zwischen den freien und den gebundenen Zuständen wieder einsetzen.

Im Gleichgewicht erfolgen die Reaktionen

$$\mathrm{A} + a \rightleftarrows \mathrm{C} \rightleftarrows \mathrm{B} + b \tag{65.1}$$

gleichhäufig nach beiden Richtungen.

Um hieraus auf die Wirkungsquerschnitte inverser Reaktionen schließen zu können, betrachten wir zuerst den Übergang von einem Zustand (A) über (C) in einen anderen Zustand (B), die beide in demselben Intervall der Gesamtenergie E bis $E + dE$ liegen. Die kinetischen Energien der freien Teilchen sind in diesen verschiedenen Zuständen, vor und nach der Reaktion, im allgemeinen voneinander verschieden. Sie sind aber durch die Energiebilanz bei der Kernreaktion miteinander gekoppelt, und sie liegen daher in Energieintervallen von gleicher Breite dE. Nach der *statistischen Mechanik* sind im Gleichgewicht alle zu einer vorgegebenen Energie möglichen Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt. Es gilt daher mit den Bezeichnungen

Z_A bzw. Z_B = Dichte der *besetzten* (A)- bzw. (B)-Zustände,
ϱ_A bzw. ϱ_B = Dichte der *möglichen* (A)- bzw. (B)-Zustände
(beides im Energieintervall E bis $E + dE$)

$$\frac{Z_\mathrm{A}}{Z_\mathrm{B}} = \frac{\varrho_\mathrm{A}}{\varrho_\mathrm{B}}.$$

Die Zahl der Übergänge $\ddot{U}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ von (A) nach (B) ist im Gleichgewicht gleich der der inversen Übergänge: $\ddot{U}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = \ddot{U}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$. Wenn $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ die Übergangswahrscheinlichkeit eines vorliegenden (A)-Zustandes in einen (B)-Zustand darstellt und $W_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$ die des inversen Prozesses, dann ist

$$\ddot{U}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = Z_\mathrm{A}\, W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \quad \text{und} \quad \ddot{U}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = Z_\mathrm{B}\, W_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}.$$

Es gilt also die Beziehung

$$\frac{W_{A\to B}}{\varrho_B} = \frac{W_{B\to A}}{\varrho_A}, \tag{65.2}$$

die als *Theorem vom detaillierten Gleichgewicht* oder *Reziprozitätstheorem* bezeichnet wird. Darin bedeutet ϱ genauer die Zustandsdichte (der stationären Zustände) der Relativbewegung der Teilchen, multipliziert mit dem statistischen Gewichtsfaktor g für die Spins in diesen Zuständen; mit den Bezeichnungen des §62 ist also $\varrho = \frac{dn}{dE}$. Für die (A)-Zustände folgt analog zu (62.14)

$$\varrho_A = \frac{g_a}{2\pi^2\hbar^3}\frac{p_a^2}{v_a}V. \tag{65.3}$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für ϱ_B.
Nach der Definition des Wirkungsquerschnitts $\sigma(a, b)$ beträgt die Übergangswahrscheinlichkeit $W_{A\to B}$, wenn wir ein Teilchenpaar (A, a)in V annehmen,

$$W_{A\to B} = \frac{v_a\,\sigma(a,b)}{V}. \tag{65.4}$$

Entsprechendes gilt für den inversen Prozeß: (B) $\to$ (A). Einsetzen dieser Ausdrücke in (65.2) liefert das *Reziprozitätsgesetz bei Kernreaktionen:*

$$\frac{\sigma(a,b)}{\sigma(b,a)} = \frac{g_b\,p_b^2}{g_a\,p_a^2} = \frac{g_b\,\lambda_a^2}{g_a\,\lambda_b^2}. \tag{65.5}$$

Hierin sind die Impulse der Relativbewegung der jeweiligen Teilchenpaare, p_a und p_b, durch die Energiebilanz bei der Kernreaktion miteinander gekoppelt. Wenn wir mit μ_a und μ_b die reduzierten Massen der Teilchenpaare bezeichnen, gilt

$$\frac{p_b^2}{2\mu_b} - \frac{p_a^2}{2\mu_a} = Q. \tag{65.6}$$

Wir wollen noch eine andere, einfachere Ableitung der Beziehung (65.5) mit Hilfe der in § 62 schon benutzten Störungstheorie angeben. Sie gilt allerdings genaugenommen nur für schwache Störungspotentiale wie bei γ-Prozessen. Für die starke Wechselwirkung bei Kernreaktionen kann sie nur als vorläufige Näherung betrachtet werden. Wenn man in (62.13) unter ψ_{Anfang} und ψ_{Ende} die Wellenfunktionen der Zustände vor und nach der Reaktion versteht, die also den *freien* Teilchen A + a und B + b entsprechen, und unter U den „Störungsoperator" für den Übergang (A) $\to$ (C) $\to$ (B), so stellt jetzt (62.12) in der Form

$$W_{A\to B} = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{ab}|^2\left(\frac{dn}{dE}\right)_b \tag{65.7}$$

direkt die Übergangswahrscheinlichkeit von (A) nach (B) dar. H_{ab} und $\left(\frac{dn}{dE}\right)_b$ sind aus (62.13) und (62.14) zu entnehmen. Mit Benutzung von (65.4) erhalten wir damit

$$\sigma(a,b) = \frac{V^2}{\pi\hbar^4}|H_{ab}|^2\,g_b\,\frac{p_b^2}{v_a\,v_b}. \tag{65.8}$$

V fällt hier übrigens (bei $V \to \infty$) im Endresultat heraus, weil wegen des Normierungsfaktors der ψ die Größe $|H_{ab}| \sim V^{-1}$ wird. Eine genau entsprechende Gleichung gilt für den inversen Prozeß. Da aber quantenmechanisch stets $|H_{ab}| = |H_{ba}|$ ist, folgt ohne weiteres (65.5).
Auf eine experimentelle Bestätigung dieser Beziehung an den einander inversen Reaktionen $Al^{27}(p, \alpha)\, Mg^{24}$ und $Mg^{24}(\alpha, p)\, Al^{27}$ wurde schon früher (s. Abb. 64, S. 135) hingewiesen. Die Wirkungsquerschnitte sind allerdings nicht so genau gemessen, als daß der Spinfaktor der rechten Seite von (65.5) geprüft werden könnte. Aber die Tatsache derselben Energieabhängigkeit von $\sigma(a, b)$ und $\sigma(b, a)$ ist bereits als eine sehr gute Bestätigung von (65.5) anzusehen.

§ 66. Das Energiespektrum eines virtuellen Niveaus

Wir betrachten den hypothetischen Fall eines Compoundkerns mit nur einem einzigen Compoundniveau der Energie E_r, einem bestimmten Kernspin I_C und einer nicht zu kurzen mittleren Lebensdauer τ, welche nach § 32 mit der Energieunschärfe Γ des Compoundniveaus durch die Beziehung $\tau\Gamma = \hbar$ verknüpft ist.
Die Ergebnisse gelten ebensogut auch bei Vorhandensein mehrerer Niveaus, wenn diese nur hinreichend weit voneinander entfernt sind.
Die Annahme einer *zeitunabhängigen* Zerfallswahrscheinlichkeit bedingt ein *exponentielles Zerfallsgesetz* und dies wiederum innerhalb des Niveaus eine bestimmte Besetzungswahrscheinlichkeit der Zustände im Energieintervall E bis $E + dE$, wo $dE \ll \Gamma$ angenommen sei:
Das Zerfallsgesetz legt die „Feinstruktur" des Niveaus fest. Da diese nun für die Resonanzeigenschaften des Niveaus entscheidend ist, soll sie hier abgeleitet werden, um im nächsten Paragraphen daraus das Resonanzverhalten der Kerne zu entwickeln. Wir benutzen damit im Prinzip das gleiche Verfahren, mit dem man im Bereich elektromagnetischer oder mechanischer Systeme aus den Konstanten der gedämpften Schwingungen auf die Resonanzeigenschaften des Systems bei Anregung mit variabler Frequenz schließt.
Wird der Compoundzustand durch die Wellenfunktion ψ beschrieben, so bedeutet die Annahme einer (für $t > 0$) zeitunabhängigen Zerfallswahrscheinlichkeit w, daß ψ innerhalb des vom Compoundkern eingenommenen Raumes, also etwa im Innern der Kugel $r < R$, zeitlich abklingt gemäß

$$\psi_i(\mathfrak{r}, t) = \psi_C(\mathfrak{r}) \exp\left\{- i \frac{E_r}{\hbar} t - \frac{\Gamma}{2\hbar} t\right\}. \qquad (66.1)$$

Dabei nehmen wir an, daß die anfängliche *Form* der ψ-Verteilung zur Zeit $t = 0$, d.i. $\psi_C(\mathfrak{r})$, im Verlaufe der Zeit erhalten bleibt. E_r ist die Resonanzenergie und Γ eine positive reelle Größe. Die Wahrscheinlichkeitsdichte im Raume $r < R$ klingt ab mit

$$|\psi_i|^2 = |\psi_C|^2 \exp\left(- \frac{\Gamma}{\hbar} t\right), \qquad (66.2)$$

so daß $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$ die mittlere Lebensdauer des Compoundkerns bedeutet. Die Wellenfunktion des Gesamtsystems mit Einschluß des Außenraumes heiße $\psi(\mathfrak{r}, t)$. Zur Zeit $t = 0$ sei der Compoundkern mit Sicherheit vorhanden; dann ist

$$\psi(\mathfrak{r}; t = 0) = \begin{cases} \psi_C(\mathfrak{r}) & \text{für} \quad r < R, \\ \equiv 0 & \text{für} \quad r > R. \end{cases} \tag{66.3}$$

Mit fortschreitender Zeit verbreitet sich $\psi(\mathfrak{r}, t)$ auch auf das Gebiet $r > R$, wobei natürlich $\int |\psi(\mathfrak{r}, t)|^2 \, d\tau = \int |\psi_C(\mathfrak{r})|^2 d\tau = 1$ bleibt ($d\tau =$ Volumenelement des Konfigurationsraumes). ψ entspricht keinem stationären Zustand des Systems. Man kann ψ aber als Wellenpaket aus den exakten stationären Eigenfunktionen des Gesamtsystems aufbauen, welches wir uns — um mit einer abzählbaren Folge von Eigenfunktionen operieren zu können — im „Kasten" K (§ 65) mit einem sehr großen, aber endlichen Volumen V eingeschlossen denken. Im Endergebnis gehen wir dann stets zu $V \to \infty$ über, um den wirklichen Verhältnissen gerecht zu werden. $\psi_n(\mathfrak{r})$ seien die stationären Eigenfunktionen und E_n die Energieeigenwerte des Systems im n-ten Quantenzustand. Die ψ_n beschreiben im Prinzip das System der Nukleonen des Compoundkerns in seinen stationären Gleichgewichtszuständen mit allen möglichen Zerfallsprodukten, zu denen emittierte Partikel auch mehrerer verschiedener Sorten a, b, usw. gehören sollen, so daß nach früherem $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b + \dots$ zu setzen ist.

Allerdings wollen wir hier von γ-Prozessen absehen, weil sich Lichtquanten nicht ohne weiteres in die wellenmechanische ψ-Darstellung einfügen lassen. Diese wären nach der Quantenelektrodynamik als ein mit dem Compoundkern schwach gekoppeltes System harmonischer Oszillatoren einzuführen, und in Γ wäre Γ_γ hinzuzuzählen. Wir werden w. u. in § 71 γ-Prozesse auf andere Weise mit erfassen.

Wenn man nun $\psi(\mathfrak{r}, t)$ nach den (normierten) Eigenfunktionen $\psi_n(\mathfrak{r})$ des Gesamtsystems entwickelt,

$$\psi(\mathfrak{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(\mathfrak{r}) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right), \tag{66.4}$$

so erhält man aus den Entwicklungskoeffizienten b_n die Wahrscheinlichkeit $|b_n|^2$ dafür, daß der Zustand ψ_n mit der Energie E_n in $\psi(\mathfrak{r}, t)$ enthalten ist. Wegen der Normierung von $\psi(\mathfrak{r}, t)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = 1\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach Ablauf der Zeit t der Anfangszustand $\psi(\mathfrak{r}, 0) = \psi_C(\mathfrak{r})$ noch angetroffen wird, sei $|\varphi(t)|^2$. Dann gilt quantenmechanisch für die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\varphi(t)$[1])

$$\varphi(t) = \int_V \psi(\mathfrak{r}, t)\, \psi_C^*(\mathfrak{r})\, d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right).$$

[1]) φ ist der erste Koeffizient in der Entwicklung $\psi = \varphi \cdot \psi_C +$ zu ψ_C orthogonale Terme. — Denkt man sich ψ_C und die dazu orthogonalen Funktionen als Eigenfunktionen eines geeigneten Operators, so haben wir den üblichen Fall.

Beim Übergang zur Summe wurden $\psi(\mathfrak{r}, t)$ und $\psi_C^*(\mathfrak{r}) = \psi^*(\mathfrak{r}, t = 0)$ durch (66.4) ausgedrückt und die Orthogonalität der $\psi_n(\mathfrak{r})$ benutzt. Nun stellt obiges Integral aber auch den Exponentialfaktor von (66.1) dar. Denn es erstreckt sich, da $\psi_C^*(\mathfrak{r})$ für $r > R$ verschwindet, de facto nur auf das Gebiet $r < R$, und hier gilt laut unserer Voraussetzung (66.1)

$$\psi(\mathfrak{r}, t) = \psi_i(\mathfrak{r}, t) = \psi_C(\mathfrak{r}) \exp\left(-i \frac{E_r}{\hbar} t - \frac{\Gamma}{2\hbar} t\right), \tag{66.5}$$

worin $|\psi_C|^2$ innerhalb des Compoundkernes, $r < R$, auf 1 normiert ist:

$$\int_{r<R} |\psi_C|^2 d\tau = 1 .$$

Es gilt daher für alle $t \geqq 0$

$$\varphi(t) = \exp\left(-i \frac{E_r}{\hbar} t - \frac{\Gamma}{2\hbar} t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right). \tag{66.6}$$

Hieraus sind die Koeffizienten b_n zu errechnen.

Gleichung (66.6) schreibt übrigens eine bestimmte Fortsetzung von $\varphi(t)$ in das Gebiet $t < 0$ vor, sofern man dieselben b_n auch für $t < 0$ beibehalten will: Da die Summe rechts in (66.6) invariant gegen gleichzeitige Vertauschung der Vorzeichen von i und t ist, muß dasselbe auch für die mittlere Exponentialfunktion gelten. Ihre für alle t von $-\infty$ bis $+\infty$ gültige Form lautet daher:

$$\varphi(t) = \exp\left(-i \frac{E_r}{\hbar} t - \frac{\Gamma}{2\hbar} |t|\right).$$

Der so vervollständigte Ausdruck beschreibt für $t \lesssim 0$ einen zum Zerfall inversen Prozeß, nämlich den allmählichen Aufbau der Wahrscheinlichkeit des Compoundzustandes, der bei $t = 0$ durch den Wert $\varphi(t = 0) = 1$ hindurchgeht.

Über die Gestalt der Eigenfunktionen $\psi_n(\mathfrak{r})$ im Bereiche des Compoundkerns ($r < R$) notieren wir zur späteren Verwendung noch einige wichtige Beziehungen: Im Bereich $r < R$ ist $\psi(\mathfrak{r}, t)$ aus (66.4) identisch mit $\psi_i(\mathfrak{r}, t)$ aus (66.1). Ersetzt man hierin aber die e-Funktion durch die Summe aus (66.6), so ergibt der Vergleich unmittelbar[1])

$$\psi_n(\mathfrak{r}) = b_n^* \psi_C(\mathfrak{r}) \quad \text{für} \quad r < R. \tag{66.7}$$

Der Beitrag der Eigenfunktion ψ_n zur ψ-Welle im Innern des Compoundkerns folgt dann aus (66.4) zu[1])

$$\psi_{i,n}(\mathfrak{r}, t) = |b_n|^2 \psi_C(\mathfrak{r}) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right) \quad \text{für} \quad r < R. \tag{66.8}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zustandes ψ_n ist nach (66.4) gleich $|b_n|^2$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das System sich dabei insbesondere im Compoundzustand $\psi_{i,n}$ befindet, folgt aus (66.8) zu

$$\int_{r<R} |\psi_{i,n}|^2 d\tau = |b_n|^4 . \tag{66.9}$$

[1]) Im § 75 sind diese allgemein gültigen Beziehungen in einem speziellen Falle explizite durchgerechnet.

Also beträgt die *relative* Wahrscheinlichkeit W_n, in einem *vorgegebenen* Zustand ψ_n das System im Compoundzustand $\psi_{i,n}$ anzutreffen,[1])

$$W_n = |b_n|^2. \tag{66.9a}$$

Wir haben nun noch die b_n aus (66.6) zu bestimmen und tun dies für den uns allein interessierenden Grenzfall $V \to \infty$. In diesem Falle werden die b_n, ψ_n und E_n kontinuierliche Funktionen von n, so daß man b_n und ψ_n auch als stetige Funktionen von E ansehen kann. Es mögen nun dn Eigenzustände in das Intervall dE entfallen; die Niveaudichte sei also gleich $\frac{dn}{dE}$. Für (66.6) schreiben wir, die $\sum$ durch ein $\int$ ersetzend,

$$\exp\left(-i\frac{E_r}{\hbar}t - \frac{\Gamma}{2\hbar}|t|\right) = \int_0^\infty |b_n|^2 \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) dn$$

$$= \int_0^\infty |b_n(E)|^2 \frac{dn}{dE} \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) dE. \tag{66.10}$$

Beim Übergang $V \to \infty$ geht $\frac{dn}{dE} \to \infty$, und zwar proportional zu V (s. (62.14)). Ferner wird $|b_n|^2 \to 0$ wie V^{-1}, da laut (66.10) das Produkt $|b_n|^2 \frac{dn}{dE}$, welches wir im folgenden mit $|a(E)|^2$ bezeichnen, endlich bleibt. Aus (66.10) folgt nämlich

$$|b_n|^2 \frac{dn}{dE} = |a(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - E_r)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}. \tag{66.11}$$

Zum Beweis trage man (66.11) in (66.10) ein, schreibe den Nenner in der Form $[(E - E_r) + i\frac{1}{2}\Gamma]\,[(E - E_r) - i\frac{1}{2}\Gamma]$ und integriere nach dem Residuensatz um den Pol bei $E = E_r - i\frac{1}{2}\Gamma$ herum, wobei das Integrationsintervall bis $E = -\infty$ erstreckt werden kann, wenn wir $E_r \gg \Gamma$ voraussetzen und somit der Beitrag von den Gebieten $|E - E_r| \gg \Gamma$ zu vernachlässigen ist. Die Normierungsbedingung $\int |a(E)|^2\, dE = 1$ wird mit (66.11) erfüllt. Die Energieverteilung $|a(E)|^2$ stellt eine typische Resonanzkurve dar, deren Halbwertsbreite durch die Konstante Γ bestimmt wird.

Genaugenommen hängt Γ – wenn auch nur schwach – von der Energie ab. Die Verteilung (66. 11) ergibt daher nur für scharfe Resonanzniveaus eine gute Näherung, bei denen allein der Γ-Wert bei der Resonanzenergie E_r von wesentlicher Bedeutung ist und in (66.11) das Resonanzverhalten bestimmt. In diesem Falle gilt

$$\Gamma = 2\,|E_{1/2} - E_r|,$$

wo $E_{1/2}$ einen der beiden E-Werte bezeichnet, an denen die Verteilungskurve $|a(E)|^2$ das halbe Maximum erreicht.

---

[1]) Mit wachsendem V geht W_n wie $\frac{1}{V} \to 0$, wie es auch sein muß (s. weiter unten).

Der Vollständigkeit halber seien 1. eine weitere wichtige Bedeutung von $a(E)$ und 2. das Ergebnis des Grenzüberganges $V \to \infty$ bei den Eigenfunktionen $\psi_n(\mathfrak{r})$ kurz angegeben: Es ist $\psi_n \sim V^{-1/2}$ wegen der Normierung und $\frac{dn}{dE} \sim V$. Das Produkt $\left[\psi_n \left(\frac{dn}{dE}\right)^{1/2}\right]_{V\to\infty} = \psi_E(\mathfrak{r})$ konvergiert daher für $V \to \infty$ zu einer endlichen Funktion von E und $\mathfrak{r}$. Mit $a(E) = \left[b_n \left(\frac{dn}{dE}\right)^{1/2}\right]_{V\to\infty}$ geht (66.4) über in

$$\psi(\mathfrak{r},t) = \int b_n \frac{dn}{dE} \psi_n(\mathfrak{r}) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) dE = \int a(E)\, \psi_E(\mathfrak{r}) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) dE.$$

$a(E)$ bedeutet also den Entwicklungskoeffizienten in einer Entwicklung nach den sog. „Kontinuumseigenfunktionen" $\psi_E(\mathfrak{r})$.

Abschließend fügen wir noch einige Bemerkungen über die Auswahl der ψ_n bzw. deren „Unterzustände" $\psi_{n,l}$ an, welche durch die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses erzwungen wird. (Diese Anteile $\psi_{n,l}$ sind durch Entwicklung der ψ_n nach Drehimpulseigenfunktionen zu erhalten. Ist z. B. V ein Kubus, so sind die ψ_n fast reine, stehende ebene Wellen und die $\psi_{n,l}$ ergeben sich aus der Entwicklung der ψ_n nach Kugelwellen. Daß ψ_n selber eine reine Eigenfunktion zu einem bestimmten Drehimpuls $l\hbar$ darstellt, kann nur unter ganz speziellen Bedingungen eintreten.) Weitere Erhaltungssätze können zusätzliche Einschränkungen bewirken. Hat das Compoundniveau den scharf definierten Kernspin I_C, dann können nur solche ψ_n bzw. $\psi_{n,l}$ zum Compoundzustand beitragen, denen ein Gesamtdrehimpuls (= Summe aller Bahndrehimpulse und Spins =) I_C zukommt. Für $I_C > 0$ gehören zum gleichen Eigenwert E_n stets $g_C (= 2I_C+1)$ verschiedene „Unterzustände" $\psi_{n,l}$, die den g_C verschiedenen Spinzuständen des Compoundkerns mit den Spinkomponenten $m = I_C; I_C - 1; \ldots; -I_C$ entsprechen. Diese g_C „entarteten" Zustände sind unter sich gleichwahrscheinlich und für jeden von ihnen lassen sich die oben gemachten Überlegungen gesondert durchführen, so als ob g_C verschiedene, voneinander unabhängige Niveaus vorlägen. Bei statistischen Gleichgewichtsbetrachtungen erhält daher ein solches Niveau das g_C-fache statistische Gewicht wie ein Niveau mit $I_C = 0$, wo zu jedem E_n nur ein ψ_n bzw. $\psi_{n,l}(\mathfrak{r})$ gehört.

§ 67. Der Wirkungsquerschnitt für Compoundbildung in der Nähe einer Resonanzstelle Breit-Wigner-Formel (Resonanztheorie)

Aus den Ergebnissen der beiden letzten Paragraphen läßt sich eine Aussage über den Verlauf des Wirkungsquerschnitts in der Nähe einer Resonanzstelle gewinnen. Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall der Existenz einer einzigen Resonanzenergie. Das Ergebnis, die sog. *Breit-Wigner-Formel* für eine einzelne Resonanz, zeigt, daß in einem bestimmten Energiebereich der Wirkungsquerschnitt einen resonanzartigen Verlauf mit einem scharfen Maximum annehmen kann. Der Gegenstand dieses Paragraphen wird daher als *Resonanztheorie* bezeichnet.

Im Gegensatz zu den Betrachtungen zur Kontinuumstheorie des § 64 richten wir unser Augenmerk jetzt auf die compoundelastische Streuung, die dort gänzlich vernachlässigt worden war. Die nachfolgenden Entwicklungen beziehen sich daher auf Reaktionen, die einen merklichen Anteil an compoundelastischer Streuung aufweisen, also auf Reaktionen mit geringer Anregung des Compoundkernes, bei denen nur wenige – etwa zwei – verschiedene Zerfallsmöglichkeiten offenstehen.
Wir betrachten wie in § 65 das System der (in einem großen Volumen V eingeschlossenen) Teilchen A und a, und richten speziell unsere Aufmerksamkeit auf den Vorgang der Bildung des Compoundkerns und seines Zerfalls in die ursprünglichen Bestandteile, d. h. auf die einander inversen Reaktionen im Sinne des *detaillierten Gleichgewichts*

$$\mathrm{A} + a \rightleftarrows \mathrm{C}.$$

Dabei betrachten wir die Übergänge, welche sich in einem schmalen Energieintervall E bis $E + dE$ abspielen, wo dE sehr klein gegenüber der Halbwertsbreite des Resonanzniveaus gewählt sei: $dE \ll \Gamma$.
Für die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den „dissoziierten" Zuständen (A) und dem Compoundzustand (C) lassen sich dieselben Überlegungen wie in § 65 anstellen, und es gilt wieder Gl. (65.2), worin wir lediglich B durch C zu ersetzen haben:

$$\frac{W_{\mathrm{A}\to\mathrm{C}}}{\varrho_{\mathrm{C}}} = \frac{W_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}}}{\varrho_{\mathrm{A}}}. \tag{67.1}$$

Zur besseren Interpretation multiplizieren wir mit dE mal der Besetzungswahrscheinlichkeit $|b_n|^2$ der Zustände zur Energie E, wie sie in § 66 eingeführt wurde, und schreiben, um auf die ursprüngliche, unmittelbar einleuchtende Gleichgewichtsbedingung zurückzukommen,

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{C}}\, |b_n|^2\, \varrho_{\mathrm{A}}\, dE = W_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}}\, |b_n|^2\, \varrho_{\mathrm{C}}\, dE\,. \tag{67.2}$$

Wir betrachten nun im einzelnen die beiden Seiten von (67.2).
$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{C}}$ ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, daß ein im Volumen V mit der Relativgeschwindigkeit v_a umherfliegendes Teilchenpaar (A, a) zur Compoundbildung führt. Laut Definition von σ ist

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{C}} = \frac{1}{V}\, v_a\, \sigma_{\mathrm{C}}\,. \tag{67.3}$$

Der üblichen experimentellen Situation bei der Bestimmung von σ entsprechend ist hierbei vorauszusetzen, daß die Teilchen A und a eine völlig statistisch zufällige Verteilung ihrer relativen Bahndrehimpulse und Spins aufweisen und alle Bewegungszustände gleichwahrscheinlich besetzt sind. Zur Compoundbildung führen natürlich nur die Zustände bzw. deren Anteile mit einem Gesamtdrehimpuls I_{C} gleich dem des Compoundkerns (s. § 66).
$\varrho_{\mathrm{A}}\, dE$, die Anzahl der überhaupt möglichen Zustände (A) der freien Teilchen im Intervall dE, beträgt analog zu (65.3)

$$\varrho_{\mathrm{A}}\, dE = \frac{g_a}{2\pi^2\hbar^3}\, \frac{p_a^2}{v_a}\, V\, dE\,. \tag{67.4}$$

Die Zahl der besetzten Zustände der freien Teilchen ist $Z_A\,dE = |b_n|^2\,\varrho_A\,dE$. Die Gesamtzahl der pro Zeiteinheit wirklich stattfindenden Übergänge von den freien Zuständen (A) in den Compoundzustand wird daher $= W_{A\to C}\,|b_n|^2\,\varrho_A\,dE$, was die linke Seite der Gl. (67.2) darstellt.
Die rechte Seite von (67.2) gibt – im Sinne der Gleichgewichtsbedingung – die Gesamtzahl der pro Zeiteinheit eintretenden Zerfälle des Compoundkerns in die freien Zustände (A) an.
$W_{C\to A}$ ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, daß ein *vorliegender* Compoundkern unter Emission eines Teilchens der Art a zerfällt. Laut Definition von Γ_a ist

$$W_{C\to A} = \frac{\Gamma_a}{\hbar}. \tag{67.5}$$

Die Größe Γ_a ist erfahrungsgemäß nur schwach energieabhängig, so daß sie bei scharfen Resonanzen innerhalb des Resonanzgebietes als Konstante angesehen werden kann.
Um die Zahl der besetzten Zustände des Systems in der Konfiguration als Compoundkern im Intervall dE zu bestimmen, bedenken wir, daß nach § 66 der Compoundzustand aus einer Superposition von vielen Zuständen $\psi_n(\mathfrak{r})$ des Gesamtsystems mit den Häufigkeiten $|b_n|^2$ besteht. Die Wahrscheinlichkeit, das System im Compoundzustand $\psi_{i,n}$ anzutreffen, ist nach (66.9) gleich $|b_n|^4$. Die Anzahl der Zustände ψ_n im Energieintervall E bis $E + dE$ beträgt $\left(\frac{dn}{dE}\right) dE$. Die Zahl der *besetzten* Compoundzustände wird daher $Z_C\,dE = |b_n|^4 \left(\frac{dn}{dE}\right) dE$. Da andererseits $Z_C\,dE = |b_n|^2 \varrho_c\,dE$, folgt daraus $\varrho_C\,dE = |b_n|^2 \left(\frac{dn}{dE}\right) dE$, also mit (66.11) $\varrho_C\,dE = |a(E)|^2\,dE$, wenn wir den Compoundspin (wie in (66.11)) zu $I_C = 0$ annehmen. Entsprechend ergibt sich dann das statistische Gesamtgewicht des Compoundniveaus zu $\int \varrho_C\,dE = 1$. Ist jedoch $I_C > 0$, dann hat man, gemäß der Schlußbemerkung von § 66, ϱ_C mit $g_C\ (= 2\,I_C + 1)$ zu multiplizieren, und man erhält schließlich

$$\varrho_C\,dE = g_C\,|a(E)|^2\,dE. \tag{67.6}$$

Das statistische Gesamtgewicht des Compoundniveaus wird jetzt $\int \varrho_C\,dE = g_C$.
Das Einsetzen aller erhaltenen Ausdrücke (67.3) bis (67.6) in (67.2) liefert nun – bei Ersatz des Resonanzfaktors $|a(E)|^2$ durch (66.11) und $\frac{\hbar}{p_a}$ durch $\lambda\!\!\!^{-}$ – als *Wirkungsquerschnitt für die Compoundbildung*

$$\sigma_C(E) = \pi \lambda\!\!\!^{-2}\, \frac{g_C}{g_a}\, \frac{\Gamma\Gamma_a}{(E - E_r)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}. \tag{67.7}$$

Das Verhältnis der Spinfaktoren $\left(\frac{g_C}{g_a}\right) = g$ hat den Wert

$$g = \frac{2I_C + 1}{(2I_A + 1)(2I_a + 1)}. \tag{67.8}$$

I_A, I_a und I_C sind die Spins der Teilchen A, a und des Compoundkerns C. Die Spins I_A und I_a setzen sich mit dem Bahndrehimpuls l der Relativbewegung von a gegen A vor dem Stoß zum Compoundspin I_C zusammen.
Es ist stets $I_C \leqq |I_A + I_a + l|$. In (67.8) ist angenommen, daß alle Reaktionen, bei denen der Drehimpulssatz für Spin und Bahndrehmomente nicht verletzt wird, mit gleicher Häufigkeit auftreten. Prozesse, welche dem Drehimpulssatz widersprechen würden, sind „verboten" und kommen nicht vor (s. § 44).
Bei Reaktionen mit spinlosen Teilchen, $I_A = I_a = 0$, ist nur $I_C = l$ möglich. Daher wird in diesem Falle $g = 2l + 1$. Man erhält auf diese Weise auf neuem Wege den aus § 63 bekannten Faktor $(2l + 1)$ bei den Reaktionen mit l-Wellen.
Die als „Breit-Wigner-Formel für eine einzelne Resonanz" bekannte Gl. (67.7) hat sich an einem sehr vielfältigen Erfahrungsmaterial bewährt. Sie gilt — wie in § 71 gezeigt wird — auch für (n,γ)-Reaktionen. In obiger Herleitung erscheint ihr „Resonanznenner" letztlich als eine Folge der Annahme aus § 66, daß der spontane Zerfall des Compoundkerns nach einem Exponentialgesetz erfolgt. Ihre hervorstechendste Aussage ist die Möglichkeit eines Wirkungsquerschnittes, der den geometrischen Querschnitt um das Millionenfache übertreffen kann. Daß solche Fälle in der Natur auch wirklich vorkommen, lehrt uns das Beispiel des Xe^{135}, das im Resonanzmaximum bei thermischen Neutronen einen totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot} = 3{,}4 \cdot 10^6$ barn aufweist, während sein geometrischer Querschnitt nur 1,7 barn beträgt.

§ 68. Der Wirkungsquerschnitt bei Absorption und Streuung elektromagnetischer Wellen an Antennen

Das in § 67 betrachtete *Resonanzverhalten* ist nur durch die Welleneigenschaft der Teilchen erklärbar und kehrt in ähnlicher Weise überall dort wieder, wo Wellen durch schwingungsfähige Gebilde absorbiert und gestreut werden. Zur Erhärtung dieser Tatsache betrachten wir als makroskopisches Modell eines γ-Prozesses die Streuung und Absorption elektromagnetischer Wellen durch eine idealisierte *Dipol-Antenne*. Diese möge als „offener Schwingungskreis" die Induktivität L, die Antennenkapazität C, einen Ohmschen Widerstand R_i und als Repräsentant der Strahlungsdämpfung den dieser äquivalenten Strahlungswiderstand R_s enthalten (s. Abb. 113). Wir schreiben für den Gesamtwiderstand $R = R_s + R_i$. Der Abstand l der „Kondensatorplatten" (= effektive Antennenlänge) sei klein gegenüber der Länge λ der einfallenden Wellen, und C sei an den Enden der Antenne konzentriert.
Eine in Richtung der Empfangsantenne polarisierte elektromagnetische Welle $E = E_0 e^{i\omega t}$ wirke als treibende elektromotorische Kraft El auf den Strom J im Antennenkreis. Für J gilt

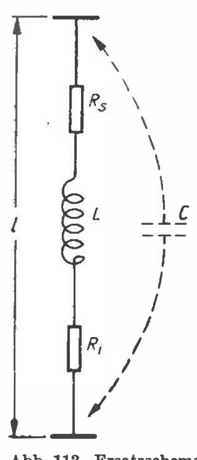


Abb. 113. Ersatzschema einer Dipolantenne

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ = l E_0 e^{i\omega t} + \frac{Q}{C}. \qquad (68.1)$$

$\frac{Q}{C}$ ist die Spannung des „Kondensators“ C auf Grund seiner Ladung Q. Wegen $J = -\frac{dQ}{dt}$ folgt durch Differentiation von (68.1)

$$L\frac{d^2J}{dt^2} + R\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C} = i\,\omega\, l\, E_0\, e^{i\omega t}. \tag{68.2}$$

Hieraus liefert der Ansatz $J = J_0 e^{i\omega t}$ für die Stromamplitude J_0

$$|J_0|^2 = \frac{\left(\frac{l E_0}{L}\right)^2}{\left(\frac{1}{\omega LC} - \omega\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}.$$

Nennen wir die *Resonanzfrequenz* $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, so wird in der Nähe der Resonanzstelle $\frac{\omega_r^2}{\omega} - \omega \approx 2(\omega_r - \omega)$, also

$$|J_0|^2 = \frac{\left(\frac{E_0 l}{2L}\right)^2}{(\omega - \omega_r)^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \tag{68.3}$$

Die aus der Welle aufgenommene Gesamtleistung ist $S_{\text{tot}} = \frac{1}{2} R |J_0|^2$; davon wird im Ohmschen Widerstand in Wärme umgewandelt: $S_{\text{abs}} = \frac{1}{2} R_i |J_0|^2$ $\left(\frac{|J_0|}{\sqrt{2}}\right.$ ist die effektive Stromstärke!$\left.\right)$, und als Streutsrahlung wieder ausgestrahlt: $S_{\text{str}} = \frac{1}{2} R_s |J_0|^2$. Der Strahlungswiderstand folgt aus der Hertzschen Formel für die Strahlungsleistung eines oszillierenden Dipols[1]), $S_{\text{str}} = \frac{2\,\omega^2 l^2}{3c^3}\,\frac{1}{2}\,|J_0|^2$, zu: $R_s = \frac{2\,\omega^2 l^2}{3\,c^3}$ (c = Lichtgeschwindigkeit).

Die einfallende elektromagnetische Welle besitzt als Zeitmittelwert des *Poyntingschen Vektors* einen Energiestrom von $\frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{2} E_0^2$ pro cm² sec. Wir definieren daher die „Wirkungsquerschnitte“ der Antenne folgendermaßen:

$$S_{\text{tot}} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \sigma_{\text{tot}}; \quad S_{\text{str}} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \sigma_{\text{str}}; \quad S_{\text{abs}} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \sigma_{\text{abs}}. \tag{68.4}$$

Eine einfache Rechnung liefert dann mit den Abkürzungen

$$\gamma_s = \frac{R_s}{L}, \quad \gamma_i = \frac{R_i}{L}, \quad \gamma = \frac{R}{L}, \quad \lambda = \frac{c}{\omega}$$

und einem Zahlenfaktor $g \approx 1$ für die Wirkungsquerschnitte in der Nähe der Resonanzstelle

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi \lambda^2 g \frac{\gamma \gamma_s}{(\omega - \omega_r)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{68.5}$$

und

$$\sigma_{\text{str}} = \sigma_{\text{tot}} \frac{\gamma_s}{\gamma}; \quad \sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{tot}} \frac{\gamma_i}{\gamma}. \tag{68.6}$$

---

[1]) $S_{\text{str}} = \frac{2}{3c^3} \overline{|\ddot{p}|^2}$, wo p = Dipolmoment, $\ddot{p} = \frac{d^2p}{dt^2}$, und „—“ bedeutet Zeitmittel.

Wenn, wie bisher angenommen, die Antenne parallel zum elektrischen Felde steht, wird $g = \frac{3}{2}$. Bilden beide einen Winkel ϑ miteinander so wird, da $|J_0| \sim \cos\vartheta$ ist, $g = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta$.

Im Mittel über alle möglichen Lagen der Antenne zum Wellenfeld ist

$$\cos^2\vartheta \text{ (im Raummittel)} = \tfrac{1}{3},$$

also $g = \frac{1}{2}$. Wenn wir zwei um 90° „gekreuzte" Antennen nehmen, so beeinflussen sie sich nicht gegenseitig, und für diese Anordnung wäre dann (68.5) im Mittel über alle Richtungen gültig mit $g = 1$.

Die Gl. (68.5) hat genau die Gestalt der Breit-Wigner-Formel (67.4).

Im Resonanzfall $\omega = \omega_r$ erreichen alle σ maximale Werte:

$$\sigma_{\text{tot, res}} = 4\pi\lambda^2 g\,\frac{\gamma_s}{\gamma_s + \gamma_i}\,; \quad \sigma_{\text{str, res}} = 4\pi\lambda^2 g\,\frac{\gamma_s^2}{(\gamma_s + \gamma_i)^2}\,; \quad \sigma_{\text{abs, res}} = 4\pi\lambda^2 g\,\frac{\gamma_s\gamma_i}{(\gamma_s + \gamma_i)^2}\,.$$

Man findet alle früheren Aussagen aus § 63 über die Wirkungsquerschnitte bestätigt, wenn man sich γ_i von 0 nach ∞ variiert denkt:

Im Fall $\gamma_i = 0$ wird $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{str}} = 4\pi\lambda^2 g$.

Für $\gamma_i = \gamma_s$ hat σ_{abs} ein absolutes Maximum von $(\sigma_{\text{abs}})_{\max} = \pi\lambda^2 g$; in diesem Falle wird $\sigma_{\text{str}} = (\sigma_{\text{abs}})_{\max}$ und $\sigma_{\text{tot}} = 2\pi\lambda^2 g$. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß das absolute Maximum der Absorption (bzw. das der Streuung) — *unabhängig von der Antennenlänge* – stets gleich $\pi\lambda^2 g$ (bzw. $4\pi\lambda^2 g$) ist. Wenn man also die „Anpassung" $\gamma_i = \gamma_s$, d.h. $R_i = R_s$, verwirklichen könnte, würde eine jede, noch so kurze Antenne die auf die „wirksame Antennenfläche" $\pi\lambda^2 g$ auftreffende Wellenenergie absorbieren und ferner einen gleichen Betrag als Streustrahlung emittieren. In praxi gelingt es allerdings nicht, in dem uns interessierenden Fall $l \ll \lambda$, wo R_s sehr klein wird, den Verlustwiderstand R_i entsprechend niedrig zu halten.

Die im Resonanzfall bei passender innerer Dämpfung, $\gamma_i \approx \gamma_s$, auftretende sehr starke Absorption der Energie aus dem Wellenfeld wird dadurch ermöglicht, daß durch das Streufeld der Antenne schon in Entfernungen der Größenordnung λ, die groß gegen l sein können, der Poynting-Vektor der Energieströmung in Richtung auf die Antenne zu gelenkt wird.

Statt dieses technischen Beispiels hätten wir auch die Absorption und Streuung an einem elastisch gebundenen Elektron betrachten können (Thomsonsches Atommodell). Man hätte dann anstelle von L die Masse, anstelle von $\frac{1}{C}$ die rücktreibende Kraft auf das Elektron stehen usw. Nur für R_i hätte man ad hoc eine Art innerer Reibung anzunehmen, welche keine Strahlungsdämpfung darstellt (s. z.B. DÄNZER, FRENKEL). Es ergibt sich wieder Gl. (68.5). Die drastische Unabhängigkeit des absoluten Maximums des Streu- und Absorptionsquerschnitts von der Antennendimension wird aber so nicht erkennbar.

Die *Resonanzabsorption* oder *Resonanzstreuung von Licht* durch Atome zeigt ebenfalls genau das durch (68.5) beschriebene Verhalten, und auch die quantenmechanische Berechnung führt zu einer Formel derselben Gestalt. Die außerordentlichen Streuquerschnitte, welche Atome gegenüber Licht zeigen können, sind aus den Versuchen über die Resonanzfluoreszenz von J-, Na-, Hg- und anderen Dämpfen bekannt. Die *Kernresonanzfluoreszenz* mit γ- Quanten wurde in § 35 besprochen.

C) Kernreaktionen und Einteilchenmodell

In den folgenden fünf Paragraphen befassen wir uns mit der Berechnung des Verhaltens ungeladener und geladener Teilchen in dem vorgegebenen Potential des sog. *Einteilchenmodells.* In der Hauptsache soll die Breit-Wigner-Formel nochmals unter anderen Gesichtspunkten und der für Kernreaktionen mit geladenen Teilchen wichtige *Tunneleffekt* abgeleitet werden.

§ 69. Streuung im Einteilchenmodell; vorbereitende Betrachtungen

Wir betrachten die Wechselwirkung einer Partikel mit einem fest vorgegebenen *kugelsymmetrischen Potential,* welches den Zielkern für das stoßende Teilchen repräsentiert. Da der Rechnungsgang für geladene und ungeladene Teilchen anfangs derselbe ist, behandeln wir zunächst beide gemeinsam. Im Kerninnern nehmen wir ein „Kastenpotential" an. Außerhalb des Kerns setzen wir für Neutronen das Potential = 0 und für geladene Teilchen das (abgeschirmte) elektrostatische Coulomb-Potential. Wir beschränken uns auf den zentralen Stoß und geben die exakte Lösung im Falle der Neutronen; für geladene Teilchen begnügen wir uns mit der *W.K.B.-Näherung,* weil eine genaue Berechnung allzu weitläufig wäre, ohne physikalisch Neues zu liefern.
Die einfallende Welle sei, wie in § 63, gegeben durch $\psi = e^{ikz}$. Wegen der Kugelsymmetrie des Potentials entwickeln wir die ψ-Funktion nach Kugelwellen, deren asymptotische Form durch (63.4) gegeben ist. Für die asymptotische Gesamtwellenfunktion, einschließlich der Streuwelle, gilt (63.5). Setzen wir dort $\eta_l = e^{i2\delta_l}$, wo δ_l den halben Phasenwinkel der l-ten Partialwelle bedeutet, so kann man (63.5) auch schreiben

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l e^{i\delta_l} \frac{1}{kr} \sin\left(kr + \delta_l - \frac{\pi}{2} l\right) P_l(\cos\vartheta)\,. \tag{69.1}$$

Die δ_l hängen von dem speziellen Verlauf des Potentials $V(r)$ ab: Wenn $V(r)$, wie wir im folgenden annehmen wollen, in großen Entfernungen stärker als mit $\frac{1}{r}$ abfällt, wird δ_l für $kr \to \infty$ asymptotisch konstant. (Im Fall des Coulomb-Potentials $V \sim \frac{1}{r}$ ist δ_l auch für $kr \to \infty$ veränderlich, und zwar erscheint in δ_l ein Glied mit $\ln r$, wie man aus § 77, Gln. (77.4a) u. (77.4b), leicht errechnet.)
Wir haben nun eine solche Lösung der Schrödinger-Gleichung unseres Problems,

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r))\,\psi = 0 \tag{69.2}$$

(μ = reduzierte Masse), zu suchen, die für $r \to \infty$ asymptotisch in die Form (69.1) übergeht.

Wegen der Rotationssymmetrie um die z-Achse denken wir uns ψ nach den $P_l(\cos\vartheta)$ entwickelt:

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r} u_l(r)\, P_l(\cos\vartheta) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{69.3}$$

Von den Radialfunktionen (= Koeffizienten der P_l) ist aus Bequemlichkeitsgründen $\frac{1}{r}$ abgespalten. Der Rest $u_l(r)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_l = 0\,. \tag{69.4}$$

Man erhält (69.4) durch Einsetzen von (69.3) in (69.2) und Beachtung der Orthogonalität der P_l. Das Glied mit $l(l+1)$ stammt von der Anwendung des im Δ-Operator enthaltenen wellenmechanischen Operators des Quadrates des Drehimpulses, L^2, auf die P_l. Da $\mathsf{L}^2 P_l = \hbar^2 l(l+1) P_l$ ist, bedeutet l die Drehimpulsquantenzahl der Partialwelle l.

Das $l(l+1)$-Glied stellt physikalisch die Wirkung der Zentrifugalkraft dar, welche die Teilchen mit Drehimpulsen $l\hbar > 0$ behindert, in einer – korrespondenzmäßig gesehen – gekrümmten Bahn in den Kern zu fliegen. Es wirkt in (69.4) wie ein Abstoßungspotential $\sim \frac{1}{r^2}$ $\left(\text{entsprechend einer Abstoßungskraft} \sim \frac{1}{r^3}\right)$ und wird auch als *Zentrifugal-Potential* bezeichnet. Aus dieser Bedeutung des l-Gliedes folgt – wie auch direkt an (69.4) zu erkennen ist –, daß die Teilchen um so weniger in das Gebiet um $r = 0$ eindringen, je größer l und je kleiner E sind. Daher liefert bei hinreichend langsamen Teilchen nur das u_l mit $l = 0$ einen merklichen Beitrag zu ψ. Das Zentrifugal-Potential hat für Protonen und Neutronen am Kernrand $R = r_0 \sqrt[3]{A}$ $\left(\text{mit } r_0 = \frac{e^2}{2\, m_e c^2} = 1{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}\right)$ den Wert

$$V_{\text{Zentri,Rand}} = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\, l(l+1) = \frac{2 m_e c^2}{\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2} \frac{m_e}{\mu} \frac{l(l+1)}{A^{2/3}} \tag{69.5}$$

oder, numerisch,

$$V_{\text{Zentri,Rand}} = \frac{10{,}3}{A^{2/3}}\, l(l+1)\ [\text{MeV}]\,. \tag{69.6}$$

Dabei ist m_e = Elektronenmasse, μ = reduzierte Masse, A = Massenzahl des Zielkerns, und es wurde zuletzt $\mu = m_p$ = Protonenmasse gesetzt, d.h. $A \gg 1$ angenommen. Das Zentrifugalpotential ist besonders bei leichten Kernen wirksam; und bei steigendem Atomgewicht *fällt* es wie $A^{-2/3}$ ab. Für langsame und mittelschnelle Neutronen genügt es oft, nur den Anteil $l = 0$, die s-Welle, zu betrachten, für die das Zentrifugalpotential verschwindet.

Das Coulomb-Potential am Kernrand,

$$V_{\text{Coulomb, Rand}} = \frac{ezZ}{R} = 1{,}0 \cdot \frac{zZ}{A^{1/3}}\ [\text{MeV}], \tag{69.7}$$

zeigt das entgegengesetzte Verhalten: Wegen $A \approx 2Z$ *steigt* es mit $\approx A^{2/3}$ an. Wir stellen für Reaktionen mit Protonen beide Potentiale bei extremen A-Werten gegenüber:

Bei $A = 7$ (Li) ist V_{Zentri} (für $l = 1$) = 5,6 MeV und V_{Coul} = 1,5 MeV.
Bei $A = 238$ (U) ist V_{Zentri} (für $l = 1$) = 0,53 MeV und V_{Coul} = 15 MeV.

An *leichten Kernen* sollten hiernach die Reaktionen mit geladenen Teilchen in der Regel nur mit *s-Wellen* beginnen ($l = 0$), wenn keiner der verschiedenen Erhaltungssätze dagegen spricht. Erst wenn die Energie der einfallenden Teilchen längst den Coulomb-Wall überstiegen hat, kommen p-, d- usw. -Wellen zur Wirkung. Bei den *schwersten Kernen* (wie U) ist der Coulomb-Wall so groß, daß, wenn überhaupt ein Proton den Kern mit merklicher Wahrscheinlichkeit erreicht ($E > 14$ MeV), bereits Wellen mit $l = 4$ bis 5 zur Reaktion kommen.
Diese orientierenden Bemerkungen sind für die Beurteilung des Gültigkeitsbereichs der Beziehungen nützlich, die wir anschließend für s-Wellen genauer ableiten werden. Die Fälle $l > 0$ können mit Rücksicht auf den Umfang der Rechnungen nur kurz erwähnt werden. Für genauere Diskussionen verweisen wir z.B. auf Blatt und Weisskopf [B. u. W.].

§ 70. Neutronenstreuung am Topfpotential

Wir betrachten *zentrale Stöße* (*s-Wellen*) mit langsamen bis mäßig schnellen Neutronen und sehen zunächst von Spinwirkungen ab.
Laut (69.4) und (69.1) bzw. (63.5) haben wir die Lösung von

$$\frac{d^2u}{dr^2} + k^2 u = 0, \quad k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r)), \tag{70.1}$$

zu suchen, welche für $\frac{u}{r}$ die asymptotische Gestalt liefert:

$$\left(\frac{u}{r}\right)_{r\to\infty} = \frac{1}{2}\frac{i}{kr}(e^{-ikr} - \eta e^{ikr}) \tag{70.2}$$

(wir schreiben hier u statt $u_{l=0}$ und ebenso η statt $\eta_{l=0}$). Für $V(r)$ nehmen wir ein *Topfpotential* an. Wir bezeichnen die Wellenzahl außerhalb des Kerns vom Radius R mit

$$k = k(r > R) = \frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar} \tag{70.3}$$

und im Kerninnern (wo $V = -V_0$) mit

$$K = k(r < R) = \frac{[2\mu(E + V_0)]^{1/2}}{\hbar}. \tag{70.4}$$

Es gilt

$$K^2 = K_0^2 + k^2 \quad \text{mit} \quad K_0^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}. \tag{70.5}$$

Die Wellenfunktion u_i im Kerninnern lautet

$$u_i = A\sin(Kr), \qquad (r < R). \tag{70.6}$$

(Die Lösung mit $\cos(Kr)$ ist auszuschließen, weil $\frac{1}{r}\cos(Kr)$ bei $r = 0$ divergiert

Im Außenraum lautet u

$$u_a = \frac{i}{2k}(e^{-ikr} - \eta e^{ikr}), \tag{70.7}$$

worin η und $\frac{i}{2k}$ als Integrationskonstanten aufzufassen sind, von denen $\frac{i}{2k}$ bereits so gewählt wurde, daß die asymptotische Grenzbedingung (70.2) erfüllt wird, während η noch zu bestimmen ist.

Die *Anschlußbedingung* für $\psi_r = \frac{u}{r}$, d.i. die Stetigkeit von ψ_r und $\psi_r' = \frac{d\psi_r}{dr}$ bei R, ergibt für u dieselbe Forderung: $u_i = u_a$ und $u_i' = u_a'$ bei $r = R$, d.h. also

$$u_i(R) = A \sin(KR) = \frac{i}{2k}(e^{-ikR} - \eta e^{ikR}), \tag{70.8}$$

$$u_i'(R) = KA \cos(KR) = \frac{1}{2}(e^{-ikR} + \eta e^{ikR}). \tag{70.9}$$

Daraus erhalten wir für η

$$\eta = \frac{1 + i\frac{k}{K}\operatorname{tg}(KR)}{1 - i\frac{k}{K}\operatorname{tg}(KR)} e^{-i2kR}. \tag{70.10}$$

Wir leiten hieraus ein Nebenergebnis ab: Für einen *unendlich hohen* „Topf", d.h. $V(r < R) = +\infty$ bzw. $V_0 = -\infty$ („*harte*" *Kugel*) wird $K = i\infty$, also $(\eta)_{\text{hart}} = e^{-i2kR}$ und natürlich $A = 0$. Der *Streuquerschnitt einer* für Neutronenwellen *undurchdringlichen Kugel* ergibt sich somit nach (63.9) zu

$$\sigma_{\text{str}} \text{ („harte" Kugel)} = \pi \lambda^2 |1 - e^{-i2kR}|^2 = 4\pi\lambda^2 \sin^2(kR). \tag{70.11}$$

Bei langsamen und mittelschnellen Neutronen ($<0{,}1$ MeV) ist $kR \lll 1$, und wegen $k\lambda = 1$ wird

$$\sigma_{\text{str}} \text{ („harte" Kugel)} = 4\pi R^2. \tag{70.12}$$

Im Normalfall des *endlich tiefen Topfes* läßt sich durch Einsetzen von (70.10) in (63.9) und einfache Umformungen folgender Ausdruck für den *Streuquerschnitt* herleiten:

$$\sigma_{\text{str}} = \pi\lambda^2 |1 - \eta|^2 = \pi\lambda^2 \left| \frac{2i}{i - \frac{K}{k}\operatorname{ctg}(KR)} + (e^{i2kR} - 1) \right|^2. \tag{70.13}$$

Der zweite Teil in $|\cdot + \cdot|$, $e^{i2kR} - 1 = i\,2e^{ikR}\sin(kR)$, entspricht der Streuung durch die harte Kugel (*Potential-Streuung*); der erste Teil ist daher offenbar die „Korrektion" auf endliche Tiefe des Potentialtopfes. Beide Teile *interferieren* miteinander, und es ist bemerkenswert, daß bei wachsendem KR an je einem Punkte dicht vor den Nullstellen des ctg (KR) – d.i. *vor den Resonanzstellen* (s.w.u.) – die Streuung vollständig verschwindet: Der Kern wird völlig „durchsichtig".

(In der Elektronenhülle ist etwas Ähnliches als *Ramsauer-Effekt* bekannt.)

Diese Nullstellen des Streuquerschnitts ergeben sich am einfachsten aus (70.8) und (70.9) für $\eta = 1$. Man findet die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\operatorname{tg}(KR)}{KR} = \frac{\operatorname{tg}(kR)}{kR} \quad \text{für} \quad \sigma_{\text{str}} = 0\,. \tag{70.14}$$

Solange $kR \ll 1$ ist, läßt sich (70.14) ersetzen durch $\operatorname{tg}(KR) = KR$, deren graphische Lösung Abb. 114 zeigt. Die Nullstellen liegen bei

$$(KR)_n^{(0)} \approx \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi}\,, \quad n = 2, 3, 4 \ldots.$$

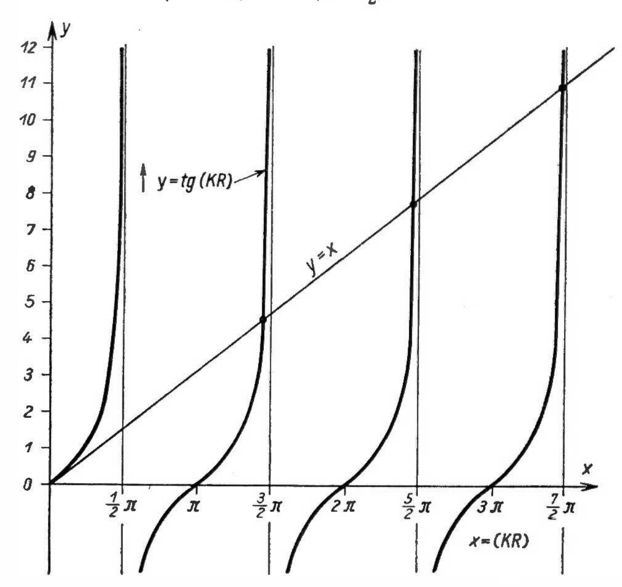


Abb. 114. Zur graphischen Lösung der Gleichung $\operatorname{tg}(KR) = KR$

Erste Näherung $(KR)_n^{(0)} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}$; $n \geqq 2$

Man sieht, daß die *Streuminima* bei langsamen und mittelschnellen Neutronen (d. h. $kR \ll 1$) kurz vor den Unendlichkeitsstellen des $\operatorname{tg}(KR)$ bzw. den Nullstellen des $\operatorname{ctg}(KR)$ liegen.

Auf der anderen Seite, aber noch näher den Nullstellen des $\operatorname{ctg}(KR)$, hat σ_{str} ein *Resonanz-Maximum* der Größe $(\sigma_{\text{str}})_{\max} = 4\pi\lambda^2$. Die Orte k_r bzw. K_r dieser Maxima liegen nicht genau bei $\operatorname{ctg}(KR) = 0$, d. h. bei $(KR)_n = (n - \frac{1}{2})\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sondern nach etwas größeren Werten (KR) verschoben, wie aus (70.8) und (70.9) für $\eta = -1$ hervorgeht. Hier gilt nämlich

$$\frac{\operatorname{tg}(KR)}{KR} = -\frac{\operatorname{ctg}(kR)}{kR}\,; \tag{70.15}$$

für $kR \ll 1$ heißt dies $(KR)\operatorname{ctg}(KR) = -(kR)^2$. Wegen $(kR)^2 \lll 1$ liegen die Wurzeln so nahe den Nullstellen des $\operatorname{ctg}(KR)$, daß wir sie mit diesen

gleichsetzen können. Der Abstand der n-ten Wurzel $(KR)_{r,n}$ von $(n-\frac{1}{2})\pi$ wird $(KR)_{r,n} - \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{2(kR)^2}{(2n-1)\pi}$. Dem ersten Maximum ($n = 1$) läuft kein Minimum voraus. Physikalisch von Bedeutung sind natürlich nur Werte $K > K_0$ (s. (70.5).

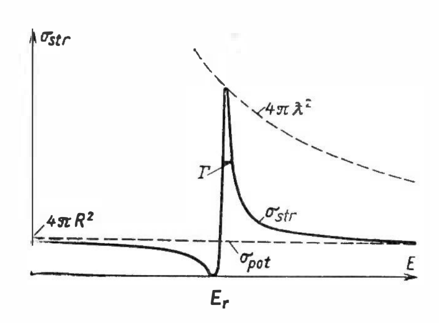


Abb. 115.
Energieabhängigkeit des Streuquerschnitts σ_{tr} beim Potentialtopfmodell. Durch Interferenz der Potentialstreuung mit der compoundelastischen Streuung entsteht vor der Resonanz ein Minimum des Streuquerschnitts, nach der Resonanz eine Anhebung der Resonanzflanke

Der Verlauf von σ_{str} mit k bzw. E gemäß (70.13) ist in Abb. 115 (für $n > 1$) schematisch dargestellt. Für $k \to 0$ ergibt sich ein endlicher Streuquerschnitt von

$$\sigma_{str}(k \to 0) = 4\pi R^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(K_0 R)}{K_0 R}\right)^2 = 4\pi a^2, \tag{70.16}$$

wo $a = R\left(1 - \frac{\operatorname{tg}(K_0 R)}{K_0 R}\right)$ die sog. *Streulänge* bedeutet (s. Kapitel VIII). Setzen wir in der Nähe der Resonanzstellen k_r (wo $\operatorname{ctg}(KR)_r \approx 0$) nach (70.5)

$$K - K_r = \frac{1}{2K_r}(k^2 - k_r^2),$$

so folgt

$$\operatorname{ctg}(KR) = -(K - K_r)R = -\frac{R}{2K_r}(k^2 - k_r^2).$$

Hiermit läßt sich (70.13) in der Nähe einer Resonanzstelle unter Benutzung von (70.3) und der Bezeichnung

$$\frac{1}{2}\Gamma_s = \frac{\hbar^2}{\mu R} k \tag{70.17}$$

auch wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_{str} = 4\pi\lambda^2 \left| \frac{\frac{1}{2}\Gamma_s}{(E - E_r) + \frac{i}{2}\Gamma_s} + e^{ikR}\sin(kR) \right|^2 \tag{70.18}$$

Bis auf den zweiten Term in $|\cdot + \cdot|$ ist dies identisch mit der schon früher angegebenen *Breit-Wigner-Formel* für elastische Streuung.

Die Energie E_{min} des oben erwähnten Streuminimums liegt nach (70.18) um

$$E_r - E_{min} \approx \frac{\Gamma_s}{2kR} = \frac{\Gamma_s \lambda}{2R} = \frac{\hbar^2}{\mu R^2}$$

unterhalb von E_r (solange $E_r - E_{min} \ll \Gamma_s$ ist).

Gl. (70.18) gilt für Targetkerne ohne Spin ($I_A = 0$). Ist $I_A \neq 0$, so tritt ein Spinfaktor g und außerdem ein nichtkohärenter Streuanteil von etwa $(1 - g)\, 4\pi R^2$ hinzu: $\sigma_{str} = g \cdot (70.18) + (1 - g)\, 4\pi R^2$. Das Minimum flacht sich dadurch etwas ab.

Das Potentialtopfmodell läßt auch die Möglichkeit des Teilcheneinfangs erkennen, denn ein im „Topf" befindliches Neutron kann durch γ-Strahlung in einen der *gebundenen Zustände negativer Energie* übergehen. (Die γ-Energie müßte allerdings durch eine Kopplung des eingefangenen Neutrons mit den übrigen Protonen des Kerns durch diese ausgestrahlt werden!) Diese Übergangswahrscheinlichkeit wird offenbar $\sim u_i^2 \sim |A|^2$ sein. Die Wellenamplitude A können wir aus (70.8) entnehmen, worin wir $e^{ikR} \approx 1$ setzen; ferner ist in Resonanznähe $(KR)_r \approx (n - \frac{1}{2}\pi$, also $|\sin(KR)| \approx 1$. Mit Rücksicht auf $\sigma_{\text{str}} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} |1 - \eta|^2$ wird daher wenigstens im Resonanzfall, wo $\eta \approx -1$ und $\lambda\!\!\!^{-2} = \frac{1}{k^2} \approx |A|^2$ ist,[1])

$$\sigma_{\text{str}} \approx 4\pi |A|^2. \tag{70.19}$$

Bei den Streuresonanzen ist die innere Welle stark angefacht. Es findet daher auch starke Absorption statt, wie in § 71 näher begründet ist.

Alle diese Erscheinungen, die das Potentialtopfmodell erwarten läßt, finden sich wenigstens qualitativ in den Wirkungsquerschnittskurven wieder. Als Beispiel sei auf Abb. 61, S. 132, verwiesen. Sie zeigt für U den Verlauf des σ_{tot} mit der Neutronenenergie E. Man sieht vor den Resonanzen ein tiefes Minimum und nach der Resonanz eine kleine Anhebung der rechten Flanke, wie es unserer Abb. 115 entspricht. Daß das Minimum hier nicht auf Null geht, liegt, abgesehen von der endlichen Auflösung der Meß-Apparatur, schon daran, daß die Kurve den *totalen* Wirkungsquerschnitt darstellt, der Absorptionsanteil aber natürlich kein Minimum aufweisen kann. Die Streuanteile betragen für die Resonanzen bei

	6,7	21,0	36,8	66,2	81,1	103 eV
resp.	6%	24%	55%	–	–	–

Mit steigendem Streuanteil werden die Minima ersichtlich schärfer; bei der niedrigsten Resonanz, bei 6,7 eV, ist vermutlich die Streuung zu gering, um den Interferenzeffekt noch erkennen zu lassen. Die Zahlen beweisen auch den konformen Verlauf von Streuung und Absorption. Nur liefert unser Modell einen um Größenordnungen zu weiten Abstand der Resonanzen. Dies ergibt sich sofort aus der oben mehrfach erwähnten Resonanzbedingung $(KR)_r = (n - \frac{1}{2})\pi$. Für einen mittleren Kern ist $R \approx 7 \cdot 10^{-13}$ cm, was Abstände der Größenordnung 10 bis 20 MeV zur Folge hat.

Setzen wir in der Streubreite Γ_s nach (70.17) $k = \frac{\mu v}{\hbar}$, so wird $\Gamma_s = \hbar \frac{2v}{R}$, wo v die Neutronengeschwindigkeit außerhalb des Kerns bezeichnet. Das Neutron verweilt also im Kern etwa so lange, wie es im *Außenraum* zum Durchlaufen einer Strecke R gebrauchen würde. Da es im *Kerninnern* wesentlich *schneller* läuft,

[1]) Genauer ist nach (70.8) und (70.9) $|A|^{-2} = K^2 \cos^2(KR) + k^2 \sin^2(KR)$. An der Resonanzstelle wird $|A|^{-2} \approx k^2$. Es ist stets $|A| > 0$ und $\sigma_{\text{abs}} > 0$ auch an der Stelle $\sigma_{\text{str}} = 0$.

oszilliert es hier offensichtlich mehrmals hin und her, ehe es den Kern wieder verläßt. Aber trotz der dadurch verlängerten Verweilzeit der Neutronen im Kerninnern sind die Γ-Werte immer noch viel zu groß im Vergleich zu den beobachteten *Mehrteilchen-Resonanzbreiten*, die z. B. bei U die Größenordnung von nur 20 bis 100 meV haben, während die obige Formel beispielsweise für die 6,7 eV-Resonanz $\Gamma_s \approx 5$ keV liefert.

Vergleicht man andererseits die Aussagen des Potentialtopfmodells mit den in §31 erwähnten *Riesenresonanzen*, so findet man eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung mit den beobachteten Resonanzabständen, während die Resonanzbreiten sich als zu klein erweisen. Durch Einführung einer *Dämpfung der Neutronenwellen* in der Kernmaterie läßt sich nun die Resonanzschärfe passend herabdrücken und darüber hinaus eine über den gesamten Bereich der Massenzahlen gültige Darstellung der Riesenresonanzen erreichen (s. Kap. IX, Optisches Modell).

§ 71. Streuung und Absorption von Neutronen an wirklichen Kernen

Das im vorigen Paragraphen betrachtete Einteilchenmodell zeigte eine qualitative Übereinstimmung mit der Erfahrung, soweit es die Form der Energieabhängigkeit des elastischen Streuquerschnitts betraf. Im Vergleich zu den wirklichen Kernen ergaben sich aber außerhalb des Phänomens der Riesenresonanzen bei weitem zu große Resonanzabstände und Resonanzbreiten. Außerdem haftet dem Modell durch die Nichtberücksichtigung der eigentlichen Kernreaktionen ein weiterer wesentlicher Mangel an.

Man kann nun – nach WEISSKOPF u. a. – den Formalismus des Einteilchenmodells derart verallgemeinern, daß er eine wenigstens phänomenologische Beschreibung und ein gewisses Maß an Verständnis für das Verhalten der wirklichen Kerne liefert. Zunächst erkennt man aus (70.13), daß sich die beobachtete starke Energieabhängigkeit von σ_{str} formal beschreiben läßt, wenn im $\operatorname{ctg}(KR)$ das Argument durch eine von der Energie E der einfallenden Neutronen wesentlich stärker abhängige Funktion $\Phi(E)$ ersetzt wird, welche sich monoton von Resonanz zu Resonanz um den Betrag π ändert — so wie früher (KR) in § 70. Zwischen den Resonanzen ist die Änderung im übrigen dem Verlauf des Wirkungsquerschnitts mit E angepaßt zu denken. Die Resonanzen treten an den Nullstellen E_r des $\operatorname{ctg} \Phi(E)$ auf, wobei die jeweilige Resonanzbreite durch die Änderungsgeschwindigkeit von $\Phi(E)$ in der Umgebung von E_r bestimmt wird.

Zur Illustration setze man etwa $\Phi(E) = \frac{\pi}{D}(E - E_r)$ mit D als Resonanzabstand bei E_r; oder man wähle $\Phi(E) = R\,K(E)$ mit einem sehr viel größeren R als dem wahren Wert.

Um diese Vorstellungen genauer zu motivieren, gehen wir zurück auf die Berechnung von η aus den Anschlußbedingungen (70.8) und (70.9), was den wesentlichsten Schritt bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte ausmachte. Wir

beschränken uns im folgenden wieder auf s-Wellen. Die rechten Seiten dieser Gleichungen beziehen sich auf die Wellenfunktion des *freien* Teilchens (mit $l = 0$) und sind daher in jedem Falle korrekt. Die auf der linken Seite stehende Wellenfunktion im Kerninnern bzw. deren Ableitung, welche beim Potentialtopf die einfache Gestalt $A \sin(Kr)$ bzw. $AK \cos(KR)$ gehabt hatte, ist uns aber bei einem wirklichen Kern unbekannt. Läßt man beim Übergang von (70.8) und (70.9) nach (70.10) die Funktionen u_i und u_i' stehen und beachtet, daß nur das Verhältnis $\frac{u_i'}{u_i}$ für die Größe η maßgebend ist, so findet man mit Einführung der dimensionslosen Zahl

$$f = R\left(\frac{\frac{d u_i}{d r}}{u_i}\right)_R = R\left(\frac{d \ln u_i}{dr}\right)_R \tag{71.1}$$

als Anschlußbedingung zwischen der inneren und der äußeren Wellenfunktion am Kernrand

$$f = -ikR\,\frac{e^{-ikR} + \eta e^{ikR}}{e^{-ikR} - \eta e^{ikR}}. \tag{71.2}$$

Daraus folgt für η analog zu (70.10)

$$\eta = \frac{f + ikR}{f - ikR}\,e^{-2ikR} = \left(1 - \frac{2ikR}{f - ikR}\right)e^{-2ikR}. \tag{71.3}$$

f ist mittelbar eine Funktion der Energie E. Beim Potentialtopfmodell hätten wir

$$f_0 = (KR)\operatorname{ctg}(KR), \tag{71.4}$$

worin, zur Unterscheidung von unserem allgemeinen Falle, f_0 statt f geschrieben ist. Den Anschluß an das eingangs über $\Phi(E)$ Gesagte können wir jetzt erreichen, indem wir Φ definieren durch

$$f = (KR)\operatorname{ctg}\Phi(E). \tag{71.5}$$

Durch (71.3) ist die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts auf die von f zurückgeführt, und zwar vermittels der Größe

$$\eta = \frac{\text{komplexe Amplitude der auslaufenden Welle}}{\text{Amplitude der einlaufenden Welle}}.$$

Wir wollen nun diese Energieabhängigkeit in der Nähe einer Resonanzstelle unter plausiblen Annahmen ermitteln und dabei nicht nur die elastische Streuung, sondern auch *wirkliche Kernreaktionen* in Betracht ziehen. Da eine Kernreaktion nach § 63 durch $|\eta| < 1$ charakterisiert ist, muß jetzt zu ihrer Darstellung laut (71.3) f komplex werden (ein reelles f würde stets $|\eta| = 1$ liefern). Ferner erfordert $|\eta| < 1$ einen negativen Imaginärteil von f:

$$\mathfrak{Im}\, f < 0. \tag{71.6}$$

Eine bestimmte Kerneigenschaft wird durch einen bestimmten f-Wert beschrieben. Z.B. bedeutet

a) $f = -ikR$ wegen $\eta = 0$ das Fehlen der auslaufenden Welle, d.h. vollständige Absorption der einlaufenden (s-)Welle durch den Zielkern;

b) $f = 0$ ergibt maximale Streuresonanz, denn in dem hier betrachteten Energiebereich langsamer bis mittelschneller Neutronen ist $2kR \ll 1$ und damit $\eta = -e^{-i2kR} \approx -1$;

c) $f = +ikR$ erfordert nach (71.2) $|\eta| = \infty$. Dies tritt ein, wenn ohne einlaufenden Teilchenstrom eine auslaufende Welle existiert. Offenbar beschreibt dieser f-Wert einen nach „Abschalten" der die Reaktion erregenden Primärteilchen *zerfallenden Compoundkern*. Der dargestellte Vorgang ist angenähert als nichtstationärer Fall zu denken (üblicher Zerfall) oder, genauer, als ein stationärer Zustand, bei dem hypothetisch im Kerninnern dauernd neue Teilchen erzeugt werden. Zur Berechnung von σ nach § 63 sind solche Fälle $|\eta| > 1$ natürlich ungeeignet. Man kann aber die Bedingung $f = ikR$, welche nur für eine diskrete Folge von Energiewerten lösbar ist, zur Definition der frei zerfallenden Zustände des Compoundkerns und ihrer Energieeigenwerte benutzen, wenn u_i bzw. $f(E)$ bekannt ist.

Die wahre Gestalt der Funktion $f(E)$ zu berechnen, ist praktisch unmöglich. Man müßte dazu die vollständige Schrödinger-Gleichung des Compoundkerns

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Psi} = E\boldsymbol{\Psi} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Psi} = i\hbar\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} \tag{71.7}$$

lösen, worin die Gesamtwellenfunktion $\boldsymbol{\Psi}$ von den Koordinaten $\mathfrak{r}_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots,(A+a)$) aller Nukleonen des Compoundkerns abhängt. Wir nehmen nun an, daß eine bestimmte Teilchensorte (etwa Neutron oder Proton) einläuft bzw. hinausfliegt, und es sei $\mathfrak{r}$ der Schwerpunktsabstand zwischen äußerem Teilchen und Zielkern (bzw. Restkern). Außerhalb der Reichweite R der Kernkräfte, d.h. für $|\mathfrak{r}| > R$, hat (71.7) eine Lösung der Form

$$\boldsymbol{\Psi}^{(a)}(\mathfrak{r}_\nu) = \varphi_A \Psi_a(\mathfrak{r}).$$

φ_A, die innere Wellenfunktion des Zielkerns (bzw. Restkerns), hängt nicht von $\mathfrak{r}$ ab. $\Psi_a(\mathfrak{r})$ entspricht der freien Relativbewegung der Partikeln und ist allein von $\mathfrak{r}$ abhängig. Unter Beschränkung auf s-Wellen läßt sich $\Psi_a(\mathfrak{r})$ in der alten Form $\frac{u_a(\mathfrak{r})}{r}$ schreiben, wo u_a z. B. durch (70.7) gegeben ist. Die rechte Seite der Anschlußbedingung (71.2) ist daher auch vom Standpunkte der Vielteilchenbeschreibung korrekt, da bei der Bildung von $\left(\frac{d\ln\boldsymbol{\Psi}^{(a)}}{dr}\right)_R$ die (von r unabhängige) Funktion φ_A herausfällt. Für f, die linke Seite von (71.2), ist im Sinne von (71.1) die logarithmische Ableitung der Gesamtwellenfunktion im Kerninnern, $\boldsymbol{\Psi}^{(i)}(\mathfrak{r}_\nu)$, nach dem Schwerpunktsabstand $\mathfrak{r}$ des betrachteten Teilchens am Kernrand zu bilden. Damit wird deutlich, daß f allein durch den inneren Zustand des Compoundkerns bestimmt ist, also nur von der Anregungsenergie (ferner von Spin, Parität und Isospin) abhängen kann.

Wir haben nun noch den Einfluß einer stattfindenden Kernreaktion auf f genauer zu berücksichtigen. Eine Kernreaktion beginnt damit, daß das in den Zielkern

eingedrungene Teilchen durch Wechselwirkung mit den anderen Nukleonen des Compoundkerns oder durch einen γ-Prozeß aus seinem ursprünglichen Energiezustand herausgeworfen wird. Wenn wir zur Beschreibung dieser Vorgänge im Kerninnern – vorbehaltlich einer genaueren Begründung – eine Wellenfunktion Ψ allein für die betrachtete Teilchensorte a mit einer *bestimmten Energie* (*Einfallsenergie*) einführen und diejenigen dieser Teilchen, die in Zustände anderer (tieferer) Energie übergehen, als „verschwunden" oder „absorbiert" betrachten, so gilt für Ψ nicht mehr der Erhaltungssatz der Teilchenzahl. Wir nehmen an, daß durch irgendwelche Prozesse auf diese Weise die betrachteten Teilchen nach einer gewissen mittleren Lebensdauer τ_a „verschwinden". $\overline{\Gamma}_a = \frac{\hbar}{\tau_a}$ gibt dann ein Maß für die „Absorptionsstärke". Der Index a soll auf die verschiedenen möglichen Ursachen der Absorption durch Kernprozesse hinweisen. An einem vorgegebenen Orte $\mathfrak{r}$ im Innern der Kernmaterie ist die zeitliche Änderung von $\Psi(\mathfrak{r}, t)$ jetzt nicht nur durch die Teilchenbewegung in der Umgebung von $\mathfrak{r}$ allein gegeben, sondern es „verschwinden" auch Teilchen durch „Absorption" in dem eben angegebenen Sinne. Ψ befolgt daher genaugenommen nicht eine Schrödinger-Gleichung (mit hermiteschem Energieoperator); nur für die Gesamtfunktion $\boldsymbol{\Psi}$ gilt eine Schrödinger-Gleichung. Wir wollen jedoch unter der Voraussetzung einer kleinen Absorptionskonstanten $\overline{\Gamma}_a$ der Kernmaterie versuchen, für Ψ wenigstens eine Wellengleichung von schrödingerähnlichem Typ anzusetzen:

$$H_\Gamma \Psi(\mathfrak{r}, t) = \frac{i\hbar\,\partial\Psi(\mathfrak{r}, t)}{\partial t}. \tag{71.8}$$

Die Erfolge des Optischen Modells (s. Kap. IX, §§ 130 bis 135), bei welchem in gleicher Weise ein „Ψ" für das einfallende Teilchen allein eingeführt wird, berechtigen bis zu einem gewissen Grade eine solche Annahme.

Ohne „Absorption" wäre H_Γ der Energieoperator unseres früheren Einteilchenmodells. Um die durch „Absorption" verursachte Modifikation des Energieoperators festzustellen, betrachten wir zunächst eine unendlich ausgedehnte, homogene Kernmaterie, um frei von Randbedingungen zu sein. Ein Zustand, der ohne Dämpfung stationär sei, wird bei „Einschalten" der Dämpfung abklingen gemäß

$$\Psi(\mathfrak{r}, t) = \psi(\mathfrak{r})\, e^{-i\left(E - i\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_a\right)\frac{t}{\hbar}}, \tag{71.9}$$

so daß die Teilchendichte mit $e^{-\frac{\overline{\Gamma}_a t}{\hbar}}$ verschwindet, wozu $\overline{\Gamma}_a > 0$ sein muß.

Ein Operator, welcher die Lösung (71.9) zuläßt, lautet

$$H_\Gamma = H_0 - i\tfrac{1}{2}\overline{\Gamma}_a, \tag{71.10}$$

und damit wird aus (71.8)

$$H_\Gamma \Psi \equiv \left(H_0 - i\frac{1}{2}\,\overline{\Gamma}_a\right)\Psi = \frac{i\hbar\,\partial\Psi}{\partial t}. \tag{71.11}$$

H_0 bezeichnet den Energieoperator im dämpfungsfreien Falle; beim Potentialtopfmodell war

$$H_0 = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\Delta + V, \quad \text{wo} \quad V = -V_0 = \text{const} < 0 \quad \text{ist.}$$

Es zeigt sich somit, daß die Beschreibung einer Absorption mittels der „Schrödinger-Gleichung" (71.8) durch Einführung eines nichthermiteschen Operators H_Γ möglich ist, dessen Imaginärteil die Absorption liefert. Das entspricht der Einführung eines komplexen Brechungsindex in der Optik absorbierender Medien (vgl. auch Kap. IX, Optisches Modell).

Gleichung (71.11) besitzt nichtstationäre Lösungen der Form $\psi(\mathfrak{r})e^{-\frac{iWt}{\hbar}}$, wo W eine komplexe Energiegröße darstellt. Für $\psi(\mathfrak{r})$ gilt dann $H_\Gamma\psi = W\psi$. Die Raumfunktion ψ ist im allg. gegenüber dem dämpfungsfreien Falle verändert. In dem speziellen Falle $W = E - i\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_a$ mit reellem E und örtlich konstantem $\overline{\Gamma}_a$ wird $H_0\psi = E\psi$, und $\psi(\mathfrak{r})$ bleibt bei „Einschalten" der Dämpfung erhalten, d.h., $\Psi(\mathfrak{r}, t)$ geht überall ohne Formänderung *gleichmäßig* nach Null.

Wir nehmen nun (71.11) als allgemeingültig, und zwar auch für die begrenzte endliche Kernmaterie, an, wobei dann $\overline{\Gamma}_a = \overline{\Gamma}_a(\mathfrak{r})$ als ortsabhängig zu betrachten ist. Für das Weitere setzen wir im Innern des Kerns $\overline{\Gamma}_a = \text{const} > 0$, außerhalb $\overline{\Gamma}_a = 0$. Bei zeitlich stationären Vorgängen gilt wie üblich die Energieabhängigkeit $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ mit reellem E. In diesem Falle lautet (71.11) für das Kerninnere $r \leqq R$:

$$(H_0 - i\tfrac{1}{2}\overline{\Gamma}_a)\psi = E\psi \quad \text{oder} \quad H_0\psi = (E + i\tfrac{1}{2}\overline{\Gamma}_a)\psi. \tag{71.12}$$

Die ψ-Funktionen hängen jetzt in derselben Weise von $(E + i\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_a)$ ab wie früher von E im Falle $\overline{\Gamma}_a = 0$: Aus der Eigenfunktion im Kerninnern (70.6) z.B. wird

$$u_i = A \sin\left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\sqrt{E + V_0 + \frac{i\overline{\Gamma}_a}{2}} \cdot r\right).$$

Nun sei $f_0(E)$ der f-Wert bei der Energie E im dämpfungsfreien Falle ($\overline{\Gamma}_a = 0$). Bei Einschalten der Dämpfung ergibt sich folglich der neue Wert $f(E) = f_0(E + i\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_a)$. Wir nehmen nun allgemein an, daß $f(E)$ eine analytische Funktion ohne Singularitäten sei und entwickeln $f(E)$ um die Resonanzstelle E_r, welche dem dämpfungslosen Falle entspricht und die durch $f_0(E_r) = f(E_r - i\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_a) = 0$ definiert ist. Die Taylor-Entwicklung um E_r liefert unter der Annahme $f_0'(E_r) \equiv \left(\frac{df_0(E)}{dE}\right)_{E_r} \neq 0$

$$f(E) = f_0(\{E - E_r + i\tfrac{1}{2}\overline{\Gamma}_a\} + E_r) = \{E - E_r + i\tfrac{1}{2}\overline{\Gamma}_a\}f_0'(E_r) + \cdots,$$

wenn wir $(E - E_r) + i\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_a$ als kleine komplexe Größe ansehen und mit dem linearen Glied abbrechen. Indem wir $f_0'(E_r)$ näherungsweise durch $f'(E_r)$ ersetzen, erhalten wir schließlich bis auf Glieder höherer Ordnung

$$f(E) = \{E - E_r + i\tfrac{1}{2}\overline{\Gamma}_a\}f'(E_r). \tag{71.13}$$

Diese Beziehung läßt sich auch als eine Entwicklung um die komplexe Resonanzenergie $W_r = E_r - \frac{1}{2} i \bar{\Gamma}_a$ auffassen, wo nachträglich $f'(W_r) \approx f'(E_r)$ gesetzt wurde. Bezüglich des Vorzeichens von $f'(E_r)$ können wir in Anlehnung an den dämpfungslosen Fall (s. (71.4)) und in Einklang mit unserer Annahme $\frac{d\Phi}{dE} > 0$ voraussetzen, daß $f'(E_r) < 0$ ist.

Aus (71.3) erhalten wir nun mit Einführung der positiven Größe Γ_n von der Dimension einer Energie,

$$\Gamma_n = -\frac{2kR}{f'(E_r)}, \tag{71.14}$$

für η

$$\eta = \left[1 - \frac{i\Gamma_n}{(E - E_r) + i\frac{1}{2}(\Gamma_a + \Gamma_n)}\right] e^{-i2kR}; \tag{71.15}$$

hierin wurde Γ_a statt $\bar{\Gamma}_a$ geschrieben, um auf die alten Bezeichnungen zurückzukommen.

Nunmehr ergeben sich aus (63.9) und (63.11) die Wirkungsquerschnitte für elastische Streuung und für eigentliche Kernrektionen:

$$\sigma_{\text{str}} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \left| \frac{\frac{1}{2}\Gamma_n}{(E - E_r) + i\frac{1}{2}(\Gamma_a + \Gamma_n)} + e^{ikR} \sin(kR) \right|^2, \tag{71.16}$$

$$\sigma_r = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_a \Gamma_n}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}(\Gamma_a + \Gamma_n)^2}; \tag{71.17}$$

Aus den Resonanznennern der letzten beiden Formeln ist ersichtlich, daß die oben als Resonanzenergie im dämpfungsfreien Fall eingeführte Größe E_r auch bei Vorhandensein einer Dämpfung immer noch in erster Näherung die wahre Resonanzenergie darstellt. (Dies ist im Einklang mit der bekannten Tatsache, daß eine schwache Dämpfung in erster Näherung die Eigenfrequenzen eines schwingungsfähigen Systems nicht beeinflußt. Bei höheren Drehimpulsen ($l > 0$) ist aber die Resonanzstelle merklich gegen E_r verschoben.) Das zweite Glied in σ_{str} beschreibt nach (70.13) die Streuung an einer „harten" Kugel. Der erste Term entspricht mit seinem Resonanzcharakter der compoundelastischen Streuung. Die durch (71.14) eingeführte Größe Γ_n erweist sich somit als die Partialbreite für compoundelastische Streuung, während $\Gamma_a = \bar{\Gamma}_a$ offenbar die Reaktionsbreite darstellt. σ_r ist die Summe aller Reaktionsquerschnitte, ausgenommen alle Arten elastischer Streuung. Der totale Wirkungsquerschnitt σ_c für die Compoundbildung, wie er in (33.1) gemeint ist, bedeutet die Summe von σ_r (71.17) und dem compoundelastischen Teil von σ_{str} (71.16), was genau (33.1) ergibt, da $\Gamma_a + \Gamma_n = \Gamma$ nach (71.16) und (71.17) die Gesamtbreite darstellt.

Die oben gegebene Ableitung der Breit-Wigner-Formeln benutzte der Übersichtlichkeit halber eine sehr spezielle Form von H_Γ in (71.8), bei der die Absorptionskonstante der Kernmaterie als Reaktionsbreite in der Resonanz erscheint. Allgemein läßt sich aus (71.8) und der Voraussetzung einer Möglichkeit von Lösungen der Form (71.9) folgern, daß die Eigenfunktionen ψ und damit auch f von E und $\bar{\Gamma}_a$ abhängen müssen, wenn auch nicht in der einfachen Form $f(E + i\frac{1}{2}\bar{\Gamma}_a)$.

Es gelte also jetzt allgemeiner

$$f = f(E; \bar{\Gamma}_a).$$

Aus der Bedingung $|\eta| < 1$ für den Eintritt einer Kernreaktion hatten wir bereits in (71.6) gefunden, daß für $\bar{\Gamma}_a > 0$ die Funktion f komplex und $\mathfrak{Im}\, f < 0$ sein muß. In der Nähe der Resonanzstelle $f(E_r; \bar{\Gamma}_a = 0) = 0$ läßt sich f wieder entwickeln, und indem wir $f'_{E_r} = \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_{E_r; \bar{\Gamma}_a = 0} \neq 0$ und $f'_{\bar{\Gamma}_a} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\Gamma}_a}\right)_{E_r; \bar{\Gamma}_a = 0} \neq 0$ sowie $\bar{\Gamma}_a$ als klein annehmen, folgt

$$f(E; \bar{\Gamma}_a) = (E - E_r) f'_{E_r} + \bar{\Gamma}_a f'_{\bar{\Gamma}_a},$$

worin $f'_{E_r} < 0$ und reell. $f'_{\bar{\Gamma}_a}$ negativ rein imaginär anzunehmen ist. Setzen wir daher

$$i\,\frac{1}{2}\,\Gamma_a = \left(\frac{f'_{\bar{\Gamma}_a}}{f'_{E_r}}\right) \bar{\Gamma}_a, \tag{71.18}$$

so wird Γ_a positiv reell, und indem wir wieder die alte Bezeichnung $f'(E_r)$ für f'_{E_r} benutzen, erhalten wir die mit (71.13) formal gleichlautende Beziehung

$$f(E; \bar{\Gamma}_a) = \{(E - E_r) + i\tfrac{1}{2}\Gamma_a\} f'(E_r),$$

aus der sich wie oben wieder die Breit-Wigner-Formeln ergeben. Zum Unterschied von früher ist aber – durch den zunächst noch freien Faktor $\left(\frac{f'_{\bar{\Gamma}_a}}{f'_{E_r}}\right)$ in (71.18) – der Wert von Γ_a frei geblieben, was man durchaus erwarten kann, weil diese Größe vom Modell abhängig sein wird. Wie ersichtlich, gelten diese Resonanzformeln unter recht allgemeinen Bedingungen.

Da wir bei unserer Ableitung keine einschränkenden Voraussetzungen über E_r machen mußten, sind – wie schon in § 33c erörtert wurde – auch Werte $E_r < 0$ möglich. Dazu ist nur die Existenz von $f(E)$ auch für $E < 0$, d. h. für Anregungsenergien unterhalb der Bindungsenergie anzunehmen, was durchaus plausibel ist.

Das Verhalten des Wirkungsquerschnitts ist nunmehr im wesentlichen auf zwei Größen zurückgeführt, die beide durch die inneren Eigenschaften des Compoundsystems allein festgelegt sind:

1. Der Wert von $f'(E)$ bei der Resonanzenergie E_r bestimmt die compoundelastische Streuung. Die Größe $\gamma_n = -\frac{1}{f'(E_r)}$ von der Dimension einer Energie wird „reduzierte Breite" genannt. Die in (71.14) definierte Größe $\Gamma_n = 2kR\,\gamma_n$ ist die Partialbreite für die compoundelastische Streuung eines Teilchens. (Siehe hierzu § 62, Gl. (62.5), wo γ_ν für γ_n steht. Für den gegenwärtigen Fall ist $G_b = 1$.) Setzt man in (71.5), wie oben, näherungsweise $\Phi(E) \approx \frac{\pi}{D}(E - E_r)$, wo D den Abstand zweier aufeinanderfolgender Resonanzen bedeutet, so folgt $f'(E_r) \approx -KR\frac{\pi}{D}$ und daraus $\Gamma_n \approx \frac{2kD}{\pi K}$, was mit (62.10) übereinstimmt.

2. Γ_a beschreibt die „Absorption“ der Primärteilchen durch alle möglichen Kernreaktionen. Es kann z.B. Γ_a auch eine „Dämpfung“ durch γ-Emission, also Γ_γ bedeuten. In allen Fällen gelten die Beziehungen (71.16) und (71.17).

Wir bemerken abschließend, daß zu unseren Formeln überall noch statistische Gewichtsfaktoren treten, sobald Spin und Bahndrehimpulse berücksichtigt werden müssen. Eine energetisch mögliche Reaktion kann auch durch irgendeinen der weiteren Erhaltungssätze „verboten“ sein (s. § 44).

Bei Vorhandensein mehrerer Resonanzniveaus kann man eine einfache Überlagerung von Ausdrücken der Art (71.16) und (71.17) erwarten, wenn die Niveauabstände groß gegenüber den Niveaubreiten sind. Ist dies nicht der Fall, so interferieren im Wirkungsquerschnitt die verschiedenen Beiträge von den einzelnen Resonanzniveaus zu sehr komplizierten Resonanzstrukturen, die nicht einfach zu überschauen sind. (Eine Diskussion für zwei eng benachbarte Niveaus gibt Flügge [F 48-1].)

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die oben definierten Γ's in den Breit-Wigner-Formeln zugleich auch den freien Zerfall des Compoundkerns beschreiben. Die vollständige Wellenfunktion der auslaufenden *Streuwellen* hat nach (63.6) und (63.7) für $l = 0$ den Amplitudenfaktor $\sim \frac{1}{k}(1-\eta)$. Der auf das Energieintervall dE entfallende Anteil $d\psi_i$ der Wellenfunktion im Kerninnern, ψ_i, wird daher einschließlich des Zeitfaktors

$$d\psi_i \sim \frac{1}{k}(1-\eta)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\, dE .$$

Dafür ergibt sich mit (71.15) und (71.14), wegen $e^{-i2kR} \approx 1$,

$$d\psi_i \sim \frac{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}{(E-E_r)+i\frac{1}{2}\Gamma}\, dE ,$$

wo $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_n$ ist. Die Wellenfunktion des zerfallenden Compoundkerns, $\psi_i(t)$, erhalten wir nun durch Integration von $d\psi_i$ über den gesamten Bereich der möglichen Energiewerte E. Im Falle $\Gamma \ll E_r$, auf den wir uns hier beschränken wollen, können wir dann ohne merklichen Fehler von $E = -\infty$ an integrieren. Damit erhalten wir, sobald von der Energieabhängigkeit von Γ abgesehen werden kann,

$$\psi_i(t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}{E-E_r+i\frac{1}{2}\Gamma}\, dE \sim e^{-i\frac{E_r}{\hbar}t}\, e^{-\frac{1/2\,\Gamma}{\hbar}t} ,$$

wie schon in § 66 (nur ein wenig anders) bewiesen wurde. Der Zerfall erfolgt daher gemäß $|\psi_i|^2 \sim e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t}$.

Außer den hier angegebenen Begründungen der Breit-Wigner-Formeln (71-15) und (71.16) gibt es noch mehrere andere Ableitungen. Die historisch ersten gehen

von der Störungstheorie aus. Man denke sich den Energieoperator H des Gesamtsystems in drei Teile aufgeteilt:

$$H = H_1 + H_2 + H_w.$$

H_1 bezieht sich allein auf den Zielkern A (oder Restkern B), H_2 auf die einlaufende Partikel a (oder das emittierte Teilchen b). Die Wechselwirkung zwischen beiden wird durch H_w beschrieben und als „Störung" angesehen.

Man kann nun erstens (mit BREIT, WIGNER u. a.) nach den Methoden der Diracschen Störungstheorie zeitabhängiger Vorgänge den Übergang von einem Ausgangszustand A + a über den Compoundkern C nach dem Endzustand B + b berechnen. Man kann zweitens (BETHE u. a.) stationäre Zustände nach der Schrödingerschen Störungstheorie betrachten und die (zeitunabhängigen) Wahrscheinlichkeiten der Zustände C und B + b ermitteln, indem man von einem stationären Zustand A + a (als einfallende Welle) ausgeht. In beiden Fällen ergeben sich unter plausiblen Vereinfachungen – streng läßt sich die Aufgabe nicht lösen – wieder die Formeln (71.16) und (71.17). Allerdings ist die Verwendung der üblichen Störungstheorie nur bei schwachen Wechselwirkungen ausreichend begründet, nicht dagegen für die bei Kernreaktionen auftretenden starken Wechselwirkungen.

Eine weitere Ableitung (WHEELER, HEISENBERG, WIGNER u. a.) besteht darin, daß man auf spezielle Annahmen über die inneren Bewegungen im Compoundkern – angesichts der Unmöglichkeit einer strengen Lösung – überhaupt verzichtet und für die Größe η des § 63 passende, formalmathematische Annahmen macht und hinterher feststellt, welchem physikalischen Vorgang ein bestimmter Ansatz entspricht.

Am vollständigsten und allgemeingültigsten ist Wigners sog. $\mathfrak{R}$-Matrix-Theorie der Kernreaktionen ([W 46-1]; WIGNER, EISENBUD [W 47-2]). Unter Umgehung einer genaueren Behandlung der Schrödinger-Gleichung des Gesamtsystems werden die beobachtbaren Energieniveaus und reduzierten Breiten als die gegebenen Repräsentanten der Mechanik des Kerninneren eingeführt und die daraus sich ergebenden Folgerungen durch alleinige Anwendung allgemeiner Methoden abgeleitet, welche auf keine speziellen Modelle Bezug nehmen. Dieses Vorgehen entspricht etwa dem der Vierpol-Theorie in der Elektrotechnik.

Die Stärke dieser Methoden beruht darauf, daß sie sehr allgemeine, von Modellvoraussetzungen unbeeinflußte Aussagen über Wirkungsquerschnitte ermöglichen. Die Kenntnis der modellunabhängigen Eigenschaften ist auch für die Untersuchung spezieller Modelle von großem Wert, da erst hierdurch die spezifisch modellbedingten Einflüsse erkennbar werden. –

Für Einzelheiten muß auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

§ 72. Durchgang geladener Teilchen durch ebene Potentialbarrieren

Bei Kernreaktionen mit geladenen Partikeln im Energiebereich unterhalb der Coulomb-Schwelle spielt die *Durchdringung von Potentialbarrieren* eine ausschlaggebende Rolle. Wir betrachten zuerst den *ebenen Fall.*

Ein Strom von Teilchen, dargestellt durch $A\,e^{ik_0 x}$, stoße von links herkommend auf einen „Potentialberg" (Abb. 116), welcher rechts und links an ein Gebiet konstanten Potentials angrenzt. Die Wellenmechanik besagt, daß ein Teil der Partikel, auch wenn deren Energie die Höhe des „Berges" nicht erreicht, durch den Wall „hindurchsickert" und auf der anderen Seite mit einer im allgemeinen geänderten Wellenzahl k_1 als ebene Welle Be^{ik_1x} weiterläuft. Unsere Aufgabe ist es, das Verhältnis der Wellenamplituden $\frac{B}{A}$ zu bestimmen. Die *Schrödinger-Gleichung* lautet

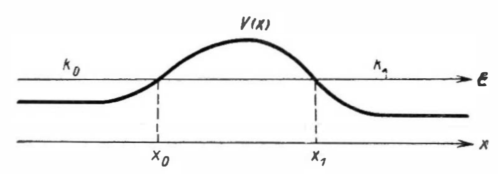


Abb. 116. Zum Tunneleffekt durch Potential-Barrieren. $V(x)$ = Potentialverlauf, E = Gesamtenergie, x_0 und x_1 sind die Umkehrpunkte der Bewegung nach der klassischen Mechanik

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2(x)\,\psi = 0 \tag{72.1}$$

mit

$$k^2(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - (Vx)) . \tag{72.2}$$

Wir benutzen, um physikalisch brauchbare Aussagen für möglichst allgemeine Potentiale zu gewinnen, die im mathematischen Anhang (§ 77) dargestellte *W.K.B.-Methode* zur angenäherten Lösung[1] und konstruieren, ausgehend von der durchlaufenden Welle Be^{ik_1x}, rückwärts die ψ-Funktionen. In der W.K.B.-Näherung lautet die Lösung der Wellengleichung in hinreichender Entfernung von den Umkehrpunkten der klassischen Bahnbewegung, x_0 und x_1:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{|k(x)|}} \exp i\left(\int k(x)\,dx + \beta\right), \quad \beta = \text{const.} \tag{72.3}$$

Anstelle der exp-Funktionen können auch sin und cos treten. Zwischen x_0 und x_1 ist $k(x)$ imaginär, und wir haben *reelle* Exponentialfunktionen. In der Umgebung der Punkte x_0 und x_1 gilt die Lösung (72.3) nicht, so daß man sie nicht „glatt über den Berg" fortführen kann. Die in § 77 angegebene Methode ermöglicht jedoch die richtige Fortsetzung einer Lösung durch die Nullstellen von $k(x)$.

Da die *W.K.B.-Näherung* nur bei sehr geringer „Durchlässigkeit" des Potentialberges gültig ist, betrachten wir ausschließlich diese Fälle: Der größte Teil der ankommenden Wellen wird reflektiert, und vor dem „Berg" entsteht eine fast reine „stehende Welle" ($\psi \approx \sin kx$ oder $\cos kx$). Hinter dem „Berg" erscheint

[1]) Exakte Lösungen sind nur für sehr spezielle $V(x)$ angebbar.

eine auslaufende Welle. Diese und deren rückwärtige Fortsetzung in den „Berg" hinein lauten bei der Wahl $\beta = -\frac{\pi}{4}$ in (72.3) nach § 77, Gl. (77.17),

$$\frac{1}{\sqrt{k(x)}}\, e^{i\left(\int\limits_{x_1}^{x} k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|k(x)|}}\left\{\frac{1}{2} e^{-\int\limits_{x}^{x_1}|k|\,dx} - i e^{\int\limits_{x}^{x_1}|k|\,dx}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|k(x)|}}\left\{\frac{1}{2} e^{-\frac{g}{2}} e^{\int\limits_{x_0}^{x}|k|\,dx} - i e^{\frac{g}{2}} e^{-\int\limits_{x_0}^{x}|k|\,dx}\right\}.$$

Dabei gilt die linke Seite für $x \gg x_1$ und die rechte für $x_0 \ll x \ll x_1$; g bedeutet

$$g = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} |k(x|\,dx) = \frac{2\sqrt{2\mu}}{\hbar}\int\limits_{x_0}^{x_1} (V(x) - E)^{1/2}\,dx\,. \tag{72.4}$$

Die nochmalige Anwendung der Verknüpfungsformeln (77.14) und (77.15) gibt die weitere Fortsetzung der Lösung in das Gebiet vor dem Potentialwall $(x < x_0)$:

$$\rightarrow \frac{-1}{\sqrt{k(x)}}\left\{\frac{1}{2} e^{-\frac{g}{2}} \sin\left(\int\limits_{x}^{x_0} k\,dx - \frac{\pi}{4}\right) + 2 i e^{\frac{g}{2}} \cos\left(\int\limits_{x}^{x_0} k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Nach Umschreiben des sin und cos als Summe von Exponential-Funktionen und Ordnen der Glieder nach ein- und auslaufenden Wellen ergibt sich als Zusammenhang der Wellenfunktionen zu beiden Seiten des Potentialwalles

$$\frac{1}{\sqrt{k(x)}}\, e^{i\left(\int\limits_{x_1}^{x>x_1} k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)} \rightarrow \frac{-i}{\sqrt{k(x)}}\left\{\left(e^{\frac{g}{2}} - \frac{1}{4} e^{-\frac{g}{2}}\right) e^{i\left(\int\limits_{x<x_0}^{x_0} k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)} + \left(e^{\frac{g}{2}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{g}{2}}\right) e^{-i\left(\int\limits_{x<x_0}^{x_0} k\,dx - \frac{\pi}{4}\right)}\right\}. \tag{72.5}$$

Im Gültigkeitsbereich der W.K.B.-Lösung ist $e^g \gg 1$. In großen Entfernungen vom Potentialberg hatten wir $V(x) =$ const, also konstantes k angenommen, so daß der Teilchenstrom dort auch konstant und $\sim k\,|\psi|^2$ wird. Das Verhältnis der Anzahl der durchlaufenden Teilchen zu der der primär ankommenden beträgt daher

$$\frac{k(x = +\infty)\,|\psi(x = +\infty)|^2}{k(x = -\infty)\,|\psi(x = -\infty)|^2} = e^{-g}\,.$$

Als „Durchlässigkeit" G des Potentialberges ergibt sich somit im Falle $e^{-g} \ll 1$

$$G = e^{-g} \quad \text{mit} \quad g = \frac{2\sqrt{2\mu}}{\hbar}\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{V(x) - E}\,dx\,. \tag{72.6}$$

§ 73. Durchgang geladener Teilchen durch eine kugelsymmetrische Potentialschwelle

Wir bestimmen die Amplitude der ψ-Welle im Innern eines *kugelsymmetrischen Potentialberges*, wenn von außen eine ebene Welle e^{ikz} auffällt. Der Teilchenstrom beträgt dann v Teilchen pro cm²sec, wenn v die Geschwindigkeit der Partikel bezeichnet. Nach den Vorbereitungen des § 69 haben wir lediglich den Radialteil der l-Welle, $u_l(r)$, aus (69.4) für das vorgegebene Potential $V(r)$ zu berechnen. Wir wählen für Entfernungen innerhalb des Atomradius R_A nach Abb. 117

$$V(r) = -V_0 \quad \text{für} \quad r < R$$

und

$$V(r) = \frac{zZe^2}{r} \quad \text{für} \quad R \leqq r < R_A. \quad (73.1)$$

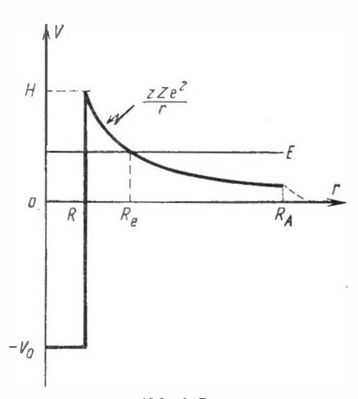


Abb. 117.
Das abgeschirmte Coulomb-Potential und der Gamow-Wall um einen Atomkern (R = Kernradius, R_e = Umkehrpunkt der klassischen Bewegung, $R_A \approx$ Atomradius)

Außerhalb einer Sphäre von der Größenordnung des Atomradius R_A möge aber $V(r)$ wesentlich stärker als $\sim \frac{1}{r}$ nach Null abnehmen, d. h., es sei ein „*abgeschirmtes Coulomb-Potential*" angenommen. Wir denken uns der Einfachheit halber $V(r) = 0$ im Gebiet $r > R_A$. Gleichung (69.4) lautet

$$\frac{d^2 u_l}{d r^2} + k^2(r)\, u_l = 0 \quad \text{mit} \quad k^2(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (73.2)$$

Die Nullstellen von $k(r)$, die Umkehrpunkte der klassischen Bewegung, seien R und R_e (s. Abb. 117). Gemäß (69.1) muß die l-te Partialwelle u_l für $r \to \infty$ die asymptotische Form haben

$$u_l(r \to \infty) \to \frac{1}{k_\infty}(2l+1)\, i^l e^{i\delta_l} \sin\left(k_\infty r + \delta_l - \frac{\pi}{2} l\right). \quad (73.3)$$

Hierin ist $k_\infty = k(r \to \infty)$. Zur Integration von (73.2) verwenden wir die W.K.B.-Näherung. Im Gebiet $r > R_e$ (Index 3) lautet die Lösung

$$u_l^{(3)}(r > R_e) = \frac{D_l}{\sqrt{k(r)}} \sin\left(\int_{R_e}^{r} k(r)\, dr + \beta_l\right). \quad (73.4)$$

Die Integrationskonstante D_l ist der Amplitude von (73.3) anzupassen. Die Phasenkonstante β_l bestimmt sich aus den Anschlußbedingungen für u_l und legt δ_l in (73.3) fest (s. weiter unten). Für $r \to \infty$ wird (73.3) $\equiv$ (73.4), wenn

$$D_l = \frac{2l+1}{\sqrt{k_\infty}}\, e^{i\left(\delta_l + \frac{\pi}{2} l\right)}; \quad \delta_l = \beta_l + \frac{\pi}{2} l - k_\infty R_e - \int_{R_e}^{\infty} (k_\infty - k(r))\, dr. \quad (73.5)$$

Damit wird

$$u_l^{(3)}(r > R_e) = \frac{2l+1}{\sqrt{k_\infty\, k(r)}}\, e^{i\left(\delta_l + \frac{\pi}{2} l\right)} \sin\left(\int_{R_e}^{r} k(r)\, dr + \beta_l\right). \tag{73.6}$$

Aus der Definition von $k(r)$ nach (73.2) folgt, daß (73.6) bei Annahme eines *abgeschirmten Coulomb-Potentials* für $r \to \infty$ in die gewünschte Form (73.3) mit einem konstanten Phasenwinkel δ_l übergeht. (Im Falle des *reinen Coulomb-Potentials*, $V \sim \frac{1}{r}$ bis $r \to \infty$, ist leicht zu sehen, daß ein Glied mit $\ln r$ im Integral in (73.5) bzw. unter dem sin in (73.6) auftritt, was alle Rechnungen wesentlich erschwert, ohne physikalisch Neues zu bringen. Wir beschränken uns daher auf das praktisch ohnehin fast immer realisierte abgeschirmte Potential.)

Im Gebiet zwischen R und R_e (Index 2) ist $k^2(r) < 0$; wir haben eine aperiodisch gedämpfte Welle:

$$u_l^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{|k(r)|}}\left[C_{l+}\, e^{-\int_r^{R_e} |k(r)|\, dr} + C_{l-}\, e^{\int_r^{R_e} |k(r)|\, dr}\right] \quad \text{für} \quad R < r < R_e. \tag{73.7}$$

C_{l+} und C_{l-} sind Konstante. Den Zusammenhang zwischen $u_l^{(2)}$ und $u_l^{(3)}$ über die Nullstelle R_e hindurch, vermitteln die in § 77 abgeleiteten Verknüpfungsgleichungen (77.14) und (77.15). Danach lautet die Fortsetzung von (73.7) in das Gebiet $r > R_e$

$$u_l^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{k(r)}}\left\{C_{l+}\, 2\cos\left(\int_{R_e}^{r} k(r)\, dr - \frac{\pi}{4}\right) - C_{l-} \sin\left(\int_{R_e}^{r} k(r)\, dr - \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Der Vergleich mit (73.4) oder (73.6) zeigt

$$4\, C_{l+}^2 + C_{l-}^2 = D_l^2 = \frac{(2l+1)^2}{k_\infty}, \tag{73.8 a}$$

$$\beta_l = -\operatorname{arc\,tg} \frac{2\, C_{l+}}{C_{l-}} - \frac{\pi}{4}, \quad \text{wobei} \quad D_l \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = \begin{Bmatrix}2\, C_{l+}\\ -\, C_{l-}\end{Bmatrix} \quad \text{ist.} \tag{73.8 b}$$

Im Topfinnern, $r < R$, ist die W.K.B.-Näherung nur für $l = 0$ brauchbar. Andernfalls stört die Singularität von $\frac{l(l+1)}{r^2}$ bei $r = 0$.[1]) In der Umgebung des Nullpunktes verhält sich die reguläre Lösung von (73.2) im Falle $l \geqq 1$ wie r^l, wird also in erster oder höherer Ordnung Null: Teilchen mit Bahndrehimpuls gelangen daher, wie schon weiter oben bemerkt wurde, schwerer in das Kerninnere. (Sie fliegen auch schwerer heraus, s. a. § 74). Für das Weitere beschränken wir uns zunächst auf den Fall $l = 0$ und lassen den Index l fort.

---

[1]) Eine Methode zur Umgehung dieser Schwierigkeit s. bei Morse u. Feshbach, S. 1101 [M. u. F.].

Die Wellenfunktion im Innenraum, $r < R$ (Index 1), lautet

$$u^{(1)}(r < R) = A \sin(Kr), \tag{73.9}$$

wo $K = k(r < R)$ und A eine Konstante bedeutet. (Die andere Lösung mit $\cos(Kr)$ entfällt, da $\psi^{(1)} = \frac{\cos(Kr)}{r}$ bei $r = 0$ singulär ist.) Den Zusammenhang zwischen A und C_+, C_- liefern die Anschlußbedingungen bei $r = R$; d.h., $u^{(1)}(R) = u^{(2)}(R)$, und $\left(\frac{du^{(1)}}{dr}\right)_R = \left(\frac{du^{(2)}}{dr}\right)_R$. Das ergibt in erster Näherung[1])

$$u^{(1)}(R) = A \sin(KR) = |k(R)|^{-\frac{1}{2}} \left\{C_+ e^{-\frac{1}{2}g} + C_- e^{\frac{1}{2}g}\right\}, \tag{73.10}$$

$$\left(\frac{du^{(1)}}{dr}\right)_R = AK \cos(KR) = |k(R)|^{\frac{1}{2}} \left\{C_+ e^{-\frac{1}{2}g} - C_- e^{\frac{1}{2}g}\right\}, \tag{73.11}$$

worin zur Abkürzung steht

$$g = 2\int_R^{R_e} |k(r)|\, dr. \tag{73.12}$$

Bei Gl. (73.11) wurde der Faktor $|k(r)|^{1/2}$ als einer im Sinne der W.K.B.-Näherung nur „langsam" veränderlichen Größe nicht mitdifferenziert.

Aus (73.10) und (73.11) folgt

$$C_+ = \frac{A}{2} e^{\frac{1}{2}g} S_+, \quad \text{wo} \quad S_+ = |k(R)|^{1/2} \sin(KR) + K\,|k(R)|^{-1/2} \cos(KR), \tag{73.13}$$

$$C_- = \frac{A}{2} e^{-\frac{1}{2}g} S_-, \quad \text{wo} \quad S_- = |k(R)|^{1/2} \sin(KR) - K\,|k(R)|^{-1/2} \cos(KR). \tag{73.14}$$

Mit diesen Werten für C_+ und C_- erhält man aus (73.8a) für $l = 0$

$$|A|^2 = \frac{1}{k_\infty} \left\{S_+^2 e^g + \frac{1}{4} S_-^2 e^{-g}\right\}^{-1} \tag{73.15}$$

und aus (73.8b) schließlich auch den Wert für $\beta_{l=0}$ (was allerdings nicht weiter benötigt wird).

Die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* einer Geschoßpartikel im Topfinnern ist mit (73.9)

$$\int_{\text{Kern}} |\psi|^2 d\tau = |A|^2 \int_0^R \left(\frac{\sin(Kr)}{r}\right)^2 4\pi r^2\, dr \approx 2\pi |A|^2 R. \tag{73.16}$$

Das $\int$ ist über das Kernvolumen zu erstrecken, und da jedenfalls $KR > \frac{\pi}{2}$ ist, wurde $\sin^2(Kr)$ im Mittel $\approx \frac{1}{2}$ gesetzt. (73.16) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an,

---

[1]) Es ist $|k(R)| = \left|\frac{2\mu}{\hbar}(V(R) - E)\right|^{1/2}$ mit $V(R) = \frac{ezZ}{R}$.

daß ein Teilchen eingefangen wurde und also ein „Compoundzustand" vorliegt. Die Zahl der im Mittel pro sec zerfallenden Compoundzustände beträgt dann $w\int_{\text{Kern}} |\psi|^2 d\tau$, wenn w die Zerfallswahrscheinlichkeit pro sec bezeichnet. Im stationären Zustand muß $v\sigma_c = w\int |\psi|^2 d\tau$ sein, und daraus folgt

$$\sigma_c = \frac{w}{v}\int_{\text{Kern}} |\psi|^2 d\tau \approx \frac{w}{v} 2\pi R |A|^2. \tag{73.17}$$

Man kann übrigens unter w auch die Zerfallswahrscheinlichkeit über einen bestimmten Zerfallsmodus, z. B. durch Emission eines Teilchens b, und unter σ den Teilquerschnitt für die betreffende spezielle Reaktion verstehen.

Der Wirkungsquerschnitt für die Compoundbildung ist ersichtlich $\sim |A|^2$. Wir betrachten nun seine Energieabhängigkeit: Dazu ist die Kenntnis der Größenordnung des Quotienten $\frac{K}{|k(R)|} = \left(\frac{V_0 + E}{V(R) - E}\right)^{1/2}$ erforderlich, worin $V(R)$ die Höhe H des Coulombberges bezeichnet. Praktisch treten Kernreaktionen mit gut beobachtbarer Häufigkeit nur für $(V(R) - E) <$ etwa 2 MeV auf. Da $V_0 \approx 30$ MeV ist, wird $\frac{K}{k(R)} \gtrapprox 4$.

Im mittleren Gebiet zwischen zwei Resonanzen, wo $KR \approx n\pi$ ist, mit einer kleinen ganzen Zahl n, folgt aus (73.13) und (73.14)

$$S_\pm \approx \mp (-1)^n \frac{K}{|k(R)|^{1/2}}.$$

Da im Gültigkeitsbereich der W.K.B.-Näherung $e^g \gg 1$, können wir hier statt (73.15)

$$|A|^2 = \frac{|k(R)|}{k_\infty K^2} e^{-g} \approx \frac{R^2}{n^2\pi^2}\left(\frac{V(R) - E}{E}\right)^{1/2} e^{-g} \tag{73.18}$$

schreiben. Damit findet man für σ je nach Wahl folgende Ausdrücke:

$$\sigma_c = \pi \lambda\!\!\!^{-2} w \left(\frac{2MR}{\hbar K}\right)\left(\frac{|k(R)|}{K}\right) e^{-g} = \pi R^2 \Gamma \frac{|k(R)|}{RK^2} \frac{1}{E} e^{-g}. \tag{73.19}$$

Da $\frac{\hbar K}{M} = v_{in}$ die Geschwindigkeit im Kerninnern darstellt, bedeutet $\frac{2MR}{\hbar K} = \frac{2R}{v_{in}}$ die Zeit zwischen zwei Stößen des Teilchens gegen den Kernrand. Im wesentlichen erscheint σ außerhalb der Resonanzen als geometrischer Kernquerschnitt πR^2, multipliziert mit dem Durchlässigkeitsfaktor G des Potentialwalles, $G = e^{-g}$. Für g erhalten wir nach (73.12) und (73.2) mit $R_e = \frac{zZe^2}{E}$ und $y = \frac{r}{R_e}$

$$g = 2\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\int_R^{R_e}\left(\frac{zZe^2}{r} - E\right)^{1/2} dr = \frac{2\sqrt{2\mu E}}{\hbar} R_e \int_{y=\frac{R}{R_e}}^{1} \sqrt{\frac{1}{y} - 1}\, dy. \tag{73.20}$$

Das Integral läßt sich leicht auswerten. Ist v die Relativgeschwindigkeit der Partikeln vor dem Stoß und $H = V(R)$ die Höhe des Coulomb-Berges am Kernrand, so ist

$$2\sqrt{2\mu E}\,\frac{R_e}{\hbar} = \frac{4zZe^2}{\hbar v} \quad \text{und} \quad \frac{R}{R_e} = \frac{E}{H}.$$

Damit erhält man im Rahmen der W.K.B.-Näherung

$$g = \frac{2\pi z Z e^2}{\hbar v}\frac{2}{\pi}\left[\arccos\sqrt{\frac{E}{H}} - \sqrt{\frac{E}{H}\left(1-\frac{E}{H}\right)}\right]. \tag{73.21}$$

Die Voraussetzung hierfür lautet $E \ll H$, und in diesem Falle gilt in erster Näherung ($\arccos x = \frac{\pi}{2} - x$, wenn $x \ll 1$)

$$g = \frac{2\pi z Z e^2}{\hbar v} - \frac{4e}{\hbar}\sqrt{2 z Z \mu R} \tag{73.22}$$

oder, mit Einführung der *Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten* α und des „*Elektronenradius*" r_e,

$$g = \frac{2\pi\alpha z Z}{\frac{v}{c}} - 4\alpha\left(z Z \frac{\mu}{m_e}\frac{R}{r_e}\right)^{1/2} \tag{73.23}$$

($\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, $r_e = \frac{e^2}{2 m_e c^2}$ mit m_e = Elektronenmasse). Bei Kernreaktionen ist das erste Glied von g maßgebend. Das zweite Glied ist für die Theorie des α-Zerfalls von Bedeutung. Die *Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts* ist nach (73.19) gegeben durch

$$\sigma = C\frac{\Gamma(E)}{E}e^{-g(E)} \quad \text{mit} \quad C = \pi R^2 \frac{|k(R)|}{R K^2}. \tag{73.24}$$

Eine experimentelle Bestätigung dieser Formel, die gemäß ihrer Herleitung nur außerhalb der Resonanzstellen gilt, ist in § 39 enthalten. Die Übereinstimmung von (73.24) mit der früher angegebenen Formel (34.7) oder (34.8) ist gesichert, da unser jetziges $\Gamma(E)$, wie oben schon bemerkt, auch eine spezielle Partialbreite Γ_b darstellen kann und $\Gamma_b \sim G_b$ ist.

Der Resonanzfall. Nach (73.15) sind die Nullstellen von S_+ durch besonders große A-Werte ausgezeichnet. Wir untersuchen das Verhalten von $|A|^2$ in der Nähe dieser *Resonanzstellen* E_r. $S_+ = 0$ bedeutet nach (73.13)

$$\operatorname{tg}(K_r R) = -\frac{K_r}{|k(R)|_r} = -\sqrt{\frac{V_0 + E_r}{V(R) - E_r}}. \tag{73.25}$$

In praxi ist die Wurzel rechts $\gtrsim 4$, also $K_r R \approx (n + \frac{1}{2})\pi$. Weiter wird bei $S_+ = 0$

$$S_-(E_r) = 2\,|k(R)|_r^{1/2}\sin(K_r R) \approx 2(-1)^n |k(R)|_r^{1/2}, \tag{73.26}$$

und (73.15) ergibt

$$|A(E_r)|^2 \approx \frac{1}{k_\infty |k(R)|_r} e^g = \frac{|k(R)|_r}{k_\infty K_r^2} e^{-g}\left(\frac{K_r}{|k(R)|_r}\right)^2 e^{2g}. \tag{73.27}$$

Ein Vergleich mit (73.18) zeigt, daß der Wirkungsquerschnitt im Resonanzmaximum um den Faktor $\left(\frac{K_r}{|k(R)|_r}\right)^2 e^{2g}$ größer wird als in der Mitte zwischen zwei Resonanzstellen.

In der Nähe von E_r gilt

$$S_+(E) = \left(\frac{\partial S_+}{\partial E}\right)_{E_r} (E - E_r) = S_+'(E_r)\,\varepsilon\,, \tag{73.28}$$

wo wir S_+' für die Ableitung von S_+ nach E und $\varepsilon = E - E_r$ gesetzt haben.

Das Verhältnis der Amplitudenquadrate des u-Teiles der s-Welle innerhalb und weit außerhalb des Potentialwalles wird (nach Vergleich von (73.9) mit (73.6) für $l = 0$ und nach (73.15))

$$\left|\frac{A}{\frac{1}{k_\infty}}\right|^2 = k_\infty^2 |A|^2 = \frac{k_\infty}{(S_+')^2 e^g \varepsilon^2 + \frac{1}{4}(S_-)^2 e^{-g}} = \frac{4k_\infty e^g}{(S_-)^2[1 + (\varkappa e^g \varepsilon)^2]}, \tag{73.29}$$

wo zur Abkürzung steht

$$\varkappa = -2\frac{S_+'}{S_-}. \tag{73.30}$$

Bei der Bildung von S_+' aus (73.13) sind in erster Näherung nur $\sin(KR)$ und $\cos(KR)$ zu differenzieren. Man erhält bei Beachtung, daß an der Resonanzstelle $S_+ = 0$ ist, mit (73.25) und (73.26), wo wir $(S_-)_r = S_-(E_r)$ schreiben, sowie wegen $\frac{dK}{dE} = \frac{\mu}{\hbar^2 K}$,

$$S_+' = -\frac{\mu R}{\hbar^2 |k(R)|_r^{1/2} \sin(K_r R)} = -\frac{2\mu R}{\hbar^2 (S_-)_r}. \tag{73.31}$$

Führen wir hier die Geschwindigkeit des Teilchens im Kerninnern $v_{in} = \frac{\hbar K_r}{\mu}$ ein, so wird in der Nähe von E_r

$$\varkappa = \frac{K_r R}{\hbar v_{in} |k(R)|_r \sin^2(K_r R)} = \frac{4\mu R}{\hbar^2 (S_-)_r^2} \tag{73.32}$$

Nach (73.29) ist der Resonanzcharakter der Energieabhängigkeit von $|A|^2$ und damit nach (73.17) auch der des Wirkungsquerschnitts σ offensichtlich. Die *Halbwertsbreite der Resonanz* beträgt (im Energiemaß)

$$\Delta E_{1/2} = 2e^{-g}\varkappa^{-1} = \hbar\frac{v_{in}}{2R} e^{-g} \cdot 4\sin^2(K_r R)\frac{|k(R)|_r}{K_r}. \tag{73.33}$$

Da nach (73.25) in praktischen Fällen

$$4\sin^2(K_r R)\frac{|k(R)|_r}{K_r} \approx 1$$

ist, können wir im Rahmen der vorliegenden Näherung ebensogut schreiben

$$\Delta E_{1/2} \approx \hbar\frac{v_{in}}{2R} e^{-g}. \tag{73.34}$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch halbklassisch-anschaulich in einfachster Weise ableiten: Ein Teilchen, das im Kerninnern mit der Geschwindigkeit v_{in} umherfliegt, stößt pro sec etwa $\left(\frac{v_{in}}{2R}\right)$-mal an den Kernrand. Bei jedem Stoß durchfliegt

es mit der Wahrscheinlichkeit e^{-g} den Potentialwall. Die Wahrscheinlichkeit der Teilchenemission pro sec beträgt daher

$$w \approx \frac{v_{in}}{2R} e^{-g}. \tag{73.35}$$

Das entspricht einer Lebensdauer $\tau = \frac{1}{w}$ und nach *Heisenbergs Ungenauigkeitsrelation* einer Energieunschärfe gemäß (73.34). Die Lebensdauer des Resonanzniveaus gegen spontanen Zerfall beträgt also nach (73.35) bzw. (73.33)

$$\tau = \frac{1}{2} \varkappa \hbar e^{-g} \approx \frac{2R}{v_{in}} e^{g}. \tag{73.36}$$

Eine genauere wellenmechanische Beschreibung dieses Vorganges folgt in § 75.

§ 74. Durchlässigkeit des Coulomb-Walles für Teilchen mit endlichem Bahndrehimpuls

Wir benutzen die Entwicklungen des § 73, um die *Durchlässigkeit* des Coulomb-Walles *für Teilchen mit endlichem Bahndrehimpuls,* $\hbar l > 0$, zu bestimmen. Dies entspricht klassisch-korrespondenzmäßig dem nichtzentralen Stoß.

In diesem Falle $l > 0$, können wir in (73.10) und (73.11) links $u^{(1)}(R)$ und $\left(\frac{du^{(1)}}{dr}\right)_R$ nicht durch $A \sin(KR)$ und $AK \cos(KR)$ ersetzen. Wenn wir aber $u^{(1)}$ in der Nähe des Randes durch eine sin-Welle annähern, so können wir die alten Anschlußbedingungen formal bestehen lassen, indem wir noch einen geeigneten Phasenwinkel α_l in die Winkelfunktionen einführen. Die weiteren Folgerungen bleiben dann im wesentlichen erhalten. Insbesondere wird – außerhalb von Resonanzstellen – die Wellenamplitude im Kerninnern bzw. die

$$\text{Eindringwahrscheinlichkeit} \approx G_l = e^{-g_l} \tag{74.1}$$

mit

$$g_l = 2\int_R^{R_e} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E) + \frac{l(l+1)}{r^2}}\, dr. \tag{74.2}$$

Wenn wir $\varrho = \frac{r}{R}$ einführen und zur Abkürzung

$$a = \frac{H}{E}, \quad H = \frac{e^2 zZ}{R} = \text{Höhe des Coulomb-Walles}, \tag{74.3}$$

$$b = \frac{H_Z}{E}, \quad H_Z = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R^2} = \text{Höhe des Zentrifugalpotentials} \tag{74.4}$$

setzen, so wird

$$g_l = 2\frac{\sqrt{2\mu E}\,R}{\hbar} \int_{\varrho=1}^{\varrho_e} \sqrt{\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{\varrho^2} - 1}\, d\varrho. \tag{74.5}$$

Die obere Grenze $\varrho_e = \frac{R_e}{R}$ entspricht der Nullstelle des Radikanden,

$$\frac{a}{\varrho_e} + \frac{b}{\varrho_e^2} - 1 = 0,$$

also, da nur Werte $\varrho_e > 0$ in Frage kommen,

$$\varrho_e = \tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4b}\right). \tag{74.6}$$

Das Integral in (74.5) ist geschlossen integrierbar. Man erhält so im Rahmen der W.K.B.-Näherung

$$g_l = \frac{2R\sqrt{2\,\mu E}}{\hbar}\left\{-\sqrt{a+b-1} + a \arccos\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{2-a}{\sqrt{a^2+4b}}\right)} + \sqrt{b}\,\ln\frac{2\sqrt{b(a+b-1)}+2b+a}{a+\frac{2b}{\varrho_e}}\right\}. \tag{74.7}$$

Für $b = 0$, d.h. $l = 0$, ergibt sich wieder die oben angegebene Gleichung (73.20) bzw. (73.21). Gleichung (74.7) gibt uns die quantitative Grundlage für das früher schon mehrmals erwähnte Verhalten bei nichtzentralen Stößen: G_l verkleinert sich mit wachsendem l und abnehmendem Kernradius R, wie unmittelbar aus (74.1) und dem relativen Beitrag des l-Gliedes in (74.2) zu erkennen ist. Auch hier muß angemerkt werden, daß nicht notwendig die Partikel mit dem kleinsten l am häufigsten zur Kernreaktion führen: Die Erhaltungssätze von Spin, Parität und Isospin können bestimmte Reaktionen ausschließen.

Ein spezieller Fall ist noch zu erwähnen, nämlich der Durchgang von Neutronen durch die „*Zentrifugalbarriere*". Hier ist $V(r) = 0$ im Gebiet $r > R$ und $a = 0$. g enthält nur dann einen Realteil – und nur dieser ist beim Tunneleffekt wirksam –, wenn, wie man leicht aus (74.2) erkennt, $2\,\mu E\hbar^{-2} \leqq l(l+1)R^{-2}$ ist. Wegen $2\mu\, E = p^2$ lautet diese Bedingung auch $p\,R \leqq \hbar\,\sqrt{l(l+1)} \approx l\,\hbar$ (bei nicht zu kleinem l); d.h., nur für $l > \frac{pR}{\hbar} = \frac{R}{\lambda}$ ist die „Zentrifugalbarriere" wirksam. Dies wurde in § 64 benutzt. Im Falle $a = 0$ ist $\varrho_e = \sqrt{b}$. Aus (74.7) wird daher

$$g_l = \frac{2R\sqrt{2\,\mu E}}{\hbar}\left\{\sqrt{b}\,\ln\left(\sqrt{b-1}+\sqrt{b}\right) - \sqrt{b-1}\right\}. \tag{74.8}$$

Da nun $\sqrt{b} = \frac{\sqrt{l(l+1)}\,\hbar}{R\sqrt{2\mu E}} = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{\lambda}{R}$, wird für kleine E wo $\frac{\lambda}{R} \gg 1$, und für nicht zu kleine l (so daß $\sqrt{l(l+1)} \approx l + \frac{1}{2}$)

$$g_l \approx 2l + \frac{1}{2}\left(\ln\left(2\sqrt{\frac{H_Z}{E}}\right) - 1\right) \approx -2\left(l+\frac{1}{2}\right)(1-\ln 2) - l + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E}{H_Z}\right)$$

Die *Energie*abhängigkeit der Durchlässigkeit für l-Neutronen wird damit für $E \ll H_Z$

$$G_l \sim \left(\frac{E}{H_Z}\right)^{l+\frac{1}{2}}. \tag{74.9}$$

§ 75. Wellenmechanische Beschreibung der Teilchenemission durch den Coulomb-Wall

Mit den in § 73 abgeleiteten Wellenfunktionen soll hier die dort angegebene halbklassische Überlegung, die in einfachster Weise zu (73.35) geführt hatte, nach den Regeln der Quantenmechanik behandelt werden. Damit geben wir auch ein ausführliches Beispiel zur Ergänzung der allgemeinen Betrachtungen des § 66. Wir beschränken uns auf s-Wellen und betrachten ein Teilchen, welches sich im Potentialfeld der Abb. 117 zur Zeit $t = 0$ im Kerninnern befindet. Die Wellenfunktion $\psi(r, t)$ soll also für $t = 0$ im Außenraum verschwinden:

$$\psi(r; t = 0) = 0 \quad \text{für} \quad r > R. \tag{75.1}$$

Gesucht wird der zeitliche Abfall von ψ im Gebiet $r < R$, was durch die Ausbreitung der Wellenfunktion in das Kontinuum des Außenraumes hervorgerufen wird. Um eine abzählbare Menge von Eigenfunktionen zu erhalten, denken wir uns den Kern zunächst in einen endlichen Raum, hier in eine konzentrische Kugel von sehr großem Radius L, eingeschlossen. Wir erhalten dadurch diskrete Eigenfunktionen, nach denen $\psi(r, 0)$ entwickelt werden kann. In den Endformeln gehen wir dann zu $L \to \infty$ über. Wir rechnen weiterhin mit $u(r, t) = r\psi(r, t)$ statt mit ψ selber. Die stationären Eigenfunktionen $u_n(r)$ des Systems bestehen aus drei Teilen:

1. eine sin-Welle im Innern $\quad u_n^{(1)} = A_n \sin(K_n r) \quad$ für $r < R$,
2. reelle Exponentialfunktionen $\quad u_n^{(2)} = (73.7) \quad$ für $R < r < R_e$
3. eine sin-Welle im Außenraum $\quad u_n^{(3)} = D_n \sin(k_n r + \beta_n)$ für $r > R_e$.

Zwischen R_e und R_A gilt genauer (73.4), so daß hier D_n und β_n **veränderliche** Größen darstellen, was aber auf das Weitere ohne Einfluß ist. Außerhalb R_A sind D_n und β_n konstant.

Wir machen L stets so groß, daß $\int_R^L |u_n|^2 dr \gg \int_0^R |u_n^{(1)}|^2 dr$ ist, und normieren u_n **auf 1**:

$$\int_0^L |u_n|^2 \, dr = 1\,. \tag{75.2}$$

Dann ist mit genügender Genauigkeit

$$u_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n r + \beta_n)\,. \tag{75.3}$$

Die Innenamplitude A_n beträgt nach (73.29)[1]) in der Nähe einer Resonanzstelle

$$A_n = \sqrt{\frac{2k_n}{L}} \, \frac{2e^{g/2}}{S_-} (1 + (\varkappa e^g \varepsilon_n)^2)^{-1/2}\,. \tag{75.4}$$

[1]) In (73.29) entspricht $k_\infty A$ dem Quotienten $\frac{A_n}{D_n}$, und wir haben rechts in (73.29) k_∞ durch k_n zu ersetzen.

$\varepsilon_n = E_n - E_r$ ist die Abweichung des Energieeigenwertes E_n von der Resonanzenergie E_r. Die innere Wellenzahl K_n ändert sich innerhalb eines *schmalen* Resonanzniveaus praktisch nicht und damit ebensowenig die Form und Phase der Innenwelle $u_n^{(1)}$ am Kernrand; nur ihre Amplitude ändert sich gemäß (75.4). Wir setzen daher $K_n = K_r$, indem wir unter K_r die innere Wellenzahl im Resonanzmaximum verstehen. Die u_n haben dann in der Nähe eines Resonanzniveaus die Gestalt

$$u_n^{(1)}(r) = A_n \sin(K_r r) = \sqrt{\frac{2k_n}{L}}\,\frac{2e^{g/2}}{S_-}\,\frac{\sin(K_r r)}{[1+(\varkappa e^g)^2\varepsilon_n^2]^{1/2}} \quad \text{für } r < R\,. \tag{75.5}$$

Für $r > R_A$ werden die u_n stets durch (75.3) dargestellt.
Jede mögliche Lösung $\varphi(r, t)$ läßt sich in eine Reihe nach den Eigenfunktionen $u_n(r)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$ entwickeln:

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}; \tag{75.6}$$

zur Zeit $t = 0$ gilt dann

$$\varphi(r, 0) = \sum C_n u_n(r)\,. \tag{75.7}$$

Wir nehmen nun als Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ an:

$$\varphi(r, 0) = \sin(K_r r) \text{ im Kerninnern } r < R$$

und

$$\varphi(r, 0) \equiv 0 \text{ im Außenraum } r > R\,.$$

Danach erhält man für die Koeffizienten C_n, indem wir die Orthogonalität unserer $u_n(r)$ beachten,

$$C_n = \int_0^L \varphi(r, 0)\, u_n(r)\, dr = \int_0^R \sin(K_r r)\, u_n^{(1)}(r)\, dr \approx \frac{R}{2} A_n,$$

wo wir $\int_0^R \sin^2(K_r r) dr \approx \frac{R}{2}$ gesetzt haben. Damit geht (75.6) im Gebiet $r < R$, wenn wir φ_{in} für $\varphi\ (r < R)$ schreiben, über in

$$\varphi_{in}(r, t) = \frac{R}{L} \sin(K_r r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_r t}\, \frac{4e^g}{(S_-)^2} \sum_{\varepsilon_n = -E_r}^{\infty} \frac{k_n\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t}}{1 + (\varkappa e^g)^2 \varepsilon_n^2}\,. \tag{75.8}$$

Der Anfangszustand, in dem das Teilchen sich mit Sicherheit im Kerninnern befindet, ist also nur durch Superposition einer großen Anzahl von Eigenzuständen verschiedenster Energie zu erreichen, deren Besetzungswahrscheinlichkeiten $|C_n|^2 \sim |A_n|^2$ sind. Den Hauptbeitrag zu der Summe in φ_{in} geben die Summanden in der *Nähe* der Resonanzenergie E_r. Solange bei endlichem L deren Anzahl endlich ist, wird $\varphi_{in}(r, t)$ eine periodische Funktion der Zeit. Die Periodendauer

steigt mit der Anzahl der angeregten Eigenzustände pro Einheit des Energieintervalls, d.h. mit L. Und wenn wir mit $L \to \infty$ gehen, entsteht, wie wir sogleich sehen werden, eine exponentielle Zeitabhängigkeit. Für ein sehr großes L können wir in der letzten Formel die $\sum$ durch ein $\int$ ersetzen, wobei wir jeweils eine Gruppe von dn Eigenschwingungen zur Energie $\varepsilon_n \approx \varepsilon$ (sowie $k_n \approx k$) zusammenfassen:

$$\varphi_{in}(r,t) = \sin(K_r r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_r t}\, \frac{4\,R\,e^g}{L(S_-)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t}\, dn}{1+(\varkappa\, e^g)^2\,\varepsilon^2}\,. \tag{75.9}$$

Da der Integrand nur nahe der Resonanzstelle größere Werte annimmt, ist es erlaubt, die untere Integrationsgrenze $\varepsilon = -E_r$ bis $-\infty$ auszudehnen, indem wir voraussetzen, daß $(\varkappa\, e^g\, E_r)^2 \gg 1$ sei.

Um die Zahl der Eigenschwingungen dn durch das zugehörige Energieintervall $d\varepsilon$ auszudrücken, bemerken wir, daß stets eine ganze Anzahl n von Halbwellen auf die Strecke L entfallen, so daß $\frac{n\lambda}{2} = L$ sein muß. Der Einfluß des Kerns auf die Anzahl n ist für $L \to \infty$ zu vernachlässigen. Damit gilt $p = \frac{h}{\lambda} = n\frac{\pi\hbar}{L}$, also $dn = \frac{L}{\pi\hbar}\,dp$, und wegen $dp = \frac{1}{v}\,dE = \frac{\mu}{k\hbar}\,d\varepsilon$ folgt[1])

$$dn = \frac{L\mu}{\pi k \hbar^2}\, d\varepsilon. \tag{75.10}$$

Beim Einsetzen in (75.9) erkennt man, daß L herausfällt, so daß der *Grenzübergang* $L \to \infty$ ohne weiteres ausführbar ist. Das Integral über ε ist nach der Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha\varepsilon}}{1+\beta^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{\pi}{|\beta|}\, e^{-\frac{\alpha}{|\beta|}}\,,$$

wo α und β von ε unabhängige Größen sind, leicht auszuwerten. (Der Beweis ist am einfachsten durch Integration im Komplexen, wie in § 66 bei Gl. (66.10), zu erbringen.)

Man findet für (75.9) mit Rücksicht auf (73.32)

$$\varphi_{in}(r,t) = \sin(K_r r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_r t}\, e^{-\frac{e^{-g}}{\varkappa\hbar}t}\,. \tag{75.11}$$

Für $t = 0$ wird, wie vorausgesetzt, $\varphi_{in}(r,0) = \sin(K_r r)$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte im Kerninnern klingt ab gemäß

$$|\varphi_{in}(r,t)|^2 = \sin^2(K_r r)\, e^{-\frac{2e^{-g}}{\varkappa\hbar}t}\,. \tag{75.12}$$

Die mittlere Lebensdauer beträgt danach

$$\tau = \frac{\varkappa\hbar}{2}\, e^g, \tag{75.13}$$

in voller Übereinstimmung mit den Ausführungen des § 73 (Gl. (73.36)).

---

[1]) Die Energieabhängigkeit von dn ist hier einfacher als in den §§ 66 und 67, weil jetzt nur s-Wellen vorkommen.

Bei der Übertragung dieser Ergebnisse auf die *Teilchenemission aus wirklichen Kernen* ist zu bedenken, daß unsere Resultate sich auf die Bewegung eines einzigen Teilchens in einem vorgegebenen Potential beziehen. Im Sinne der anschaulichen Ableitung der Formel (73.36) wird man bei wirklichen Kernen als Faktor vor der e-Funktion die Gesamtzahl der von innen her gegen die Kernwand erfolgenden Stöße einzusetzen haben. Aber gerade diese Zahl läßt sich nur bei hochangeregten Zuständen und auch nur für Protonen in grober Näherung voraussehen (Verdampfungstheorie). In einer Theorie des α-Zerfalls kommt noch die Schwierigkeit hinzu, die an der Kernoberfläche im statistischen Mittel vorhandene Anzahl von α-Teilchen, welche mit den übrigen Nukleonen in einer Art Dissoziationsgleichgewicht stehen, ermitteln zu müssen, eine Aufgabe, die noch nicht befriedigend gelöst werden konnte.

D. Mathematische Ergänzungen

Im folgenden sind die Beweise einiger mathematischer Formeln nachgetragen, welche in den Paragraphen 63, 72 und 73 als bekannt vorausgesetzt wurden, um den physikalischen Gedankengang nicht zu stören.

§ 76. Entwicklung der ebenen Welle e^{ikz} in eine Summe von Kugelwellen

Wir setzen (mit den Bezeichnungen des § 63) $z = r\cos\vartheta$ und entwickeln $e^{ikr\cos\vartheta}$ in eine Reihe nach den Legendreschen Kugelfunktionen $P_l(\mu)$, wo $\mu = \cos\vartheta$ ist:[1])

$$e^{ikr\mu} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l j_l(kr)\, P_l(\mu)\,. \qquad (76.1)$$

Die so definierten ortsabhängigen Koeffizienten $j_l(kr)$ sind zu berechnen. Die Faktoren $(2l+1)i^l$ sind nur der Bequemlichkeit halber abgespalten. Wegen der Orthogonalität der $P_l(\mu)$

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\mu)\, P_m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ml}\,, \qquad \delta_{ml}\begin{cases} =0 & \text{für} \quad m \neq l\,, \\ =1 & \text{für} \quad m = l\,, \end{cases}$$

folgt durch Bildung von $\int_{-1}^{+1} (76.1)\, P_l(\mu)\, d\mu$

$$j_l = \frac{1}{2i^l} \int_{-1}^{+1} P_l(\mu)\, e^{ikr\mu}\, d\mu\,. \qquad (76.2)$$

---

[1]) Die Entwicklung ergibt sich aus der kräftefreien Wellengleichung durch Separation der Variablen in Polarkoordinaten bei axialer Symmetrie um die z-Achse und Darstellung der allgemeinen Lösung durch eine Summe von Partikularlösungen. l ist die Separationskonstante, die wegen der Forderung der Endlichkeit der Lösungen ganzzahlig sein muß.

Die P_l sind bekanntlich definierbar durch

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l\, l!} \frac{d^l (\mu^2 - 1)^l}{d\mu^l} \tag{76.3}$$

und genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\mu}(1 - \mu^2)\frac{d}{d\mu} P_l = -l(l+1)P_l . \tag{76.4}$$

Die ersten $P_l(\mu)$ sind

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2 = \tfrac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \ldots \tag{76.5}$$

Die P_l sind bei $\mu = 1$ auf 1 normiert, und es gilt

$$P_l(1) = 1, \quad P_l(-\mu) = (-1)^l P_l(\mu), \quad P_l(-1) = (-1)^l. \tag{76.6}$$

Die ersten beiden j_l lauten

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad j_1(kr) = -\frac{\cos(kr)}{kr} + \frac{\sin(kr)}{(kr)^2}. \tag{76.7}$$

Integriert man in (76.2) partiell über $e^{ikr\mu}$, so folgt

$$j_l(kr) = \frac{1}{2i^l}\left\{P_l(\mu)\frac{e^{ikr\mu}}{ikr}\Big|_{\mu=-1}^{\mu=+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{e^{ikr\mu}}{ikr} P_l'(\mu)\, d\mu\right\}, \tag{76.8}$$

wo P_l' für $\frac{dP_l}{d\mu}$ geschrieben ist. Da $P_l(\mu)$ ein Polynom vom Grade l darstellt, erhält man durch wiederholte partielle Integration eine endliche Reihe nach $\left(\frac{1}{kr}\right)$. Die Reihenglieder sind proportional zu $\frac{\cos}{\sin}(kr)$. Für große kr überwiegt das erste Glied. Aus (76.8) folgt daher mit (76.6)

$$j_l(kr \to \infty) = \frac{e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}}{2i^{l+1} kr}$$

oder

$$j_l(kr \to \infty) = \frac{i}{2\,kr}\left\{e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)} - e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)}\right\} = \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)}{kr}. \tag{76.9}$$

Dies in (76.1) eingesetzt, ergibt die in § 63 benutzte Formel (63.4).
Um über (76.7) hinaus die weiteren j_l exakt zu berechnen, kann man aus (76.8) eine Rekursionsformel entwickeln, mit deren Hilfe die höher indizierten j_l, von j_0 und j_1 ausgehend, zu erhalten sind: Mit (76.8) findet man zunächst

$$j_{l+1} + j_{l-1} = \frac{1}{2i^l}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{ikr\mu}}{kr}\left[P_{l+1}'(\mu) - P_{l-1}'(\mu)\right] d\mu . \tag{76.10}$$

Der Beitrag des ersten Gliedes aus (76.8) fällt fort. Nun gilt, wie man aus (76.3) ableiten kann,

$$P'_{l+1} - P'_{l-1} = (2l+1)\,P_l;$$

daher steht wegen (76.2) in (76.10) rechts $(2l+1)\,\frac{j_l}{kr}$, und es folgt die Rekursionsformel

$$j_{l+1} = \frac{(2l+1)}{kr}\,j_l - j_{l-1}\,. \tag{76.11}$$

Die so definierten Funktionen sind die *sphärischen Bessel-Funktionen*, die auch mit Hilfe der gewöhnlichen Bessel-Funktionen J_ν vom Index $\nu = l + \frac{1}{2}$ dargestellt werden können:

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,J_{l+\frac{1}{2}}(kr)\,. \tag{76.12}$$

Um dies zu beweisen, schreiben wir abkürzend $kr = x$ und betrachten die Funktion $u_l(x) = x j_l(x)$. Man bilde $u_l'' + u_l = x\,(j_l + j_l'') + 2j'$ und ersetze j_l durch (76.2). Eine partielle Integration über $e^{ix\mu}\,d\mu$ beim x-Glied eliminiert $2j'$. Die nochmalige partielle Integration des Restes über $e^{ix\mu}$ liefert bei Beachtung von (76.4)

$$u_l'' + u_l = l(l+1)\,u_l x^{-2}. \tag{76.13}$$

Von hier aus führt die Substitution $u_l(x) = \sqrt{x}J(x)$ sofort zur *Besselschen Differentialgleichung*

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{x^2}\right) J = 0\,,$$

zu deren Lösungen die $J_{l+\frac{1}{2}}$ gehören.

Zu den $P_l(\cos\vartheta)$ ist noch eine nützliche Bemerkung zu machen. Bekanntlich lautet der wellenmechanische *Operator des Quadrates des Drehimpulses* mit $\mu = \cos\vartheta$

$$\mathsf{L}^2 = -\hbar^2 \left\{\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{76.14}$$

Da die $P_l(\mu)$ nicht von φ abhängen, gilt nach (76.4)

$$\mathsf{L}^2 P_l = l(l+1)\hbar^2 P_l\,. \tag{76.15}$$

Die $P_l(\mu)$ beschreiben somit eine Bewegung mit einem Drehimpulsvektor senkrecht zur z-Richtung und vom Betrage $\hbar\sqrt{l(l+1)}$.

§ 77. Die W. K. B.-Methode zur angenäherten Lösung von Wellengleichungen

a) Lösungen außerhalb der Nullstellen der kinetischen Energie

Die W.K.B.-Methode wurde unabhängig voneinander von WENTZEL, KRAMERS und BRILLOUIN sowie von H. JEFFREYS angegeben [W 26-1], [K 26-1], [B 26-1]. Die vorgelegte Wellengleichung sei

$$\frac{d^2u}{dr^2} + g(r)\,u = 0\,. \tag{77.1}$$

Wenn g konstant wäre, müßte $u = f\cdot{}^{\cos}_{\sin}(\sqrt{g}\,r)$ oder $u = f\cdot{}^{\cos}_{\sin}\left(\int\sqrt{g}\,dr\right)$ eine Lösung sein, wo wir zuletzt $\int\sqrt{g}\,dr$ für $\sqrt{g}\,r$ geschrieben haben und f eine Konstante bedeutet. Ist die Funktion $g(r)$ variabel, aber so langsam, daß sie sich innerhalb einer Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{g(r)}}$ $(g(r) > 0$ vorausgesetzt) nur relativ wenig ändert, so wird u näherungsweise eine in der Phase $\int\sqrt{g(r)}\,dr$ periodische Funktion mit langsam veränderlicher Amplitude f sein. Der dadurch nahegelegte Ansatz

$$u = f(r)\ \exp\left(i\int\sqrt{g(r)}\,dr\right)$$

ergibt in (77.1) eingesetzt, wenn wir $f(r)$ also als langsam veränderlich ansehen und das Glied mit $\frac{d^2f(r)}{dr^2}$ gegenüber den anderen vernachlässigen, für $f(r)$ die Differentialgleichung

$$\frac{f'}{f} = -\frac{1}{4}\,\frac{g'}{g}\,,\qquad \text{wo}\quad {}' \equiv \frac{d}{dr}\,. \tag{77.2}$$

Ihre Lösung lautet (bis auf einen konstanten Faktor)

$$f(r) = \frac{1}{|g(r)|^{1/4}}\,. \tag{77.3}$$

Zwei voneinander unabhängige Näherungslösungen von (77.1) sind hiernach

$$u = (g(r))^{-\frac{1}{4}}\cdot{}^{\cos}_{\sin}\left(\int_{r_0}^{r}\sqrt{g}\,(r)\,dr - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{für } g(r) > 0 \tag{77.4 a}$$

bzw.

$$u = (g(r))^{-\frac{1}{4}}\cdot\exp\left[\pm i\left(\int_{r_0}^{r}\sqrt{g}\,(r)\,dr - \frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \text{für } g(r) > 0 \tag{77.4 b}$$

und

$$u = |g(r)|^{-\frac{1}{4}}\cdot\exp\left[\pm\int_{r_0}^{r}\sqrt{|g(r)|}\,dr\right] \qquad \text{für } g(r) < 0\,. \tag{77.5}$$

Aus später ersichtlichen Gründen wurde für die willkürliche untere Grenze des Integrals die Nullstelle r_0 von $g(r)$, $[g(r_0) = 0,]$, gewählt und bei den periodischen Lösungen (77.4) eine Phasenkonstante $-\frac{\pi}{4}$ hinzugefügt.

Voraussetzung für die Gültigkeit der W.K.B.-Lösung ist die langsame Veränderlichkeit von $g(r)$, und zwar muß in erster Näherung genauer gelten

$$\left|\frac{g'}{g^{3/2}}\right| \ll 1 .$$

Die Lösungen (77.4) und (77.5) versagen bei $g(r) = 0$, da hier nach (77.3) $\frac{d^2 f}{d r^2} \to \infty$ geht, statt, wie vorausgesetzt, vernachlässigbar klein zu sein.

b) Die Fortsetzung der W.K.B.-Lösung durch eine Nullstelle von $g(r)$

Das Versagen der W.K.B.-Lösungen in der Nähe der Umkehrstelle der klassischen Bahnbewegung macht es unmöglich, aus der Lösung etwa im Gebiet $g > 0$, (77.4a; b), ohne weiteres ihre Fortsetzung in das Gebiet $g < 0$, (77.5), zu finden. Wir müssen daher die Umgebung der Umkehrstelle, d.h. der Nullstelle r_0 von g, besonders untersuchen. Für das Weitere setzen wir voraus, daß die Nullstelle „einfach", also keine Nullstelle höherer Ordnung sei: $\left(\frac{dg}{dr}\right)_{r_0} \neq 0$.
Für $r < r_0$ sei $g(r) < 0$, und für $r > r_0$ sei $g(r) > 0$, sofern nicht das Gegenteil vermerkt wird.
In hinreichendem Abstand rechts und links von r_0 gelten die W.K.B.-Näherungen (77.4) bzw. (77.5). Da im Zwischengebiet um r_0 für *beliebige* $g(r)$ keine Lösung in analytisch geschlossener Form angebbar ist, kann man versuchen, $g(r)$ in diesem Gebiet näherungsweise durch eine andere Funktion zu ersetzen, welche die Integration von (77.1) ermöglicht. Dies wird erreicht, wenn wir in der Nähe der Nullstelle r_0 die Kurve $g(r)$ durch ihre Tangente in r_0 ersetzen, vorausgesetzt, daß diese eine endliche Steigung besitzt. Wir schreiben daher mit $x = r - r_0$ in der Umgebung von r_0

$$g(r) = a^2 x, \tag{77.6}$$

wo $a^2 = \left(\frac{dg}{dr}\right)_{r_0}$ zunächst bis ((77.10)) als positiv vorausgesetzt sei ($a^2 > 0$). In der Nähe von $x = 0$ soll also (77.1) ersetzt werden durch

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + a^2 x u = 0 . \tag{77.7}$$

u hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt, für $x > 0$ einen oszillatorischen und für $x < 0$ einen aperiodischen Charakter. Wir setzen voraus, daß (77.7) bis in den (im folgenden „$x \to \pm\infty$" genannten) Bereich der x-Werte gültig bleibt, in welchem die W. K. B.-Lösungen verwendbar werden. Diese heißen hier

$$u = (a^2 x)^{-\frac{1}{4}} \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{2}{3} a x^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für} \quad x \to \infty , \tag{77.8a}$$

$$u = |a^2 x|^{-\frac{1}{4}} \cdot \exp\left[\pm \frac{2}{3} a |x|^{\frac{3}{2}}\right] \quad \text{für} \quad x \to -\infty . \tag{77.8b}$$

Eine exakte, für alle x gültige Partikularlösung u_1 von (77.7) lautet in der Darstellung durch ein bestimmtes, in der komplexen t-Ebene zu bildendes sog. Airysches Integral, welches wir mit $A(a^{2/3}x)$ bezeichnen:

$$u_1 = A\left(a^{\frac{2}{3}}x\right) \equiv \frac{1}{i\sqrt{\pi}} \int_C e^{-a^{\frac{2}{3}}xt - \frac{1}{3}t^3}\, dt. \tag{77.9}$$

Der Integrationsweg C ist so zu wählen, daß er aus dem Unendlichen kommend wieder ins Unendliche verläuft, und zwar so, daß der Integrand beide Male im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet. Dazu muß für $|t| \to \infty$ der Realteil von t^3 nach $+\infty$ streben. Daß $A(a^{2/3}x)$ eine Lösung von (77.7) darstellt, erkennt man unmittelbar durch Einsetzen. Man erhält nämlich bei unserer Wahl von C für die linke Seite von (77.7)

$$\int_C e^{-a^{\frac{2}{3}}xt - \frac{1}{3}t^3}\left(a^{\frac{4}{3}}t^2 + a^2x\right) dt = -a^{\frac{4}{3}} e^{-a^{\frac{2}{3}}xt - \frac{t^3}{3}}\Bigg|_{t\,(\text{Anfang})}^{t\,(\text{Ende})} = 0\,.$$

Das Integral (77.9) läßt sich für große $|x|$ – wie weiter unten explizite gezeigt wird – durch Exponential- und trigonometrische Funktionen asymptotisch annähern. Und zwar erhält man

$$A\left(a^{\frac{2}{3}}x\right) = \frac{2}{(a^{2/3}x)^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } x \to \infty, \tag{77.10 a}$$

$$A\left(a^{\frac{2}{3}}x\right) = \frac{1}{|a^{2/3}x|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}a|x|^{\frac{3}{2}}} \quad \text{für } x \to -\infty. \tag{77.10 b}$$

Diese asymptotischen Darstellungen von A stimmen mit einem Teil der in (77.8) angegebenen, nach der W. K. B.-Methode erhaltenen Partikularlösungen von (77.7) genau überein. Wir können daher mit Hilfe der Funktion A die Zuordnung dieser W. K. B.-Lösungen rechts und links von $x = 0$ herstellen.

Um dies auch im allgemeinen Falle beliebiger $g(x)$ – anstelle von a^2x in (77.7) – zu bewerkstelligen, setzen wir voraus, daß $g(x)$ nur eine einzige Nullstelle bei $x = 0$ habe und führen eine neue Größe $w(x)$ ein:

Fall $x\,g(x) > 0$. Wenn der Potentialwall ($g < 0$) links von $x = 0$ liegt, sei

$$w(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left[\int_0^x \sqrt{g}\, dx\right]^{2/3}. \tag{77.11a}$$

Fall $x\,g(x) < 0$. Liegt der Potentialberg rechts von $x = 0$, so sei

$$w(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left[\int_x^0 \sqrt{g}\, dx\right]^{2/3}. \tag{77.11 b}$$

Dann hat $w(x)$ in beiden Fällen stets dasselbe Vorzeichen wie die – aus (77.1) zu entnehmende – Funktion $g(x)$. Beim Durchgang durch $x = 0$ wechseln g und w gleichzeitig ihr Vorzeichen. Denn hierbei tritt in der [. . .] erstens ein Faktor $i = \sqrt{-1}$ wegen des Vorzeichenwechsels von g, und zweitens ein Faktor -1 wegen der Umkehr der Integrationsrichtung auf. Insgesamt ergibt sich also $(-i)^{2/3} = \left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^{2/3} = -1$. Für reelle g, die hier allein in Frage kommen, kann man daher auch für beide Fälle gemeinsam schreiben (sign g = Vorzeichen von g):

$$w(x) = (\operatorname{sign} g)\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left|\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right|^{2/3}. \tag{77.11 c}$$

Betrachtet man nun den Ausdruck

$$u_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi}}\left|\frac{w}{g}\right|^{\frac{1}{4}}\int_C e^{-wt-\frac{1}{3}t^3}\,dt; \tag{77.12}$$

so ist u_1 für kleine $|x|$ mit (77.9) identisch, denn hier wird $g = a^2 x$, also

$$w(x) = a^{2/3}x,$$

und u_1 ist damit eine Lösung von (77.7) bzw. eine Näherungslösung für (77.1) bei kleinem $|x|$. Für große $|x|$ wird auch $|w|$ groß, und es gilt analog zu (77.10)

$$u_1 = 2(g)^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\left|\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right| - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für } |x| \to \infty \text{ im Gebiet } g > 0, \tag{77.13 a}$$

$$u_1 = |g|^{-\frac{1}{4}} e^{-\left|\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right|} \quad \text{für } |x| \to \infty \text{ im Gebiet } g < 0, \tag{77.13 b}$$

was mit den W.K.B.-Lösungen in den entsprechenden Bereichen genau übereinstimmt. u_1 ist daher eine für alle x näherungsweise gültige Partikularlösung von (77.1), deren asymptotische Werte für große $|x|$ durch (77.13a) und (77.13b) dargestellt werden. Damit ist diejenige der *Verknüpfungsgleichungen* abgeleitet, die im periodischen Teil die cos-Funktion enthält:

$$\frac{2}{(g(x))^{1/4}}\cos\left(\left|\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right| - \frac{\pi}{4}\right) \rightleftarrows \frac{1}{|g(x)|^{1/4}}\, e^{-\left|\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right|}. \tag{77.14}$$

Die zweite der Verknüpfungsgleichungen lautet, wie weiter unten gezeigt ist,

$$\frac{1}{(g(x))^{1/4}}\sin\left(\left|\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right| - \frac{\pi}{4}\right) \rightleftarrows \frac{-1}{|g(x)|^{1/4}}\, e^{\left|\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right|}. \tag{77.15}$$

In den beiden Fällen gelten die periodischen Funktionen im Gebiet $g > 0$, die aperiodischen im Gebiet $g < 0$. Die Integrale über $\sqrt{g}$ sind positiv reell zu nehmen. Zur Herleitung von (77.15) bemerken wir zunächst, daß auf Grund der W.K.B.-Lösungen, die von u_1 (s. (77.13)) linear unabhängige Lösung u_2 im Gebiet $x \to +\infty$, wo $g > 0$ sei (der andere Fall $xg(x) < 0$ ergibt dasselbe Endresultat), die Form hat

$$u_2 = (g(x))^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\int_0^x \sqrt{g(x)}\,dx - \frac{\pi}{4}\right). \tag{77.16 a}$$

Ihre Fortsetzung in das Gebiet $x \to -\infty$, wo $g < 0$ ist, muß jedenfalls – mit den Konstanten B und D – die Gestalt haben

$$u_2 = |g(x)|^{-\frac{1}{4}} \left\{B e^{\int_x^0 \sqrt{|g(x)|}\,dx} + D e^{-\int_x^0 \sqrt{|g(x)|}\,dx}\right\}. \tag{77.16 b}$$

Denn die $\exp\left\{\pm \int_x^0\right\}$ sind Fundamentallösungen im Bereich $x \to -\infty$. Das zweite Glied ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn es nicht durch die Ungenauigkeiten des ersten Gliedes verdeckt wird.

Wären nun u_1 und u_2 *exakte* Lösungen, die ein Fundamentalsystem bilden, so wäre eine jede andere Lösung überall mit zwei Konstanten B und D in der Form $u = Bu_1 + Du_2$ darstellbar. Ergibt sich, daß u in irgendeinem Intervall in x z.B. keinen Anteil von u_1 enthält, dann muß hier und damit auch überall $B = 0$, d.h. $u \equiv Du_2$, sein. Sind u_1 und u_2 angenäherte Fundamentallösungen, so gilt, jedenfalls im Rahmen der vorliegenden Näherung, auch das gleiche. Da in unserem Falle (77.16a) im Gebiet $x \to +\infty$ keine „Beimischung" von u_1 enthält, kann auch (77.16b) für $x \to -\infty$ keine „Beimischung" von u_1 enthalten, d.h., es muß $D = 0$ oder jedenfalls so klein sein, daß der Anteil mit D neben dem B-Term in (77.16b) zu vernachlässigen ist. Um nun B zu bestimmen, bedenken wir, daß für irgend zwei Lösungen von (77.1) $u_1 u_2'' - u_1'' u_2 = 0$ gilt, also[1])

$$u_1 u_2' - u_1' u_2 = \text{const} = K.$$

Führen wir hier (77.13a) und (77.16a) ein, so ergibt sich $K = 2$. Setzen wir (77.13b) und (77.16b) ein und beachten, daß im Gebiet $x < 0$ die Funktion u_1 mit wachsendem x steigt, u_2 (mit $D = 0$) dagegen fällt, so wird $K = -2B$, woraus $B = -1$ folgt. Da nun $D = 0$ war, führen die Gleichungen (77.16a) und (77.16b) unmittelbar zu der Beziehung (77.15).

Für die Darstellung einer laufenden Welle ist es übrigens zweckmäßig, die Kombination $\frac{1}{2}$ (77.14) $+ i$ (77.15) zu bilden.

[1]) Dies ist eine Differentialgleichung für u_2. Sie gibt integriert dieselben Ergebnisse wie oben im Text.

Man erhält

$$\frac{1}{(g(x))^{1/4}} e^{i\left(\left|\int\limits_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right| - \frac{\pi}{4}\right)} \rightleftarrows \frac{1}{|g(x)|^{1/4}} \left\{\frac{1}{2} e^{-\left|\int\limits_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right|} - i e^{\left|\int\limits_0^x \sqrt{g(x)}\,dx\right|}\right\}. \quad (77.17)$$

Die linke Seite gilt im Gebiet $g(x)>0$, die rechte Seite im Bereich $g(x)<0$. Die beiden Seiten der Verknüpfungsgleichungen (77.14) und (77.15) stellen zwei spezielle Lösungen dar, die ein Fundamentalsystem bilden. Die allgemeine Lösung ist durch lineare Superposition zu erhalten. Phase und Amplitude der asymptotischen Wellenfunktion im periodischen Teil bestimmen eindeutig das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion im klassisch verbotenen Gebiet. Das Umgekehrte gilt jedoch nur dann, wenn im Gültigkeitsbereich der W.K.B.-Näherung für möglichst kleine x noch ein Gebiet existiert, in dem die abfallende Exponentialfunktion gegenüber der ansteigenden Exponentialfunktion nicht völlig verschwindet. Sonst läßt sich der Anteil von (77.14) aus dem asymptotischen Verhalten der Wellenfunktion im klassisch verbotenen Gebiet nicht ermitteln.

Zur Vervollständigung unserer Betrachtungen geben wir abschließend einen Beweis der oben benutzten, für große $|w|$ gültigen asymptotischen Näherungen für das Airysche Integral

$$J = \int\limits_C e^{-wt - \frac{1}{3}t^3}\,dt. \quad (77.18)$$

Über der komplexen t-Ebene weist der Absolutwert des Integranden zwei Sattelpunkte auf, deren Lage durch w festgelegt ist. Man kann daher für C eine „Paßstraße" über die Sattelpunkte angeben, entlang welcher der Integrand ein Maximum von maximaler Steilheit aufweist (Sattelpunktsmethode). Mit wachsendem $|w|$ werden diese Maxima immer schärfer, die „Paßstraßen" immer steiler, so daß das praktisch allein wesentliche Integrationsintervall in der Umgebung des Maximums immer enger wird. Die übrigen Teile des Integrationsweges wählt man möglichst so, daß ihr Beitrag zum Integral vernachlässigbar wird.

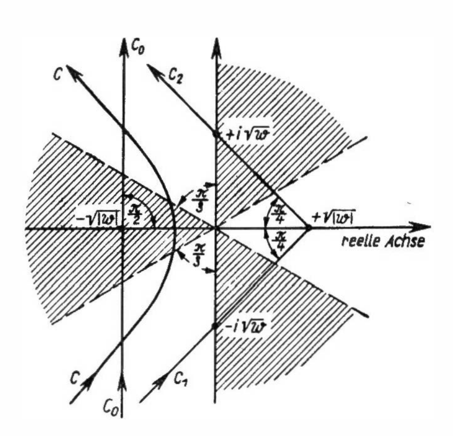


Abb. 117a. Lage der verschiedenen Integrationswege auf der komplexen t-Ebene (die für C im Unendlichen verbotenen Winkelbereiche sind schraffiert)

Der Exponent des Integranden von (77.18), $p = -wt - \frac{1}{3}t^3$, und damit auch der Integrand selbst, hat Extrema bei $t_\lambda = \pm\sqrt{-w}$. Die Sattelpunkte von $|e^p|$ liegen also im Falle $w<0$ bei $t_0 = -\sqrt{|w|}$ und $t_0' = +\sqrt{|w|}$ und im Falle $w>0$ bei $t_1 = i\sqrt{w}$ und $t_2 = -i\sqrt{w}$.

Durch die Punkte t_λ legen wir geradlinige Integrationswege in Richtung der „Paßstraßen" (s. Abb. 117a)

$$t = t_\lambda + s e^{i\varphi},$$

worin s die vom Punkte t_λ gemessene Bogenlänge und φ den Neigungswinkel der Geraden gegen die reelle Achse der t-Ebene bezeichnen. Entlang dieses Weges gilt

$$p = -\tfrac{2}{3}\, w t_\lambda - t_\lambda s^2 e^{i2\varphi} - \tfrac{1}{3} s^3 e^{i3\varphi}.$$

Wir wählen φ so, daß erstens das Maximum von p möglichst scharf ist und zweitens $\mathfrak{Re}\,(p) \to -\infty$ strebt, wenn $|s| \to \infty$ geht. Der Wert des Integrals J ist natürlich im übrigen unabhängig vom Wege C und von der Lage φ seiner unendlich fernen Punkte, sofern diese innerhalb der zulässigen φ-Intervalle bleiben. Bei der Auswertung von (77.18) sind die beiden Fälle $w \gtrless 0$ zu unterscheiden.

1. Fall $w < 0$. Hier wählen wir C über $t_0 = -\sqrt{|w|}$ und zur Erzielung des steilsten Abfalls $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (s. Abb. 117a, Weg C_0), d. h. $t = -\sqrt{|w|} + s e^{i\frac{\pi}{2}}$. Wegen $dt = e^{\frac{i\pi}{2}}\, ds$ wird

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{3}|w|^{3/2} - |w|^{1/2} s^2 + \frac{i}{3} s^3\right\} i\, ds.$$

Der Term mit is^3 gibt aus Symmetriegründen einen reellen Faktor, $\cos\left(\frac{s^3}{3}\right)$, der aber in dem allein wesentlichen Integrationsintervall $|s| \lesssim |w|^{-1/4}$ mit $|w| \to \infty$ sich dem Wert 1 nähert. Im Exponenten ist daher für $|w| \to \infty$ der dritte Term gegenüber dem zweiten zu vernachlässigen. Da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|w|^{1/2} s^2}\, ds = \frac{\pi^{1/2}}{|w|^{1/4}}$ ist (Gaußsches Fehlerintegral), folgt

$$J = \frac{i\sqrt{\pi}}{|w|^{1/4}}\, e^{-\frac{2}{3}|w|^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{für} \quad w \to -\infty. \tag{77.19}$$

2. Fall $w > 0$. Die an C zu stellenden Forderungen werden hier durch einen geknickten, aus zwei Halbgeraden C_1 und C_2 bestehenden Weg erfüllt (s. Abb. 117a): Die erste Halbgerade, C_1, geht von $\infty\, e^{\frac{5\pi}{4}i} \left(= -\infty\, e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$ herkommend durch $-i\sqrt{w}$ und endet in $+\sqrt{w}$. Die zweite Halbgerade, C_2, führt von $+\sqrt{w}$ über $+i\sqrt{w}$ nach $\infty e^{\frac{3\pi}{4}i} \left(= -\infty e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)$.

Wir betrachten zunächst den unteren Weg C_1: $t = -i\sqrt{w} + s\, e^{\frac{i\pi}{4}}$, worin s von $-\infty$ bis $+\sqrt{2w}$ läuft. Für den von C_1 herrührenden Beitrag J_1 zum Integral J folgt (mit $dt = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot ds$)

$$J_1 = \exp\left[i\left(\frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \int_{-\infty}^{\sqrt{2w}} \exp\left(-w^{\frac{1}{2}} s^2 - \frac{1}{3} s^3 e^{\frac{i3\pi}{4}}\right) ds.$$

Auf dem Wege C_2 ist $t = i\sqrt{w} + s\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$, und s läuft von $+\sqrt{2w}$ bis $-\infty$. Der von C_2 herrührende Beitrag J_2 erweist sich genau konjugiert komplex (Zeichen *) zu $-J_1$, also $J_2 = -J_1^*$. Damit wird $J = J_1 + J_2 = J_1 - J_1^*$ rein imaginär. Für große w reduziert sich das Integral in J_1 wie oben auf das Gaußsche Fehlerintegral, und wir erhalten schließlich

$$J = 2\,\frac{i\sqrt{\pi}}{w^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \equiv 2\,\frac{i\sqrt{\pi}}{w^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{für} \quad w \to +\infty. \tag{77.20}$$

Die oben für die Funktion A benutzten asymptotischen Formeln sind damit bewiesen.

LITERATUR

[A 29-1] ATKINSON, R. d'E., und F. G. HOUTERMANS, Z. Phys. **54**, 656 (1929)
[A 37-1] ALVAREZ, L. W., Phys. Rev. **52**, 134 L (1937)
[A-54 1] ARNOLD, W. R., J. A. PHILIPPS, G. A. SAWYER, E. J. STOVALL jr. und J. L. TUCK, Phys. Rev. **93**, 483 (1954)
[A 54-2] ATTERLING, H., W. FORSLING, L. W. HOLM, L. MELANDER und B. ASTRÖM, Phys. Rev. **95**, 585 (1954)
[B 26-1] BRILLOUIN, L., C. R. Acad. Sci. Paris **183**, 24 (1926)
[B 30-1] BOTHE, W., und H. BECKER, Z. Phys. **66**, 289 (1930)
[B 35-1] BETHE, H. A., Phys. Rev. **47**, 747 (1935)
[B 35-2] BJERGE, T., und C. H. WESTCOTT, Proc. Roy. Soc. A **150**, 709 (1935)
[B 38-1] BETHE, H. A., und C. L. CRITCHFIELD, Phys. Rev. **54**, 248, 862 (1938)
[B 39-1] BETHE, H. A., Phys. Rev. **55**, 434 (1939)
[B 39-2] BOHR, N., und J. A. WHEELER, Phys. Rev. **56**, 426, 1065 (1939)
[B 47-1] BAGGE, E., Z. Naturforsch. **2a**, 565 (1947)
[B 49-1] BRUNTON, D. C., und G. C. HANNA, Phys. Rev. **75**, 990 (1949)
[B 52-1] BARSHALL, H. H., Phys. Rev. **86**, 431 (1952)
[B 53-1] BOHR, A., und B. R. MOTTELSON, Phys. Rev. **89**, 316 (1953)
[B 60-1] BRUNNER, W., und H. PAUL, Ann. Phys. (7) **6**, 267 (1960)
[C 32-1] CURIE, I., und F. JOLIOT, C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 273 (1932)
[C 32-2] CHADWICK, J., Proc. Roy. Soc. (London) A **136**, 692 (1932)
[C 32-3] COCKCROFT, J. D., Proc. Roy. Soc. (London) A **137**, 229 (1932)
[C 34-1] CHADWICK, J., und M. GOLDHABER, Nature **134**, 237 (1934)
[C 34-2] CURIE, I., und F. JOLIOT, C. R. Acad. Sci. Paris **198**, 254 (1934)
[C 38-1] CURIE, I., und P. SAVITCH, C. R. Acad. Sci. Paris **206**, 906 (1938)
[C 40-1] CORSON, D. R., K. R. MAC KENZIE und E. SEGRÉ, Phys. Rev. **57**, 459 (L) und 1087 (1940)
[C 40-2] CORSON, D. R., K. R. MAC KENZIE und E. SEGRÉ, Phys. Rev. **58**, 672 (1940)
[C 50-1] CHEW, G. F., und M. L. GOLDBERGER, Phys. Rev. **77**, 470 (1950)
[C 54-1] CHACKETT, K. F., et. al., Phil. Mag. **45**, 735 (1954)
[C 56-1] CRANE, W. W., G. H. HIGGINS und H. R. BOWMAN, Phys. Rev. **101**, 1804 (1956)
[C 56-2] CRANBERG, L., G. FRYE, N. NERESON und L. ROSEN, Phys. Rev. **103**, 662 (1956)
[C 58-1] CAMERON, A. G. W., A/Conf. 15/P/198, Genf 1958
[D 53-1] DUFFIELD, R. B., und J. R. HUIZENGA, Phys. Rev. **89**, 1042 (1953)
[E 05-1] EINSTEIN, A., Ann. Phys. **18**, 639 (1905)
[F 34-1] FERMI, E., Nature **133**, 757 und 898 (1934)
[F 35-1] FERMI, E., und E. AMALDI, Ric. Sci. A **6**, 344 (1935)
[F 36-1] FRISCH, O. R., et al., Nature **137**, 149 (1936)
[F 36-2] FRISCH, O. R., und G. PLACZEK, Nature **137**, 357 (1936)
[F 39-1] FRISCH, O. R., Nature **143**, 276 (1939)
[F 39-2] FRENKEL, J. I., J. exp. theoret. Phys. (USSR) **9**, 641 (1939)
[F 40-1] FLEROW, G. N., und L. S. PETRSHAK, J. exp. theoret. Phys. (USSR) **10**, H. 9/10 (1940)
[F 46-1] FRENKEL, S. J., Phys. USSR **10**, 533 (1946)

[F 47-1] Feshbach, H., D. C. Peaslee und V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **71**, 145, 564 (1947)
[F 47-2] Fowler, J. L., und L. Rosen, Phys. Rev. **72**, 926 (1947)
[F 47-3] Frankel, S., und N. Metropolis, Phys. Rev. **72**, 914 (1947)
[F 47-4] Farwell, G., E. Segrè und C. Wiegand, Phys. Rev. **71**, 327 (1947)
[F 48-1] Flügge, S., Z. Naturforsch. **3a**, 97 (1948)
[F 49-1] Feshbach, H., und V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **76**, 1550 (1949)
[F 53-1] Feshbach, H., C. E. Porter und V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **90**, 166 L (1953)
[F 54-1] Feshbach, H., C. E. Porter und V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **96**, 448 (1954)
[F 54-2] Fowler, W. A., V. Colloque Intern. d'Astrophysique Liège. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège (IV) **14**, 88 (1954)
[F 56-1] Fong, P., Phys. Rev. **102**, 434 (1956); **89**, 332 (1953)
[G 39-1] Gamow, G., Nature **144**, 575 (1939)
[G 50-1] Ghiorso, A., R. A. James, L. O. Morgan und G. T. Seaborg, Phys. Rev. **78**, 472 (1950)
[G 51-1] Ghiorso, A., S. G. Thompson, K. Street und G. T. Seaborg, Phys. Rev. **81**, 154 (1951)
[G 53-1] Green, A. E. S., und N. A. Engler, Phys. Rev. **91**, 40 (1953)
[G 54-1] Ghiorso, A., G. B. Rossi, B. G. Harvey und S. G. Thompson, Phys. Rev. **93**, 257 (1954)
[G 54-2] Ghiorso, A., B. G. Harvey, S. G. Thompson und G. R. Choppin, Phys. Rev. **93**, 257 (1954)
[G 55-1] Ghiorso, A., B. G. Harvey, G. R. Choppin, S. G. Thompson und G. T. Seaborg Phys. Rev. **98**, 1518 (1955)
[G 58-1] Gomes, L., J. Walecka und V. Weisskopf, Ann. of Phys. **3**, 241 (1958)
[H 39-1] Hahn, O., und F. Strassmann, Naturwiss. **27**, 11, 89 (1939)
[H 50-1] Hadley, J., und H. York, Phys. Rev. **80**, 345 (1950)
[H 53-1] Hofstädter, R., H. R. Fechter und J. A. McIntyre, Phys. Rev. **92**, 978 (1953)
[H 53-2] Hill, D. L., und J. A. Wheeler, Phys. Rev. **89**, 1102 (1953)
[H 53-3] Huus, T., und Č. Zupančič, Kgl. Dan. Mat.-fys. Medd. **28**, no 1 (1953)
[H 54-1] Hofstädter, R., J. A. McIntyre und B. Hahn, Phys. Rev. **94**, 1084 (1954)
[H 54-2] Harvey, B. G., S. G. Thompson, A. Ghiorso und G. R. Choppin, Phys. Rev. **93**, 1129 (1954)
[H 55-1] Hofstädter, R., und J. H. Fregeau, Phys. Rev. **99**, 1503 (1955)
[H 56-1] Hofstädter, R., Revs. Mod. Phys. **28**, 214 (1956)
[H 58-1] Hemmendinger, A., A/Conf. 15/P/663, Genf 1958
[J 39-1] Joliot, F., Acad. Sci. Paris **208**, 341 (1939)
[K 26-1] Kramers, H. A., Z. Phys. **39**, 828 (1926)
[K 42-1] Krischnan, R. S., und E. A. Nahum, Proc. Roy. Soc. London (A) **180**, 333 (1942)
[K 54-1] Kofoed-Hansen, O., Phys. Rev. **96**, 1045 (1954)
[L 37-1] Langer, R. E., Phys. Rev. **51**, 669 (1937)
[L 58-1] Leachman, R. B., A/Conf. 15/P/2467, Genf 1958
[M 35-1] Moon, P. B., und J. R. Tillman, Nature **135**, 904 (1935)
[M 39-1] Meitner, L., und O. R. Frisch, Nature **143**, 239 (1939)
[M 40-1] McMillan, E. M., und P. H. Abelson, Phys. Rev. **57**, 1185 L (1940)
[M 48-1] G.-Mayer, M., Phys. Rev. **74**, 235 (1948)
[M 50-1] Miller, J. F., J. G. Hamilton, T. M. Purnam, H. R. Haymond und G. B. Rossi, Phys. Rev. **80**, 486 (L) (1950)

[M 52-1] MILLER, D. W., R. K. ADAIR, C. K. BOCKELMAN und S. E. DARDEN, Phys. Rev. 88, 83 (1952)
[M 53-1] MALMFORS, K. G., Ark. Fysik **6**, 49 (1953)
[M 53-2] MOON, P. B., und W. G. DAVEY, Proc. Phys. Soc. (London) A **66**, 956 (1953)
[M 57-1] MITTELSTAEDT, P., Z. Naturforsch. **12a**, 675 (1957)
[M 58-1] MÖSSBAUER, R. L., Naturwiss. **45**, 538 (1958)
[N 34-1] NODDACK, I., Angew. Chemie **47**, 301 (1934)
[N 40-1] NISHINA, Y., T. YASAKI, H. EZOE, K. KIMURA und M. IKAWA, Phys. Rev. **57**, 1182 (1940)
[N 56-1] NEWTON, T. D., Chalk River report CRP-642 A, AECL-329 (1956)
[O 34-1] OLIPHANT, M. L. E., P. HARTECK und O. M. RUTHERFORD, Proc. Roy. Soc. London A **144**, 692 (1934)
[O 54-1] OKAZAKI, A., S. E. DARDEN und R. B. WALTON, Phys. Rev. **93**, 461 (1954)
[P 30-1] POSE, H., Z. Phys. **64**, 1 (1930)
[P 56-1] POST, R. F., Revs. Mod. Phys. **28**, 338 (1956)
[R 19-1] RUTHERFORD, E., Phil. Mag. **37**, 581 (1919)
[R 20-1] RUTHERFORD, E., Proc. Roy. Soc. London A **97**, 374 (1920)
[R 39-1] ROBERTS, R. B., R. C. MEYER und P. WANG, Phys. Rev. **55**, 510 (1939)
[R 52-1] RODEBACK, G. W., und J. S. ALLEN, Phys. Rev. **86**, 446 (1952)
[R 52-2] RADICATI, L. A., Phys. Rev. **87**, 521 L (1952)
[R 56-1] ROLLNIK, H., Z. Phys. **145**, 639 (1956)
[R 56-2] REINES, F., und C. L. COWAN, Nature **178**, 446 (1956); Science **129**, 103 (1956) s. insbesondere auch: REINES, F., C. L. COWAN u. a., Phys. Rev. **117**, 159 (1960)
[S 35-1] SZILLARD, L., Nature **136**, 849 und 950 (1935)
[S 46-1] SEABORG, G. T., E. M. MCMILLAN, J. W. KENNEDY und A. C. WAHL, Phys. Rev. **69**, 366 L (1946)
[S 46-2] SEABORG, G. T., A. G. WAHL und J. W. KENNEDY, Phys. Rev. **69**, 367 L (1946)
[S 47-1] SERBER, R., Phys. Rev. **72**, 1008 (1947)
[S 49-1] SEABORG, G. T., R. A. JAMES und L. O. MORGAN, Paper 22. 1. N. N. E. S. Vol. 14 B. "The Transuranium Elements", (1949)
[S 49-2] SEABORG, G. T., R. A. JAMES und A. GHIORSO, Paper 22.2 loc. cit. [S 49-1]
[S 50-1] SEABORG, G. T., S. G. THOMPSON und A. GHIORSO, Phys. Rev. **80**, 781 (1950)
[S 50-2] SEABORG, G. T., „The Transuranium Elements" National Energy Series Div. IV Vol. 14B, 1 (1950)
[S 52-1] SEABORG, G. T., Phys. Rev. 88, 1429 L (1952)
[S 52-2] SEABORG, G. T., Phys. Rev. **85**, 157 L (1952); **87**, 163 L (1952)
[S 53-1] SCHMITT, R. A., und N. SUGARMAN, Phys. Rev. 89, 1155 (1953)
[S 55-1] SELOVE, W., Phys. Rev. 98, 208 L (1955); **101**, 231 (1956)
[S 55-2] SNELL, A. H., und F. PLEASONTON, Phys. Rev. **100**, 1396 (1955)
[S 57-1] STEIN, W. E., Phys. Rev. **108**, 94 (1957)
[S 58-1] SEABORG, G.T., A/Conf. Genf 1958. 10. Sept. "Recent Developments in the Field of the Transuranium Elements"
[S 59-1] SCHIFFER, J., und W. MARSHALL, Phys. Rev. L. **3**, 556 (1959) (siehe auch HANNA et al., ebenda **4**, 28 (1960))
[T 50-1] THOMPSON, S. G., A. GHIORSO und G. T. SEABORG, Phys. Rev. **80**, 781 (1950)
[T 50-2] THOMPSON, S. G., K. STREET jr., A. GHIORSO und G. T. SEABORG, Phys. Rev. **80**, 790 (1950)
[U 57-1] UNSÖLD, A., Naturwiss. **44**, 145 (1957)

[W 26-1] Wentzel, G., Z. Phys. **38**, 518 (1926)
[W 36-1] v. Weizsäcker, C. F., Naturwiss. **24**, 813 (1936)
[W 37-1] Weisskopf, V. F., Phys. Rev. **52**, 295 (1937)
[W 38-1] v. Weizsäcker, C. F., Phys. Z. **39**, 633 (1938)
[W 40-1] Weisskopf, V. F., D. H. Ewing, Phys. Rev. **57**, 472 (1940)
[W 47-1] Wilson, R. R., Phys. Rev. **72**, 189 (1947)
[W 47-2] Wigner, E. P., und L. Eisenbud, Phys. Rev. **72**, 29 (1947)
[W 48-1] Wigner, E. P., und K. Way, Phys. Rev. **73**, 1318 (1948)
[W 50-1] Weisskopf, V. F., Helv. Phys. Acta **23**, 187 (1950)
[W 51-1] Weisskopf, V. F., Science **113**, 101 (1951)
[W 52-1] Watt, B. E., Phys. Rev. **87**, 1037 (1952)
[W 53-1] Walt, M., R. L. Becker, A. Okazaki und R. E. Fields, Phys. Rev. **89**, 1271 (1953)
[W 55-1] Woeste, K., Z. Phys. **141**, 643 (1955); **143**, 31 (1956)
[Y 35-1] Yukawa, H., Proc. Phys.-Mat. Soc. Jap. **17**, 48 (1955)

Fachliteratur zum Kapitel VI

[B. u. W.] J. M. Blatt und V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, New York 1954; deutsche Übersetzung: Leipzig 1959
[Dänzer] H. Dänzer, Einführung in die Theoretische Kernphysik, Karlsruhe 1948
[Evans] R. D. Evans, The Atomic Nucleus, New York, Toronto, London 1955
[Fermi] E. Fermi, Nuclear Physics, Chicago 1953
[Fowler] H. Fowler, Statistische Mechanik, Leipzig 1931
[Frenkel] J. I. Frenkel, Prinzipien der Theorie der Atomkerne, Übersetzung aus dem Russischen, Berlin 1957
[Gamow] Gamow, G., und C. L. Critchfield, Theorie of Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources, Oxford 1951
[Green] Green, A. E. S., Nuclear Physics, New York, Toronto, London 1955
[M. u. F.] P. M. Morse und H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, New York, Toronto, London 1953
[Segrè] E. Segré, Experimental Nuclear Physics, Bd. I und II, London 1953
[Sommerfeld] A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. IV, Leipzig 1959
[W. u. F.] D. Walter und O. R. Frisch, Progress in Nucl. Physics, Bd. 4, London und New York 1955
[Siegbahn] K. Siegbahn, Beta- and Gamma-Ray Spectroskopy, Amsterdam 1955

Ferner: Kernreaktionen I, II und III im Handbuch der Physik. Herausgegeben von S. Flügge, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1957); (1958) und (1959)
Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Bd. IV, Leipzig 1960
Dawydow, Theorie der Atomkerne, Moskau 1958

VII. Kernprozesse bei extrem hohen Energien[1])

Die Bedeutung der physikalischen Vorgänge bei extrem hohen Energien liegt darin, daß alle gegenwärtig bekannten *Elementarteilchen* in *hochenergetischen* Prozessen erzeugt werden können. Diese Prozesse sind der Zugang zur Physik der Elementarteilchen, von der man sich eine tiefere Einsicht in die Natur der Kernkräfte erhofft. Die Elementarteilchen sind die einfachsten uns gegenwärtig bekannten Strukturelemente der Materie.
So entsteht beispielsweise beim Stoß zwischen 2 Protonen ein positives π-Meson durch folgenden Prozeß:

$$p + p \rightarrow n + p + \pi^+.$$

Als Voraussetzung für das Auftreten dieser Reaktion muß gemäß des *Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenzprinzips* die Summe der kinetischen Energien der beiden Protonen im Schwerpunktssystem gleich oder größer als die Ruheenergie des π^+-Mesons sein.
Wie kaum auf einem anderen Gebiet der modernen Physik wurden bei der Erforschung der Elementarteilchen in den letzten zehn Jahren eine Vielzahl bedeutsamer Entdeckungen gemacht. So sei als Beispiel der Nachweis der Existenz des *Antiprotons* durch SEGRÉ und Mitarbeiter [C 55-1] im Jahre 1955 genannt.
Die Mehrzahl der neuen Elementarteilchen wurde in der kosmischen Strahlung entdeckt. Von großer Bedeutung für die systematischen Untersuchungen sind jedoch die großen Beschleunigungsmaschinen, mit deren Hilfe sich Protonen bis zu kinetischen Energien von 10^8 bis 10^{10} eV beschleunigen lassen. Die Maschinen ermöglichen die künstliche Erzeugung der Elementarteilchen mit merklichen Intensitäten und damit eine systematische Erforschung ihrer Eigenschaften. Während die Durchführung dieser Aufgabe für die Nukleonen und leichten Mesonen bereits weit vorangeschritten ist, haben die Untersuchungen der schwereren Teilchen erst begonnen.

Die nachfolgend benutzte *Nomenklatur der Elementarteilchen* klassifiziert diese auf drei Arten:

a) Entsprechend ihrer Masse werden die Teilchen in drei Gruppen eingeteilt. Jede Gruppe wird durch einen großen lateinischen Buchstaben bezeichnet:

1. *L-Mesonen:* Teilchen, deren Masse größer als die des Elektrons und gleich oder kleiner als die des π-Mesons ist.

2. *K-Mesonen:* Teilchen, deren Masse zwischen der des π-Mesons und der des Nukleons liegt.

3. *Y-Teilchen (Hyperonen):* Teilchen, deren Masse zwischen der des Nukleons und der des Deuterons liegt.

[1]) Das Manuskript dieses Kapitels wurde im Mai 1957 abgeschlossen.

b) Bezeichnung der Teilchen durch Eigennamen, wobei die verschiedenen L- und K-Mesonen durch kleine und die verschiedenen Hyperonen durch große griechische Buchstaben charakterisiert werden (siehe Anhang I, Tabelle 5).

c) Phänomenologische Beschreibung der Teilchen entsprechend ihrer Zerfallsart:

1. *V-Ereignisse:* Zerfälle im Fluge von K-Mesonen oder Hyperonen.

2. *S-Ereignisse:* Zerfälle oder Kerneinfänge zur Ruhe gekommener K-Mesonen oder Hyperonen.

Obwohl hier und in den folgenden Paragraphen dieses Kapitels alle stabilen und unstabilen Teilchen als Elementarteilchen bezeichnet werden, deuten die bisherigen Forschungsergebnisse darauf hin, daß durchaus nicht alle als „elementare" Teilchen bezeichnet werden können. So scheinen z. B. die Hyperonen *angeregte Nukleonen* zu sein. In der englischsprachigen Fachliteratur findet man auch die K-Mesonen und die Hyperonen oft als „*strange particles*" (seltsame Teilchen) bezeichnet.

§ 78. Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Eine der Hauptquellen unseres heutigen Wissens über die Kernkräfte bilden Versuche über die *Streuung von Nukleonen an freien Nukleonen.* In dem Kapitel über die Theorie leichtester Kerne (Kap. VIII) ist eine ausführliche theoretische Analyse der Streudaten bei kleineren Energien enthalten. Nachstehend werden die wesentlichsten experimentellen Ergebnisse der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung bei hohen und höchsten Energien wiedergegeben.

Die de Broglie-Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p} = \frac{9{,}0 \cdot 10^{-13}}{E^{1/2}}$ (E in MeV) eines Nukleons der kinetischen Energie $E \gtrsim 100$ MeV ist kleiner als die Reichweite der Kernkräfte ($\sim 10^{-13}$ cm). Darin liegt die besondere Bedeutung der hochenergetischen Streuprozesse. Ein solches Teilchen dient also gleichsam als Sonde, mit deren Hilfe man die inneren Bereiche des Kraftfeldes eines Nukleons untersuchen kann. Oberhalb einer Energie von etwa 300 MeV treten neben der elastischen Streuung bei der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung auch unelastische Prozesse auf, die mit der Erzeugung geladener und neutraler Mesonen verbunden sind.

Die für die Streuexperimente benötigten hochenergetischen Protonen erhält man durch direkte Beschleunigung von Wasserstoffkernen in den großen Beschleunigungsmaschinen (s. Bd. I). Mit Hilfe magnetischer Analysatoren und dazugehöriger Kollimatoren läßt sich die Energie und die Richtung des herausgeführten Strahls sehr genau definieren.

Zum direkten Nachweis der hochenergetischen Protonen wurden in den meisten Untersuchungen Szintillationszähler (s. Bd. I) benutzt.

In Abb. 118 ist das Schema einer Versuchsanordnung zur Messung der elastischen *p-p*-Streuung skizziert.

Die Intensität des einfallenden Protonenstrahls wird mit der Ionisationskammer kontrolliert. Durch eine Bestimmung der sich im Faraday-Käfig ansammelnden Ladung läßt sich die Kammer eichen. Die beiden am Stoß beteiligten Protonen werden durch die zwei gekoppelten Szintillationszählerteleskope nachgewiesen.

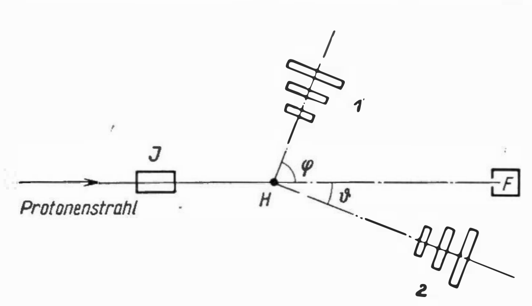


Abb. 118. Schema einer Versuchsanordnung zur Messung der Winkelverteilung bei der elastischen *p-p*-Streuung (*I* = Ionisationskammer; *H* = wasserstoffhaltiger Streukörper; 1 und 2 = Zählerteleskope; *F* = Faraday-Käfig)

Mit dieser Anordnung läßt sich der *differentielle Wirkungsquerschnitt* als Funktion des Streuwinkels messen. Diese Werte werden aber stets auf den Streuwinkel im Schwerpunktssystem bezogen, da sich die theoretischen Betrachtungen in diesem System einfacher durchführen lassen. Daher seien im folgenden einige zur Analyse der Streudaten wichtige Beziehungen der Relativitätskinematik zusammengestellt.

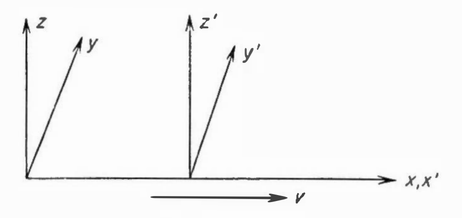


Abb. 119. Die Lorentz-Transformation

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme s und s', die sich mit gleichförmiger Translationsgeschwindigkeit v — wie in Abb. 119 angedeutet — gegeneinander bewegen und benutzen die Abkürzungen $\beta = \frac{v}{c}$ (c = Lichtgeschwindigkeit), $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Ein Punkt mit den Raum-Zeit-Koordinaten x, y, z, t im s-System besitze in bezug auf das s'-System die Koordinaten x', y', z', t'. Dann gibt die Lorentz-Transformation der speziellen Relativitätstheorie den Zusammenhang zwischen den Koordinaten in beiden Systemen:

$$x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \tag{78.1a}$$

Löst man diese Gleichungen nach den ungestrichenen Koordinaten auf, so tritt $-v$ anstelle von v:

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right). \tag{78.1b}$$

Durch die Bildung des Ausdrucks

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \text{const}$$

zeigt sich, daß dieser gegenüber einer Lorentz-Transformation invariant ist.

Ist m die Ruhemasse, p der Impuls und U die Gesamtenergie eines Teilchens, das sich im s-System mit der Geschwindigkeit $u = \frac{pc^2}{U}$ bewegt, so gelten für den Energie-Impulsvektor $\left(p_x, p_y, p_z, \frac{U}{c}\right)$ die gleichen Transformationsformeln wie für den Ortsvektor (x, y, z, ct):

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}U\right); \quad p_y' = p_y; \quad p_z' = p_z; \quad U' = \gamma(U - vp_x). \tag{78.2a}$$

Auch hier tritt wiederum $-v$ anstelle von v, wenn man die Gleichungen nach den ungestrichenen Größen auflöst:

$$p_x = \gamma\left(p_x' + \frac{v}{c^2}U'\right); \quad p_y = p_y'; \quad p_z = p_z'; \quad U = \gamma(U' + vp_x'). \tag{78.2b}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, daß der Ausdruck

$$U^2 - (c^2p_x^2 + c^2p_y^2 + c^2p_z^2) = U^2 - c^2p^2 = U'^2 - c^2p'^2 = \text{const} \tag{78.3}$$

unabhängig vom Bezugssystem ist. Ruht das Teilchen im s'-System, so ist $p' = 0$ und $U' = mc^2$. Also gilt in einem beliebigen Bezugssystem

$$U^2 - c^2p^2 = m^2c^4. \tag{78.4}$$

Ferner ergeben sich für ein im gestrichenen System ruhendes Teilchen aus den Transformationsformeln (78.2b) folgende Beziehungen für den Impuls p und die Gesamtenergie U:

$$p = \gamma mv, \quad U = \gamma mc^2. \tag{78.5}$$

Es folgt jetzt die Betrachtung des Stoßes zwischen zwei Teilchen der gleichen Ruhemasse m (Abb. 120).

Im Schwerpunktssystem ist der Gesamtimpuls der beiden Teilchen Null und die Gesamtenergie $2mc^2\gamma$. Im Laborsystem ruht eines der Teilchen, während das andere den Impuls p besitzt, der durch Berechnung aus Gleichung (78.2b) den Wert erhält

$$p = 2\,\gamma^2 m\beta c.$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktssystems gegenüber dem Laborsystem genügt also der Beziehung

$$\frac{\beta}{1-\beta^2} = \frac{p}{2mc}. \tag{78.6}$$

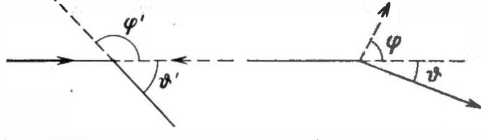


Abb. 120. Elastischer Stoß zweier Teilchen

Nach dem Stoß hat der Impuls im Schwerpunktssystem die Komponenten

$$p_x' = p'\cos\vartheta', \quad p_y' = p'\sin\vartheta'.$$

Durch Einsetzen in die Transformationsformeln (78.2b) ergeben sich damit die Impulskoordinaten des Teilchens nach dem Stoß im Laborsystem zu

$$p_x = \gamma\left(p_x' + \frac{v}{c^2}\frac{p'c^2}{u'}\right) = \gamma\left(p'\cos\vartheta' + \frac{v}{u'}p'\right);$$

$$p_y = p'\sin\vartheta'.$$

Der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Teilchens nach dem Stoß und der x-Achse transformiert sich somit wie folgt:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\sin\vartheta'}{\gamma\left(\cos\vartheta' + \frac{v}{u'}\right)}. \tag{78.7}$$

Bei sehr großen Geschwindigkeiten, d.h. $\frac{v}{c} \sim \frac{u'}{c} \sim 1$, nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2}. \tag{78.8}$$

Man findet diese Beziehung auch oft in der Form

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} = \left(\frac{U}{2mc^2}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\vartheta \tag{78.9}$$

geschrieben, wobei U die Gesamtenergie beider Teilchen im Laborsystem ist.

Für den Winkel φ, unter dem sich das angestoßene Teilchen nach dem Stoß bewegt, ergibt sich die Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\gamma}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta'}{2}. \tag{78.10}$$

Als letztes soll die für die nachfolgenden Betrachtungen wichtige Beziehung zwischen der Gesamtenergie U' im Schwerpunktssystem und der Gesamtenergie U_1 des stoßenden Teilchens (Ruhemasse m_1) im Laborsystem bestimmt werden, wenn das gestoßene Teilchen mit der Ruhemasse m_2 im Laborsystem ruht. Aus Gleichung (78.4) ergibt sich dann

$$\frac{U'^2}{c^2} = \frac{(U_1 + m_2 c^2)^2}{c^2} - p_1{}^2.$$

Der Impuls des stoßenden Teilchens im Laborsystem läßt sich mit Hilfe von Gleichung (78.4) ausdrücken:

$$p_1{}^2 = \frac{U_1{}^2 - m_1{}^2 c^4}{c^2}.$$

Damit erhält man die gesuchte Beziehung:

$$U'^2 = m_1{}^2 c^4 + m_2{}^2 c^4 + 2\,U_1 m_2 c^2. \tag{78.11}$$

Sind die Ruhemassen beider Teilchen einander gleich ($m_1 = m_2 = m$), so wird

$$U'^2 = 2m^2c^4 + 2\,U_1 mc^2. \tag{78.12}$$

Bezeichnet man die kinetische Energie mit E, so ist

$$U' = 2E' + 2mc^2, \quad U_1 = E_1 + mc^2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (78.12) ergibt sich die kinetische Energie im Laborsystem zu

$$E_1 = 4E'\left(1 + \frac{E'}{2mc^2}\right). \tag{78.13}$$

Diese Gleichung zeigt, daß für sehr große Energien der Wert E' mit der Quadratwurzel aus E_1 anwächst.

a) Die elastische Proton-Proton-Streuung

In der Abbildung 121 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der Proton-Proton-Streuung in Abhängigkeit vom Streuwinkel im Schwerpunktssystem für verschiedene Protonenenergien aufgetragen.

Die experimentellen Daten zeigen, daß die elastische Streuung unterhalb von 350 MeV isotrop ist. Oberhalb von 350 MeV setzt allmählich eine Anisotropie der Winkelverteilung ein. Als ein Maß für diese Anisotropie kann das Verhältnis der differentiellen Streuquerschnitte bei $\vartheta' = 30°$ und $\vartheta' = 90°$ gelten. In Tabelle 40 ist das Ergebnis einer Untersuchung der anomalen Änderung des elastischen Streuquerschnittes wiedergegeben. Die Messungen wurden am Synchrozyklotron in Dubna durchgeführt.

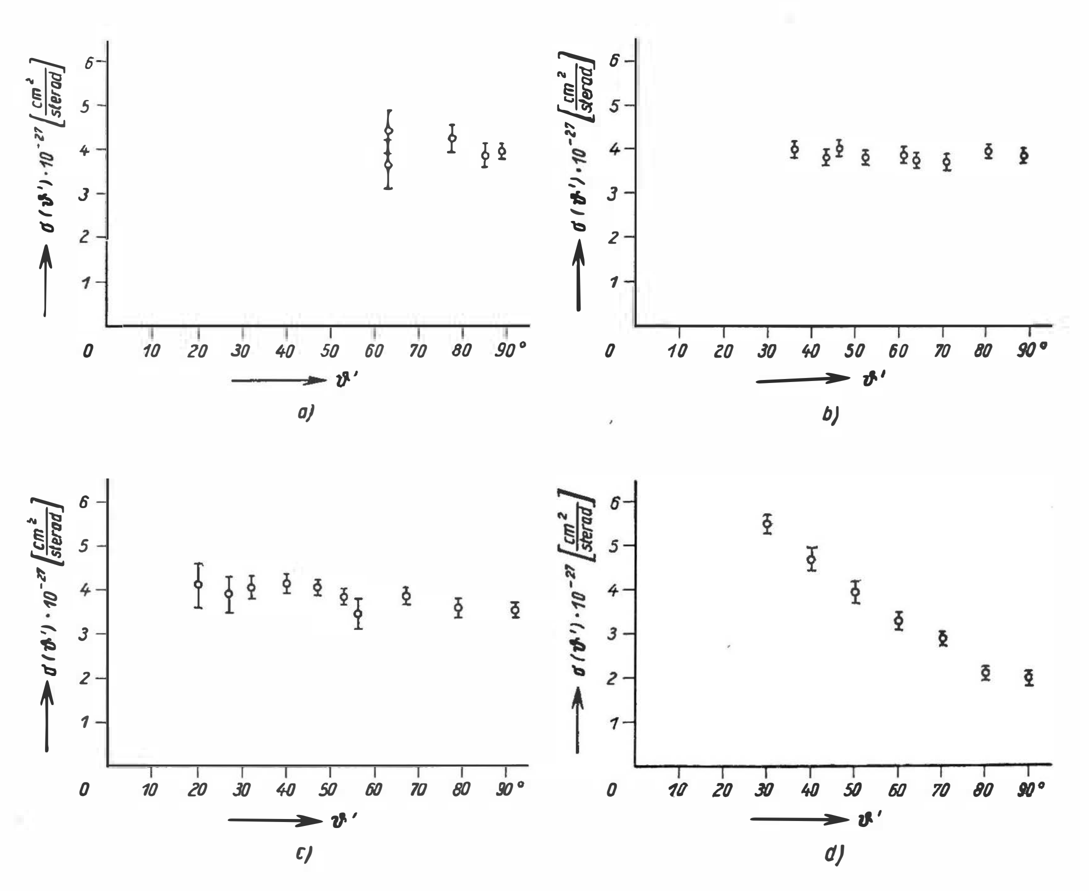


Abb. 121. Differentieller Wirkungsquerschnitt der p-p-Streuung bei einer Energie von
a) 120 MeV [C 51-1] b) 345 MeV [C 51-1] c) 460 MeV [M 54-1] d) 657 MeV [B 54-1]

Bei einem Vergleich der Abb. 121a bis d erscheint bemerkenswert, daß die Zunahme des differentiellen Streuquerschnitts bei kleinen Winkeln durch die Abnahme bei großen Winkeln kompensiert wird, so daß der totale Wirkungsquerschnitt für die elastische p-p-Streuung innerhalb der Fehlergrenze den gleichen Wert von $\approx 23 \cdot 10^{-27}$ cm^2 behält.

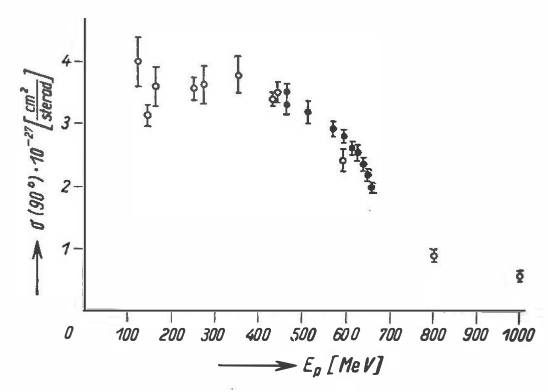


Abb. 122. Energieabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnittes der p-p-Streuung unter dem Winkel von 90° [M 55-1] (● = Daten aus der UdSSR, ○ = Daten aus den USA)

In Abb. 122 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der elastischen p-p-Streuung unter dem Winkel $\vartheta' = 90°$ in Abhängigkeit von der Energie E der Protonen aufgetragen. Bis zu einer Energie von $\sim$ 500 MeV hat der differentielle Streuquerschnitt innerhalb der Fehlergrenzen einen konstanten Wert von

$$\approx 3{,}7 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{sterad}.$$

Danach setzt ein starker Abfall ein. Wie weiter unten ausgeführt wird, steigt oberhalb von etwa 500 MeV der Erzeugungsquerschnitt für π-Mesonen stark an. Diese Zunahme des unelastischen Querschnitts ist, wie Tabelle 40 zeigt, von einer wachsenden Anisotropie der elastischen Proton-Proton-Streuung begleitet. Qualitativ läßt sich dieser Zusammenhang damit erklären, daß die elastische Streuung unter großem Winkel zugunsten der unelastischen Prozesse abnimmt. Die unelastischen Prozesse werden also von einer elastischen Streuung unter kleinem Winkel begleitet *(Diffraktionsstreuung)*.

Tabelle 40. Zur Änderung des elastischen Streuquerschnitts

Energie [MeV]	460	562	610	634	645	657
$\frac{\sigma(30°)}{\sigma(90°)}$	1,26 ± 0,15	1,67 ± 0,15	2,16 ± 0,15	2,77 ± 0,20	2,97 ± 0,25	3,20 ± 0,20

b) Die elastische Neutron-Neutron-Streuung

Die elastische Neutron-Neutron-Streuung bei hohen Energien wurde erstmalig am Synchrozyklotron in Dubna durch Dzhelepov und Mitarbeiter untersucht [D 54-1].

Hochenergetische Neutronen gewinnt man durch den Prozeß des *Ladungsaustausches.* Durchläuft ein Proton hoher Energie einen Atomkern, so kann es seine

Ladung auf ein Neutron übertragen und setzt seinen Weg als Neutron fort. Beim Beschuß eines Berylliumtargets durch Protonen einer Energie von 480 MeV erhält man beispielsweise in Vorwärtsrichtung einen Neutronenstrahl mit einem breiten Maximum um 380 MeV.

Dzhelepov und Mitarbeiter bestimmten den Wirkungsquerschnitt der elastischen n-n-Streuung bei einer mittleren Neutronenenergie von 300 MeV, indem sie die Winkelverteilungen der unter gleichen Bedingungen an Deuteronen und an Protonen gestreuten Neutronen miteinander verglichen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Streuung von Neutronen an freien Neutronen ist durch die Differenz

$$\sigma_{nn}(\vartheta') \sim \sigma_{nd}(\vartheta') - \sigma_{np}(\vartheta')$$

gegeben, da bei einer Neutronenenergie von 300 MeV und einem Streuwinkel im Schwerpunktssystem $\geqq 50°$ das Neutron im Deuteron als freies Teilchen betrachtet werden kann. Für kleinere Streuwinkel trifft diese Voraussetzung nicht mehr zu, da man die Bindungsenergie des Deuterons gegenüber der auf das Neutron übertragenen Energie nicht mehr vernachlässigen kann. Abb. 123 zeigt das Schema der Versuchsanordnung. Zum Nachweis der gestreuten Neutronen diente eine Ionisationskammer, die mit Wismut bedeckte Ringelektroden besaß. In der Kammer werden die Spaltprodukte des Wismuts registriert. Die Reaktionsschwelle der Wismut-Spaltung durch schnelle Neutronen liegt bei etwa 50 MeV. Durch schrittweise Änderung des Abstandes x zwischen Streukörper und Detektor wurde der Streuwinkel variiert.

In Abb. 124 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der elastischen n-n-Streuung in Abhängigkeit vom Streuwinkel im Schwerpunktssystem aufgetragen. Diese Werte mit den Ergebnissen der elastischen p-p-Streuung verglichen, lassen die gute Übereinstimmung erkennen.

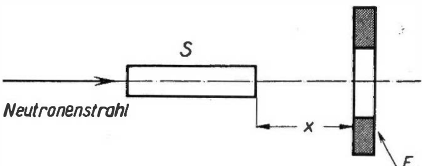


Abb. 123. Schema der Versuchsanordnung zur Messung der Winkelverteilung bei der elastischen n-n-Streuung. S = Streukörper (D_2O oder H_2O); E = mit Wismut belegte Ringelektrode [D 54-1]

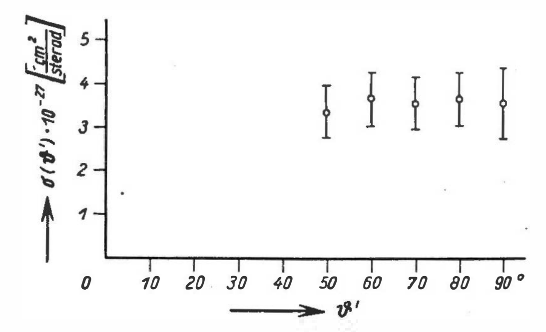


Abb. 124. Differentieller Wirkungsquerschnitt der n-n-Streuung bei einer Energie von 300 MeV [D 54-1]

Untersuchungen der n-n-Streuung bei 590 MeV zeigten die gleiche Anisotropie der Winkelverteilung wie die p-p-Streuung bei derselben Energie [M 55-1]. Diese experimentellen Ergebnisse weisen darauf hin, daß auch im Bereich hoher Energien die Hypothese von der *Ladungssymmetrie der Kernkräfte* gilt.

c) Die elastische Neutron-Proton-Streuung

Nachdem im vorstehenden eine Betrachtung der Wechselwirkung gleichartiger Nukleonen durchgeführt wurde, folgt nunmehr ein Überblick über die experimentellen Ergebnisse der elastischen Neutron-Proton-Streuung. Aus diesen Untersuchungen lassen sich Erkenntnisse über die Kernwechselwirkung zweier ungleichartiger Nukleonen gewinnen. Auch hier sei zunächst das Schema einer Versuchsanordnung skizziert (Abb. 125).

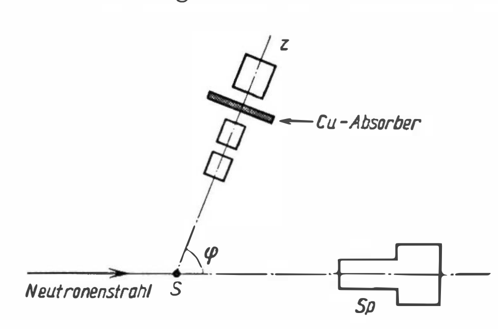


Abb. 125. Schema einer Versuchsanordnung zur Messung der Winkelverteilung bei der elastischen n-p-Streuung
(S = Streukörper; Z = Zählerteleskop; Sp = Spaltungskammer) [H 49-1]

Das Neutronenbündel durchläuft einen dünnen wasserstoffhaltigen Streukörper. Zur Messung der Intensität des Bündels dient eine Ionisationskammer, deren Elektroden mit Wismut bedeckt sind. Die Rückstoßprotonen werden in dem aus drei Proportionalzählern bestehenden Teleskop registriert. Zwischen dem zweiten und dem dritten Zähler befindet sich ein Cu-Absorber, dessen Dicke etwas kleiner ist als die Reichweite der Rückstoßprotonen, die einem bestimmten Winkel φ bzw. einer bestimmten Neutronenenergie entsprechen. Auf diese Weise lassen sich Dreifachkoinzidenzen verhindern, die durch Neutronen geringerer Energie ausgelöst werden könnten.

In Abb. 126 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der elastischen n-p-Streuung für die Energien 90 MeV, 380 MeV und 590 MeV in Abhängigkeit vom Streuwinkel im Schwerpunktssystem aufgetragen. Meßpunkte für kleine Winkel fehlen, da mit abnehmendem ϑ' die Energie der Rückstoßprotonen gegen Null geht.

Tabelle 41.
Winkelverteilung bei elastischer n-p-Streuung

Energie [MeV]	$\frac{\sigma(180°)}{\sigma(90°)}$	$\frac{\sigma(180°)}{\sigma(0°)}$
90	3,1	≈ 1
380	5,8	$\approx 2{,}5$

Die allgemeine Form der Winkelverteilung zeigt ein Minimum bei $\vartheta' = 90°$. Für eine Energie von 90 MeV ist die Verteilung um 90° näherungsweise symmetrisch. Bei einer Energie von 380 MeV ist die Verteilung stark asymmetrisch geworden. Die Daten der Tabelle 41 lassen diese Asymmetrie deutlich erkennen.

Das ausgeprägte Maximum bei 180° zeigt, daß solche Stöße bevorzugt sind, bei denen das Proton in etwa der gleichen Richtung und mit annähernd gleicher

Energie weiterfliegt wie das stoßende Neutron. Offenbar handelt es sich hierbei um einen Ladungsaustausch zwischen einem fliegenden Neutron und einem ruhenden Proton. Da mit wachsender Energie die Asymmetrie zunimmt, vergrößert sich also offenbar auch der Anteil der Kernkräfte mit Austauschcharakter.

Zur Erforschung des Einflusses der spinabhängigen Kernkräfte wird auch die *Streuung polarisierter Nukleonen* an Nukleonen untersucht.

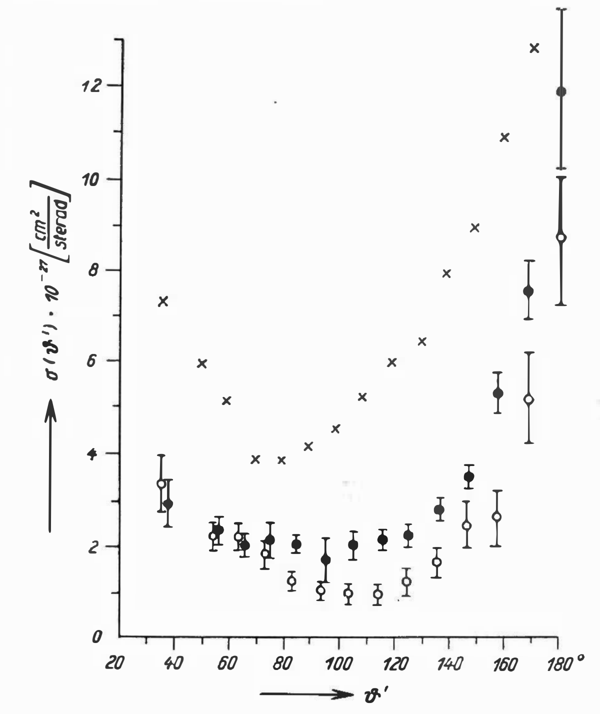
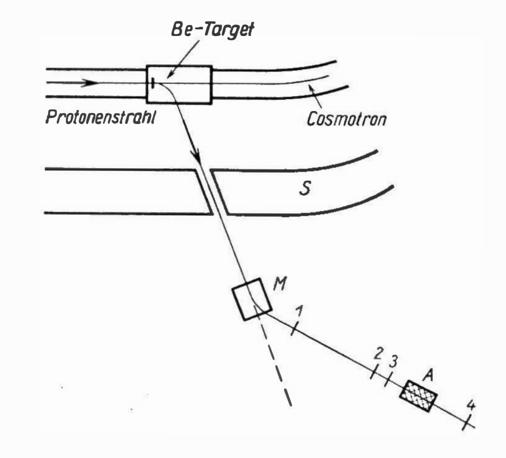


Abb. 126.
Differentieller Wirkungsquerschnitt der n-p-Streuung bei einer Energie von
a) × = 90 MeV [H 49-1]
b) ● = 380 MeV [D 54-2]
c) ○ = 590 MeV [M 55-1]

d) Die unelastische Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Eine Untersuchung des totalen Wirkungsquerschnittes der *Proton-Proton-Wechselwirkung* im Energiebereich von 0,4 bis 2,6 GeV haben Shapiro und seine Mitarbeiter an dem nach außen geführten Protonenstrahl des Cosmotrons in Brookhaven durchgeführt. Die von Ihnen benutzte Anordnung zeigt Abb. 127 [C 56-1]. Der totale Wirkungsquerschnitt wurde durch Messung der Absorption des Protonenstrahls beim Durchgang durch einen wasserstoffhaltigen Absorber bestimmt. Das aus den Szintillationszählern 1 bis 3 bestehende Teleskop diente zur Messung der Intensität des einfallenden Strahls.



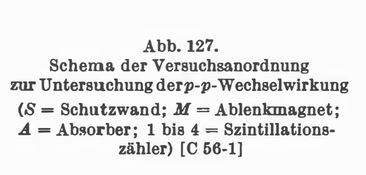


Abb. 127.
Schema der Versuchsanordnung zur Untersuchung der p-p-Wechselwirkung (S = Schutzwand; M = Ablenkmagnet; A = Absorber; 1 bis 4 = Szintillationszähler) [C 56-1]

Mit dem in Koinzidenz geschalteten Zähler 4 wurde die Zahl der Protonen bestimmt, die den Absorber ohne Wechselwirkung durchliefen und durch Änderung der magnetischen Feldstärke des Ablenkmagneten die Energie der einfallenden Protonen variiert.

Die Ergebnisse ihrer Messungen sind in Abb. 128 eingetragen. In die gleiche Abbildung sind auch Meßpunkte eingezeichnet, die in verschiedenen anderen, mit großen Beschleunigungsmaschinen ausgerüsteten Laboratorien gewonnen wurden.

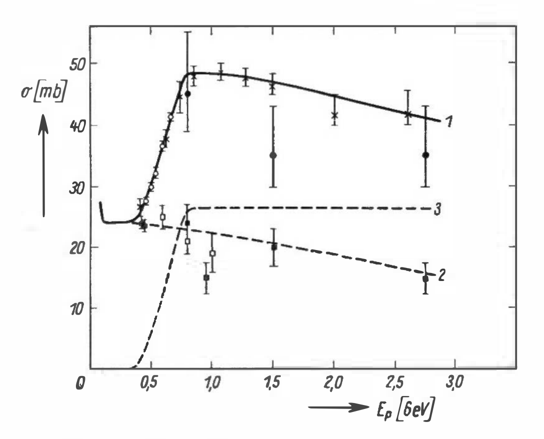


Abb. 128. Totaler Wirkungsquerschnitt der p-p-Wechselwirkung als Funktion der kinetischen Energie [F 56-1] (Kurve 1 = totaler Wirkungsquerschnitt für elastische und unelastische Wechselwirkung, Kurve 2 = totaler Wirkungsquerschnitt für elastische Wechselwirkung, Kurve 3 = totaler Wirkungsquerschnitt für unelastische Wechselwirkung)

Bemerkenswert beim Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts ist der starke Anstieg zwischen 400 und 800 MeV.

Dieses Anwachsen oberhalb von 400 MeV ist auf die *Mesonenerzeugung* zurückzuführen. Das wird deutlich, wenn man den Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts allein für die elastische p-p-Wechselwirkung betrachtet (s. Kurve 2 in Abb. 128). Die eingezeichneten Meßwerte wurden in Zählerexperimenten (s. Abb. 118) und durch Untersuchung der p-p-Streuung in der Nebelkammer gewonnen. Die Differenzkurve 3 zeigt also den Verlauf des totalen Wirkungsquerschnittes für die Mesonenerzeugung bei der p-p-Streuung. Aus dem Verlauf der Kurven 2 und 3 erkennt man, daß bei einer Energie von etwa 750 MeV die Hälfte aller p-p-Stöße zur Erzeugung von Mesonen führt.

Der Wendepunkt der Kurve 3 im Bereich des starken Anstieges liegt bei einer kinetischen Energie des Protons im Laborsystem von etwa 630 MeV. Diesem Wert entspricht im Schwerpunktssystem eine kinetische Energie von insgesamt ≈ 290 MeV (Formel (78.13)). Der totale Wirkungsquerschnitt der Streuung von π-Mesonen an Protonen hat bei einer Gesamtenergie des π-Mesons im Schwerpunktssystem von etwa 285 MeV ein ausgeprägtes Maximum (s. S. 360). Dieses Maximum wird der *Resonanzwechselwirkung* eines π-Mesons mit einem Nukleon zugeschrieben, die zur Bildung eines sehr kurzlebigen angeregten Nukleons führt. Die näherungsweise Übereinstimmung der beiden Energiewerte im Schwerpunktssystem legt die Annahme nahe, daß auch bei der p-p-Streuung bei ≈ 290 MeV im Schwerpunktssystem eine *Resonanzwechselwirkung* stattfindet:

$$p + p \to n + (\text{angeregtes Proton}). \qquad (78.14)$$
$$\searrow \pi^+ + p$$

Trifft ein Nukleon mit der kinetischen Energie E auf ein im Laborsystem ruhendes Nukleon, so ist die Energieschwelle für die Erzeugung eines π-Mesons durch dessen Ruheenergie $m_\pi c^2$ und durch die Energie- und Impuls-Erhaltungssätze bestimmt. Da beim Stoß zweier Nukleonen im Schwerpunktssystem der Gesamtimpuls vor bzw. nach dem Stoß Null ist, können beide Nukleonen ihre gesamte kinetische Energie $2E'$ zur Erzeugung eines π-Mesons umsetzen. Die Energieschwelle der Mesonenerzeugung besitzt also im Schwerpunktssystem den Wert $m_\pi c^2 \approx 140$ MeV. Durch Einsetzen dieser Energie in (78.13) ergibt sich im Laborsystem

$$E_{\text{Schwelle}} = 2\, m_\pi c^2 \left(1 + \frac{m_\pi}{4\, m_n}\right) \approx 290 \text{ MeV}.$$

Nach einem mesonenerzeugenden Stoß mit dieser Energie befinden sich die drei Teilchen im Schwerpunktssystem in Ruhe. Daraus folgt, daß sie sich im Laborsystem mit gleicher Geschwindigkeit in Vorwärtsrichtung bewegen. Entsprechend ihren Massen besitzen also die beiden Nukleonen eine kinetische Energie von jeweils ≈ 70 MeV und das π-Meson eine Energie von ≈ 12 MeV.

Besitzt das einfallende Nukleon vor dem Stoß eine kinetische Energie, die größer als der Schwellenwert ist, so verteilt sich nach dem Stoß die Energie derart auf die beiden Nukleonen und das π-Meson, daß im Schwerpunktssystem die Vektorsumme der drei Impulse Null wird. Das erzeugte Meson wird also im Schwerpunkts- und im Laborsystem eine kontinuierliche Energieverteilung besitzen.

Findet ein Stoß zwischen zwei Protonen mit einer Energie statt, die größer als der Schwellenwert ist, so kann ein Meson durch folgende Reaktionen erzeugt werden:

$$p + p \to p + n + \pi^+, \tag{78.15a}$$

$$\to d + \pi^+, \tag{78.15b}$$

$$\to p + p + \pi^0. \tag{78.15c}$$

Entsprechende Reaktionen gelten bei n-p- bzw. n-n-*Stößen*. Übersteigt die Energie der stoßenden Nukleonen den Schwellenwert um ein Mehrfaches, so würde damit die Möglichkeit einer *Vielfacherzeugung von Mesonen* gegeben sein. In den an der kosmischen Strahlung exponierten Kernemulsionen wurden einige Ereignisse gefunden, die sich als Mesonen-Vielfacherzeugung deuten lassen. Fowler u. a. [F 54-1] untersuchten am Cosmotron die Neutron-Proton-Wechselwirkung bei einer Neutronenenergie von etwa 2 GeV. Dabei konnten sie erstmalig sicher eine Zweifacherzeugung nachweisen. Bei Proton-Proton-Wechselwirkungen sind folgende Reaktionen möglich, die zu einer gleichzeitigen Erzeugung von zwei Mesonen führen:

$$p + p \to p + p + \pi^+ + \pi^-, \tag{78.16a}$$

$$\to p + p + \pi^0 + \pi^0, \tag{78.16b}$$

$$\to n + n + \pi^+ + \pi^+, \tag{78.16c}$$

$$\to n + p + \pi^+ + \pi^0, \tag{78.16d}$$

$$\to d + \pi^+ + \pi^0. \tag{78.16e}$$

Entsprechende Reaktionsschemata lassen sich für n-n- bzw. n-p-Stöße angeben. Mit zunehmender Energie der stoßenden Nukleonen kann schließlich eine 3,4,..., n-fach-Erzeugung von π-Mesonen eintreten. Dabei werden neben diesen Teilchen offenbar auch schwere Mesonen und Nukleon-Antinukleon-Paare erzeugt. Einen Stoß, bei dem die gesamte im Schwerpunktssystem zur Verfügung stehende kinetische Energie $2\,E'$ zur Erzeugung instabiler Teilchen umgesetzt wird, bezeichnet man als *vollkommen unelastisch.*

Am Synchrozyklotron in Dubna und am Cosmotron in Brookhaven wurden systematische Untersuchungen der Mesonenerzeugung bei Nukleon-Nukleon-Stößen hoher Energie durchgeführt [M 55-1]; [M 56-1]; [F 56-2]; [B 56-1].

Zur Untersuchung der p-p-Wechselwirkungen wurde am Cosmotron eine Diffusionsnebelkammer benutzt, die mit H_2 unter 20 Atm Druck gefüllt war. Die Kammer arbeitete in einem Magnetfeld mit einer Feldstärke von 10 000 Gauß.

Die Ergebnisse dieser Experimente sind in Tabelle 42 zusammengefaßt. Aus ihren Werten erkennt man, daß sich mit zunehmender Protonenenergie der totale Wirkungsquerschnitt der unelastischen Proton-Proton-Wechselwirkung zugunsten der Vielfacherzeugung verschiebt.

Tabelle 42. Totale Wirkungsquerschnitte bei unelastischer p-p-Streuung

Energie [MeV]	σ_t^{unel} [mbarn]	σ_t^{unel} [mbarn] für folgende Prozesse: 1π	2π	3π	andere Reaktionen
460	≈ 6	≈ 6	—	—	—
660	≈ 18	≈ 18	—	—	—
810	≈ 24	≈ 24	—	—	—
1500	≈ 27	≈ 22	≈ 5	—	—
2750	≈ 27	≈ 9	≈ 13	≈ 4	≈ 1

Die letzte Spalte („andere Reaktionen“) bezieht sich auf die Erzeugung von mehr als 3 π-Mesonen und auf die Bildung schwerer unstabiler Teilchen.

Unsere gegenwärtigen Kenntnisse der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung oberhalb einer Energie von etwa 10^{10} eV beruhen auf Experimenten mit der kosmischen Strahlung. Im Energiebereich zwischen 10^{10} und 10^{14} eV sind dabei besonders die Untersuchungen der sog. „*Jets*“ mit Hilfe von Kernemulsionen zu erwähnen. Darunter versteht man in der Emulsion aufgezeichnete Ereignisse, die mit einiger Wahrscheinlichkeit Nukleon-Nukleon-Stößen zugeschrieben werden können.

In Abb. 129 ist die Aufnahme eines Jets gezeigt. Die Emulsionsschicht, in der dieses Ereignis aufgezeichnet worden ist, gehört zu einem großen *Emulsionspaket*, das aus 150 trägerfreien Schichten des Formats $25 \cdot 40$ cm² und einer Dicke von je 600 μm bestand. Dieses Paket wurde im Oktober 1955 mit einem Ballon während etwa 5 Stunden in einer Höhe von ungefähr 33 km exponiert.

Aus der Korndichte der primären Spur folgt, daß das auslösende Teilchen zweifach geladen, also sehr wahrscheinlich ein α-Teilchen war. Die sekundären Teilchen verteilen sich auf zwei voneinander zu trennende Kegel. Der innere Kegel enthält 8 Spuren, die in der Nähe des Ursprungs so dicht beieinander liegen, daß sie wie eine schwarze Spur wirken. Der äußere Kegel enthält ebenfalls 8 relativistische Teilchen. Die Achse des inneren und die des äußeren Kegels fällt mit der Verlängerung der Bahn des einfallenden Teilchens zusammen. Es ist wahrscheinlich, daß es sich bei diesem Ereignis um eine Vielfacherzeugung in einem Nukleon-Nukleon-Stoß zwischen einem Nukleon des α-Teilchens und einem Targetnukleon handelt.

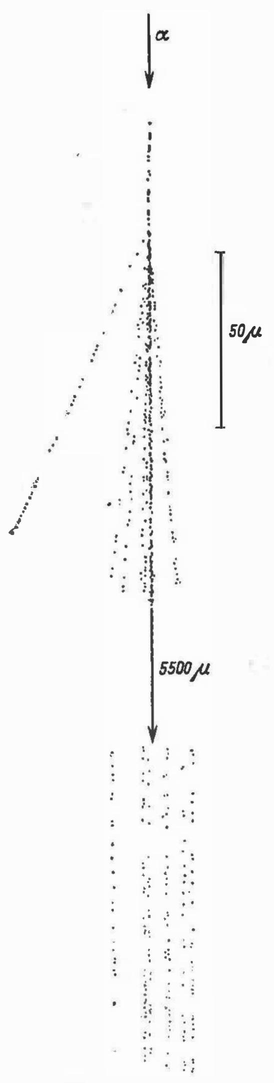


Abb. 129. Zeichnung eines Jets (Aufnahme aus dem Kernphysikalischen Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften)

Da in diesem Stoßprozeß eine ziemlich große Zahl unstabiler Teilchen erzeugt wurde, kann man annehmen, daß im Schwerpunktssystem folgende *Symmetriebedingungen* näherungsweise gelten:

1. Die π-Mesonen besitzen eine zylindersymmetrische Verteilung um die Flugrichtung des Protons (Linie $0 - 0'$ in Abb. 130).
2. Bezogen auf die zur Flugrichtung senkrechte Ebene $A - A'$ besitzen die π-Mesonen eine spiegelsymmetrische Verteilung.

Die im Laborsystem beobachteten Teilchen des inneren Kegels sind also offensichtlich mit den im Schwerpunktssystem in die vordere Halbebene emittierten Teilchen identisch, während die Teilchen des äußeren Kegels den im Schwerpunktssystem rückwärts emittierten Mesonen entsprechen. Die gute Separierbarkeit der beiden Kegel im Laborsystem deutet darauf hin, daß die π-Mesonen im Schwerpunktssystem nicht kugelsymmetrisch, sondern, wie in Abb. 130 angedeutet, in zwei zueinander entgegengesetzte Kegel emittiert werden.

Der durch Gleichung (78.9) gegebene Zusammenhang zwischen den Winkeln ϑ und ϑ', unter denen sich ein sehr schnelles Teilchen $\left(\beta = \frac{u}{c} \approx 1\right)$ im Laborsystem bzw. im Schwerpunktssystem bewegt, ermöglicht eine Abschätzung der Gesamtenergie U des auslösenden Protons. Im Kegel mit dem Öffnungswinkel ϑ_f' im Schwerpunktssystem sei der Bruchteil f der emittierten Mesonen enthalten. Bei Erfüllung der angegebenen Symmetriebedingungen enthält dann der Kegel mit dem Öffnungswinkel ϑ'_{1-f} den Bruchteil $(1 - f)$.

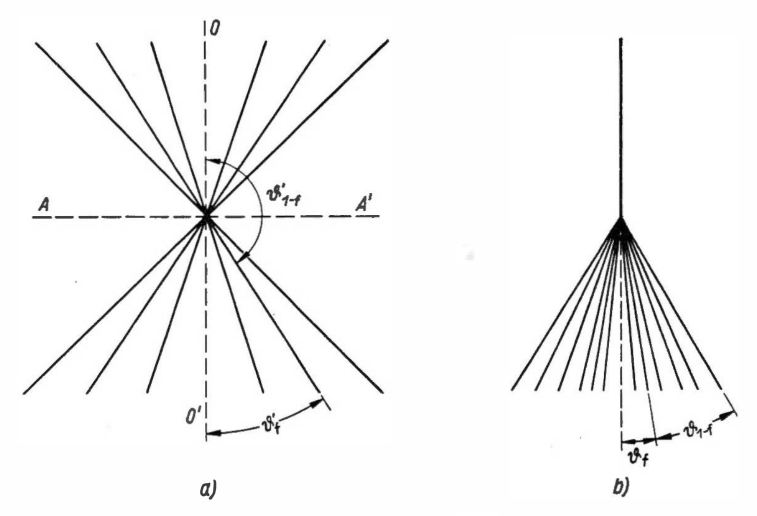


Abb. 130. Schematische Zeichnung eines Jets
a) im Schwerpunktssystem b) im Laborsystem

Im Laborsystem ergibt sich also

$$\operatorname{tg} \vartheta_f = \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_f'}{2},$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1-f} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_{1-f}'}{2};$$

daraus folgt

$$\operatorname{tg} \vartheta_f \operatorname{tg} \vartheta_{1-f} = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{2mc^2}{U}. \tag{78.17}$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf das vorstehend beschriebene Ereignis ergab für die kinetische Energie des auslösenden Protons den Wert $E \approx 1 \cdot 10^{13}$ eV. Das geringe zur Zeit vorliegende experimentelle Material über Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen bei Energien $\geqq 10^{12}$ eV deutet darauf hin, daß neben π-Mesonen auch ein merklicher Bruchteil schwerer instabiler Teilchen erzeugt wird.

§ 79. Eigenschaften und Wechselwirkungen von L-Mesonen

Zur Erklärung der Kernkräfte forderte Yukawa [Y 35-1] die Existenz geladener Mesonen mit einer Ruhemasse von etwa (200 bis 300) m_e. Er ging dabei von der Annahme aus, daß die Kernkräfte durch die Mesonen bedingt sind. Als 1937 Anderson und Neddermeyer [N 37-1] die in der Folgezeit als *μ-Mesonen* bezeichneten unstabilen Teilchen auf Nebelkammeraufnahmen entdeckten, zweifelte niemand daran, daß diese mit den von Yukawa vorausgesagten Teilchen identisch seien. Das Studium ihrer Eigenschaften in den nachfolgenden Jahren zeigte jedoch,

daß die μ-Mesonen nur eine außerordentlich schwache Wechselwirkung mit Kernen besitzen. Das ist jedoch mit der Yukawaschen Vorstellung unvereinbar, die die Mesonen als Quanten des für die Kräfte zwischen den Nukleonen verantwortlichen Feldes betrachtet. Das Yukawa-Teilchen wurde erst 1947 durch POWELL und Mitarbeiter [L 47-1] in der Kernemulsion entdeckt und als *π-Meson* bezeichnet. Ein Jahr später gelang auch die künstliche Erzeugung der π-Mesonen im Synchrozyklotron in Berkeley. In vielen mit entsprechenden Beschleunigungsanlagen ausgerüsteten Laboratorien wurden und werden die Eigenschaften der π-Mesonen untersucht, so daß man heute über diese Teilchen schon recht gut informiert ist.

Bevor der Zerfallsmechanismus des π-Mesons diskutiert wird, sollen im folgenden weitere für das Verständnis der Mesonenzerfälle wichtige Beziehungen aus der Relativitätskinematik zusammengestellt werden.

Zunächst wird der Zerfall eines Mesons der Ruhemasse m und Gesamtenergie U in zwei Sekundärteilchen mit den Massen m_1 und m_2 bzw. den Energien U_1 und U_2 betrachtet. Im Schwerpunktssystem haben die Impulse p' der beiden Zerfallsteilchen gleiche Beträge und sind entgegengesetzt gerichtet.

Man kann daher den Energiesatz mit Hilfe von Gleichung (78.4) in folgender Form schreiben:

$$mc^2 = c[(p'^2 + m_1^2c^2)^{1/2} + (p'^2 + m_2^2c^2)^{1/2}]. \tag{79.1}$$

Daraus ergibt sich

$$cp' = \frac{c^2}{2m}\{[m^2 - (m_1 + m_2)^2][m^2 - (m_1 - m_2)^2]\}^{1/2}. \tag{79.2}$$

Mit den aus Abb. 131 ersichtlichen Bezeichnungen lassen sich im Laborsystem die Erhaltungssätze für Energie und Impuls wie folgt formulieren:

$$(p^2 + m^2c^2)^{1/2} = (p_1^2 + m_1^2c^2)^{1/2} + (p_2^2 + m_2^2c^2)^{1/2}, \tag{79.3}$$

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\varphi. \tag{79.4}$$

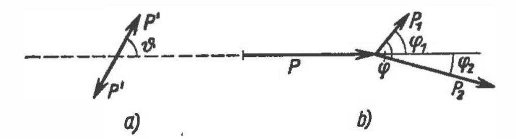


Abb. 131. Zweiteilchenzerfall
a) im Schwerpunktssystem b) im Laborsystem

Sind beim Zerfall eines neutralen und damit unsichtbaren Mesons (z.B. V^0-Teilchen) m_1, m_2, p_1, p_2 und $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ gegeben, so gelten für das Primärteilchen folgende Bestimmungsgleichungen:

$$p = (p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2\cos\varphi)^{1/2}, \tag{79.5a}$$

$$U = U_1 + U_2, \tag{79.5b}$$

$$mc^2 = (U^2 - c^2p^2)^{1/2}; \tag{79.5c}$$

und für die Zerfallsenergie gilt

$$Q = [m - (m_1 + m_2)]c^2. \tag{79.5d}$$

Als ein weiteres Beispiel wird der Zweiteilchenzerfall bei einem S-Ereignis betrachtet. Energie- und Impulssatz eines zur Ruhe gekommenen Mesons lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$mc^2 = m_1c^2 + E_1 + m_2c^2 + E_2, \tag{79.6}$$

$$E_1^2 + 2m_1c^2E_1 = E_2^2 + 2m_2c^2E_2. \tag{79.7}$$

E_1 und E_2 sind die kinetischen Energien der Zerfallsteilchen.
Durch Eliminierung von E_2 läßt sich daraus folgende Beziehung gewinnen:

$$2mc^2E_1 = (mc^2 - m_1c^2)^2 - (m_2c^2)^2. \tag{79.8}$$

Werden beim Zerfall zwei oder mehrere neutrale Teilchen emittiert, so erhält man für E_1 eine kontinuierliche Verteilung von Null bis zu einem bestimmten Maximalwert. Er liegt dann vor, wenn die neutralen Sekundärteilchen alle in der gleichen Richtung entgegen der Richtung des geladenen Zerfallsteilchens, mit gleicher Geschwindigkeit emittiert werden. Dieser Maximalwert stimmt mit E_1 in Gleichung (79.8) überein, wenn man unter m_2 die Summe der Massen aller neutralen Zerfallsteilchen versteht.

a) Die Eigenschaften der π-Mesonen

In Abb. 132 wird der *Zerfall eines positiven π-Mesons* gezeigt, das in der Emulsion zur Ruhe kommt. Als *geladenes* Zerfallsteilchen wird ein μ^+-Meson emittiert, das seinerseits in der Emulsion gebremst wird und unter Emission eines Positrons zerfällt. Da die μ-Mesonen stets mit der gleichen Energie emittiert werden, liegt ein Zweiteilchenzerfall vor. Durch Reichweitemessungen an den Spuren der μ-Mesonen wurde ihre kinetische Energie zu 4,1 MeV bestimmt. Kennt man ferner die Massen des π- und μ-Mesons, so läßt sich die Masse des neutralen Zerfallsteilchens aus Gleichung (79.8) berechnen. Diese Rechnung ergab die Ruhemasse Null. Da in keinem der beobachteten π^+-μ^+-Zerfälle das Auftreten eines γ-Quants beobachtet wurde, muß das neutrale Zerfallsteilchen ein Neutrino sein. Damit erhält das *Zerfallsschema* die Form

$$\pi \rightarrow \mu + \nu. \tag{79.9}$$

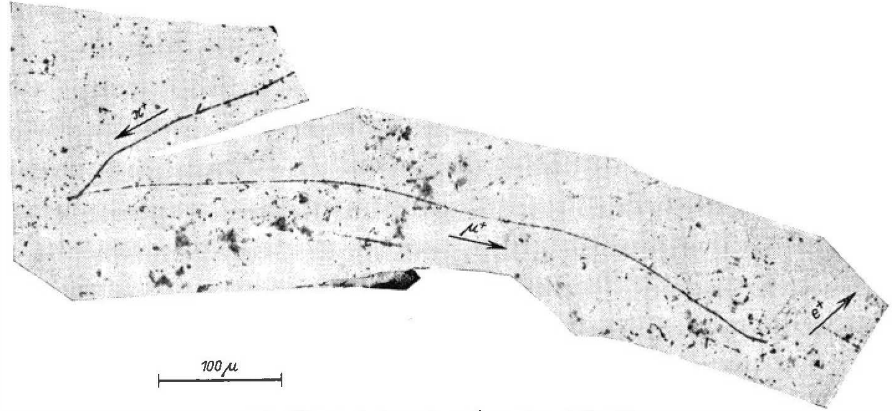


Abb. 132. Aufnahme eines $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow e^+$-Zerfalls
(Aufnahme aus dem Kernphysikalischen Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften)

Bei negativen in der Emulsion gebremsten π-Mesonen beobachtet man in der Regel keinen Zerfall, sondern eine Kernzertrümmerung (*σ-Stern*). Als Beispiel ist in Abb. 133 ein derartiges Ereignis gezeigt. Ein π^--Meson kommt in der Emulsion zur Ruhe und wird von einem Kern eingefangen. Bei seiner Zertrümmerung werden drei geladene Teilchen emittiert.

Die genauesten *Massenbestimmungen* wurden an künstlich erzeugten π-Mesonen im Zyklotron durchgeführt [B 56-2]. In Abb. 134 ist das Schema einer hierzu benutzten Anordnung skizziert. Das Magnetfeld des Zyklotrons diente zur Impulsanalyse der Mesonen. Der Punkt, an dem das Teilchen in die Emulsion eintritt, und die Richtung der Spur an dieser Stelle bestimmen den Krümmungsradius im Magnetfeld und damit den Impuls. Mißt man ferner die Reichweite des in der Emulsion gebremsten Mesons, so hat man damit ein Maß für seine Energie. Aus Energie und Impuls läßt sich dann leicht die Masse berechnen.

Im Target werden positive und negative π-Mesonen erzeugt. Einige dieser Teilchen werden im Target abgebremst, wobei sie in Abhängigkeit vom Vorzeichen ihrer Ladung entweder eingefangen werden oder zerfallen. Neben π^+-Mesonen werden also auch μ^+-Mesonen das Target verlassen, deren Masse mit der gleichen Anordnung gemessen werden kann.

Auf diese Weise sind die zur Zeit genauesten Massenwerte der L-Mesonen bestimmt worden:

$$\left.\begin{aligned} m_{\pi^+} &= (273{,}3 \pm 0{,}2)\, m_e \\ m_{\pi^-} &= (272{,}8 \pm 0{,}3)\, m_e \end{aligned}\right\} m_{\pi^\pm} = (273{,}1 \pm 0{,}2)\, m_e,$$

$$m_{\mu^+} = (206{,}7 \pm 0{,}2)\, m_e.$$

Daraus ergibt sich die *Zerfallsenergie* des geladenen π-Mesons zu

$$Q = (33{,}9 \pm 0{,}1)\ \text{MeV}.$$

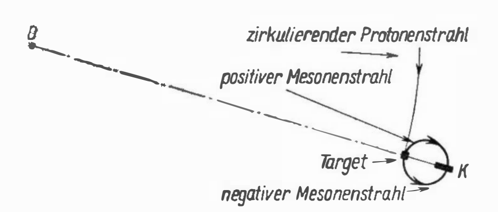


Abb. 134. Schema einer Meßanordnung zur Bestimmung der Masse der L-Mesonen [B 56-2] (0 = Mittelpunkt des Zyklotrons; K = Kernemulsion)

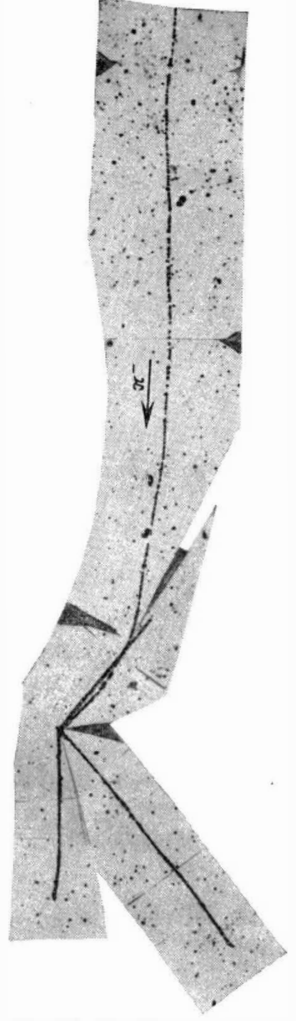


Abb. 133. Aufnahme eines σ-Sterns (Aufnahme aus dem Kernphysikalischen Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften)

Bei den vorhergehenden Überlegungen wurde stillschweigend angenommen, daß die *Ladung* der π- und μ-Mesonen gleich der einfachen Elementarladung ist. Die Bestätigung dieser Annahme folgt aus einer Anwendung des Erhaltungssatzes der Ladung auf den π-μ-e-Zerfall. Das letzte Zerfallsteilchen läßt sich auf Grund der Korndichte seiner Spur in der Emulsion eindeutig als Elektron identifizieren.

Messungen der *mittleren Lebensdauer* der freien π^+-Mesonen gegen π-μ-Zerfall wurden ebenfalls an künstlich erzeugten Mesonen durchgeführt. Die besten Werte erhielt man mit der Methode der verzögerten Koinzidenzen.

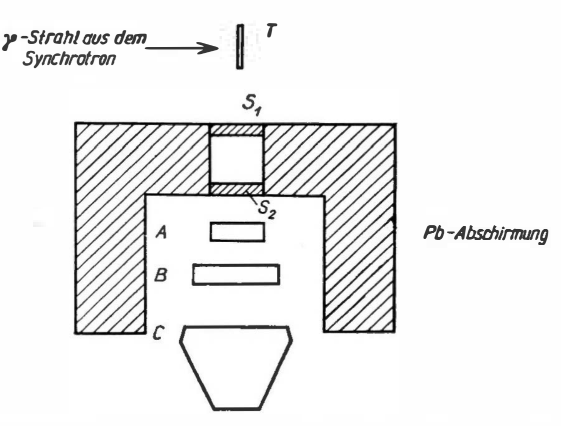


Abb. 135. Schema einer Meßanordnung zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer der π^+-Msonen [K 52-1] (T = Target; S_1 und S_2 = Absorber; A, B und C = Szintillationszähler)

In einer dazu benutzten experimentellen Anordnung [K 52-1] wurden die π^+-Mesonen durch Beschuß einer Polyäthylen-Folie mit hochenergetischen γ-Quanten erzeugt (s. Abb. 135). Einige der π^+-Mesonen durchlaufen die Absorber S_1 und S_2 sowie den Szintillationszähler A und kommen im Szintillationszähler B zur Ruhe, wo sie zerfallen. Die dabei entstehenden Impulse werden von einem Oszillographen aufgezeichnet, der durch Antikoinzidenzen $A\,B - C$ eingeschaltet wird. Diese geben den Zeitpunkt des Eintreffens des π^+-Mesons in B an. Aus der zeitlichen Verzögerung des vom π-μ-Zerfall herrührenden Impulses in B gegenüber dem Einschaltimpuls $A\,B - C$ läßt sich die mittlere Lebensdauer zu folgendem Wert berechnen:

$$t_{\pi^+} = (2{,}53 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Die Bestimmung der mittleren Lebensdauer der π^--Mesonen erfordert einen unterschiedlichen Versuchsaufbau, da sie nur an Zerfällen im Fluge durchgeführt werden kann. Das Schema einer solchen Meßanordnung ist in Abb. 136 angegeben [D 52-1]. Durch den Beschuß eines Berylliumtargets mit 385 MeV-Protonen werden π-Mesonen erzeugt. Ein Strahl negativer π-Mesonen mit einer Energie von 73 MeV wird durch einen Kanal in der Schutzwand des Zyklotronraumes

nach außen geführt. Das aus den Pb-Blenden, dem Ablenkmagnet und den Szintillationszählern C_1 bis C_3 bestehende System gestattet die Auswahl eines Strahls definierter Richtung und Geschwindigkeit. Bei einer Vergrößerung des Abstandes L zwischen den Szintillationszählern C_3 und C_4 verringert sich die Zahl der in C_4 gezählten π^--Mesonen, da einige längs des Weges L zerfallen (L variierte zwischen 0 und 2 m). Die Zahl der gemessenen Vierfachkoinzidenzen C_1 bis C_4 muß korrigiert werden, da ein Teil der beim Zerfall entstehenden μ-Mesonen ebenfalls C_4 durchläuft. Aus der gemessenen mittleren freien Weglänge der π-Mesonen und ihrer Geschwindigkeit läßt sich leicht die mittlere Lebensdauer berechnen:

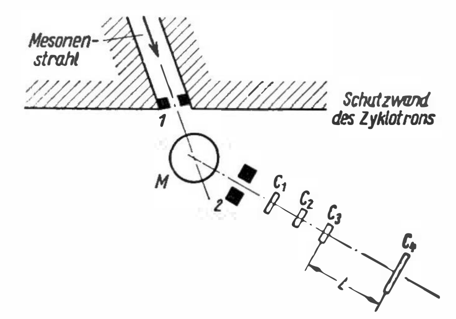


Abb. 136. Schema einer Meßanordnung zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer der π^--Mesonen [D 52-1] (M = Ablenkmagnet; 1 und 2 = Pb-Blenden; C_1 bis C_4 = Szintillationszähler)

$$t_{\pi^-} = (2{,}55 \pm 0{,}19) \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Mit der gleichen Anordnung wurde auch die mittlere Lebensdauer der π^+-Mesonen gemessen. Beide Werte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit dem auf S. 354 angegebenen t_{π^+}-Wert überein.

Der *Spin* s des π-Mesons wurde durch folgende Reaktion bestimmt:

$$p + p \rightleftarrows d + \pi^+.$$

Für das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte dieser p-p-Wechselwirkung und ihres inversen Prozesses, gemessen bei derselben Energie, läßt sich auf Grund des Prinzips des detaillierten Gleichgewichtes eine einfache Beziehung angeben. Sie enthält die statistischen Gewichte aller an der Reaktion beteiligten Teilchen, also auch das unbekannte statistische Gewicht $(2s + 1)$ des π-Mesons. Als Ergebnis derartiger Messungen erhielt man innerhalb der Fehlergrenzen den Wert $s = 0$. Aus Gründen der Ladungssymmetrie kann man auch dem π^--Meson den Spin 0 zuschreiben.

Nach diesem Überblick über die Eigenschaften der geladenen π-Mesonen soll jetzt das *neutrale π-Meson* betrachtet werden. Seine Entdeckung gelang gegen Ende des Jahres 1949, sowohl in der kosmischen Strahlung als auch bei Zyklotronversuchen.

Bjorklund und Mitarbeiter [B 50-1] beschossen ein Be-Target mit hochenergetischen Protonen. Dabei beobachteten sie, beginnend bei einer Protonenenergie von 175 bis 200 MeV, ein merkliches Ansteigen der Photonenausbeute, die bet 340 MeV etwa 100mal größer war, als man bei reiner Bremsstrahlung erwarten sollte.

Diese Abweichung beginnt im gleichen Energieintervall, in dem auch die Erzeugung geladener π-Mesonen einsetzt. Die Autoren konnten das Energiespektrum der Photonen, das bei Beschuß mit Protonen einer Energie von ≈ 340 MeV entstand,

als Zerfallsspektrum von π^0-Mesonen deuten. Dabei wurde folgendes *Zerfallsschema* angenommen:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma. \tag{79.10}$$

Der direkte Nachweis dieses Zerfallsmechanismus an einzelnen π^0-Mesonen gelang STEINBERGER und SACHS [S 51-1]. Sie untersuchten den Einfang gebremster π^--Mesonen durch Wasserstoffkerne. Die zu erwartenden Rektionen sind:

$$\pi^- + p \to n + \gamma, \tag{79.11a}$$

$$\pi^- + p \to n + \pi^0. \tag{79.11b}$$

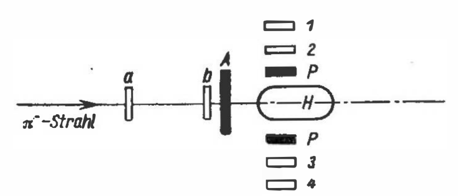


Abb. 137. Schema einer Versuchsanordnung zum Nachweis der π^0-Mesonen [S 51-1] (a und b = Kristallzähler; 1 bis 4 = Szintillationszähler; A = Absorber; H = H_2-Druckkessel; P = Pb-Konverter)

Der zweite Prozeß ist allerdings nur möglich, wenn die Masse des geladenen π^--Mesons entsprechend größer ist als die des neutralen.

In Abb. 137 ist der Versuchsaufbau skizziert. Der Einfang der gebremsten π^--Mesonen findet in dem mit hochkomprimiertem Wasserstoff gefüllten Kessel statt. Die entstehenden γ-Quanten erzeugen in den Pb-Schichten Elektronenpaare, die durch die Flüssigkeits-Szintillationszähler 1 bis 4 nachgewiesen werden. Mit den beiderseits des Kessels aufgestellten Zähleranordnungen untersuchten STEINBERGER und SACHS die auftretenden γ-γ-Koinzidenzen zwischen den Zählerpaaren 1 + 2 und 3 + 4. Diese Koinzidenzen konnten sie eindeutig dem π^0-Zerfall zuordnen. Bei Entfernung der Pb-Konverter wurde die Koinzidenzzahl sehr klein. Daraus folgt, daß praktisch keine π^0-Mesonen direkt in Elektron-Positron-Paare zerfallen.

Mit einer ähnlichen Versuchsanordnung untersuchten STEINBERGER und Mitarbeiter [L 53-1] den Zerfall

$$\pi^0 \to \gamma + e^+ + e^-. \tag{79.10a}$$

Sie fanden, daß auf rund 80 Zerfälle nach Schema (79.10) ein Zerfall nach Schema (79.10a) kommt. Die bei dem Prozeß (79.11b) frei werdende Energie ist gleich der Ruheenergie des π^--Mesons, minus der Differenz Δ zwischen der Ruheenergie des Neutrons und der des Protons:

$$m_{\pi^-} c^2 - \Delta = 138{,}1 \text{ MeV}.$$

Aus dem Auftreten der Reaktion (79.11b) läßt sich schließen, daß die Massendifferenz

$$\delta = m_{\pi^-} c^2 - m_{\pi^0} c^2 \geqq \Delta$$

ist. Im Falle $\delta = \Delta$ sind die π^0-Mesonen in Ruhe erzeugt, die beiden Zerfallsphotonen haben die gleiche Energie $\frac{m_{\pi^0} c^2}{2}$ und sind entgegengesetzt gerichtet. Ist

$\delta > \Delta$, so erhalten das Neutron und das π^0-Meson die kinetischen Energien E_n und E_{π^0}, die durch folgende Beziehungen bestimmt sind:

$$E_n + E_{\pi^0} = \delta - \Delta,$$
$$\sqrt{2\, m_n\, c^2 E_n} = \sqrt{2\, m_{\pi^0}\, c^2 E_{\pi^0}}\,. \tag{79.12}$$

Die letztere Gleichung ist die nichtrelativistische Näherung des Impulssatzes, da $E_{\pi^0} \ll m_{\pi^0} c^2$ ist. Aus den Gleichungen (79.12) erhält man

$$E_{\pi^0} = \frac{\delta - \Delta}{1 + \frac{m_{\pi^0}}{m_n}}\,. \tag{79.13}$$

Die π^0-Mesonen haben bei ihrer Erzeugung eine isotrope Richtungsverteilung. Daraus folgt, daß sowohl die Intensität als auch die Energieverteilung der Zerfallsphotonen in allen Richtungen die gleiche ist. Untersucht man nun das Energiespektrum der aus einer bestimmten Richtung kommenden Photonen, so wird man in Abhängigkeit von E_{π^0} eine verbreiterte γ-Linie beobachten.

Durch die Doppler-Breite dieser Linie ist der Impuls $\sqrt{2\, E_{\pi^0} m_{\pi^0} c^2}$ des π^0-Mesons bestimmt. Hiermit läßt sich aus Gleichung 79.12 die Massendifferenz δ berechnen. Experimentelle Untersuchungen ergaben

$$\delta = (8{,}8 \pm 0{,}6)\, m_e.$$

Damit erhält man die *Masse* des neutralen π-Mesons zu

$$m_{\pi^0} = (264{,}3 \pm 0{,}7)\, m_e\,.$$

Bestimmungen der *Lebensdauer* des π^0-Mesons wurden in Kernemulsionen durchgeführt. Alle Messungen dieser Art beruhen auf einer Analyse der Elektronenpaare, die in unmittelbarer Nähe von Sternen aufgezeichnet worden sind und deren rückwärtige Verlängerung näherungsweise auf das Zentrum der Kernzertrümmerung zeigt. Dabei wird angenommen, daß das Paar durch ein Zerfallsphoton eines π^0-Mesons erzeugt wurde. Da man die Wahrscheinlichkeit der Umwandlung eines γ-Quants in ein Elektron-Proton-Paar in der Emulsion kennt, läßt sich die mittlere freie Weglänge der π^0-Mesonen abschätzen.

Als Ergebnis derartiger Untersuchungen [A 53-1] erhielt man die mittlere Lebensdauer zu

$$t_{\pi^0} = (1 \div 5) \cdot 10^{-15}\,\text{sec.}$$

Da sich die neutralen π-Mesonen in jeder Beziehung sehr ähnlich wie die geladenen verhalten, kann man annehmen, daß sie ebenfalls den Spin 0 besitzen. Das folgt auch aus dem Auftreten der Reaktion (79.11 b) und aus dem Zerfall der π^0-Mesonen in 2γ-Quanten.

b) Die Wechselwirkung von π-Mesonen mit Nukleonen

Das große Interesse an der Untersuchung der Eigenschaften der π-Mesonen erklärt sich daraus, daß sie offenbar den wesentlichsten Beitrag zur Wechselwirkung der Kernbausteine liefern. Wenn aber für die Vermittlung der Kernkräfte die π-Mesonen verantwortlich sind, so ist die Untersuchung der Wechselwirkung eines π-Mesons mit einem Nukleon von außerordentlich großer Bedeutung.
Wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte ist es leider nicht möglich, direkte Experimente wie bei den elektrischen Kräften durchzuführen. Als nächstes könnte man in Analogie zum Deuteron nach einem stationären Zustand des Systems Nukleon $+ \pi$-Meson fragen. Ein derartiges System existiert aber nicht. Also ist man auf *Streuversuche* von π-Mesonen an Nukleonen angewiesen.
Nachstehend sind die wichtigsten experimentellen Ergebnisse von Streuversuchen wiedergegeben, die mit Hilfe großer Beschleunigungsanlagen gewonnen wurden.

Der *totale Wirkungsquerschnitt* für die Streuung geladener π-Mesonen an Protonen läßt sich durch folgende zwei Methoden bestimmen:

1. Messung der Absorption des Mesonenstrahls beim Durchgang durch einen Absorber. Das Prinzip dieses Versuches ist in Abb. 138 dargestellt. Der monoenergetische Mesonenstrahl durchläuft die Zähler 1 und 2, die zur Bestimmung seiner Intensität dienen. Im Absorber A (z. B. flüssiger Wasserstoff) wird ein Teil der Mesonen gestreut, während der Rest des Strahls den Absorber durchläuft und vom Zähler 3 registriert wird.
Aus dem Verhältnis der 3fach-Koinzidenzen $1 + 2 + 3$ zu den 2fach-Koinzidenzen $1 + 2$ erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt.

2. Integration des gestreuten Strahles als Funktion des Winkels (Abb. 139). Auch bei diesem Versuch definieren die Zähler $1 + 2$ den einfallenden Mesonenstrahl, während die Zähler $3 + 4$ die Messung der unter dem Winkel ϑ gestreuten Teilchen gestatten. Diese Meßanordnung erlaubt also die direkte Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnittes. Aus der Integration über ϑ läßt sich der totale Wirkungsquerschnitt ermitteln.

Bei der Streuung geladener π-Mesonen an Protonen können folgende Prozesse stattfinden:

I.	$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p,$	elastische Streuung,
II.	$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p,$	
III.	$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n,$	Ladungsaustausch-Streuung,
IV.	$\pi^- + p \rightarrow \gamma + n,$	Absorption mit γ-Strahlung,
V.	$\pi^\pm + p \rightarrow N + x\,\pi,$	mit $x = 2, 3, 4, \ldots$ Mesonenvielfacherzeugung,
VI.	$\pi^\pm + p \rightarrow Y + K,$	Erzeugung von Hyperonen und K-Mesonen.

Die Prozesse V und VI werden erst bei großen Energien der einfallenden Mesonen einen merklichen Beitrag geben. Die Schwellenwerte der Energie für das Einsetzen

dieser Reaktionen lassen sich aus der Einsteinschen Energie-Masse-Beziehung leicht berechnen.

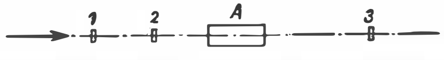


Abb. 138. Schema einer Versuchsanordnung zur Messung der Absorption (1 bis 3 = Zähler; *A* = Absorber)

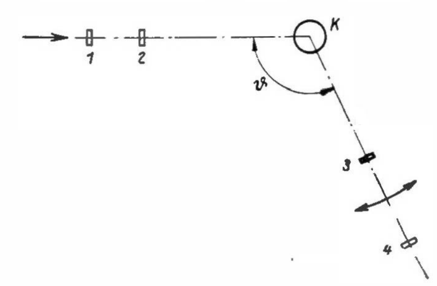
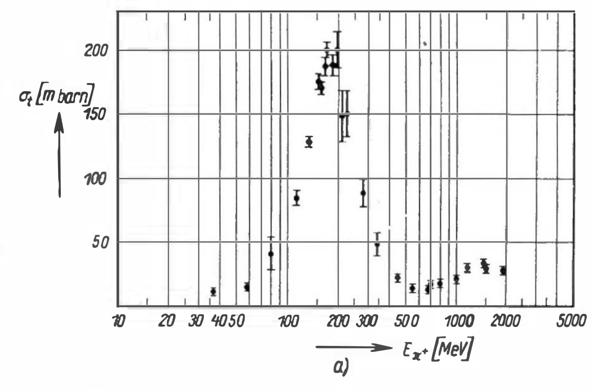


Abb. 139. Schema einer Versuchsanordnung zur Untersuchung der π-p-Streuung (1 bis 4 = Zähler; *K* = Kessel mit flüssigem Wasserstoff)

Die Bestimmung des totalen Wirkungsquerschnittes nach Methode 1 ergibt eine bessere statistische Genauigkeit. Andererseits gestattet diese Methode nicht, die relativen Anteile z. B. der Prozesse II und III zu ermitteln. Hierzu ist eine direkte Beobachtung und experimentelle Unterscheidung der gestreuten Teilchen notwendig. Die π^0-Mesonen aus der Ladungsaustausch-Streuung lassen sich über ihre Zerfalls-Gamma-Quanten nachweisen, indem man vor dem Zähler 3 einen Blei-Konverter aufstellt. In diesem verwandelt sich ein bestimmter Teil der γ-Quanten in Elektron-Positron-Paare, die von den Zählern 3 und 4 registriert werden.

Die in Abb. 140 eingetragenen Meßwerte des totalen Wirkungsquerschnittes sind einer größeren Zahl von Originalarbeiten entnommen. Sie sind teils in



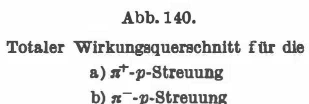
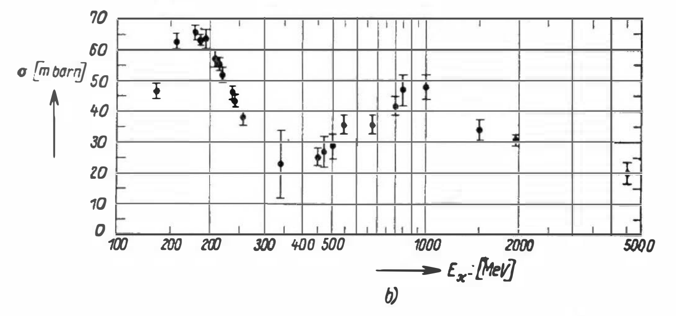


Abb. 140.
Totaler Wirkungsquerschnitt für die
a) π^+-p-Streuung
b) π^--p-Streuung



Experimenten nach Methode 1 und teils in solchen nach Methode 2 gewonnen worden. Der Wirkungsquerschnitt ist bei niedrigen Energien sehr klein. Er steigt mit wachsender Energie der π^+-Mesonen stark an und hat bei 180 bis 190 MeV ein ausgeprägtes Maximum. Im Maximum erreicht er folgende Werte:

$$\text{für } \pi^+\text{-Mesonen: } \sigma_t \sim 200 \cdot 10^{-27}\ \text{cm}^2;$$

$$\text{für } \pi^-\text{-Mesonen: } \sigma_t \sim 65 \cdot 10^{-27}\ \text{cm}^2.$$

Das Auftreten dieses Maximums hat zu der Vorstellung geführt, daß es sich hierbei vermutlich um eine Resonanzwechselwirkung eines π-Mesons mit einem Nukleon handelt, die zur Bildung eines sehr kurzlebigen angeregten Nukleons führt.

Der totale Wirkungsquerschnitt der π^+-p-Streuung zeigt ein zweites Maximum bei etwa 1,35 GeV. Für die π^--p-Streuung liegt ein zweites ausgeprägteres Maximum bei 0,9 GeV. Die Messungen sind gegenwärtig noch nicht genau genug, um festzustellen, ob die π^--p-Wechselwirkung auch bei 1,35 GeV ein Maximum besitzt.

Im Energiebereich von etwa 50 bis 120 MeV wurde von mehreren Autoren (siehe z.B. [B 54-2]) untersucht, welche Beiträge die Prozesse II bis IV zum totalen Wirkungsquerschnitt der π^--p-Streuung liefern. Die Ladungsaustauschstreuung liefert den größten Beitrag. Ihr Reaktionsquerschnitt ändert sich in dem angegebenen Energieintervall von etwa 12 mbarn auf $\approx$ 22 mbarn, während sich der totale Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von etwa 3 mbarn auf $\approx$ 12 mbarn vergrößert. Der Beitrag von Prozeß IV bleibt im ganzen Intervall kleiner als $\approx$ 1 mbarn.

Die Untersuchung der Beiträge der verschiedenen Prozesse zum totalen Wirkungsquerschnitt bei hohen Energien ist noch sehr lückenhaft.

Einen Eindruck von dem wachsenden Anteil der unelastischen Prozesse bei hohen Energien geben die Ergebnisse von Walker und Shephard [W 56-1]. Sie beschossen eine mit Wasserstoff unter hohem Druck gefüllte Diffusionsnebelkammer mit π^--Mesonen der Energien 0,96 und 1,5 GeV. Die Analyse der in der Kammer gestreuten Mesonen ergab die in Tabelle 43 angegebenen totalen Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen Prozesse.

Tabelle 43. Totale Wirkungsquerschnitte verschiedener π^--p-Prozesse

Prozeß	Totaler Wirkungsquerschnitt [mbarn]	
	bei 0,96 GeV	bei 1,5 GeV
$\pi^- + p \to \pi^- + p$	17,5 ± 2	9 ± 1,5
$\to \pi^- + \pi^+ + n$	8,2 ± 1,5	6,9 ± 2
$\to \pi + \pi^0 + p$	6,0 ± 1,5	7,7 ± 2
$\to 3\pi$	0,9 ± 0,3	2 ± 2
$\to \pi^0 + n$	12 ± 4	9 ± 2
$\to K + Y$	0,7 ± 0,3	0,9 ± 0,3

Weitere Angaben über das System π-Meson-Nukleon erhält man aus der Winkelverteilung der gestreuten Mesonen. In Abb. 141 ist die Winkelverteilung im Schwerpunktssystem für die Streuung von π^+-Mesonen an Protonen gezeigt. Die Energie der Mesonen betrug 180 MeV, d. h., die Untersuchung fand in der Nähe des Resonanzzustandes statt. Die Verteilung zeigt eine ausgeprägte Anisotropie. Das Schema der Apparatur zur Messung des differentiellen Wirkungsquerschnittes wurde bereits in Abb. 139 angegeben.

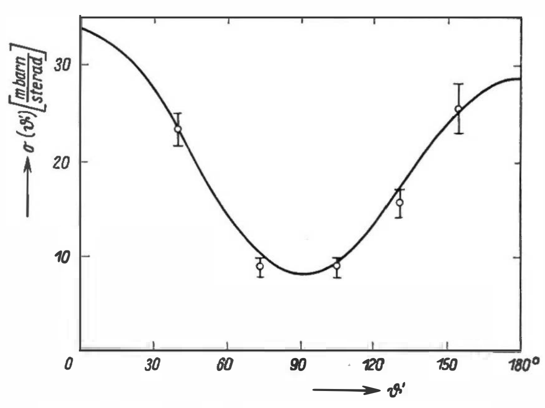


Abb. 141. Winkelverteilung für die π^+-p-Streuung [B 56-3]

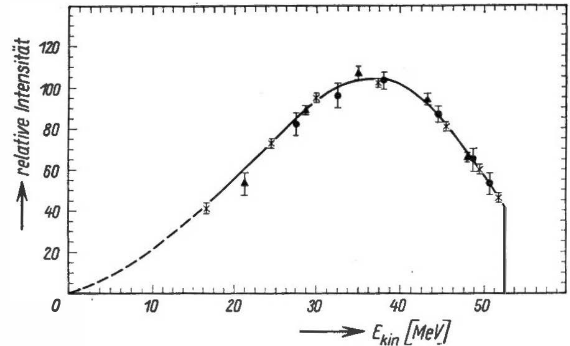
Welche Folgerungen lassen sich nun aus dieser Winkelverteilung für den *Resonanzzustand* des Systems ziehen? Es kann sich offenbar nicht um eine S-Streuung handeln, da in diesem Falle die Winkelverteilung isotrop sein müßte. Der Bahndrehimpuls des Systems kann also nicht 0 sein. Die nächste Annahme wäre, daß sich das System im P-Zustand, d. h. im Zustand mit dem Drehimpuls 1, befindet. Da das Meson den Spin 0 und das Proton den Spin $\frac{1}{2}$ besitzt, ergeben sich für den Gesamtdrehimpuls die Werte $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$. Dem ersten Wert entspricht aber wieder eine isotrope Winkelverteilung. Der Resonanzzustand des Systems π-Meson-Proton ist also offenbar der $P_{3/2}$-Zustand. Der experimentell ermittelte Verlauf der Winkelverteilung stimmt mit dieser Annahme überein.

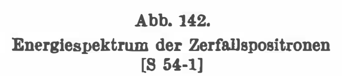
c) Die μ-Mesonen

Bei der Betrachtung des π-Mesons wurde bereits die Entdeckung des μ-Mesons erwähnt und eine Methode zur Bestimmung seiner Masse beschrieben.

Die Untersuchungen der beim Zerfall der $\mu^\pm$-Mesonen entstehenden Positronen bzw. Elektronen, z. B. in einem dafür konstruierten β-Spektrometer, zeigten, daß diese ein kontinuierliches Energiespektrum besitzen.

In Abb. 142 ist das Spektrum der Zerfallspositronen gezeichnet.




**Abb. 142.
Energiespektrum der Zerfallspositronen
[S 54-1]**

Der μ-Zerfall kann also kein Zweiteilchenzerfall sein. Es müssen mindestens zwei neutrale Sekundärteilchen entstehen. Die Summe ihrer Massen läßt sich nach Gleichung (79.8) durch Einsetzen der Massenwerte des μ-Mesons und des Elektrons sowie des Maximalwertes der Energie aus (79.8) zu $m_{01} + m_{02} = 0$ abschätzen. Man erhält das *Zerfallsschema*

$$\mu \rightarrow e + \nu + \nu, \tag{79.14}$$

da man γ-Quanten als neutrale Zerfallsteilchen ausschließen kann, weil bei keinem der vielen untersuchten Zerfälle Elektron-Positron-Paare beobachtet wurden.

Kommt ein negatives Meson in Materie zur Ruhe, so gerät es in die K-Bahn eines benachbarten Atoms. Dort kann es entweder spontan zerfallen, oder es tritt in Wechselwirkung mit dem Kern und wird von diesem eingefangen.

Während die π-Mesonen auf Grund ihrer starken Kernwechselwirkung stets von den Kernen absorbiert werden, besitzen die negativen μ-Mesonen noch eine beträchtliche Zerfallswahrscheinlichkeit in der K-Bahn. Daher konnte das Energiespektrum der Zerfallselektronen auch bei gebremsten μ^--Mesonen gemessen werden. Aus der beobachteten Übereinstimmung der beiden Spektren folgt, daß das positive und das negative μ-Meson die *gleiche Masse* besitzen.

Der *Spin* des μ-Mesons ergibt sich aus dem Schema des π-Zerfalls. Das $\pi^\pm$-Meson mit dem Spin 0 zerfällt in ein $\mu^\pm$-Meson und ein Neutrino mit dem Spin $\frac{1}{2}$. Daraus folgt, daß auch das μ-Meson den Spin $\frac{1}{2}$ besitzt.

Die *mittlere Lebensdauer* der $\mu^\pm$-Mesonen wurde wie die der π^+-Mesonen durch Messung verzögerter Koinzidenzen zwischen dem einfallenden μ-Meson und dem Zerfallselektron zu folgendem Wert bestimmt (s. Abb. 135):

$$t_{\mu^\pm} = (2{,}22 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-6}\ \text{sec}.$$

Mit einer ähnlichen Apparatur läßt sich auch die Variation der *Einfangs-* bzw. der *Zerfallswahrscheinlichkeit* der μ^--Mesonen in Abhängigkeit vom Absorbermaterial, in dem die negativen μ-Mesonen zur Ruhe kommen, untersuchen.

Als Ergebnis derartiger Experimente fand man, daß die Einfangswahrscheinlichkeit eines μ^--Mesons proportional der 4. Potenz der Kernladung des einfangenden Absorbers ist. Bei $Z = 10$ haben Einfangswahrscheinlichkeit und Zerfallswahrscheinlichkeit etwa die gleiche Größe.

Der Prozeß des Einfangs gebremster μ^--Mesonen wurde auch mit Kernemulsionen untersucht. Die Analyse der dabei entstandenen σ_μ-Sterne zeigte, daß nur ein kleiner Bruchteil der Ruheenergie des μ-Mesons an den einfangenden Kern abgegeben wird. Alle bisherigen Beobachtungen sind mit folgendem Schema des Einfangprozesses verträglich:

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu. \tag{79.15}$$

Die Anwendung von Energie- und Impulssatz auf diesen Prozeß zeigt, daß auf das Neutron nur etwa 6 MeV übertragen werden. Der überwiegende Teil der Energie wird durch das Neutrino weggeführt.

Die Wechselwirkung schneller μ-Mesonen mit Kernen wurde in größeren Tiefen unter der Erdoberfläche untersucht, da dort die kosmische Strahlung praktisch nur noch aus hochenergetischen μ-Mesonen besteht. GEORGE und Mitarbeiter [G 50-1] exponierten in der Londoner Untergrundbahn in Tiefen von 20, 34 und 60 m Wasseräquivalent Kernemulsionsplatten, die auch dort gegossen und entwickelt wurden. Die mittlere Energie der μ-Mesonen variiert in diesen Tiefen zwischen 6,5 GeV (20 m W. Ä.) und 15,4 GeV (60 m W. Ä.). Als Ergebnis ihrer Messungen erhielten sie einen Wirkungsquerschnitt pro Nukleon für die Sternerzeugung von (4 bis 5) $\cdot\, 10^{-30}$ cm², d.h. etwa $\frac{1}{1000}$ des geometrischen Querschnitts.

§ 80. Eigenschaften, Erzeugung und Wechselwirkungen von K-Mesonen und Hyperonen [1]

Zunächst werden die *K-Mesonen* untersucht. Zur Zeit sind nicht weniger als sechs verschiedene Zerfallsarten der positiven K-Mesonen bekannt. Ob diese sechs verschiedenen Zerfallsarten auch sechs verschiedenen K-Mesonen zuzuordnen sind oder ob es sich nur um unterschiedliche Zerfälle des gleichen K-Mesons handelt, ist noch ungeklärt. Um diese Frage beantworten zu können, muß man mit möglichst großer Präzision die verschiedenen *Eigenschaften der K-Mesonen* ermitteln.

a) Das τ-Meson

Das 1949 durch POWELL und Mitarbeiter [B 49-1] in einer Kernemulsion entdeckte *τ^+-Meson* ist das z. Z. am besten untersuchte K^+-Meson. In Abb. **143** wird der Zerfall eines in der Emulsion zur Ruhe gekommenen τ^+-Mesons in drei π-Mesonen gezeigt. Zwei der L-Mesonen erkennt man an ihrem π-μ-Zerfall als π^+-Mesonen, während das dritte L-Meson – ein π^--Meson – von einem Kern eingefangen wird und einen kleinen σ-Stern erzeugt.

Da die drei π-Mesonen in einer Ebene liegen, ist es sehr unwahrscheinlich, daß beim Zerfall noch ein oder mehrere ungeladene Teilchen entstehen.

Das Zerfallsschema hat also folgende Form:

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-. \tag{80.1}$$

Durch mehrere hundert gut identifizierbare Ereignisse ist dieses Schema eindeutig festgelegt worden.

Ist Q die bei diesem Zerfall als kinetische Energie der emittierten L-Mesonen frei werdende Energie, so läßt sich die Masse des τ^+-Mesons wie folgt berechnen:

$$m_{\tau^+} = 2 m_{\pi^+} c^2 + m_{\pi^-} c^2 + Q. \tag{80.2}$$

---

[1]) Siehe die Anmerkungen zur Tabelle der Elementarteilchen (Anhang I, Tabelle 5).

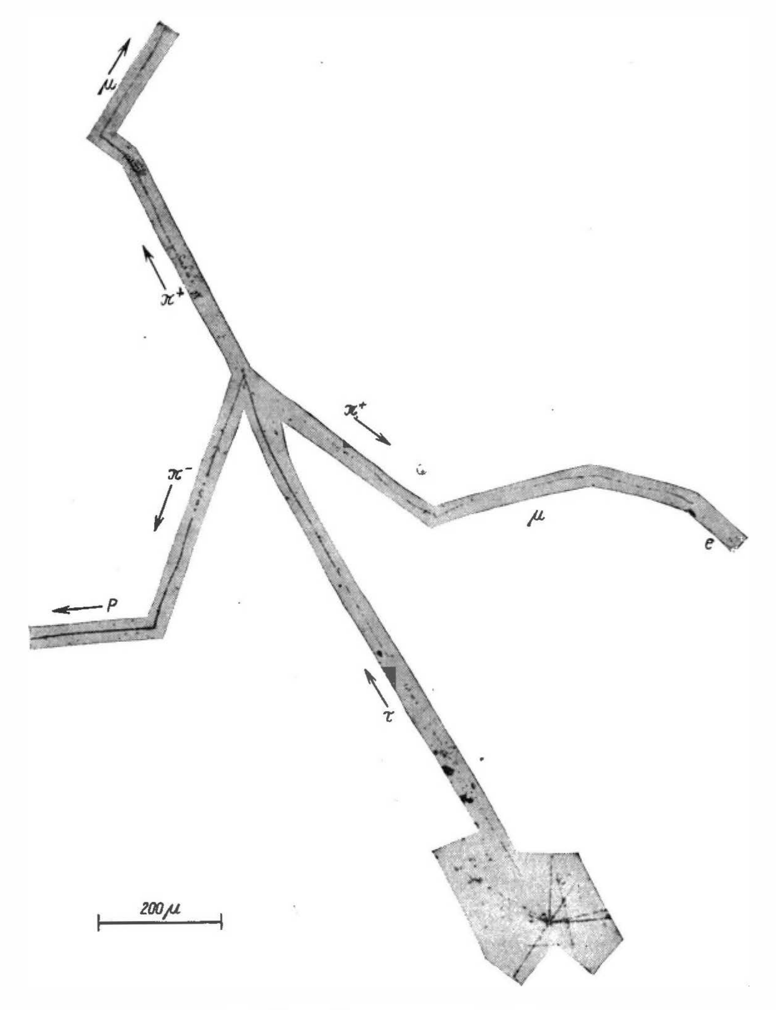


Abb. 143. Zerfall des τ^+-Mesons [B 54-3]

Die Energie der in der Emulsion gebremsten π-Mesonen kann man aus ihrer Reichweite bestimmen. Die Messungen ergaben $Q = (75{,}0 \pm 0{,}8)$ MeV. Damit wird die Masse nach Gleichung (80.2)

$$m_{\tau^+} = (966 \pm 2) m_e .$$

Die Größe des angegebenen Fehlers wird im wesentlichen durch die Unsicherheit bedingt, mit der die Energie-Reichweite-Beziehung der π-Mesonen in der Kernemulsion behaftet ist.

Im Jahre 1954 berichteten CRUSSARD u.a. [C 54-1] über ein S-Ereignis, bei dem ein K-Meson in der Emulsion zur Ruhe kam und ein π^+-Meson geringer Energie emittierte. Das L-Meson konnte an Hand des π-μ-e-Zerfalls sicher identifiziert werden. Inzwischen wurde eine größere Zahl derartiger Zerfälle beobachtet. Die kinetischen Energien der in all diesen Zerfällen emittierten π^+-Mesonen liegen im gleichen Energiebereich (0 bis 45 MeV) wie die Energien der π-Mesonen aus dem τ^+-Zerfall, und die Masse des zerfallenden Teilchens stimmt mit der Masse des τ^+-Mesons überein. Mit Hilfe von Gleichung (79.8) läßt sich die Summe der Massen der neutralen Zerfallsteilchen abschätzen. Daraus folgt, daß es sich sehr wahrscheinlich um eine andere Zerfallsart des τ^+-Mesons handelt:

$$\tau'^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0. \tag{80.3}$$

Das Verhältnis $\frac{\tau'^+}{\tau^+}$ beträgt 0,33 $\pm$ 0,07. Für das τ^+-Meson wird auch oft die Bezeichnung $K^+_{\pi 3}$-Meson verwendet.

Die genauesten Bestimmungen der mittleren Lebensdauer t der K-Mesonen wurden an den großen Beschleunigern in Brookhaven und Berkeley durchgeführt. Nachstehend sei ein typischer Versuchsaufbau beschrieben [A56-1].

In den 6,2 GeV-Protonenstrahl des Bevatrons wird ein Target gestellt. Die senkrecht zur Strahlrichtung aus dem Target austretenden Teilchen verlassen durch ein Aluminiumfenster die Beschleunigungskammer. Durch ein magnetisches System werden Teilchen eines engen Impulsbereiches ausgeblendet. Unter diesen Teilchen befinden sich neben K^+-Mesonen auch π^+-Mesonen und Protonen etwa im Verhältnis 1 : 40 : 400. Diese drei Teilchengruppen lassen sich auf Grund ihrer unterschiedlichen Reichweiten voneinander trennen. Stellt man den keilförmigen Absorber A_1 (Abb. 144) so ein, daß die K-Mesonen im Zähler c zur Ruhe kommen, so werden alle Protonen in A_1 absorbiert. Die π^+-Mesonen dagegen durchfliegen c und lösen den Antikoinzidenzzähler 2 aus. Da aber $\frac{1}{6}$ der π^+-Mesonen sekundäre Wechselwirkungen in c erzeugen, steht vor dem Zähler 1 ein Čerenkov-Zähler Cer., der so eingestellt ist, daß die Geschwindigkeit der K-Mesonen unterhalb der Zählerschwelle von Cer. und die der π^+-Mesonen oberhalb der Schwelle liegt. Die Koinzidenz $1 + c - 2 - \text{Cer.} \equiv g$ entspricht dann also einem in c zur Ruhe gekommenen K^+-Meson.

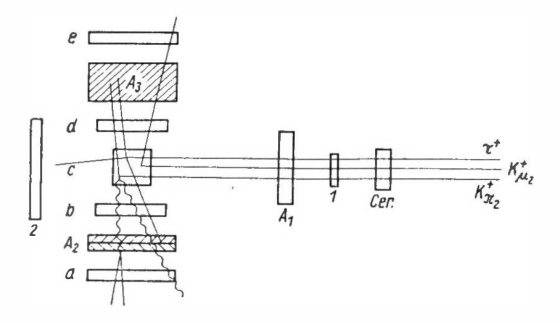


Abb. 144. Schema einer Versuchsanordnung zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer der K^+-Mesonen [A 56-1]

Die seitlich von c aufgebauten Zähler a, b, d, e und die Absorber A_2 und A_3 erlauben die Identifizierung der verschiedenen K^+-Mesonen auf Grund ihrer unterschiedlichen Zerfallsarten.

Der Zerfall eines τ^+-Mesons ist durch folgende Konfiguration charakterisiert:

$$\tau^+ = g + d + b - a - e.$$

Durch Beobachtung der zeitlichen Verzögerung zwischen den c-Impulsen und den Impulsen der seitlichen Zähler d und b läßt sich die mittlere Lebensdauer des τ^+-Mesons bestimmen:

$$t_{\tau^+} = \left(1{,}27 \begin{matrix} + 0{,}12 \\ - 0{,}20 \end{matrix}\right) \cdot 10^{-8}\,\text{sec}\,.$$

b) Das $K^+_{\pi 2}$-Meson

Bei der Analyse von S-Ereignissen in der Kernemulsion beobachteten MENON und O'CEALLAIGH [M 54-2] einige Ereignisse, die sie als Zerfälle eines K^+-Mesons in ein π^+-Meson und ein neutrales Teilchen interpretieren.

Eine sichere Identifizierung des L-Mesons war allerdings in keinem der Fälle möglich, da die Teilchen nicht in der Emulsion zur Ruhe kamen.

Der sichere Nachweis dieses K-Mesons gelang erst mit Hilfe eines großen trägerfreien Emulsionspaketes, das aus 250 Emulsionsschichten von der Größe $37 \cdot 27\ \text{cm}^2 \cdot 600\ \mu\text{m}$ bestand. Dieses Paket wurde acht Stunden mit einem Ballon in einer Höhe von etwa 24 km exponiert [S 55-1].

Die Auswertung ergab zwanzig S-Ereignisse, die dem Zerfallsschema

$$K^+_{\pi 2} \to \pi^+ + \pi^0 \tag{80.4}$$

zugeschrieben werden konnten. In fünf Fällen kamen die π^+-Mesonen in den Emulsionsschichten des Paketes zur Ruhe und konnten durch den charakteristischen $\pi \to \mu \to e$-Zerfall identifiziert werden. An allen π^+-Mesonen ergab die Messung im Rahmen der statistischen Schwankungen die gleiche kinetische Energie von $(108{,}4 \pm 1{,}3)$ MeV. Daraus folgt, daß es sich um einen Zweiteilchenzerfall handelt. Kennt man die Masse des $K^+_{\pi 2}$-Mesons und die Energie des π^+-Mesons, so läßt sich die Masse des neutralen Teilchens aus Impuls- und Energieerhaltungssatz bestimmen (Gleichung (79.8)). Derartige Rechnungen ergaben näherungsweise die Masse des π^0-Mesons. Die direkten Massenbestimmungen der K-Mesonen wurden am Bevatron mit dem in Abb. 145 skizzierten magnetischen Spektrometer durchgeführt [R 56-1].

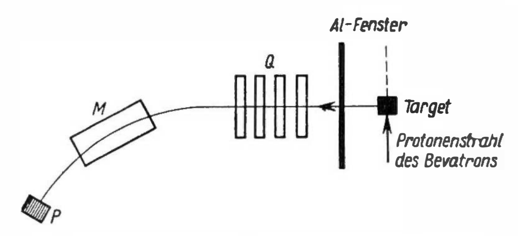


Abb. 145. Magnetisches Spektrometer zur Bestimmung der Masse der K^+-Mesonen [R 56-1] (Q = magnetische Quadrupollinsen; M = Ablenkmagnet; P = Emulsionspaket)

So war es möglich, Teilchen mit definiertem Impuls in ein Emulsionspaket zu schießen. Durch Messung der Reichweite an den in der Emulsion zur Ruhe gekommenen K^+-Mesonen kann man ihre Masse bestimmen. Die verschiedenen

K^+-Mesonen lassen sich durch ihre unterschiedlichen Zerfallsmechanismen identifizieren.

Die Masse des $K^+_{\pi 2}$-Mesons ergab sich zu

$$m_{K^+_{\pi 2}} = (967 \pm 2)\, m_e .$$

Da die Massen beider Zerfallsteilchen und die des $K^+_{\pi 2}$-Mesons bekannt sind, läßt sich die Zerfallsenergie des $K^+_{\pi 2}$-Mesons leicht zu $Q = 219$ MeV bestimmen.

Mit der in Abb. 144 angegebenen Anordnung läßt sich die durch die Konfiguration

$$K^+_{\pi 2} = g + d - e + a - b$$

charakterisierte mittlere Lebensdauer des $K^+_{\pi 2}$-Mesons bestimmen:

$$t_{K^+_{\pi 2}} = (1{,}3 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-8}\ \text{sec} .$$

Das $K^+_{\pi 2}$-Meson findet man in der Literatur auch oft als χ^+-Meson bezeichnet.

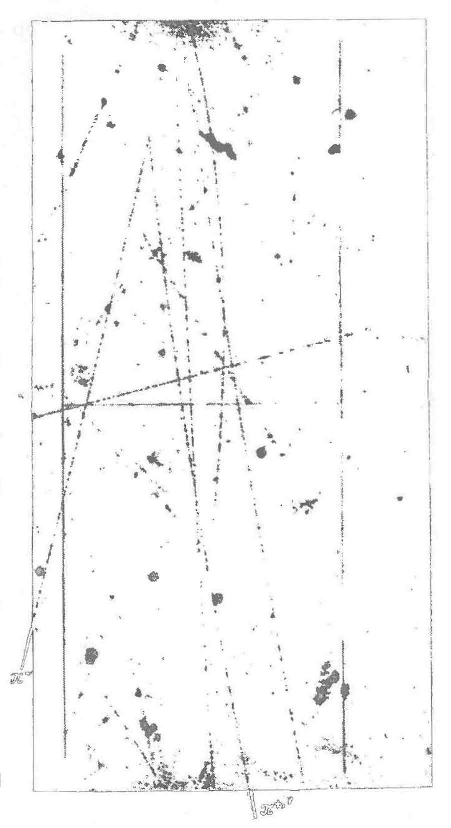


Abb. 146.
Aufnahme eines Θ^0-Zerfalls in einer Nebelkammer [W 56-2]

c) Das $K^+_{\mu 2}$-Meson

Die Existenz eines K^+-Mesons, das unter Emission eines monoenergetischen μ^+-Mesons zerfällt, wurde erstmalig im Jahre 1954 von Le Prince-Ringuet und Mitarbeitern [L 51-1] nachgewiesen. Ihre Meßanordnung bestand aus zwei großen übereinanderstehenden Nebelkammern auf dem Pic du Midi (2870 m). Die obere Nebelkammer befand sich in einem Magnetfeld, während die untere Kammer mehrere Cu-Platten enthielt. Die Autoren fanden als sekundäre Zerfallsteilchen eine monoenergetische Gruppe von μ^+-Mesonen mit einer Reichweite von etwa 8,5 cm in Kupfer. Das entspricht einer kinetischen Energie $E_\mu = 145$ MeV. Genauere Untersuchungen mit großen Emulsionspaketen, die teils an der kosmischen Strahlung, teils an den großen Beschleunigungsanlagen durchgeführt wurden, führten zum sicheren Nachweis des μ-Mesons, da in einigen Fällen die Teilchen in der Emulsion zur Ruhe kamen und den charakteristischen μ-e-Zerfall zeigten. Reichweitemessungen an diesen μ-Mesonen ergaben für deren kinetische Energie den Wert

$$E_\mu = (151{,}8 \pm 1{,}5)\ \text{MeV}.$$

Mit der auf S. 366 beschriebenen Apparatur zur direkten Massenbestimmung erhielt man die Masse des $K_{\mu 2}^{+}$-Mesons:

$$m_{K_{\mu 2}^{+}} = (967 \pm 2)\, m_e.$$

Mit diesen Werten läßt sich wiederum leicht aus Gleichung (79.8) die Ruhemasse des neutralen Teilchens zu $m_0 = 0$ berechnen. Man erhält also das Zerfallsschema

$$K_{\mu 2}^{+} \rightarrow \mu^{+} + \nu. \tag{80.5}$$

Ein γ-Quant als neutrales Zerfallsteilchen kann man ausschließen, da in keinem der beobachteten Fälle eine Elektronenkaskade sichtbar war.

Aus den Ruhemassen des K- und des μ-Mesons erhält man als Zerfallsenergie $Q = 388$ MeV.

Mit der in Abb. 144 angegebenen Versuchsanordnung wurde die mittlere Lebensdauer des $K_{\mu 2}^{+}$-Mesons gemessen: Ihr Wert beträgt

$$t_{K_{\mu 2}^{+}} = (1{,}4 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-8}\,\text{sec}.$$

d) Das $K_{\mu 3}^{+}$- und das $K_{\beta 3}^{+}$-Meson

Es folgt jetzt eine Beschreibung des $K_{\mu 3}^{+}$- oder $\varkappa^{+}$-Mesons und des $K_{\beta 3}^{+}$-Mesons, bei deren Zerfall jeweils neben einem geladenen Zerfallsteilchen mindestens zwei neutrale Teilchen emittiert werden.

Die Aufstellung eines Zerfallsschemas ist in solchen Fällen wesentlich schwieriger als beim Zweiteilchenzerfall. Unsere Kenntnisse der beiden Zerfallsschemas ist daher entsprechend mangelhaft.

Den ersten $K_{\mu 3}^{+}$-Zerfall entdeckte im Jahre 1951 O'Ceallaigh [C 51-2] in einer Kernemulsion. Das geladene Sekundärteilchen konnte er an Hand des μ-e-Zerfalls als μ-Meson identifizieren.

Die wenigen bisher analysierten Ereignisse ergaben als maximale Energie des emittierten μ-Mesons einen Wert von ≈ 130 MeV.

Durch direkte Massenbestimmungen mit der vorstehend beschriebenen Anordnung erhielt man $m_{K_{\mu 3}^{+}} = (968 \pm 6) m_e$.

Somit läßt sich nach Gleichung (79.8) die Summe der Massen der emittierten neutralen Sekundärteilchen zu m_{π^0} bestimmen. Das Zerfallsschema hat also wahrscheinlich die Form

$$K_{\mu 3}^{+} \rightarrow \mu^{+} + \pi^{0} + \nu. \tag{80.6}$$

Die zugehörige Zerfallsenergie beträgt $Q = 253$ MeV.

Über das $K_{\beta 3}^{+}$-Meson weiß man z.Z. noch weniger. Die Existenz des β-Zerfalls des K^{+}-Mesons wurde 1954 durch Friedlander u. a. [F 54-2] entdeckt. Bei den wenigen bisher identifizierten Ereignissen variiert die Energie des Positrons zwischen 0 und ungefähr 250 MeV.

Direkte Massenbestimmungen am Bevatron ergaben den Wert

$$m_{K^+_{\beta 3}} = (963 \pm 10)\, m_e\,.$$

Da über die Natur der neutralen Sekundärteilchen noch nichts bekannt ist, wird das Zerfallsschema in folgender Form geschrieben:

$$K^+_{\beta 3} \rightarrow e^+ + ? + ? \tag{80.7}$$

Direkte Messungen der Lebensdauer von $K^+_{\mu 3}$ und $K^+_{\beta 3}$ konnten bisher nicht durchgeführt werden. Eine Vorstellung von der Größenordnung der mittleren Lebensdauer gewinnt man aus dem Vergleich der Häufigkeiten der $K^+_{\mu 3}$ und $K^+_{\beta 3}$ unter den anderen K^+-Mesonen bei verschiedenen Flugzeiten der K^+-Mesonen vor ihrer Aufzeichnung. Als Ergebnis derartiger Versuche wurde festgestellt, daß die mittlere Lebensdauer der $K^+_{\mu 3}$- und $K^+_{\beta 3}$-Mesonen nicht merklich von der der anderen K^+-Mesonen abweichen kann.

Die Häufigkeit, mit der die verschiedenen K^+-Mesonen entstehen, wurde mehrfach mit großen Emulsionspaketen untersucht, die teils in der kosmischen Strahlung, teils an den großen Beschleunigungsmaschinen exponiert wurden. Die gefundenen Werte stimmen in beiden Fällen größenordnungsmäßig überein. Als Beispiel seien in Tabelle 44 die Häufigkeiten angegeben, die LE PRINCE-RINGUET und Mitarbeiter [C 56-2] in einem Emulsionspaket fanden, das mit 6,2 GeV Protonen beschossen worden war.

Tabelle 44. Häufigkeit der verschiedenen K^+-Mesonen)*

Art des Teilchens	$K^+_{\mu 2}$	$K^+_{\pi 2}$	$K^+_{\beta 3}$	$K^+_{\mu 3}$	$K^+_{\mu 3}$	$K^{+\prime}_{\pi 3}$
Häufigkeit [%]	54	26	8	4	7	1

*) Neuere Ergebnisse sind in der Tabelle der Elementarteilchen (Anhang I, Tabelle 5) enthalten.

e) Die K^--Mesonen

Über die Zerfallsmechanismen der K^--Mesonen weiß man sehr wenig. Das hat seine Ursache darin, daß ein zur Ruhe gekommenes K^--Meson von einem Atomkern eingefangen wird, bevor es zerfällt. Unsere bisherigen Kenntnisse gehen daher auf einige identifizierte Zerfälle im Fluge zurück. Das erste τ^-*-Meson* fanden 1953 VAN LINT und TRILLING [L 53-2] mit einer großen Nebelkammeranordnung, die in einem Magnetfeld aufgestellt war. Aus der Krümmung der Spuren und ihrer spezifischen Ionisation konnten die drei Sekundärteilchen als π-Mesonen identifiziert werden. Die Zerfallsenergie bestimmten die Autoren zu $Q = (70 \pm 3)$ MeV.

In den darauffolgenden Jahren konnten in Nebelkammern einige weitere Zerfälle im Fluge als τ^--Mesonen identifiziert werden, so daß der τ^--Zerfall als gesichert betrachtet werden kann:

$$\tau^- \rightarrow \pi^- + \pi^- + \pi^+. \tag{80.8}$$

Kürzlich berichteten EKSPONG und GOLDHABER [E 56-1], daß sie in einem Emulsionspaket bei zwei Mesonenzerfällen im Fluge das zugehörige Zerfallsschema feststellen konnten. Das Emulsionspaket war am K^--Strahl des Bevatrons exponiert worden.

Durch Messung der Vielfachstreuung und der Ionisation an den Spuren der Primär- und Sekundärteilchen konnten sie deren Masse, Impuls und Energie bestimmen und erhielten daraus folgende Zerfälle:

$$K^-_{\pi 2} \to \pi^- + \pi^0, \tag{80.9}$$

$$K^-_{\beta 3} \to e^- + 2 \text{ neutrale Teilchen.} \tag{80.10}$$

Der fokussierte K^--Strahl des Bevatrons wurde mit der bereits auf S. 366 beschriebenen Anordnung erzeugt, wobei entsprechend des geänderten Vorzeichens der Ladung die Magnete umgepolt waren.

Mit der gleichen Methode wie bei den K^+-Mesonen wurde die direkte Massenbestimmung der K^--Mesonen durchgeführt. Das Ergebnis dieser Messungen war [G 56-1]:

$$\frac{m_{K^-}}{m_{K^+}} = 0{,}998 \pm 0{,}013 .$$

Eine Messung der mittleren Lebensdauer der K^--Mesonen wurde ebenfalls am K^--Strahl durchgeführt. Hinter dem magnetischen Analysator war ein Emulsionspaket aufgestellt. Gemessen wurde die Weglänge der K^--Mesonen in der Emulsion, bis sie zur Ruhe kamen, eine Wechselwirkung stattfand oder sie im Fluge zerfielen. Da die Geschwindigkeit der Teilchen bei ihrem Eintritt in die Emulsion bekannt war, konnte die mittlere Lebensdauer aus 13 Zerfällen im Fluge zu folgendem Wert bestimmt werden [G 56-1]:

$$t_{K^-} = \left(0{,}95 \begin{matrix} +\,0{,}36 \\ -\,0{,}25 \end{matrix}\right) \cdot 10^{-8}\,\text{sec.}$$

f) Die K^0- Mesonen

Die gegenwärtigen Kenntnisse über die neutralen K-Mesonen sind noch schlechter als die über die K^--Mesonen. Bisher konnte lediglich die Existenz eines Teilchens, des *Θ^0-Mesons*, sicher nachgewiesen werden. Die Schwierigkeiten bei der Untersuchung der K^0-Mesonen liegen darin, daß die Masse, die Geschwindigkeit und bei den meisten Beobachtungen auch die Bewegungsrichtung des Primärteilchens indirekt aus den Daten der geladenen Sekundärteilchen bestimmt werden müssen. Obwohl der Zerfall eines *V^0-Teilchens* in zwei L-Mesonen im Jahre 1951 bereits von einigen Autoren in Nebelkammern beobachtet wurde, gelang die sichere Identifizierung der beiden Sekundärteilchen als π^+- und π^--Mesonen erst THOMPSON und seinen Mitarbeitern [T 53-1]. Als Beispiel ist in Abb. 146, S. 367, die Aufnahme eines Θ^0-Zerfalls gezeigt. Die Natur der beiden Zerfallsteilchen läßt sich aus der Krümmung der Bahn im Magnetfeld und der Ionisation bestimmen.

In vielen der beobachteten Zerfälle war auch der Kernprozeß, aus dem das V^0-Teilchen herrührte, in der Nebelkammer sichtbar. Stets lagen der Ursprung des V^0-Teilchens und die Bahnen der beiden Zerfallsteilchen innerhalb der Meßfehler in einer Ebene. Koplanarität des Θ^0- und der beiden L-Mesonen bedeutet aber auf Grund der Impulserhaltung, daß es sich um einen Zweiteilchenzerfall handelt.

Man kann also das Zerfallsschema in folgender Form schreiben:

$$\Theta^0 \to \pi^+ + \pi^- . \qquad (80.11)$$

Mit den bekannten Massen der π-Mesonen, den gemessenen Impulsen und dem Winkel zwischen den Zerfallsteilchen läßt sich aus den Gleichungen (79.5) die Masse und die Zerfallsenergie bestimmen:

$$m_{\Theta^0} = (966 \pm 10)\, m_e; \quad Q = (214 \pm 5)\,\text{MeV}.$$

Die Gleichungen (79.5) gestatten ferner die Bestimmung der Geschwindigkeit des Θ^0-Mesons. Mißt man außerdem die Flugstrecke zwischen Ursprung und Zerfall, so kann man daraus die mittlere Lebensdauer bestimmen. Als Ergebnis derartiger Messungen [G 54-1] erhielt man aus 36 Zerfällen den Wert

$$t_{\Theta^0} = \left(1{,}7 \begin{array}{l} + 0{,}6 \\ - 0{,}4 \end{array}\right) \cdot 10^{-10}\,\text{sec}.$$

Ein Vergleich der Zerfallsschemata und der Zerfallsenergien des $K^+_{\pi 2}$- und des Θ^0-Mesons macht es sehr wahrscheinlich, daß das $K^+_{\pi 2}$-Meson das positiv geladene Analogon zum Θ^0-Meson ist. Man findet es daher auch häufig als Θ^+-*Meson* bezeichnet. Bei der Beschreibung der K^--Mesonen wurde das kürzlich nachgewiesene $K^-_{\pi 2}$-Mesons erwähnt, das man als Θ^--*Meson* betrachten könnte.

g) Das Λ^0-Hyperon

Es soll jetzt eine weitere Gruppe neuer instabiler Elementarteilchen, die sog. *Hyperonen*, betrachtet werden.

Die Existenz eines neutralen Teilchens, das in ein Proton und in ein L^--Meson zerfällt, wurde durch ARMENTEROS u.a. [A 51-1] in der Nebelkammer festgestellt. Mit den bei der Beschreibung des Θ^0-Mesons bereits skizzierten Verfahren wurden die Eigenschaften des Λ^0-Hyperons bestimmt:

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-; \qquad (80.12)$$

$$Q = (37 \pm 1)\,\text{MeV};$$

$$m_{\Lambda^0} = (2181 \pm 2)\, m_e;$$

$$t_{\Lambda^0} = \left(3{,}6 \begin{array}{l} + 0{,}6 \\ - 0{,}5 \end{array}\right) \cdot 10^{-10}\,\text{sec}.$$

h) Das Σ - Hyperon

Das Σ-Hyperon wurde von BONETTI u.a. [B 53-1] bei der Untersuchung von S-Ereignissen in der Emulsion gefunden. Durch Messung der Vielfachstreuung und der Ionisation der Spur des Primärteilchens bestimmten sie seine Masse zu $\approx 2330\, m_e$. Das als Proton identifizierte Zerfallsteilchen kam in der Emulsion zur Ruhe. Es besaß eine kinetische Energie von 18,7 MeV.
In den vergangenen Jahren sind mehrere weitere Ereignisse der beschriebenen Art gefunden worden. Da die kinetische Energie in allen Fällen stets den gleichen Wert von (18,8 ± 0,1) MeV hatte, liegt ein Zweiteilchenzerfall vor. Eine Berechnung der Masse des neutralen Sekundärteilchens nach Gleichung (79.8) zeigt, daß es sich um ein π^0-Meson handelt. Das Zerfallsschema hat also folgende Form:

$$\Sigma^+ \to p + \pi^0. \tag{80.13}$$

Gleichung (79.8) gestattet ebenfalls die genaue Bestimmung der Masse des Hyperons durch Einsetzen der bekannten Massen der Sekundärteilchen bzw. der kinetischen Energie des Protons:

$$m_{\Sigma^+} = (2327 \pm 1)\, m_e; \quad Q = (116 \pm 0{,}5)\ \text{MeV}.$$

Von BONETTI u.a. [B 53-2] wurde auch ein anderer Zerfall des Σ-Hyperons beobachtet:

$$\Sigma^+ \to n + \pi^+. \tag{80.13a}$$

Dieses Schema konnte auf die vorstehend beschriebene Weise gesichert werden, da das π^+-Meson in mehreren Fällen in der Emulsion zur Ruhe kam. Entsprechend der etwas unterschiedlichen Massen der Sekundärteilchen bei den beiden Zerfallsarten des Σ^+-Hyperons ergab sich die Zerfallsenergie zu

$$Q = (110 \pm 1)\ \text{MeV}.$$

Es gibt mehrere voneinander unabhängige Beobachtungen, die auf die Existenz des negativen Σ-Hyperons hinweisen. DEBENEDETTI u.a. [D 54-3] beobachteten in der Emulsion einen Zerfall im Fluge, bei dem das Sekundärteilchen, ein π^--Meson, in der Emulsion zur Ruhe kam und einen σ-Stern erzeugte.
Sie interpretierten dieses Ereignis als den Zerfall

$$\Sigma^- \to \pi^- + n. \tag{80.14}$$

CHUPP u.a. [C 56-3] untersuchten den Kerneinfang negativer K-Mesonen, die in der zum Nachweis benutzten Emulsion zur Ruhe kamen. Sie fanden unter anderem zwei Ereignisse, die sie der Reaktion

$$K^- + p \to \Sigma^- + \pi^+ \tag{80.15}$$

zuordnen konnten. Aus den bekannten Massen von Proton, π- und K-Meson und der Reichweite der in der Emulsion endenden Σ^--Hyperonen läßt sich deren Masse bestimmen. Die Auswertung beider Ereignisse ergab den Wert

$$m_{\Sigma^-} = (2338 \pm 5)\, m_e.$$

Der Nachweis des neutralen Σ-Hyperons gelang STEINBERGER und Mitarbeitern [P 56-1]. Sie exponierten eine mit Propan gefüllte Blasenkammer am π^--Strahl

des Cosmotrons in Brookhaven. Die π-Mesonen besaßen unterschiedliche Energien in der Nähe von 1 GeV. Die Kammer befand sich in einem Magnetfeld von 13 400 Gauß. Die Autoren beobachteten in drei Fällen die Reaktion[1])

$$\pi^- + p \to \Sigma^0 + \Theta^0,$$

wobei das Σ^0-Hyperon nach einer vermutlich sehr kurzen Zeit ($\sim 10^{-19}$ sec) in folgender Weise zerfiel:

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma. \tag{80.16}$$

In Abb. 147 ist die Aufnahme eines dieser Ereignisse wiedergegeben. Die Flugrichtungen des einfallenden π-Mesons und der entstandenen neutralen Teilchen sind durch Pfeile markiert.

Die kinematische Analyse der drei Ereignisse ergab nachstehende Mittelwerte für die Masse und die Zerfallsenergie des Σ^0-Hyperons:

$$m_{\Sigma^0} = (2323 \pm 7)\,m_e; \quad Q = (73{,}0 \pm 3{,}5) \text{ MeV}.$$

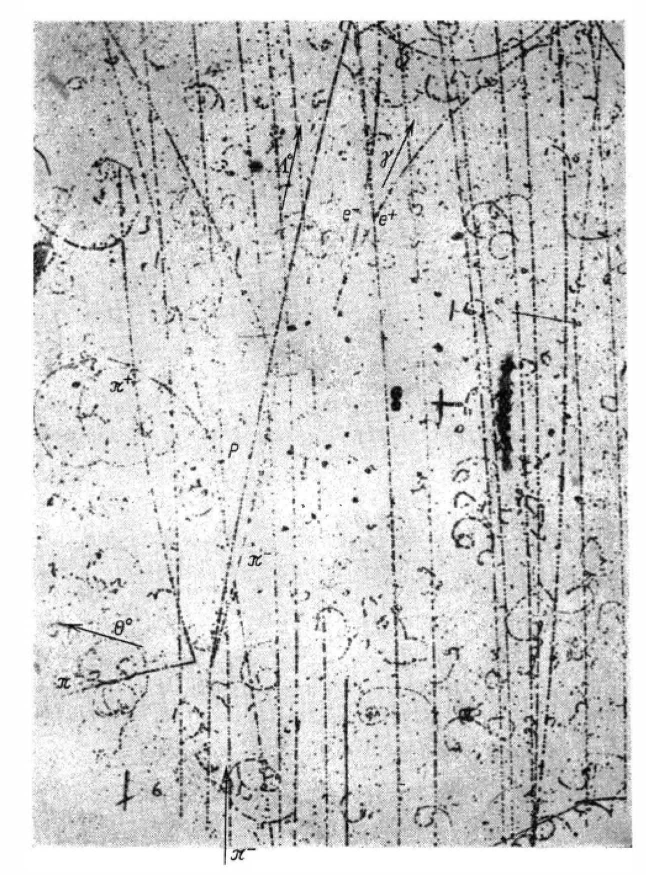


Abb. 147.
Erzeugung eines Σ^0-Hyperons durch die Reaktion
$\pi^- + p \to \Sigma^0 + \Theta^0$ [P 56-1]

[1]) Über die gemeinsame Erzeugung von K-Mesonen und Hyperonen s. S. 375.

An einigen Zerfällen im Fluge von $\Sigma^{\pm}$-Hyperonen konnte eine Abschätzung der mittleren Lebensdauer durchgeführt werden. Man erhielt den folgenden Wert:

$$t_{\Sigma^{\pm}} = \left(3{,}5 \begin{array}{l} + 1{,}5 \\ - 1{,}1 \end{array}\right) \cdot 10^{-11}\,\text{sec}\,.$$

i) Das Ξ^--Hyperon

In Abb. 148 ist ein Ereignis skizziert, das von COWAN [C 54-2] in einer Nebelkammer gefunden wurde, die sich in einem Magnetfeld befand. Aus der Krümmung der Bahnen und ihrer Ionisation wurden die in der Abbildung angegebenen Impulse und Massen der Teilchen bestimmt. Dieses Ereignis läßt sich als ein Zerfall

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^- \tag{80.17}$$

interpretieren. Die Zerfallsenergie des Λ^0-Hyperons ergab sich zu $Q = (40 \pm 13)$ MeV und die des Ξ^--Hyperons zu $Q = (67 \pm 12)$ MeV.

Inzwischen sind einige weitere Zerfälle dieser Art beobachtet worden, so daß man die Existenz des Ξ^--Hyperons als gesichert betrachten kann. Für seine Zerfallsenergie und seine Masse ergaben sich im Mittel folgende Werte:

$$Q = (67 \pm 3)\,\text{MeV};$$
$$m_{\Xi^-} = (2586 \pm 7)\,m_e.$$

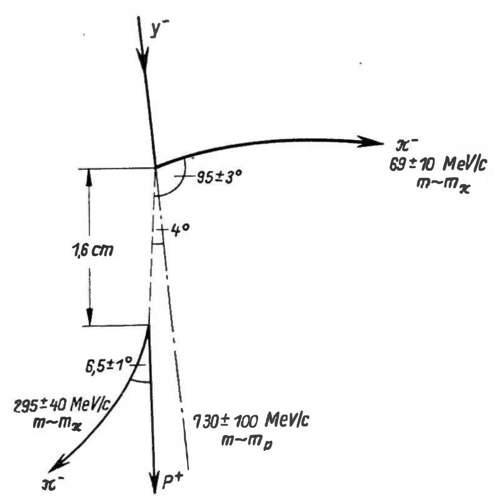


Abb. 148. Zerfall des Ξ^--Hyperons

Es gibt einige weitere Ereignisse, die mit den bisher beschriebenen Zerfällen nicht zu erklären sind. Die Möglichkeit, daß weitere, insbesondere schwerere Hyperonen existieren, ist daher nicht von der Hand zu weisen.

Bei der Beschreibung der Eigenschaften der K-Mesonen und Hyperonen wurden keine Angaben über ihren *Spin* gemacht. Das hat seine Ursache darin, daß bisher bei keinem dieser Teilchen eine direkte experimentelle Bestimmung dieser Größe möglich war. Aus den Zerfallsschemata der K-Mesonen bzw. der Hyperonen geht jedoch hervor, daß es sich bei den ersteren um Teilchen mit ganzzahligem Spin (*Bosonen*) und im zweiten Fall um Teilchen mit halbzahligem Spin (*Fermionen*) handelt.[1])

---

[1]) Siehe die Anmerkungen zur Tabelle der Elementarteilchen (Anhang I, Tabelle 5).

Nach diesem kurzen Überblick über die bisher bekannten neuen Elementarteilchen und ihre Eigenschaften soll jetzt einiges über ihre Erzeugung und ihre Kernwechselwirkungen gesagt werden.

k) Die Erzeugung

Obwohl sich die Untersuchungen über die Erzeugung noch ganz am Anfang befinden, konnten bereits einige interessante Merkmale festgestellt werden. Von Bedeutung ist, daß sich diese Beobachtungen gut in ein von GELL-MANN und PAIS [G 54-2] und unabhängig von ihnen von NISHIJIMA [N 55-1] vorgeschlagenes theoretisches Schema einordnen lassen. Ohne auf die theoretische Begründung näher einzugehen, soll dieses Schema angegeben werden, um einige einfache Arbeitsregeln zu erhalten.

Es wird eine Art neuer Quantenzahl eingeführt, die sog. *Strangeness S (Seltsamkeit)*. In Tabelle 45 ist der jedem Elementarteilchen zugeordnete S-Wert angegeben.

Tabelle 45. Strangeness-Werte von Elementarteilchen

S	$+1$	0	-1	-2
Teilchen	K^+; Θ^0	$p, n, \pi^\pm, \pi^0$	Λ^0; K^-; $\Sigma^\pm$; Σ^0	Ξ^-(?)

Die Strangeness eines Systems ist als algebraische Summe der S-Werte der Teilchen des Systems definiert.

Für Reaktionen soll jetzt neben den üblichen Erhaltungssätzen die Regel gelten, daß der Ablauf einer Reaktion davon abhängt, in welchem Grad die Strangeness des Systems erhalten bleibt. Im einzelnen lauten diese Regeln:

1. Reaktionen, in denen der Wert von S erhalten bleibt ($\Delta S = 0$) sind schnell, d.h., sie laufen in Zeiten von $\sim 10^{-23}$ sec ab.

2. Reaktionen mit $\Delta S = \pm 1$ sind langsam. Ihre Zeiten sind vergleichbar mit den Lebensdauern der neuen Teilchen (10^{-8} bis 10^{-11} sec).

3. Reaktionen mit $|\Delta S| > 1$ sind so langsam, daß sie nicht beobachtet werden können.

Ein charakteristisches Merkmal für die Erzeugung schwerer instabiler Teilchen ist die Erscheinung der *Assoziation*, die erstmalig von SHUTT und Mitarbeitern [F 54-3] beobachtet wurde. Darunter versteht man die gleichzeitige Erzeugung von K-Mesonen und Hyperonen. Sie exponierten am 1,5 GeV π^--Strahl des Cosmotrons eine Diffusionsnebelkammer. Dabei fanden sie einige Reaktionen der Art

$$\pi^- + p \rightarrow Y + K. \qquad (80.18)$$

Ihre Daten und die aus ähnlichen Versuchen am Bevatron gewonnenen Ergebnisse führten zur Feststellung folgender Reaktionen:

$$\pi^- + p \to \begin{cases} \Lambda^0 + \Theta^0, \\ \Sigma^- + K^+, \\ \Lambda^0 + K^+ + \pi^-. \end{cases} \tag{80.18a}$$

In allen Fällen liegen schnelle Reaktionen mit $\Delta S = 0$ vor.
Über die Größe der Wirkungsquerschnitte bei all diesen Reaktionen und ihre Abhängigkeiten von der Primärenergie ist noch nichts bekannt.
Bei hochenergetischen Kernprozessen, die durch Teilchen der Kosmischen Strahlung teils in Kernemulsionen, teils in Nebelkammern ausgelöst wurden, beobachtete man ebenfalls einige Prozesse der assoziierten Erzeugung. Einige dieser Reaktionen seien als Beispiele angegeben:

$$\begin{aligned} &\Sigma^? + \tau^+, \\ &\Sigma^? + K^+, \\ \to\ &\Sigma^? + \Theta^+, \\ &\Xi^- + \Theta^0 + \Theta^0. \end{aligned} \tag{80.19}$$

Eine interessante Voraussage der Theorie ist die unterschiedliche Erzeugung von K^+- und K^--Mesonen.
Während die ersteren in Reaktionen der Art

$$\pi + N \to K^+ + (\Lambda^0 \text{ oder } \Sigma) \tag{80.20}$$

$$N + N \to N + K^+ + (\Lambda^0 \text{ oder } \Sigma) \tag{80.21}$$

erzeugt werden, sind die entsprechenden Reaktionen für K^--Mesonen verboten ($\Delta S = -2$). Die Übergangsregeln lassen unter Verwendung der in Tabelle 45 angegebenen S-Werte folgende Reaktionen erwarten:

$$\pi + N \to N + K^- + (K^+ \text{ oder } \Theta^0), \tag{80.20a}$$

$$N + N \to N + N + K^- + (K^+ \text{ oder } \Theta^0). \tag{80.21a}$$

Eine indirekte experimentelle Unterstützung dieser Voraussage gibt das $\frac{K^+}{K^-}$-Verhältnis. Durch den 6,2 GeV-Protonen-Strahl in Berkeley wurden etwa 100mal mehr K^+- als K^--Mesonen erzeugt. Dieses Verhältnis verschiebt sich zugunsten der K^--Mesonen, wenn man mit 4,3 GeV π^--Mesonen bestrahlt (s. Gleichung (78.13)).

l) Die Wechselwirkung

Zur Zeit liegen bereits einige Resultate über die Wechselwirkung schneller K-Mesonen mit Atomkernen vor, die durch Exponierung von Emulsionspaketen am K^+- bzw. K^--Strahl des Bevatrons gewonnen wurden. Die kinetische Energie der Teilchen betrug etwa 30 bis 110 MeV. Ferner wurden einige Untersuchungen über den Einfang negativer K-Mesonen durch Atomkerne der Emulsion durchgeführt.

Vor Beschreibung der Ergebnisse dieser Experimente soll angegeben werden (Tabelle 46), welche Reaktionen der K-Mesonen mit Nukleonen bei Erhaltung der Strangeness möglich sind.

Die Tabelle zeigt, daß bei den K^+-Mesonen nur elastische Streuung und Ladungsaustausch auftreten, während bei den K^--Mesonen die Möglichkeit weiterer unelastischer Prozesse besteht.

Tabelle 46.
K-N-Reaktionen bei Erhaltung der Strangeness

$K^+ + n \to K^+ + n$ $\to K^0 + p$	$K^+ + p \to K^+ + p$
$K^- + n \to K^- + n$ $\to \Sigma^0 + \pi^-$ $\to \Sigma^- + \pi^0$ $\to \Lambda^0 + \pi^-$	$K^- + p \to K^- + p$ $\to \Sigma^+ + \pi^-$ $\to \Sigma^0 + \pi^0$ $\to \Sigma^- + \pi^+$ $\to \Lambda^0 + \pi^0$

Vergleichen wir nun diese Voraussagen mit den experimentellen Ergebnissen: Der totale Wirkungsquerschnitt für die Wechselwirkung schneller K^+-Mesonen mit Atomkernen beträgt etwa $\frac{1}{3}$ der Größe des geometrischen Querschnitts. Unelastische Prozesse treten gegenüber Streuung und Ladungsaustausch kaum in Erscheinung. Die Wechselwirkung schneller K^--Mesonen zeigt ein ganz anderes Bild. Bestimmend sind die Absorptionsprozesse, während Streuung und Ladungsaustausch nur einen unbedeutenden Teil des totalen Wirkungsquerschnitts ausmachen. Der Wirkungsquerschnitt hat etwa die Größe des geometrischen Querschnitts.

Alle bisherigen Beobachtungen des Kerneinfanges von in der Emulsion zur Ruhe gekommenen K^--Mesonen (σ-Sterne) sind mit folgenden Reaktionen verträglich:

$$K^- + N \to \Lambda^0 + \pi + 178\,\text{MeV}, \tag{80.22a}$$

$$\to \Sigma + \pi + 103\,\text{MeV}, \tag{80.22b}$$

$$\to N + Y + Q_y. \tag{80.22c}$$

Nur wenige Einfänge gebremster Y^--Teilchen durch Atomkerne der Emulsion konnten bisher beobachtet werden. Auch sie lassen sich in das theoretische Schema von Gellmann u. a. einfügen.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Strangeness und die zugehörigen Erhaltungsregeln bei der Ordnung unseres Wissens über die schweren instabilen Teilchen und bei der Vorbereitung neuer Experimente offenbar eine große theoretische Hilfe darstellen.

m) Hyperfragmente

Zum Schluß des Kapitels sollen noch die von Danysz und Pniewski [D 53-1] in der Emulsion entdeckten Hyperfragmente erwähnt werden. Das sind Kernbruchstücke, in denen ein Λ^0-Hyperon gebunden ist. Der größte Teil der bisher beobachteten Hyperfragmente wurde in hochenergetischen Kernreaktionen erzeugt. In einigen Fällen ist das Hyperfragment auch aus einen σ_K-Stern emittiert worden.

Wegen der Instabilität der Hyperonen zerfällt das Hyperfragment. Man unterscheidet den sog. *mesonischen Zerfall*

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- + 37\ \text{MeV} \tag{80.23}$$

und den *nichtmesonischen Zerfall*

$$\Lambda^0 + n \rightarrow n + n + 180\ \text{MeV} \tag{80.24}$$

des Λ^0-Hyperons im Hyperfragment.

Bisher konnten rund 80 Hyperfragmente sicher identifiziert werden. Mesonische Zerfälle wurden vorwiegend bei den leichten Kernbruchstücken mit Ladungen $Z \leqq 3$ beobachtet.

In Abb. 149 ist als Beispiel ein Ereignis gezeigt, bei dem aus dem Stern A ein Hyperfragment F emittiert wird, das bei B mesonisch zerfällt.

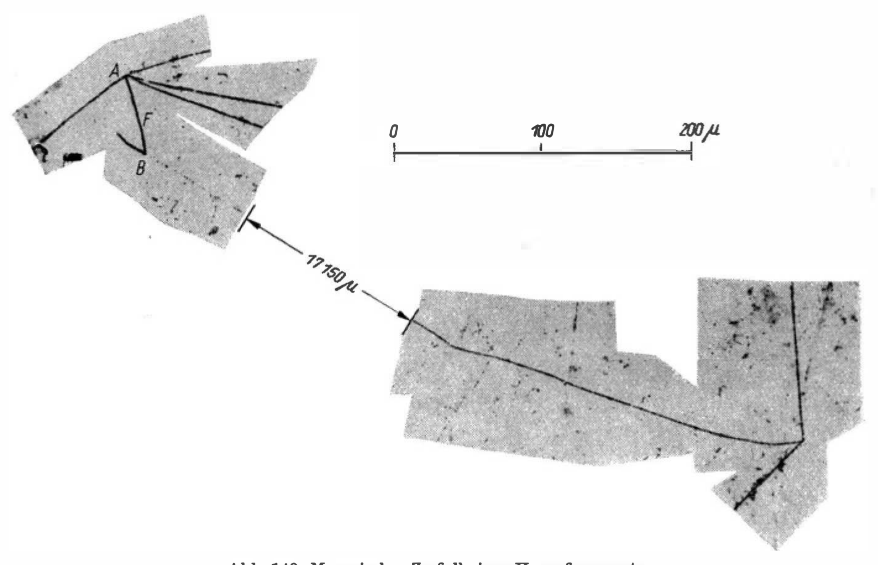


Abb. 149. Mesonischer Zerfall eines Hyperfragments
(A = Primärstern; F = Hyperfragment; B = Zerfall des Fragments)
(Aufnahme aus dem Kernphysikalischen Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften)

§ 81. Antinukleonen

Das paarweise Auftreten beispielsweise der Elektronen (e^+ und e^-) oder auch der μ-Mesonen (μ^+ und μ^-) und wahrscheinlich auch der schweren instabilen Teilchen sowie deren Eigenschaften lassen die Gültigkeit eines allgemeinen Symmetrieprinzips vermuten.

Dieses Prinzip läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

1. Zu jedem Teilchen existiert ein Antiteilchen.
2. Teilchen und Antiteilchen haben gleiche Masse und gleichen Spin.
3. Geladene Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich im Vorzeichen ihrer Ladung.
4. Teilchen und Antiteilchen haben entgegengesetzt gleiche elektrische und magnetische Momente.
5. Treffen ein Teilchen und ein Antiteilchen zusammen, so zerstrahlen sie (z. B. die Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paares in γ-Quanten).

Die allgemeine Gültigkeit dieses Symmetrieprinzips, das man als „*Invarianz gegenüber Ladungskonjugation*" bezeichnet, wird durch die kürzlich erfolgten Entdeckungen des *Antiprotons* und des *Antineutrons* stark unterstützt.
Zur Erzeugung eines Nukleon-Antinukleon-Paares beim Stoß eines hochenergetischen Protons auf ein im Laborsystem ruhendes Nukleon ist im Schwerpunktssystem eine Energie von $\geqq 2mc^2$ notwendig (m ist die Ruhemasse des Nukleons). Durch Einsetzen dieses Wertes in Gleichung (78.13) errechnet sich die im Laborsystem notwendige kinetische Energie zu 5,6 GeV. Berücksichtigt man die Impulsverteilung des gestoßenen Nukleons im Kern, so liegt die Energieschwelle bei 4,3 GeV.[1]) Da das Bevatron in Berkeley die Beschleunigung von Protonen bis auf 6,2 GeV gestattet, war damit die Möglichkeit einer künstlichen Erzeugung von Antinukleonen gegeben.

a) Das Antiproton

Segrè und Mitarbeitern [C 55-1] gelang es, mit der in Abb. 150 gezeigten Apparatur die *Existenz der Antiprotonen nachzuweisen*, nachdem bereits in Kernemulsionen, die der kosmischen Strahlung in großen Höhen ausgesetzt waren, einige Ereignisse beobachtet worden waren, die auf ihr Vorhandensein hinwiesen. Der Protonenstrahl des Bevatrons trifft auf ein Cu-Target T, wobei neben einer großen Zahl von π-Mesonen auch einige Antiprotonen entstehen. Die negativ geladenen Teilchen beschreiben im Magnetfeld des Bevatrons die angedeutete Bahn und verlassen durch ein Al-Fenster die Beschleunigungskammer. Mit dem Ablenkmagneten M_1 werden Teilchen eines bestimmten Impulsintervalls ausgewählt und durch das Quadrupolmagnetfeld Q_1 auf den Szintillationszähler S_1

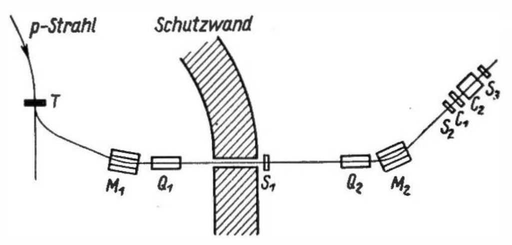


Abb. 150. Schema der Versuchsanordnung zum Nachweis der Antiprotonen [C 55-1] (T = Cu-Target; S_1 bis S_3 = Szintillationszähler; C_1, C_2 = Čerenkov-Zähler; Q_1, Q_2 = Quadrupolmagnete; M_1, M_2 = Ablenkmagnete)

---

[1]) Siehe auch Kap. VI, § 43.

fokussiert. Eine weitere Fokussierung und Impulsanalyse erfolgt in den Magneten Q_2 und M_2, so daß beim Auftreten auf den Szintillationszähler S_2 nur noch negative Teilchen mit einem Impuls von $1{,}19\,\frac{\text{GeV}}{c}$ im Strahl vorhanden sind. Diesem Impuls entsprechen π-Mesonen mit einer Geschwindigkeit von $v_{\pi^-} = 0{,}99c$ und Antiprotonen der Geschwindigkeit $v_{p^-} = 0{,}765\ c$. Zu ihrer Unterscheidung dient der Čerenkov-Zähler C_2, der so eingestellt ist, daß er nur auf Teilchen der Geschwindigkeit $0{,}75 < \beta < 0{,}78$ anspricht. Der Čerenkov-Zähler C_1 zählt alle Teilchen mit $\beta < 0{,}79$. Er verhindert die Registrierung eines Teilchens mit einer Geschwindigkeit $\beta > 0{,}79$, das durch einen unelastischen Stoß im Zähler C_2 in den Geschwindigkeitsbereich der Antiprotonen hineingestreut wird. Der Durchlauf eines Antiprotons wird also durch eine Koinzidenz S_1, S_2, C_2, S_3 angezeigt.

Wegen der großen Zahl der gleichzeitig auftretenden π^--Mesonen ist es notwendig, die Geschwindigkeit der Antiprotonen durch eine weitere unabhängige Methode zu messen. Dazu wurde die Laufzeit der Teilchen zwischen den Zählern S_1 und S_2 bestimmt. Die Laufzeit der π^--Mesonen unterscheidet sich von der der p^- um etwa $11 \cdot 10^{-6}$ sec.

Die Versuchsanordnung wurde durch Protonen geeicht. Diese erhielt man durch Änderung der Lage des Targets im Bevatron und Umkehrung der Magnetfelder von M_1, M_2, Q_1 und Q_2.

Als Ergebnis der Experimente fand man im Mittel ein Antiproton auf $4{,}4 \cdot 10^4\ \pi^-$-Mesonen. Die *Masse* der Antiprotonen wurde zu $m_{p^-} = (1840 \pm 90) m_e$ bestimmt. Wesentlich für die Bestätigung des Antiteilchencharakters dieser Teilchen war der Nachweis, daß sie mit Nukleonen *zerstrahlen.*

Findet die Zerstrahlung eines p^- mit einem Nukleon statt, das mit der Bindungsenergie E_B in einem Kern gebunden ist, so muß bei der Zerstrahlung folgende Energie frei werden:

$$Q = 2m_p c^2 - E_B = 1876 - 8 = 1868\ \text{MeV}.$$

Die Zerstrahlung wurde mit Kernemulsionen untersucht [B 57-1]. Emulsionspakete exponierte man hinter der Schutzwand im Strahl. In den Platten sind bisher 35 Sterne gefunden worden, die sich sicher der Zerstrahlung eines Nukleon-Antinukleon-Paares zuordnen lassen (Abb. 151). Bei 18 Zerstrahlungssternen war die durch geladene Teilchen weggeführte Energie größer als 50% des Q-Wertes. Die Untersuchung der Spuren aus den Sternen ergab das folgende Bild des Zerstrahlungsprozesses:

Bei der Zerstrahlung eines Nukleon-Antinukleon-Paares entstehen $5{,}3 \pm 0{,}4$ π-Mesonen mit jeweils einer mittleren Gesamtenergie von $U_\pi = (346 \pm 20)$ MeV. Die Zahl der geladenen π-Mesonen verhält sich zur Zahl der neutralen wie 2 : 1, d.h., dieses Verhältnis stimmt mit dem *Prinzip der Ladungsunabhängigkeit* überein. In seltenen Fällen entstehen bei der Zerstrahlung auch K-Mesonen neben den π-Mesonen. Ein Teil der entstehenden Mesonen wird im Kern gestreut oder absorbiert und führt damit dem Kern Energie zu, die zur Emission einiger Kernbruchstücke (Neutronen, Protonen, Deuteronen, α-Teilchen usw.) führt.

Die Untersuchungen erbrachten ein weiteres interessantes Resultat: die Feststellung des großen Wechselwirkungsquerschnitts der Antiprotonen. Die Spuren von 35 Antiprotonen wurden längs eines Weges von insgesamt (300 $\pm$ 30) cm in der

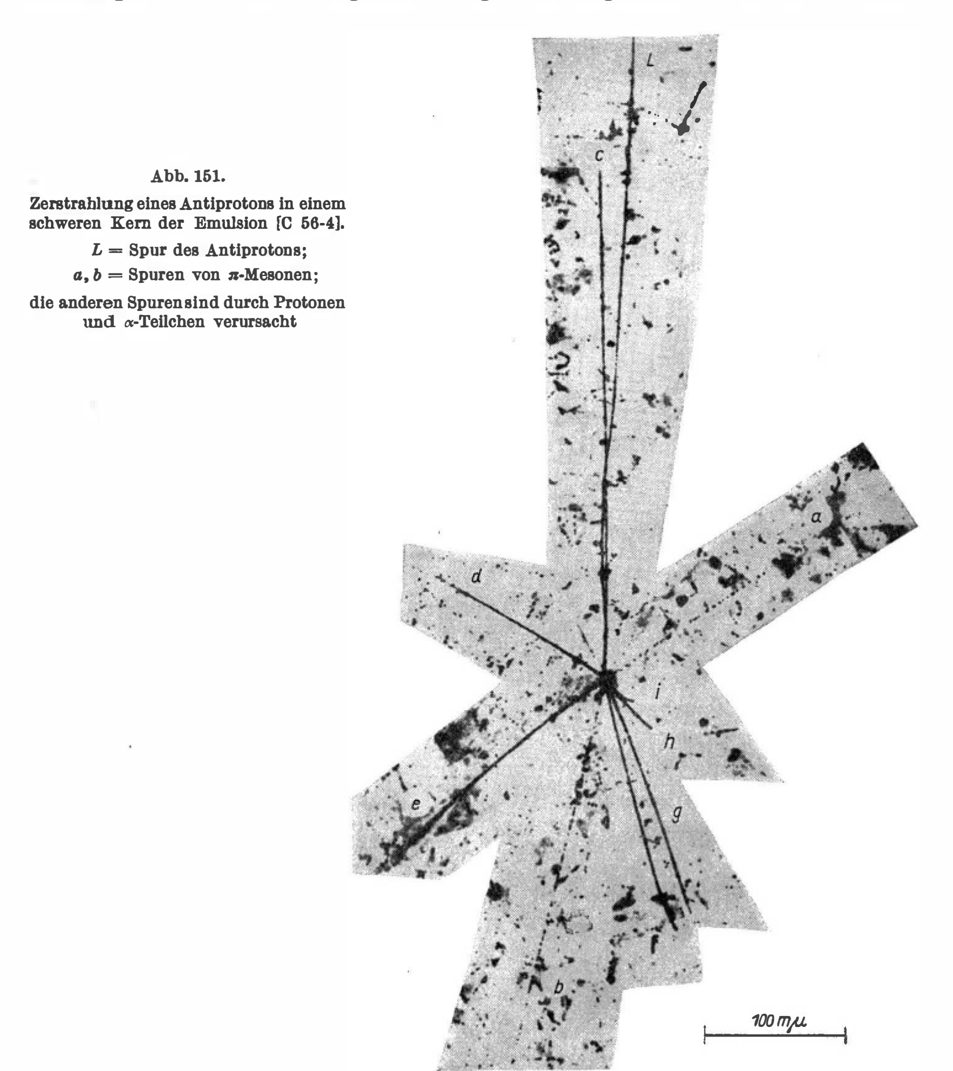


Abb. 151.
Zerstrahlung eines Antiprotons in einem schweren Kern der Emulsion [C 56-4].
L = Spur des Antiprotons;
a, b = Spuren von π-Mesonen;
die anderen Spuren sind durch Protonen und α-Teilchen verursacht

Emulsion verfolgt. Dabei wurden 21 Zerstrahlungen im Fluge und drei unelastische Kernstreuungen gefunden. Die mittlere kinetische Energie der p^- betrug 140 MeV. $\sigma_0 = \pi r_0^2 A^{2/3}$ mit $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm ist der geometrische Querschnitt. Die Beobachtungen ergaben einen Wechselwirkungsquerschnitt der Antiprotonen von $\sigma_{p^-} = (2{,}91 \pm 0{,}7)\,\sigma_0$.

b) Das Antineutron

Rund ein Jahr nach der Entdeckung des Antiprotons berichteten CORK u.a. [C 56-5] über den *Nachweis des Antineutrons.* Das Ziel ihres Versuches war die Beobachtung der Zerstrahlung von Antineutronen, die durch Ladungsaustauschstreuung der Antiprotonen erzeugt wurden.

Mit einem verbesserten Magnetsystem wurde eine Intensität des auf den Zähler F (s. Abb. 152) treffenden p^--Strahls von 300 bis 600 Antiprotonen pro Stunde erzielt. In dem würfelförmigen Szintillationszähler x verwandeln sich durch einen Ladungsaustausch einige Teilchen in Antineutronen. Diese durchlaufen die Szintillationszähler S_1 und S_2 und zerstrahlen mit einem Nukleon in dem großen Bleiglas-Čerenkovzähler C ($33 \cdot 33 \cdot 35\ \mathrm{cm}^3$). Die Impulshöhe des dabei entstehenden Lichtblitzes wird durch 16 großflächige Photomultiplier PM gemessen. Bei einer Ladungsaustauschstreuung ist die Impulshöhe in x kleiner als 100 MeV. Die Zähler S_1 und S_2 sprechen nicht an, und in C wird ein großer Impuls beobachtet. Die Bleiplatte K verhindert, daß hochenergetische γ-Quanten entsprechende Impulse in C verursachen. Durch Messung der Impulshöhenverteilung bei der Zerstrahlung von Antiprotonen wurde der Zähler C geeicht (ausgezogene Linie in Abb. 153). Die Treppenkurve zeigt die Impulshöhenverteilung bei der Zerstrahlung der Antineutronen. Aus der offensichtlichen Übereinstimmung beider Impulsverteilungen folgt die Existenz des Antineutrons über den Nachweis seiner Zerstrahlung.

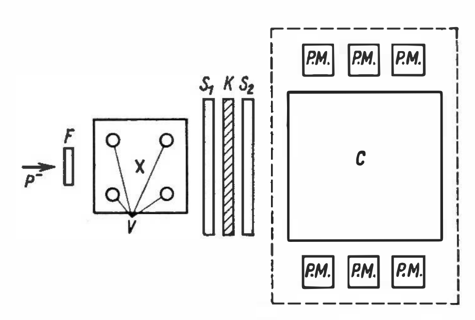


Abb. 152. Schema der Versuchsanordnung zum Nachweis der Antineutronen [C 56-5]
(F = Zähler; S_1, S_2 = Szintillationszähler; V = Photomultiplier; PM = Photomultiplier; K = Bleiplatte; C = Bleiglas-Čerenkov-Zähler; x = Szintillationszähler)

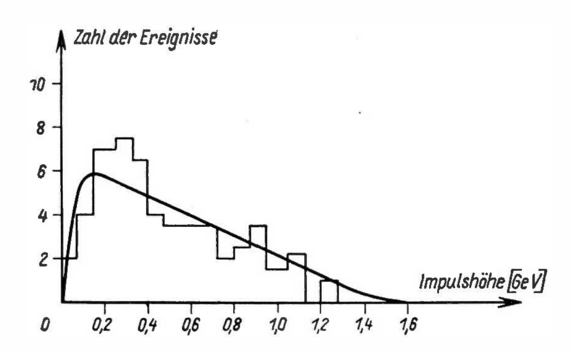


Abb. 153. Impulshöhenverteilung bei der Zerstrahlung der Antineutronen [C 56-5]

§ 82. Kernumwandlungen durch hochenergetische Teilchen

In den vorstehenden Paragraphen dieses Kapitels wurden die augenblicklich aktuellsten Fragen nach den Eigenschaften der Elementarteilchen und dem Charakter ihrer Wechselwirkungen behandelt. Inhalt dieses Paragraphen sind die beim Beschuß von Atomkernen mit hochenergetischen Teilchen ($\geq$ 100 MeV) auftretenden Kernumwandlungen. Diese Probleme schließen sich an die im Kapitel VI behandelten Kernreaktionen an. Durch die große Energie der die Reaktionen auslösenden Teilchen ist die Zahl der möglichen Umwandlungen erheblich größer als die bei Teilchen geringer Energie.
Trifft ein hochenergetisches Teilchen auf einen Atomkern, so wird ein mehr oder weniger großer Teil seiner Energie bei der Umwandlung des getroffenen Kernes verbraucht. Der an den Kern abgegebene Energiebetrag und damit auch die Art der Umwandlung hängt von der Kernmasse ab und davon, ob das primäre Teilchen den Kern zentral oder peripher trifft. Während der Umwandlungsprozesse verläßt eine mehr oder weniger große Anzahl von Neutronen, Protonen, Deuteronen, Tritonen, α-Teilchen und schwereren Bruchstücken den getroffenen Kern. Als Restkerne bleiben stabile oder radioaktive Isotope zurück.

Zur Untersuchung des *Mechanismus der Kernumwandlung* werden zwei sich ergänzende Verfahren benutzt:

1. Die beim Beschuß eines Isotops entstehenden Restkerne werden mittels radiochemischer Methoden identifiziert.
2. Die beim Beschuß emittierten geladenen Teilchen werden in der Nebelkammer oder in der Kernemulsion nachgewiesen.

Als Quellen zur Gewinnung hochenergetischer Teilchen dienen die kosmische Strahlung und die großen Beschleunigungsmaschinen. So ist ein großer Teil der Experimente mit Kernemulsionen mit Hilfe der kosmischen Strahlung durchgeführt worden, während bei allen radiochemischen Untersuchungen Teilchenbeschleuniger benutzt wurden.

a) Die Kernspaltung bei hohen Energien

Wie bei der Beschreibung der Kernspaltung des Urans und des Thoriums im Kapitel über die Kernreaktionen gezeigt wurde (s. § 50), ist die radiochemisch ermittelte Ausbeuteverteilung unsymmetrisch. Diese Verteilungskurve ändert vollkommen ihr Aussehen, wenn die Spaltung durch hochenergetische Teilchen ausgelöst wird. In Abb. 154 zeigt Kurve 1 die Verteilung der Ausbeute an Spaltprodukten beim Beschuß von Thorium mit Neutronen einer Energie von 2,5 MeV. Durch Kurve 2 ist die Ausbeuteverteilung dargestellt, die man beim Beschuß des Thoriums mit Protonen einer Energie von 480 MeV erhält [W 55-1].
Die Spaltung des Thoriums und, wie analoge Untersuchungen ergaben, auch die des Urans werden also bei hohen Energien symmetrisch. Experimente, bei denen

das Uran mit Neutronen, α-Teilchen bzw. π-Mesonen hoher Energie beschossen wurde, zeigten, daß die Art des die Spaltung auslösenden Teilchens nur einen geringen Einfluß auf den Verlauf der Ausbeuteverteilung hat.

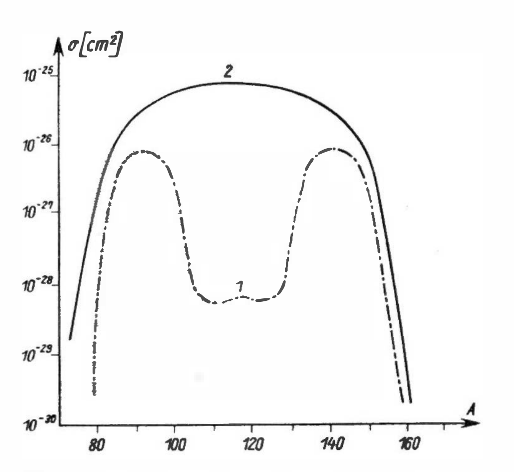


Abb. 154. Ausbeuteverteilung der Restkerne nach der Spaltung des Thoriums durch (1) 2,5 MeV-Neutronen (2) 480 MeV-Protonen [W 55-1]

Der Umwandlungsmechanismus von Thorium- und Urankernen beim Beschuß mit hochenergetischen Teilchen ist in erster Linie die *symmetrische Spaltung*. Welchen Charakter besitzt nun die Umwandlung der leichteren Kerne?

Abb. 155 zeigt das Ergebnis einer radiochemischen Analyse, die WINOGRADOW und Mitarbeiter [W 55-1] an einem Wismuttarget nach dem Beschuß mit Protonen einer Energie von 480 MeV durchführten.

Das bei der Massenzahl $A = 92$ gelegene Maximum der Ausbeuteverteilung läßt sich der symmetrischen Spaltung bei hohen Energien zuordnen.

Seine Lage entspricht jedoch nicht der halben Masse des Ausgangskerns ($A = 210$).

Diese Differenz wird durch die Annahme erklärt, daß der getroffene Kern vor der Spaltung einige Teilchen emittiert und erst dann in zwei Bruchstücke zerfällt. Die größte Ausbeute an Restkernen liegt in der Nähe der Massenzahl $A = 200$.

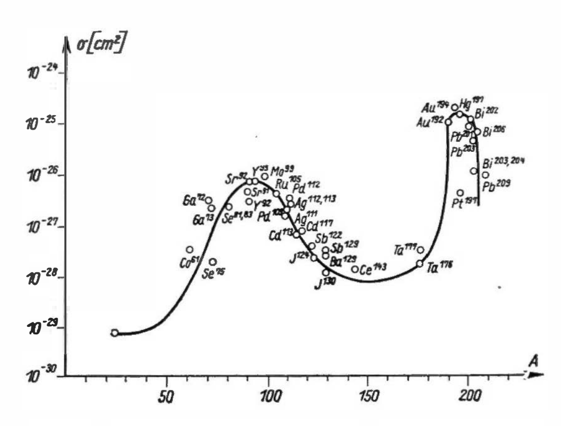


Abb. 155. Ausbeuteverteilung der Restkerne nach der Spaltung des Wismut durch Protonen einer Energie von 480 MeV [W 55-1]

Für die Bildung dieser Radioisotope muß ein im Vergleich zur Spaltung qualitativ anderer Umwandlungsmechanismus verantwortlich sein. Man bezeichnet ihn als *Kernzertrümmerung*. Im betrachteten Beispiel des Wismuts ist die Ausbeute an Restkernen durch Zertrümmerung etwa 15 mal so groß wie die Ausbeute durch Spaltung.

b) Die Kernzertrümmerung

Geht man zu noch leichteren Kernen über, so überwiegt die Zertrümmerung mehr und mehr. So ergaben radiochemische Untersuchungen an Silber nach dem Beschuß mit hochenergetischen Teilchen, daß die Restkerne praktisch ausschließlich durch Kernzertrümmerung entstanden sind.

Die gegenwärtigen Vorstellungen über den Mechanismus des Zertrümmerungsprozesses gehen in erster Linie auf die Untersuchungen mit Kernemulsionen zurück.

Trifft ein hochenergetisches Teilchen auf einen Atomkern in der Emulsion, so markieren sich nach der photographischen Entwicklung die bei der Zertrümmerung emittierten geladenen Teilchen als Spuren. Ein derartiges Ereignis mit strahlenförmig von einem Punkt ausgehenden Spuren bezeichnet man als einen *Stern* (siehe z.B. Abb. 149). Die ersten, durch hochenergetische Teilchen der kosmischen Strahlung hervorgerufenen Kernzertrümmerungen entdeckten Blau und Wambacher [B 37-1] in Photoplatten. Mit der fortschreitenden Verbesserung der Emulsionen wurden systematische Untersuchungen an den Sternen durchgeführt, so daß heute ein recht umfangreiches Material über die Häufigkeiten, mit denen die verschiedenen Teilchen, wie Protonen, Deuteronen, α-Teilchen usw., emittiert werden, über ihre Winkelverteilungen und über ihre Energiespektren vorliegt.

Erschwerend für das Studium des Zertrümmerungsprozesses mit der Photoplatte ist, daß neben schwereren Atomkernen wie Ag und Br auch leichtere Elemente wie C, N und O in der Emulsion enthalten sind. Der erste Schritt einer *Sternanalyse* besteht also in der Trennung der durch die Zertrümmerung schwerer Kerne gebildeten Sterne von denen, die durch Zertrümmerung der leichten Kerne entstanden sind. Aus dem Prinzip der Ladungserhaltung folgt, daß ein Stern mit $\gtrsim 8$ geladenen Spuren keine Zertrümmerung eines leichten Kerns sein kann. Die kleineren Sterne lassen sich an Hand der unterschiedlichen Energieverteilungen der α-Teilchen voneinander trennen, da die Höhe der Potentialschwelle im Grundzustand bei den leichten Kernen etwa 5 MeV und bei den schweren Kernen etwa 13 MeV beträgt. Die folgenden Untersuchungsergebnisse beschränken sich auf den Zertrümmerungsprozeß der schweren Kerne der Emulsion.

Die Zahl der im Mittel *pro Stern emittierten geladenen Teilchen* ändert sich nur wenig mit der Energie des Primärteilchens. Hodgson [H 54-1] beschoß die Emulsion mit Protonen einer Energie von 122 MeV und beobachtete im Mittel 2,2 Arme pro Stern, während Lock u.a. [L 56-1] im Mittel 4,7 Arme pro Stern in Platten fanden, die durch Protonen einer Energie von 1000 MeV beschossen worden waren. — An Sternen, die durch Neutronen einer mittleren Energie von 200 MeV ausgelöst wurden, untersuchte Lanius [L 57-1] die Häufigkeit, mit der die verschiedenen geladenen Teilchen emittiert werden. Er erhielt die in Tabelle 47 angegebenen Werte.

Tabelle 47. Mittlere Spurenzahlen pro Stern

α-Teilchen	Deuteronen	Protonen
$0{,}8 \pm 0{,}05$	$0{,}6 \pm 0{,}06$	$1{,}4 \pm 0{,}06$

Die Zahl der Sekundärteilchen mit einer Ladung $Z > 2$ ist bei einer Primärenergie von 200 MeV vernachlässigbar klein.
Bei den durch Protonen einer Energie von 1000 MeV ausgelösten Sternen beobachteten LOCK u. a. im Mittel 0,20 ± 0,05 π-Mesonen pro Stern.

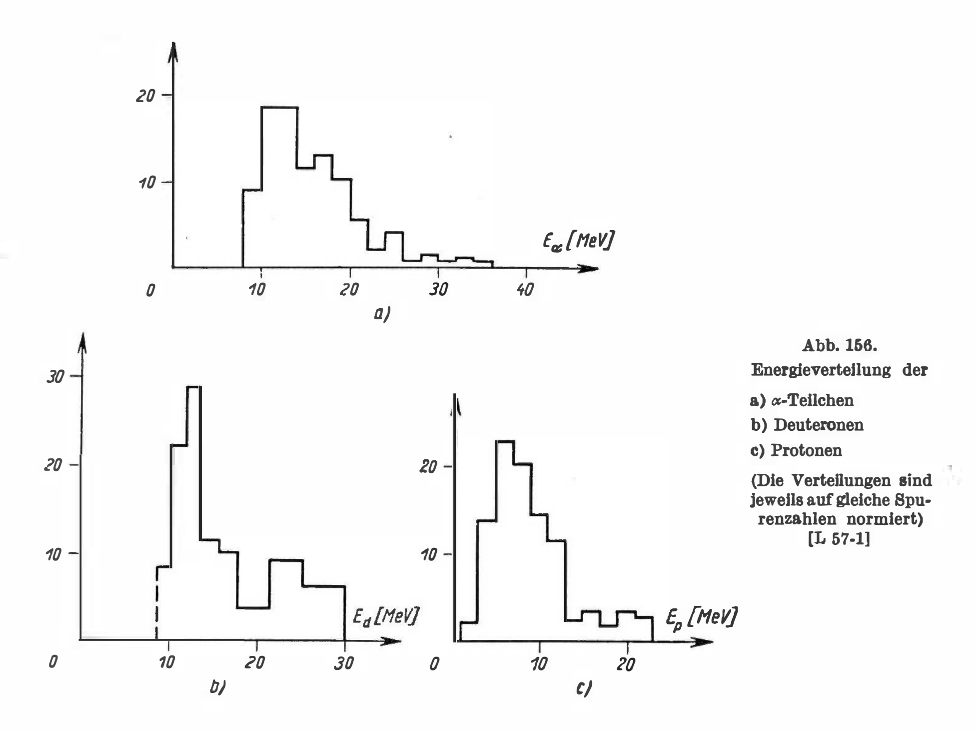


Abb. 156. Energieverteilung der
a) α-Teilchen
b) Deuteronen
c) Protonen
(Die Verteilungen sind jeweils auf gleiche Spurenzahlen normiert) [L 57-1]

Weitere den Zertrümmerungsprozeß charakterisierende Merkmale sind die *Energieverteilungen der emittierten Teilchenarten*. In den Abb. 156 a bis c sind die von LANIUS gemessenen Energiespektren der α-Teilchen unterhalb einer Energie von 40 MeV, der Deuteronen unterhalb 30 MeV und der Protonen unterhalb 22 MeV wiedergegeben.
Die Winkelverteilung der Arme läßt sich durch die Größe F, die *relative Häufigkeit der nach vorn emittierten Teilchen*, charakterisieren. Dabei bedeutet „nach vorn" in Richtung des Primärteilchens. GRILLI u. a. [G 55-1] bestimmten den Wert F an Sternen, die durch Protonen unterschiedlicher Energie ausgelöst wurden. Ihre Ergebnisse sind in der Tabelle 48 zusammengefaßt.

Tabelle 48. F-Werte bei verschiedenen Primärenergien

Primärenergie [MeV]	α-Teilchen	einfach geladene Teilchen
50	0,65 ± 0,11	0,65 ± 0,07
100	0,66 ± 0,11	0,61 ± 0,05
150	0,68 ± 0,17	0,64 ± 0,10
450	0,57 ± 0,12	0,63 ± 0,11

Diese F-Werte wurden an Teilchen gemessen, die in den gleichen Energiebereichen lagen wie die Spektren der Abb. 156a bis c. Die Zahl der in bezug auf das auslösende Proton nach vorn emittierten Teilchen ist also merklich größer als die Zahl der nach hinten gehenden Arme. Die beobachtete Anisotropie ist innerhalb der Fehlergrenzen für einfach geladene Teilchen und α-Teilchen die gleiche und unabhängig von der Primärenergie.

Von mehreren Autoren wurden die Merkmale der Emission schwererer Kernbruchstücke untersucht. Diese Merkmale lassen sich gut am Beispiel des Li^8 erkennen. GOLDSACK u.a. [G 57-1] betrachteten die Emission von Li^8-Fragmenten an Sternen, die durch Protonen einer Energie von 5,7 GeV verursacht worden waren.

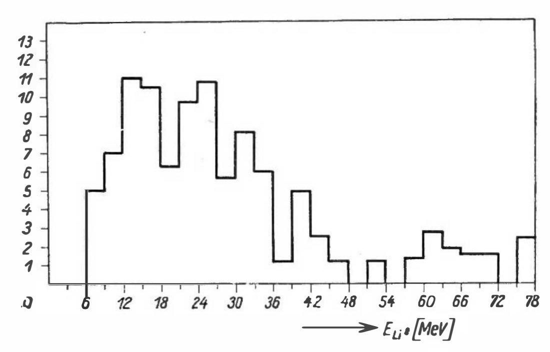


Abb. 157. Energieverteilung der Li^8-Fragmente [G 57-1]

Sie fanden im Mittel pro Stern $0{,}013 \pm 0{,}001$ Li^8-Fragmente. In Abb. 157 ist das von den Autoren gemessene Energiespektrum der Li^8-Bruchstücke gezeichnet. Aus der beobachteten Winkelverteilung ergab sich die relative Häufigkeit der nach vorn emittierten Teilchen zu $F = 0{,}60$. Die Li^8-Fragmente zeigen also etwa die gleiche Anisotropie wie die leichteren Kerntrümmer.

c) Theorie der Kernzertrümmerung

Die theoretische Beschreibung gliedert den Zertrümmerungsprozeß in zwei aufeinanderfolgende Stadien (Abb. 158). Während des ersten Stadiums entwickelt sich, ausgelöst durch das primäre Teilchen, eine *Nukleonenkaskade* im Kern. Ein Teil der angestoßenen Nukleonen wird den Kern direkt verlassen, während die

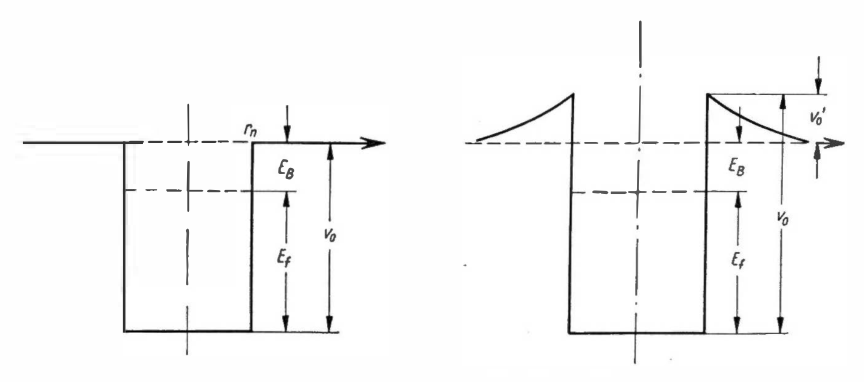


Abb. 158. Zum Potentialtopf-Modell des Kerns

anderen angestoßenen Nukleonen im zweiten Stadium zu einer Anregung des Restkerns führen. Diese Anregungsenergie wird durch Teilchenemission abgegeben. Man betrachtet den schweren Kern als Fermigas von Nukleonen, die sich nahezu frei in einem rechteckigen Potentialtopf bewegen.

Die Zahl der Quantenzustände mit einem Impuls $<p$ erhält man durch Division des Volumens des Phasenraumes durch die Größe einer Elementarzelle:

$$\frac{\Phi}{h^3} = \frac{1}{h^3}\frac{4\pi}{3}r_n{}^3\frac{4\pi}{3}p^3.$$

Im Kern mit Z Protonen und $A - Z$ Neutronen sei p_f der maximale Impuls. Die Zahl der Protonen bzw. Neutronen im Kern ergibt sich dann zu

$$Z = 2\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\frac{r_n{}^3 p_f^3}{h^3}; \quad A - Z = 2\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\frac{r_n{}^3 p_f^3}{h^3}.$$

Daraus folgen die Fermi-Grenzenergie der Protonen zu

$$E_f = \frac{p_f^2}{2m_p} = \left(\frac{9}{32\pi^2}\right)^{2/3}\frac{h^2}{2m_p r_0^2}\left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \tag{82.1 a}$$

und die der Neutronen zu

$$E_f = \frac{p_f^2}{2m_n} = \left(\frac{9}{32\pi^2}\right)^{2/3}\frac{h^2}{2m_n r_0^2}\left(\frac{A-Z}{A}\right)^{2/3}. \tag{82.1 b}$$

Für die schweren Kerne der Emulsion, bei denen man im Mittel mit $Z = 41$ und $A = 94$ und einem Kernradius $r_n = 1{,}4 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ [cm] rechnet, ergibt sich die Fermi-Grenzenergie zu $E_f \approx 22$ MeV. Da die Bindungsenergie der Nukleonen $E_B \approx 8$ MeV beträgt, wird die Tiefe des Potentialtopfes für Neutronen $V_0 \approx 30$ MeV. Berücksichtigt man die Höhe des Potentialwalls für Protonen mit $V_0' \approx 8$ MeV, so erhält man die Tiefe des Potentialtopfes der Protonen zu $V_0 \approx 38$ MeV.
Dieses Kernmodell wird jetzt zur Untersuchung der Wechselwirkungen hochenergetischer Nukleonen mit Kernen benutzt.

Nach SERBER [S 47-1] wird der Stoßprozeß im Kern als Stoß zwischen freien Nukleonen betrachtet. Dafür müssen die Voraussetzungen gegeben sein, daß die de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{\hbar}{p} \ll r_n$ und die effektive Reichweite der hochenergetischen Nukleon-Nukleon-Streukräfte klein gegenüber der mittleren freien Weglänge der Nukleonen im Kern sind. Diese Voraussetzungen sind um so besser erfüllt, je höher die Energie des stoßenden Nukleons ist. Der Einfluß der anderen Nukleonen des Kerns macht sich durch folgende Faktoren bemerkbar:

1. durch den Potentialwall für Protonen,

2. durch die Impulsverteilung der Nukleonen im Kern vor dem Stoß,

3. durch das Pauli-Verbot, das solche Stöße ausschließt, die zu einem Endzustand führen, der bereits durch andere Nukleonen des Fermigases besetzt ist.

Die Streuprozesse im Kern werden durch die bei der Streuung von Nukleonen an freien Nukleonen gemessenen Streuquerschnitte beschrieben. Daraus ergibt sich, daß die mittlere freie Weglänge für Stoßprozesse im Kern von der Größenordnung des Kernradius oder kleiner ist. Im allgemeinen werden sich daher an den ersten Stoß kaskadenartig weitere Stöße anschließen. Der Teil der Kaskadennukleonen, der eine genügend hohe Energie erhalten hat, wird den Kern während des Kaskaden-Prozesses, d.h. in etwa 10^{-22} sec (Kerndurchmesser, dividiert durch Lichtgeschwindigkeit), verlassen. Ist die Energie der Neutronen nach dem Stoß < 30 MeV, so werden diese Nukleonen im Kern bleiben und zu einer allgemeinen Anregung des Restkerns führen. Die Anregungsenergie wird durch den anschließenden Verdampfungsprozeß in etwa 10^{-18} sec abgegeben. Während der Entwicklung der Nukleonenkaskade bleibt das Fermigas im Grundzustand. Der Energieerhaltungssatz für den Kern lautet

$$E = \sum_{n=1}^{N} E_n + E_B(N-1) + U_A . \tag{82.2}$$

Dabei ist E die Energie des primären Nukleons, ΣE_n die Summe der kinetischen Energien der N Nukleonen, die den Kern verlassen haben, und $E_B(N-1)$ die Bindungsenergie dieser Teilchen. U_A ist die Anregungsenergie des Restkerns.
Das Modell der Einzelstöße ist von mehreren Autoren zur Berechnung von Sternen benutzt worden [S 47-1], [M 53-1].
Als Ergebnis derartiger Berechnungen von Nukleonenkaskaden fand man die in Tabelle 49 angegebenen Werte der im Mittel pro Stern entstandenen Kaskadenprotonen beliebiger Energien und der im Restkern verbliebenen Anregungsenergie U_A.

Tabelle 49. Werte von Nukleonenkaskaden

Primäres Nukleon	Primärenergie [MeV]	Anregungsenergie U_A [MeV]	Mittlere Zahl der Kaskadenprotonen pro Stern
n	90	42	0,4
p	90	42	0,6
p	140	44	1,3
n	400	52	0,8
p	400	52	1,9

Diese Daten zeigen, daß die mittlere Anregungsenergie sich beim Ansteigen der Primärenergie nur unwesentlich vergrößert.
Die Abgabe der im Restkern verbliebenen Anregungsenergie wird durch die Verdampfungstheorie beschrieben (s. § 61). Ihre Anwendung auf einen mittelschweren Kern mit der Massenzahl $A = 94$, der nach dem Kaskadenprozeß noch eine Anregungsenergie von $U_A = 50$ MeV ($K T_a = 2{,}5$ MeV) bes tzt, ergibt die folgenden Häufigkeiten der im Mittel pro Stern verdampften geladenen Teilchen:

0,25 α-Teilchen, 0,01 Deuteronen und 1,25 Protonen. Ein Vergleich mit den experimentellen Daten zeigt, daß lediglich bei den Protonen die gemessene Häufigkeit mit der nach der Kaskaden- und der Verdampfungstheorie berechneten Häufigkeit näherungsweise übereinstimmt. Bei den Li^8-Fragmenten, den α-Teilchen und den Deuteronen übersteigt die im Mittel pro Stern beobachtete Teilchenzahl die berechnete um ein Mehrfaches.

Ein entsprechendes Resultat ergibt der Vergleich der in Abb. 157 und Abb. 156a und 156b gezeigten Energiespektren der Li^8-Bruchstücke, der α-Teilchen und der Deuteronen mit den nach der Verdampfungstheorie berechneten Verteilungen. In den drei Fällen zeigt jeweils das experimentelle Spektrum im Vergleich zur theoretischen Verteilung einen großen Überschuß an Teilchen hoher Energie. Beim Energiespektrum der Protonen besteht annähernde Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

Für alle verdampften Teilchen müßte man eine isotrope Winkelverteilung beobachten. Durch die während der Kaskadenprozesse emittierten Nukleonen sollte man für die Protonen eine bevorzugte Emission in Richtung des Primärteilchens beobachten. Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zeigt, daß eine näherungsweise Übereinstimmung mit den Voraussagen der Theorie nur für die Protonen vorhanden ist. Die Vorwärtsbündelung der Deuteronen, der α-Teilchen und der schwereren Bruchstücke vermag die Verdampfungstheorie nicht zu erklären.

Das Ergebnis des Vergleiches zeigt, daß das theoretische Modell der Nukleonenkaskade mit anschließender Verdampfung des angeregten Restkerns offenbar nicht zur Beschreibung der Experimente ausreicht. Der Anteil der direkten Prozesse im Kern scheint gegenüber den Compound-Prozessen einen größeren Einfluß zu haben als man bisher annahm.

Schlußbemerkung. Im Rahmen dieses Lehrbuches ist es leider nicht möglich, eine auch nur annähernd vollständige Beschreibung der physikalischen Vorgänge bei hohen und höchsten Energien zu geben. Es sei daher auf einige Bücher verwiesen, die für ein gründlicheres Studium zu empfehlen sind.

Die Wechselwirkungsprozesse der hochenergetischen Elektronen und γ-Quanten werden ausführlich im Buch „High-energy Particles“ von ROSSI [R 52-1] behandelt. Die Mesonentheorie wird in den beiden Bänden „Mesons and Fields“ von BETHE, DE HOFFMANN und SCHWEBER [B 55-1] umfassend dargestellt. Das Buch von MARKOW [M 57-1] über „Hyperonen und K-Mesonen“ enthält eine ausführliche Betrachtung der experimentellen und theoretischen Resultate der Erforschung der schweren instabilen Teilchen.

LITERATUR

[A 51-1] ARMENTEROS, R., K. H. BARKER, C. C. BUTTLER, A. CACHON und A. H. CHAPMAN, Nature **167**, 501 (1951)

[A 53-1] ANAND, B. M., Proc. Roy. Soc. (London) A **220**, 183 (1953)

[A 56-1] ALVAREZ, L. W., Proceedings of the 6 Rochester Konferenz on High Energy Nuclear Physics (1956)

[B 37-1] BLAU, M., und H. WAMBACHER, S.-Ber. Akad. Wiss. Wien **146**, 469, 623 (1937)

[B 49-1] BROWN, R., U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. MUIRHEAD, C. F. POWELL und D. M. RITSON, Nature (London) **163**, 82 (1949)

[B 50-1] BJORKLUND, R., W. E. CRANDALL, B. J. MOYER und H. F. YORK, Phys. Rev. **77**, 213 (1950)

[B 53-1] BONETTI, A., R. LEVI-SETTI, M. PANETTI und G. TOMASINI, Nuovo. Cim. **10**, 1736 (1953)

[B 53-2] BONETTI, A., R. LEVI-SETTI, M. PANETTI und G. TOMASINI, Nouvo. Cim. **12**, 345 (1954)

[B 54-1] BOGATSCHEW, N. P., und I. K. WSOROW, Ber. Akad. Wiss. UdSSR **99**, 931 (1954)

[B 54-2] BODANSKI, D., A. M. SACHS und J. STEINBERGER, Phys. Rev. **93**, 1367 (1954)

[B 54-3] BELLIBONI, G., B. SECHI und B. VITALE, Suplemento al Nuovo. Cim. 195 (1954)

[B 55-1] BETHE, H. A., F. DE HOFFMANN, S. S. SCHWEBER, Mesons and Fields (I und II), New York 1955

[B 56-1] BLOCK, M. M., E. M. HARTH, V. T. COCCONI, E. HART, W. B. FOWLER, R. P. SHUTT, A. M. THORNDIKE und W. L. WHITTEMORE, Phys. Rev. **103**, 1484 (1956)

[B 56-2] BARKAS, W. H., W. BIRNBAUM und F. M. SMITH, Phys. Rev. **101**, 778 (1956)

[B 56-3] BETHE, H. A., Physikertagung Wiesbaden 1955, Mosbach/Baden 1956

[B 57-1] BARKES, W. H., R. W. BIRGE, W. W. CHUPP, A. G. EKSPONG, G. GOLDHABER, S. GOLDHABER, H. H. HECKMANN, D. H. PERKINS, J. SANDWEISS, E. SEGRÉ, F. M. SMITH, D. H. STORK, L. VAN ROSSUM, E. AMALDI, G. BARONI, C. CASTAGNOLI, C. FRANZINETTI und A. MANFREDINI, Phys. Rev. **105**, 1037 (1957)

[C 51-1] CHAMBERLAIN, O., E. SEGRÉ und C. WIEGAND, Phys. Rev. **83**, 923 (1951)

[C 51-2] O'CEALLAIGH, C., Phil. Mag. **42**, 1032 (1951)

[C 54-1] CRUSSARD, J., M. F. KAPLON, J. KLARMANN und J. H. NOON, Phys. Rev. **93**, 253 (1954)

[C 54-2] COWAN, E. W., Phys. Rev. **94**, 161 (1954)

[C 55-1] CHAMBERLAIN, O., E. SEGRÉ, C. WIEGAND und T. YPSILANTIS, Phys. Rev. **100**, 947 (1955)

[C 56-1] CHEN, F. F., C. P. LEAVITT und A. M. SHAPIRO, Phys. Rev. **103**, 211 (1956)

[C 56-2] CRUSSARD, J., V. FOUCHÉ, J. HENNESSY, G. KAYAS, L. LE PRINCE-RINGUET, D. MORELLET und F. RENARD, Nuovo. Cim. **3**, 731 (1956)

[C 56-3] CHUPP, W. W., G. GOLDHABER, S. GOLDHABER und F. H. WEBB, Supplemento al Nuovo. Cim. 382 (1956)

[C 56-4] CHAMBERLAIN, O., W. W. CHUPP, G. GOLDHABER, E. SEGRÉ, C. WIEGAND, E. AMALDI, G. BARONI, C. CASTAGNOLI und C. FRANZINETTI, Nuovo. Cim. **3**, 447 (1956)

[C 56-5] CORK, B., G. R. LAMBERTSEN, O. PICCIONI und W. A. WENZEL, Phys. Rev. **104**, 1193 (1956)

[D 52-1] DURBIN, R. P., H. H. LOAR und W. W. HAVENS, Phys. Rev. 88, 179 (1952)

[D 53-1] DANYSZ, M., und J. PNIEWSKI, Phil. Mag. **44**, 348 (1953)

[D 54-1] Dzhelepov, W. P., B. M. Golowin und W. I. Satarow, Ber. Akad. Wiss. UdSSR **99**, 943 (1954)
[D 54-2] Dzhelepov, W. P., und J. M. Kasarinow, Ber. Akad. Wiss. **99**, 939 (1954)
[D 54-3] Debenedetti, A., C. M. Garelli, L. Tallone und M. Vigone, Nuovo. Cim. **12**, 952 (1954)
[E 56-1] Eksponq, A. G., und G. Goldhaber, Phys. Rev. **102**, 1187 (1956)
[F 54-1] Fowler, W. B., R. P. Shutt, A. M. Thorndike und W. L. Whittemore, Phys. Rev. **95**, 1026 (1956)
[F 54-2] Friedlander, M. W., D. Keefe, M. G. Menon und L. van Rossum, Phil. Mag. **45**, 1034 (1954)
[F 54-3] Fowler, W. B., R. P. Shutt, A. M. Thorndike und W. L. Whittemore, Phys. Rev. **93**, 861 (1954)
[F 56-1] Fowler, W. B., R. P. Shutt, A. M. Thorndike, W. L. Whittemore, V. T. Cocconi, E. Hart, M. M. Block, E. M. Harth, E. C. Fowler, D. J. Garrison und T. W. Morris, Phys. Rev. **103**, 1489 (1956)
[F 56-2] Fowler, W. B., R. P. Shutt, A. M. Thorndike und W. L. Whittemore, Phys. Rev. **103**, 1479 (1956)
[G 50-1] George, E. P., und J. Evans, Proc. Phys. Soc. (London) A **63**, 1248 (1950)
[G 54-1] Geyther, D. B., Phil. Mag. **45**, 570 (1954)
[G 54-2] Gellmann, M., und A. Pais, Proceedings of the Glasgow Conference (1954)
[G 55-1] Grilli, M., P. E. Hodgson, M. Ladu und B. Vitale, Nuovo. Cim. **1**, 314 (1955)
[G 56-1] Goldhaber, S., Proceedings of the 6 Rochester Konferenz on High Energy Nuclear Physics (1956)
[G 57-1] Goldsack, S. J., W. O. Lock und B. A. Munir, Phil. Mag. **2**, 149 (1957)
[H 49-1] Hadley, J., E. Kelly, C. Leith, E. Segré, C. Wiegand und H. York, Phys. Rev. **75**, 351 (1949)
[H 54-1] Hodgson, P. E., Phil. Mag. **41**, 190 (1954)
[K 52-1] Kraushaar, W. L., Phys. Rev. **86**, 513 (1952)
[L 47-1] Lattes, C. M. G., G. P. S. Occhialini und C. F. Powell, Nature **160**, 694 (1947)
[L 51-1] Le Prince-Ringuet, L., Proceedings of the 4 Rochester Konferenz on High Energy Nuclear Physics (1954)
[L 53-1] Lindenfeld, P., A. Sachs und J. Steinberger, Phys. Rev. **89**, 531 (1953)
[L 53-2] van Lint, V. A. J., und G. H. Trilling, Phys. Rev. **92**, 1089 (1953)
[L 56-1] Lock, W. O., P. V. March, H. Muirhead und W. G. V. Rosser, Proc. Roy. Soc. Vorabdruck 1956
[L 57-1] Lanius, K., Nucl. Phys. **3**, 391 (1957)
[M 53-1] Morrison, G. C., H. Muirhead und W. G. V. Rosser, Phil. Mag. **44**, 1326 (1953)
[M 54-1] Mestscherjakow, M. G., N. P. Bogatschew, B. S. Neganow und I. W. Piskarew, Ber. Akad. Wiss. UdSSR **99**, 955 (1954)
[M 54-2] Menon, M. G. K., und C. O'Ceallaigh, Proc. Roy. Soc. (London) A **221**, 292 (1954)
[M 54-3] McManus, H., W. T. Sharp und H. Gellmann, Phys. Rev. **93**, 924 (1954)
[M 55-1] Mestschebjakow, M. G., Tagung d. Akad. d. Wiss. d. UdSSR über die friedliche Ausnutzung der Atomenergie 1.—5. Juli 1955, Plenarsitzg., Moskau 1955
[M 56-1] Morris, T. W., E. C. Fowler und J. D. Garrison, Phys. Rev. **103**, 1472 (1956)
[M 57-1] М. А. Марков, Гипероны и к-мезоны (M. A. Markow, Hyperonen und *K*-Mesonen,) deutsche Übersetzung: Berlin 1960
[N 37-1] Neddermeyer, S. H. und C. D. Anderson, Phys. Rev. **51**, 884 (1937)

[N 55-1] NISHIJIMA, K., Prog. Theor. Phys. **13**, 285 (1955)
[P 56-1] PLANO, R., N. SAMIOS, M. SCHWARTZ und J. STEINBERGER, Nuovo. Cim. **5**, 216 (1956)
[R 52-1] ROSSI, B., High-energy Particles, New York 1952
[R 56-1] RITSON, D. M., A. PEVSNER, S. C. FUNG, M. WIDGOFF, S. GOLDHABER und G. GOLDHABER, Phys. Rev. **101**, 1085 (1956)
[S 47-1] SERBER, R., Phys. Rev. **72**, 1114 (1947)
[S 51-1] SACHS, A., und J. STEINBERGER, Phys. Rev. **82**, 973 (1951)
[S 54-1] SAGANE, R., W. F. DUDZIAK und J. VEDDER, Phys. Rev. **95**, 863 (1954)
[S 55-1] STACK, G., Collaboration. Nuovo. Cim. **2**, 1063 (1955)
[T 53-1] THOMPSON, R. W., A. BUSKIRK, L. R. ETTER, C. J. KARZMARK und R. H. REDIKER, Phys. Rev. **90**, 1122 (1953)
[W 55-1] WINOGRADOW, A. P., Tagung d. Akad. d. Wiss. d. UdSSR über die friedliche Ausnutzung der Atomenergie 1.—5. Juli 1955, Plenarsitzg., Moskau 1955
[W 56-1] WALKER, W. D., und W. D. SHEPHARD, Proceedings of the 6 Rochester Konferenz on High Energy Nuclear Physics (1956)
[W 56-2] WILSON, J. G., Progress in Cosmic Ray Physics, Vol. III (1956)
[Y 35-1] YUKAWA, H., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935)

C. THEORIE DER ATOMKERNE

VIII. Theorie leichtester Kerne

Die Theorie der Atomkerne besteht zu einem wesentlichen Teil in der Untersuchung der Kräfte, die zwischen den Nukleonen wirken. Eine fundamentale Rolle spielen dabei offenbar die *Zweiteilchenprobleme:* Deuteron, Neutron-Proton- und Proton-Proton-Streuung.

§ 83. Allgemeines über Kernkräfte

Bei der theoretischen Deutung des Aufbaus der *Atomhülle* kannte man die Kräfte, die zwischen Kernen und Elektronen wirken, und suchte nach einer neuen Mechanik, die die klassische im atomaren Bereich ersetzt. Das Ergebnis war die Quantenmechanik. In der *Kernphysik* dagegen gilt es, das umgekehrte Problem zu lösen: Man weiß, daß sich Nukleonen quantenmechanisch beschreiben lassen, während die Art der Kernkräfte zu bestimmen ist.

Eine sehr wichtige Eigenschaft zeigte sich schon bei den berühmten Rutherfordschen Streuversuchen und später ganz klar bei der Proton-Proton-Streuung: Bei Teilchenentfernungen $> 10^{-12}$ cm wirken nur Coulomb-Kräfte, erst bei kleineren Abständen machen sich noch andere, eben die Kernkräfte, bemerkbar.

Die Kernkräfte haben eine kurze Reichweite von der Größenordnung 10^{-13} cm.

Wir werden im folgenden die Theorie *phänomenologisch* aufbauen, indem wir die Kernkräfte durch geeignete Potentiale beschreiben, ohne uns um eine tiefere Begründung für deren Wahl zu kümmern. Die Brauchbarkeit eines Potentials wird durch Vergleich der damit errechneten theoretischen Voraussagen mit dem Experiment entschieden.

Man kann die Kernkräfte auch als Ausfluß eines Feldes betrachten, dessen Quellen die Nukleonen sind, wie etwa das elektromagnetische Feld Elektronen als Quellen hat und zur Coulomb-Kraft zwischen ihnen führt. Eine endgültige Theorie der Kernkräfte wird gewiß eine dieser feldtheoretischen Deutung entsprechende Form besitzen. Doch bis jetzt sind die auf diesem Wege erzielten Erfolge zu gering und der mathematische Aufwand ist zu groß, um eine solche Behandlung an dieser Stelle zu rechtfertigen.

Bei den gebräuchlichen Potentialen mit kurzer Reichweite,

Kastenpotential $V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < b \\ 0 & r > b, \end{cases}$

Gauß-Potential $V(r) = -V_0 e^{\frac{-r^2}{b^2}}$,

Exponentialpotential $V(r) = -V_0 e^{\frac{-r}{b}}$,

Yukawa-Potential $V(r) = \dfrac{-V_0 e^{\frac{-r}{b}}}{\frac{r}{b}}$,

bedeutet r den Teilchenabstand; die beiden Parameter V_0 und b heißen *Tiefe* oder *Stärke* und *Reichweite* des Potentials. Die angeführten Potentiale sind alle monoton, d.h. überall anziehend ($V_0 > 0$) oder überall abstoßend ($V_0 < 0$).[1]) Wenn die Kräfte, die einen Kern mit der Massenzahl A zusammenhalten, sich aus Wechselwirkungen zwischen *sämtlichen* Nukleonenpaaren zusammensetzten, müßte die Bindungsenergie mittlerer und schwerer Kerne $\propto A^2$ sein.[2]) Da diese aber in Wahrheit $\propto A$ ist, schließt man:

Die Kernkräfte zeigen Sättigung, d.h., jedes Nukleon kann nur mit einer begrenzten Zahl von nächsten Nachbarn wechselwirken.

Eine weitere Eigenschaft der Kernkräfte erkannte man bei der Entdeckung des Quadrupolmoments des Deuterons (s. Bd. I, § 11):

Die Kernkräfte sind keine reinen Zentralkräfte.[3])

Weil aber das Quadrupolmoment des Deuterons klein ist, haben die richtungsabhängigen Kräfte keine sehr große Wirkung, so daß wir in guter Näherung zunächst mit reinen Zentralkräften arbeiten dürfen.

§ 84. Grundzustand des Deuterons

Wir erhalten Aussagen über die (hier als *kugelsymmetrisch* und *monoton* angenommene) potentielle Energie $V(r)$, also über die Kernkräfte, indem wir $V(r)$ so einrichten, daß der experimentelle Wert für die Bindungsenergie des Deuterons (s. [M 50-1]),

$$E_B = (-2{,}226 \pm 0{,}003)\ \text{MeV},$$

ein Eigenwert der Schrödinger-Gleichung des Problems wird.

---

[1]) Beispiele für nichtmonotone Potentiale werden in § 90 und § 91 erwähnt.

[2]) Im Teil C dieses Buches verwenden wir für „proportional zu" das Zeichen $\propto$, da das Zeichen $\sim$ später für „asymptotisch gleich" verwendet wird.

[3]) Zur Begründung dieses Schlusses s. § 99.

Da der geringe Unterschied zwischen Neutronen- und Protonenmasse für alle folgenden Rechnungen belanglos ist, setzen wir

$$M_n = M_p = M.$$

Die Nukleonenmasse ist $M \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g.

a) Schrödinger-Gleichung für den Grundzustand

Von der vollständigen Schrödinger-Gleichung

$$\left\{\Delta_1 + \Delta_2 + \frac{2\,M}{\hbar^2}[E - V(r)]\right\} \Psi(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = 0,$$

in der $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ die Ortsvektoren und

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \qquad (i = 1, 2)$$

die Laplace-Operatoren der beiden Nukleonen bedeuten, wird durch Einführen von Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2, \qquad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)$$

die Schwerpunktsbewegung in üblicher Weise abgetrennt (siehe z.B. [B 53-1]), so daß für die allein interessierende Relativbewegung die Schrödinger-Gleichung

$$\left[\frac{\hbar^2}{M}\Delta + B - V(r)\right]\psi(\mathfrak{r}) = 0 \tag{84.1}$$

entsteht, wobei B, die Energie der Relativbewegung, gleich der Bindungsenergie des Deuterons und Δ der Laplace-Operator in Relativkoordinaten ist.

(84.1) stimmt mit der Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen $\left(\text{Masse} = \frac{M}{2}\right)$ im Zentralfeld $V(r)$ überein. Daher ist der Grundzustand kugelsymmetrisch (S-Zustand). Mit

$$\psi(\mathfrak{r}) = \frac{u(r)}{r}$$

erhalten wir aus (84.1) die Radialgleichung

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \gamma^2(r)\,u = 0\,, \quad \gamma^2(r) = \frac{M}{\hbar^2}[B - V(r)] \tag{84.2}$$

mit den Randbedingungen[1])

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = 0 \tag{84.3}$$

für den Grundzustand des Deuterons.

---

[1]) Die Randbedingungen folgen aus der Tatsache, daß $|u(r)|^2 dr$ die Wahrscheinlichkeit, die beiden Teilchen in Abständen zwischen r und $r + dr$ anzutreffen, bedeutet.

Von den Kernkräften, also von $V(r)$, wissen wir zunächst nur, daß sie anziehend und nicht weit wirken (Abb. 159). Doch allein daraus ergeben sich schon Hinweise für den Verlauf der Radialfunktion $u(r)$.

Jenseits der Reichweite, d.h. für $r > b$, ist $V(r)$ zu vernachlässigen, so daß nach (84.2) und (84.3)

$$u \propto e^{-\beta r} \; (r > b) \tag{84.4}$$

wird, wobei die Konstante

$$R = \frac{1}{\beta} = \hbar(-M B)^{-1/2} = 4{,}31 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \tag{84.5}$$

ein Maß für die „Ausdehnung“ des Deuterons darstellt.

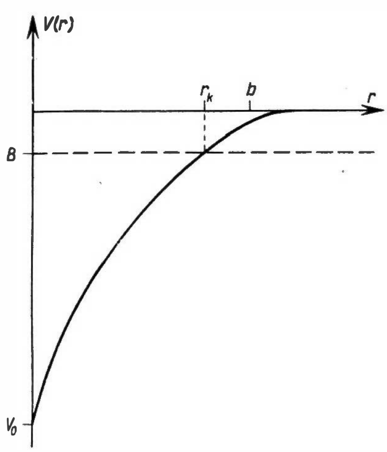


Abb. 159. Verlauf der potentiellen Energie $V(r)$ beim Deuteron (b = Reichweite, V_0 = Tiefe; bei $r = r_k$ liegt der klassische Umkehrpunkt)

Für kleine r ergeben (84.2) und (84.3), daß u wie eine Gerade beginnt, deren Steigung wir als positiv annehmen dürfen. Da die Krümmung ($\propto - \gamma^2 u$) für $r > 0$ zunächst negativ ist, wird die Kurve nach unten abgebogen. Dieses Abbiegen muß geradeso stark sein, daß bei $r \approx b$ ein glatter Anschluß an eine fallende Exponentialfunktion erfolgt (Abb. 160a). Nur gewisse Kombinationen von V_0 und b gestatten dies.

Eine andere Möglichkeit zeigt Abb. 160b. Hier hat u eine zusätzliche Nullstelle. Da die kinetische Energie mit der Knotenzahl wächst, die Festigkeit der Bindung also sinkt, gehört dieser Fall zu einem *angeregten* Zustand.

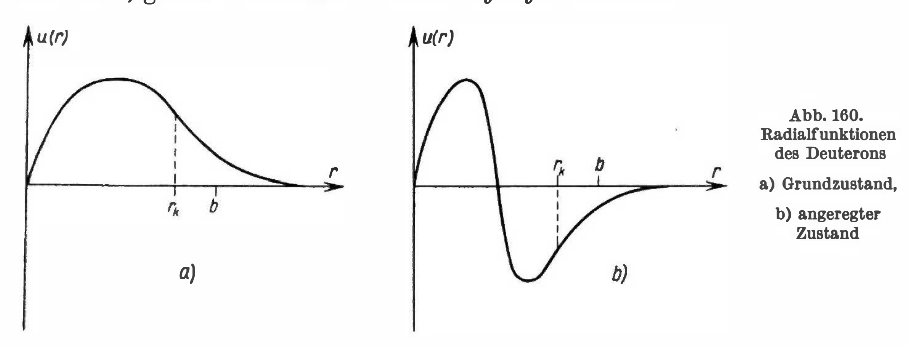


Abb. 160. Radialfunktionen des Deuterons
a) Grundzustand,
b) angeregter Zustand

b) Beziehung zwischen Reichweite und Tiefe

Die Funktion

$$w(r) = \sinh \beta r$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$w'' - \beta^2 w = 0. \tag{84.6}$$

Wir schreiben (84.2) in der Form

$$u'' - \beta^2 u = \frac{M}{\hbar^2} V(r)\, u\,, \tag{84.7}$$

multiplizieren (84.6) mit $u(r)$, (84.7) mit $w(r)$, subtrahieren die so erhaltenen Gleichungen voneinander und integrieren über r von 0 bis r'. Wenn r' genügend groß ist, dürfen wir nach (84.4)

$$u(r') = e^{-\beta r'} \quad (r' \to \infty)$$

setzen.[1]) Wegen $u(0) = w(0) = 0$ wird dann

$$\int_0^{r'} (w u'' - u w'')\, dr = [w u' - u w']_0^{r'} = -\beta \qquad (r' \to \infty)\,,$$

so daß als Ergebnis die Gleichung

$$-\int_0^\infty V(r)\, u(r) \sinh \beta r\, dr = \frac{\hbar^2}{M} \beta\,, \tag{84.8}$$

die Reichweite und Tiefe miteinander verknüpft, entsteht.

Der experimentelle Wert der Bindungsenergie des Deuterons bestimmt eine Beziehung zwischen Reichweite und Tiefe des Kernpotentials, aber nicht diese Parameterwerte einzeln.

Wir wollen diese Beziehung noch durch eine Näherungsformel, die ohne explizite Kenntnis von $u(r)$ auskommt, darstellen.
(84.8) läßt sich umformen in

$$-\int_0^\infty V(r) \frac{u(r)}{e^{-\beta r}} \frac{1 - e^{-2\beta r}}{2\beta}\, dr = \frac{\hbar^2}{M}\,, \tag{84.9}$$

und da $V(r > b) \approx 0$ ist, ergibt sich unter den Voraussetzungen

$$\beta b \ll 1, \tag{84.10a}$$

$$u(r) e^{\beta r} \approx 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq b \tag{84.10b}$$

aus (84.9) die gesuchte Abschätzung als

$$-\int_0^\infty V(r)\, r\, dr \approx -\int_0^b V(r)\, r\, dr \approx \frac{\hbar^2}{M}\,. \tag{84.11}$$

---

[1]) Damit ist zugleich die Normierung von u festgelegt.

Im α-Teilchen und in den schwereren Kernen beträgt die Bindungsenergie pro Nukleon mehr als 7 MeV, im Deuteron dagegen nur etwa 1 MeV. Wir schließen daraus, daß im letzteren Falle die kurzreichweitigen Anziehungskräfte nicht völlig ausgenutzt werden, indem die durchschnittliche Nukleonenentfernung (gekennzeichnet durch $R = \frac{1}{\beta}$) erheblich größer als die Reichweite b der Kernkräfte ist, d.h.:

Das Deuteron ist ein lose gebundenes, relativ ausgedehntes Gebilde.

Während die eine der beiden bei der Herleitung von (84.11) gemachten Voraussetzungen also recht gut erfüllt ist, entspricht (84.10b) den wirklichen Verhältnissen nicht so sehr genau, und daran liegt es, daß (84.11) eine ziemlich grobe Näherung bedeutet.

c) Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Kasten- und das Exponentialpotential

Für das *Kastenpotential* lautet die Lösung der Schrödinger-Gleichung (84.2) für die Radialfunktion

$$u(r) = C_1 \sin \gamma_0 r, \quad \gamma_0 = \left[\frac{M(B+V_0)}{\hbar^2}\right]^{1/2} \quad (r < b),$$
$$u(r) = C_2 e^{-\beta r} \quad (r > b), \tag{84.12}$$
$$C_1, C_2 = \text{const.}$$

Da $u(r)$ bei $r = b$ stetig und mit stetiger Ableitung verlaufen muß, liefert hier die Anschlußbedingung

$$\left(\frac{u'}{u}\right)_{r-b\to-0} = \left(\frac{u'}{u}\right)_{r-b\to+0} \tag{84.13}$$

die Beziehung zwischen Reichweite b und Tiefe V_0 in der Form

$$\gamma_0 \operatorname{ctg} b\gamma_0 = -\beta. \tag{84.14}$$

Diese Gleichung macht

$$b\gamma_0 > \frac{\pi}{2}, \quad V_0 > \frac{\pi^2}{4}\frac{\hbar^2}{M}\frac{1}{b^2} - B \tag{84.15}$$

notwendig. Wegen (84.10a) und (84.5) setzen wir zur Abschätzung $b \approx 2 \cdot 10^{-13}$ cm und erhalten $V_0 > 27$ MeV aus (84.15).

Die Kernkräfte besitzen neben kurzer Reichweite auch große Stärke.[1])

Mit dieser Erkenntnis liefert (84.14) in erster Näherung

$$b\gamma_0 \approx b\left(\frac{M}{\hbar^2} V_0\right)^{1/2} \approx \frac{\pi}{2}, \quad b^2 V_0 \approx \frac{\pi^2}{4}\frac{\hbar^2}{M}. \tag{84.16}$$

---

[1]) Zum Vergleich: Die elektrostatische Energie zweier Elementarladungen im Abstand von $2 \cdot 10^{-13}$ cm beträgt 0,7 MeV.

In Wirklichkeit ist $b^2 V_0$ etwas größer als $\frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}$, auf jeden Fall aber gilt

$$b^2 V_0 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{M}. \tag{84.17}$$

Wenden wir andererseits (84.11) in diesem Falle an, so entsteht

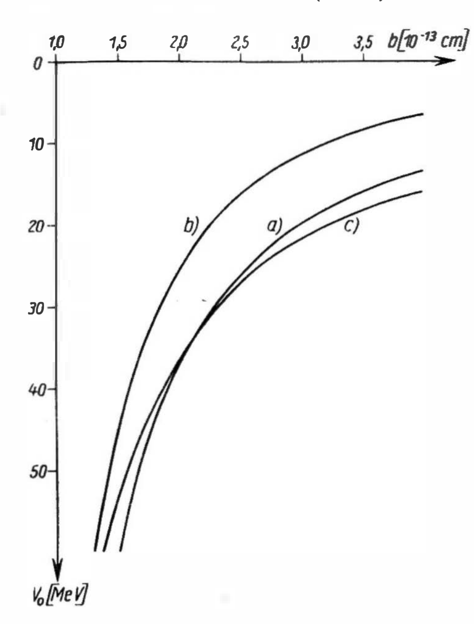


Abb. 161. Reichweite-Tiefe-Beziehungen beim Deuteron
a) Kastenpotential exakt, Gl. (84.14)
b) Kastenpotential genähert, Gl. (84.16)
c) Exponentialpotential, Gl. (84.19)

$$b^2 V_0 \approx 2 \frac{\hbar^2}{M}, \tag{84.18}$$

was mit (84.16) befriedigend übereinstimmt.

Beim *Exponentialpotential* wird (84.2) mit der Substitution

$$x = 2\varepsilon b e^{\frac{-r}{2b}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{M V_0}{\hbar^2}$$

durch Bessel-Funktionen

$$u(x) \propto J_{\pm 2b\beta}(x)$$

gelöst. Wegen $u(r = \infty) = 0$ kommen nur positive Ordnungen in Frage,

$$u(r) \propto J_{2b\beta}\left(2\varepsilon b e^{\frac{-r}{2b}}\right),$$

und die andere Randbedingung,

$$u(r = 0) = 0,$$

liefert die Verknüpfung zwischen Reichweite b und Stärke V_0 in der Gestalt

$$J_{2b\beta}(2\varepsilon b) = 0. \tag{84.19}$$

In Abb. 161 sind die Reichweite-Tiefe-Beziehungen, die sich aus dem Meßwert der Bindungsenergie des Deuterons ergeben, für das Kastenpotential (Gln. (84.14) und (84.16)) und für das Exponentialpotential (Gl. (84.19)) graphisch dargestellt.

§ 85. Angeregte Zustände des Deuterons

Die Nukleonen eines Kerns können sich, genau wie die Elektronen in der Hülle, unter Umständen in *angeregten Zuständen* befinden. Eine Möglichkeit, weitere Auskünfte über das Neutron-Proton-Kernpotential zu erhalten, besteht infolgedessen in der Untersuchung der Eigenschaften der angeregten Zustände des Deuterons. Wir werden dabei der Einfachheit halber das *Kastenpotential* verwenden. Die allgemeinen Schlußfolgerungen, die sich ergeben, gelten aber für alle kurzreichweitigen Potentialformen in gleicher Weise.

a) Höhere S-Zustände

Die Rechnung läuft bis zur Anschlußbedingung (84.14) genau wie beim Grundzustand. In den Größen β und γ_0 ist aber statt der Bindungsenergie B des Grundzustands diejenige des angeregten Zustands, B', einzusetzen (vgl. (84.5)). Wir nehmen an, die Bindung sei ganz locker, d.h. $\beta \approx 0$. Als Lösung von

$$\gamma_0' \operatorname{ctg} b\gamma_0' \approx 0, \qquad \gamma_0' = \left[\frac{M(B'+V_0)}{\hbar^2}\right]^{1/2}$$

für den ersten angeregten S-Zustand erhalten wir

$$b\gamma_0' \approx \frac{3\pi}{2}. \tag{85.1}$$

Die Wellenfunktion hat in diesem Fall einen Knoten (vgl. Abb. 160b). Die Lösung $b\gamma_0 \approx \frac{\pi}{2}$ gehört zum Grundzustand (vgl. (84.16)). Aus (85.1) folgt aber

$$b^2 V_0 \approx 9\left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}\right),$$

also erst ein Kastenpotential mit dem etwa neunfachen „Volumen“[1] $b^2 V_0$ desjenigen, das zur richtigen Grundzustandsenergie führt, würde einen weiteren gebundenen S-Zustand ermöglichen.

b) Zustände mit höherem Bahndrehimpuls

Aus der Schrödinger-Gleichung (84.1) entsteht in der üblichen Weise die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[\gamma^2(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_l = 0 \tag{85.2}$$

für die Radialfunktionen $u_l(r)$, die Verallgemeinerung von (84.2) für beliebige Werte l des Bahndrehimpulses.

Wir untersuchen zunächst den Fall $l = 1$, wo (85.2) für das Kastenpotential durch

$$u_1(r) = C_i\left[\frac{\sin\gamma_1 r}{\gamma_1 r} - \cos\gamma_1 r\right] \quad (r < b),$$

$$u_1(r) = C_a e^{-\beta_1 r}\left[\frac{1}{\beta_1 r} + 1\right] \quad (r > b), \tag{85.3}$$

$$\gamma_1 = \left[\frac{M(B_1 + V_0)}{\hbar^2}\right]^{1/2}$$

gelöst wird.

---

[1]) Es ist üblich geworden, die Größe $b^2 V_0$ als Volumen des Potentials zu bezeichnen, obwohl die Dimension $cm^4\, g\, sec^{-2}$ und nicht cm^3 ist.

β_1 ist wie in (84.5) durch

$$\beta_1 = \frac{(-M B_1)^{1/2}}{\hbar},$$

wo B_1 die Bindungsenergie des P-Zustands bedeutet, definiert. Die Anschlußbedingung (84.13) läßt sich in die Form

$$b\gamma_1 \operatorname{ctg} b\gamma_1 = 1 + \left(\frac{\gamma_1}{\beta_1}\right)^2 (1 + b\beta_1) \tag{85.4}$$

bringen. Da $x \operatorname{ctg} x < 1$ für $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ und die rechte Seite von (85.4) positiv ist, muß mindestens

$$\pi \leq b\gamma_1$$

gelten. Auch für ganz geringe Bindungsenergie, $B_1 \approx 0$, muß also immer noch

$$b^2 V_0 \geq 4\left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}\right)$$

erfüllt sein, woraus nach (84.16) und (84.17) wieder zu schließen ist, daß ein Kastenpotential, das zur Bindungsenergie des Deuterons paßt, keinen gebundenen P-Zustand ermöglicht.[1])

Da sich zeigen läßt, daß von zwei Lösungen u_{l_1} und u_{l_2} der radialen Schrödinger-Gleichung (85.2) im Zentralkraftfeld, die die gleiche Zahl von radialen Knoten besitzen, diejenige mit dem größeren l zu der höheren Energie gehört, können wir auf eine Untersuchung der Zustände mit $l \geq 2$ verzichten und das Ergebnis so formulieren:

Das Deuteron besitzt keinerlei gebundene angeregte Zustände.[2])

Wenn wir damit die Termfolge des Wasserstoffatoms vergleichen, tritt der qualitative Unterschied zwischen elektrostatischen und Kernkräften deutlich hervor.

§ 86. Theoretische Deutung von Streuversuchen

Die gemessene Bindungsenergie des Deuterons allein genügt nicht, um die Parameterwerte eines gewählten Potentials eindeutig festzulegen, geschweige denn Hinweise über die Güte dieser Wahl, d.h. über die genaue Form der Radialabhängigkeit der Kernkräfte, zu geben. Bei Streuveısuchen kann man dagegen durch Änderung der Energie der einfallenden Teilchen im Prinzip ein *Kontinuum* von Meßwerten bestimmen, dessen Deutung eine wesentliche Erweiterung unserer Kenntnisse von den Kernkräften erhoffen läßt.

---

[1]) Dieser Schluß gilt erst recht, wenn die Kernkräfte in der im § 91 beschriebenen Weise vom Bahndrehimpuls abhängen.

[2]) Auch die Spinabhängigkeit der Kernkräfte ändert nichts an dieser Aussage (vgl. § 88).

a) Eine typische experimentelle Anordnung

In Abb. 162 ist eine Versuchsanordnung für Streumessungen schematisch dargestellt.

Es möge sich zunächst um die Streuung von *Neutronen an Protonen* (n-p-Streuung) handeln. Ein Strahl geladener Teilchen (z.B. Protonen oder Deuteronen) A, der aus einem Beschleuniger (Linearbeschleuniger, Zyklotron usw.) kommt, verursacht bei B eine Neutronen erzeugende Kernreaktion, z.B. D(d,n), Li(d,n)

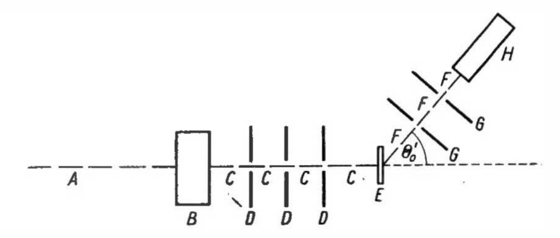


Abb. 162. Schema eines Streuversuchs

oder Li (p, n). Der durch Blenden D gebündelte Neutronenstrahl C trifft bei E auf eine protonenhaltige Substanz (Wasserstoff, Paraffin oder ähnliche Kohlenwasserstoffe), in der die Streuung erfolgt. Da sich Neutronen nur schwer nachweisen lassen, werden in diesem Fall mit dem Detektor H die unter dem Winkel Θ_0', der durch Blenden G definiert wird, gestreuten Rückstoßprotonen gezählt.

Bei der *Proton-Proton-Streuung* (p-p-Streuung) ist A ein Protonenstrahl, die Reaktion bei B fällt weg, und der Detektor H registriert sowohl Streu- als auch Rückstoßprotonen.

Obwohl die Protonen im Streuer E chemisch in Molekülen gebunden sind, kann man sie meist als *frei* behandeln; denn die geringe chemische Bindungsenergie (≈ 1 eV) kann bei nicht zu kleinen kinetischen Energien der einfallenden Teilchen vernachlässigt werden.[1])

b) Bezugssysteme

Die Messungen erfolgen im *Laborsystem*, definiert dadurch, daß in ihm die Apparatur und insbesondere die beschossenen Teilchen ruhen.

Für Rechnungen ist dagegen das *Schwerpunktssystem* geeigneter, das durch die Forderung, daß in ihm der Schwerpunkt von einfallenden und beschossenen Teilchen ruhen soll, festgelegt wird.

---

[1]) Wenn der Streuer Kohlenstoff enthält, müssen die Meßergebnisse für die Streuung an C-Kernen korrigiert werden.

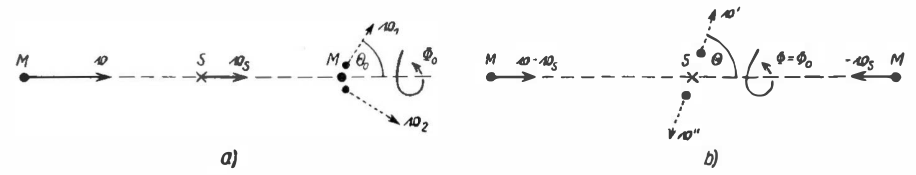


Abb. 163. Bezugssysteme bei der Streuung von zwei gleichen Teilchen aneinander
a) Labor-, b) Schwerpunktssystem
(S = Schwerpunkt, $\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen, $\mathfrak{v}_S$ = Schwerpunktsgeschwindigkeit, Θ_0 und Θ = Streuwinkel; ausgezogene Pfeile gelten vor, punktierte nach der Streuung)

In Abb. 163 ist die Streuung in beiden Systemen beschrieben, wobei vorausgesetzt worden ist, daß streuendes und gestreutes Teilchen die gleiche Masse M haben.

Ist E die kinetische Energie im Schwerpunkts-, E_0 die im Laborsystem und E_S die des Schwerpunkts, so gilt wegen der Gleichheit der Massen beider Teilchen

$$\mathfrak{v}_S = \frac{\mathfrak{v}}{2}$$

(vgl. Abb. 163), und daraus folgt

$$E = E_0 - E_S = \frac{M}{2} v^2 - \frac{(2M)}{2} v_S^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{2} v^2 = \frac{E_0}{2}. \tag{86.1}$$

Wir werden uns stets auf *elastische* Streuung beschränken, so daß wir aus Energie- und Impulssatz im Schwerpunktssystem,

$$\frac{v^2}{4} = \frac{1}{2}(v'^2 + v''^2), \quad \mathfrak{v}' = -\mathfrak{v}'',$$

auf die Gleichung

$$v' = \frac{v}{2} = v_S \tag{86.2}$$

schließen können.

Aus Abb. 164, die sich ohne weiteres durch Kombination der Abb. 163a und 163b ergibt, lesen wir

$$\Theta = 2\,\Theta_0 \tag{86.3}$$

als Beziehung zwischen den Streuwinkeln in beiden Systemen ab.

Im Schwerpunktssystem ist die kinetische Energie halb so groß, der Streuwinkel doppelt so groß wie im Laborsystem.

Die *Rückstoßteilchen* bewegen sich offenbar im Winkel

$$\Theta' = \pi - \Theta,$$

$$\Theta_0' = \frac{\pi}{2} - \Theta_0$$

zur Einschußrichtung.

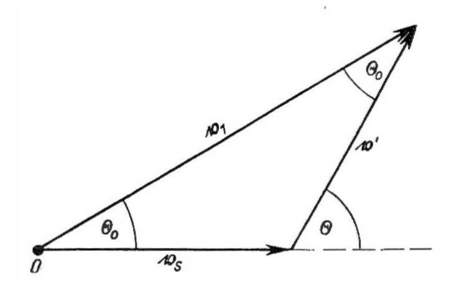


Abb. 164. Zusammensetzung der Geschwindigkeiten für eine Streuung bei 0

c) Streuquerschnitt

Um uns ein geeignetes Maß zur Beschreibung von Streuvorgängen, zunächst im *Laborsystem*, zu verschaffen, stellen wir uns vor, daß eine Gruppe von N Teilchen mit einem Teilchenstrom der Dichte j (Teilchen $\cdot$ cm^{-2} $\cdot$ sec^{-1}) beschossen wird. Wenn die beschossenen Partikeln nicht sehr dicht sitzen, wird ein einfallendes Teilchen höchstens einmal gestreut, und die Gesamtzahl der pro Zeiteinheit in ein Raumwinkelelement $d\Omega_0 = \sin\Theta_0 d\Theta_0 d\Phi_0$ (Abb. 165) gestreuten Teilchen ist in diesem Fall proportional zu $N j d\Omega_0$.

Setzen wir

$$\text{Anzahl der pro sec in das Raumwinkelelement } d\Omega_0 \text{ gestreuten Teilchen} = N j \sigma_0(\Theta_0, \Phi_0) d\Omega_0, \tag{86.4}$$

so hat der Proportionalitätsfaktor $\sigma_0(\Theta_0, \Phi_0)$ die Dimension cm^2; man nennt ihn *differentieller Streuquerschnitt pro Raumwinkeleinheit.*

$\sigma_0(\Theta_0, \Phi_0) d\Omega_0$ *(in* cm^2*) gibt die Zahl der von einem Streuzentrum pro Sekunde in das Raumwinkelelement* $d\Omega_0 = \sin\Theta_0\, d\Theta_0\, d\Phi_0$ *gestreuten Teilchen an, wenn die Stromdichte der einfallenden Teilchen* 1 *(Teilchen* $\cdot$ cm^{-2} $\cdot$ sec^{-1}*) beträgt.*[1])

Das Integral

$$\sigma_0 = \int_{\Theta_0=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\Phi_0=0}^{2\pi} \sigma_0(\Theta_0, \Phi_0)\, d\Omega_0 \tag{86.5}$$

heißt *totaler Streuquerschnitt.*[2])

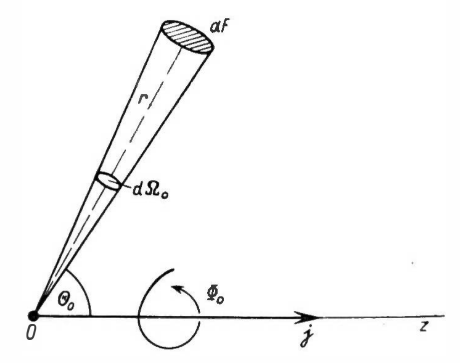


Abb. 165. Streuung bei 0 in ein Raumwinkelelement $d\Omega_0 = \sin\Theta_0 d\Theta_0 d\Phi_0$

Bei Durchführung derselben Betrachtungen im *Schwerpunktssystem* erhalten wir als Definition des differentiellen Streuquerschnitts $\sigma(\Theta, \Phi) d\Omega$ in diesem System Gleichung (86.4) ohne Index 0, und zwar mit dem gleichen N und auch dem gleichen j, wenn verabredet wird, daß die Stromdichte bezüglich der beschossenen Teilchen und nicht bezüglich des Schwerpunkts berechnet werden soll.

---

[1]) Rückstoßteilchen werden in $\sigma_0(\Theta_0, \Phi_0)$ nicht mitgezählt.

[2]) Wegen $0 \leqq \Theta \leqq \pi$ folgt $0 \leqq \Theta_0 \leqq \frac{\pi}{2}$ aus (86.3). Im Laborsystem können die Teilchen demnach nicht nach rückwärts gestreut werden.

Aus dieser Definition folgt

$$\sigma_0(\Theta_0, \Phi_0) \sin \Theta_0 d\Theta_0 d\Phi_0 = \sigma(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi$$

oder wegen $\Theta = 2\Theta_0$, $\Phi = \Phi_0$ die Beziehung

$$\sigma_0(\Theta_0, \Phi_0) = 4 \cos \Theta_0 \sigma(\Theta, \Phi) \tag{86.6}$$

zwischen den beiden differentiellen Streuquerschnitten.

Die totalen Streuquerschnitte stimmen in beiden Systemen überein,

$$\sigma_0 = \sigma, \tag{86.7}$$

wie man mit (86.5) und (86.6) einsieht.

§ 87. Methode der Partialwellen

Die Theorie hat die Aufgabe, aus der Schrödinger-Gleichung mit gegebener potentieller Energie, die hier wieder als *kugelsymmetrisch* vorausgesetzt wird, Formeln für den Streuquerschnitt herzuleiten, deren Aussagen mit dem Experiment zu vergleichen sind.

Bei Zentralkräften wird die Streuung symmetrisch um die Richtung der einfallenden Teilchen; der Winkel Φ tritt bei der Beschreibung nicht auf, und die Wellenfunktion läßt sich aus Produkten von rein abstandsabhängigen Funktionen mit Legendreschen Polynomen $P_l(\cos \Theta)$ zusammensetzen. Den zu fester Drehimpulsquantenzahl l gehörigen Teil des Gesamtvorgangs nennt man *Partialwelle*.

a) Berechnung des Streuquerschnitts

Wir betrachten die Streuung eines Teilchens der Masse M an einem anderen Teilchen mit gleicher Masse, wobei die Wechselwirkung zwischen beiden durch $V(r)$ gegeben ist. Die Schrödinger-Gleichung

$$\left[\frac{\hbar^2}{M} \Delta + E - V(r)\right] \psi(\mathfrak{r}) = 0, \tag{87.1}$$

die diesen Vorgang beschreibt, hat dieselbe Form wie (84.1), nur daß hier die Energie E der Relativbewegung positiv ist und die Teilchenenergie im Schwerpunktssystem bedeutet.

Um aus der Vielzahl der Lösungen von (87.1) die der vorliegenden physikalischen Situation angemessene herauszufinden, brauchen wir neben der üblichen Randbedingung, daß $\psi(\mathfrak{r})$ überall und insbesondere bei $r = 0$ endlich bleiben muß, noch eine zweite. Wir erhalten sie aus der Bemerkung, daß sich der Gesamtvorgang ψ in großen Entfernungen r vom Streuzentrum wegen $V(r \to \infty) = 0$ als Summe einer einlaufenden ebenen und einer gestreuten Welle darstellen lassen muß:[1])

$$\psi \sim e^{ikz} + f(\Theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \left(\frac{ME}{\hbar^2}\right)^{1/2}. \tag{87.2}$$

[1]) Das Zeichen $\sim$ bedeutet im Teil C dieses Bandes „asymptotisch gleich", und zwar bei uns stets für $r \to \infty$.

Der erste Term beschreibt ein Teilchen, das sich kräftefrei mit der Energie E längs der positiven z-Achse bewegt, während der zweite Term, eine vom Streuzentrum $r = 0$ weglaufende Kugelwelle mit der vom Streuwinkel Θ abhängigen Amplitude $f(\Theta)$, dem gestreuten Teilchen entspricht.

In der *einfallenden* Welle ist die Stromdichte (vgl. z.B. [B 53-1])

$$j_z = \frac{i\hbar}{M}\left(e^{ikz}\frac{\partial}{\partial z}e^{-ikz} - e^{-ikz}\frac{\partial}{\partial z}e^{ikz}\right) = 2\,\frac{k\hbar}{M}$$

und in der *gestreuten* Welle

$$j_r = \frac{i\hbar}{M}\,|f(\Theta)|^2\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] = 2\,\frac{k\hbar}{M}\,\frac{|f(\Theta)|^2}{r^2}\,,$$

so daß $\left(\frac{2k\hbar}{M}\right)|f(\Theta)|^2\left(\frac{dF}{r^2}\right) = j_z\,|f(\Theta)|^2 d\Omega$ (vgl. Abb.165) die Anzahl der in der Zeiteinheit die Fläche dF im Abstand r durchsetzenden Teilchen, mit anderen Worten die Anzahl der pro Sekunde in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreuten Teilchen angibt. Aus der Definition des Streuquerschnitts folgt dann sofort

$$\sigma(\Theta) = |f(\Theta)|^2. \tag{87.3}$$

Genaugenommen müßte die Stromdichte mit Hilfe der *ganzen* Funktion ψ aus (87.2) berechnet werden, nicht mit den Summanden einzeln, was außer den beiden obigen Ausdrücken einen *Interferenzterm* zwischen einfallender und Streuwelle liefert, der aber um so rascher mit Θ schwankt, je größer r ist, so daß er bei einer Mittelung über ein kleines Θ-Intervall, wie sie bei jeder Messung automatisch erfolgt, verschwindet.

Um die Lösung ψ von (87.1) mit der asymptotischen Form (87.2) zu finden, machen wir den allgemeinen axialsymmetrischen Ansatz

$$\psi(\mathfrak{r}) \equiv \psi(r, \Theta) = \sum_l c_l\,\frac{u_l(r)}{r}\,P_l(\cos\Theta) \tag{87.4}$$

mit konstanten Koeffizienten c_l, der die Überschrift dieses Paragraphen erklärt. Die $u_l(r)$ sind dabei die bei $r = 0$ regulären Lösungen der Differentialgleichungen

$$u_l'' + \left[k^2 - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l = 0\,, \quad U(r) = \frac{M}{\hbar^2}\,V(r) \tag{87.5}$$

und haben wegen $U(r \to \infty) = 0$ die asymptotische Gestalt[1])

$$u_l(r) \sim k^{-1}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \tag{87.6}$$

Die hierdurch definierten Größen δ_l heißen *Phasenverschiebungen*, und zwar δ_0 die S-, δ_1 die P-, δ_2 die D-Phasenverschiebung usw. Sie können im allgemeinen nur durch numerische Integration von (87.5) bestimmt werden.

Die einfache asymptotische Form (87.6) gilt aber nur für hinreichend schnell mit wachsendem r verschwindende Potentiale; denn setzen wir

$$u_l(r) = g_l(r)e^{ikr}\,,$$

---

[1]) Der Term $-\frac{l\pi}{2}$ ist der bequemeren Rechnung wegen üblich.

wo $g_l(r)$ für genügend große r langsam veränderlich sein wird, so entsteht aus (87.5)

$$g_l'' + 2\,i\,k g_l' - \left[U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] g_l = 0\,,$$

woraus wegen $g_l'' \ll k g_l'$ für große r

$$2\,i\,k \ln g_l = \int^r \left[U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] dr$$

folgt. Dieser Ausdruck wird für $r \to \infty$ nur dann konstant, d.h. (87.6) *gilt nur dann, wenn* $U(r)$ *schneller als* $\frac{1}{r}$ *verschwindet.*

Mit Hilfe der Formel (s. [F 52-1])

$$e^{ikz} \equiv e^{ikr\cos\Theta} \sim \frac{1}{kr}\sum_l (2l+1)\, i^l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) P_l(\cos\Theta) \tag{87.7}$$

werden die Konstanten c_l in (87.4) bei Beachtung von (87.6) so bestimmt, daß $\psi - e^{ikz}$ gemäß (87.2) für $r \to \infty$ keine einlaufenden Kugelwellen ($\propto e^{-ikr}$) enthält. Dabei ergibt sich

$$c_l = (2l+1)\, i^l e^{i\delta_l}$$

und damit wieder aus (87.2), (87.4), (87.6) und (87.7)

$$f(\Theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)\, P_l(\cos\Theta)\,, \tag{87.8}$$

so daß schließlich (87.3) die Doppelsumme

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) \sin\delta_l \sin\delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'})\, P_l(\cos\Theta)\, P_{l'}(\cos\Theta) \tag{87.9}$$

als differentiellen Streuquerschnitt liefert.

Wegen der bekannten Orthogonalitätsrelationen der Legendreschen Polynome entsteht daraus nach (86.5) der totale Streuquerschnitt

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin\Theta\, d\Theta = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1) \sin^2\delta_l\,. \tag{87.10}$$

Die letzten Gleichungen beruhen wesentlich auf der asymptotischen Form (87.6), die für alle Kernpotentiale, *aber nicht für das Coulomb-Potential gilt*. Die Formeln (87.8), (87.9) und (87.10) sind also für die Neutron-Proton-Streuung brauchbar, während sie für die Proton-Proton-Streuung abzuändern sind (s. § 88).

b) Eigenschaften der Phasenverschiebungen

Die für die Berechnung des Streuquerschnitts entscheidenden Phasenverschiebungen hängen nach (87.5) und (87.6) durch k von der Teilchenenergie E und durch $U(r)$ vom Kernpotential ab.

Um ihre Bedeutung anschaulich zu machen, sei bemerkt, daß die (87.5) entsprechende Differentialgleichung für den *kräftefreien* Fall,

$$\mathring{u}_l'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] \mathring{u}_l = 0\,, \tag{87.11}$$

bei $r = 0$ reguläre Lösungen

$$\mathring{u}_l(r) = \left(\frac{\pi r}{2k}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(kr) \tag{87.12}$$

besitzt, in denen J_p die Bessel-Funktion p-ter Ordnung bedeutet und die in

$$\mathring{u}_l(r) \sim k^{-1} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \tag{87.13}$$

für große r übergehen (vgl. z. B. [S47-1]). Durch Vergleich von (87.13) mit (87.6) folgt:

Die Phase der l-ten Partialwelle wird durch das Potential $V(r)$ in großen Entfernungen um δ_l gegenüber der Phase im kräftefreien Fall bei gleicher Energie der einfallenden Teilchen verschoben.

Über das *Vorzeichen* der Phasenverschiebungen δ_l erhält man Aussagen, wenn man die mit u_l multiplizierte Gleichung (87.11) von der mit $\mathring{u}_l$ multiplizierten Gleichung (87.5) subtrahiert und dann über r von 0 bis ∞ integriert, wobei zunächst

$$\left[\mathring{u}_l u_l' - \mathring{u}_l' u_l\right]_0^\infty = \int_0^\infty U(r)\, \mathring{u}_l u_l\, dr$$

entsteht, was wegen $u_l(0) = \mathring{u}_l(0) = 0$, (87.6) und (87.13) zu der *exakten* Formel

$$\sin \delta_l = -k \int_0^\infty U(r)\, \mathring{u}_l u_l\, dr \tag{87.14}$$

führt. $\mathring{u}_l$ und u_l stimmen für kleine r überein[1]), so daß $\mathring{u}_l u_l > 0$ ist in dem r-Intervall, das in der Hauptsache zu dem Integral in (87.14) beiträgt. Somit folgt aus (87.14):

Ein überall anziehendes (abstoßendes) Potential erzeugt positive (negative) Phasenverschiebungen.

Abb. 166 zeigt die beiden Fälle.

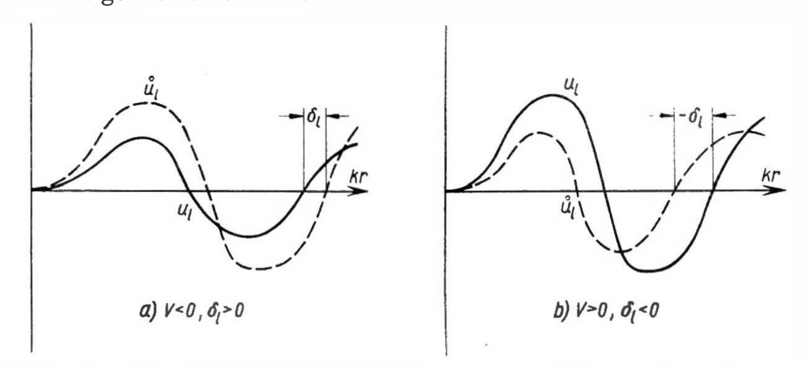


Abb. 166. Verzerrung der kräftefreien Wellenfunktion bei Anwesenheit eines Potentials $V(r)$, das in a) anziehend, in b) abstoßend wirkt. Die Differenz benachbarter Nullstellen von $\mathring{u}_l$ und u_l wird genaugenommen erst nach vielen Oszillationen gleich $|\delta_l|$

[1]) Vorausgesetzt, daß $r^2 U \to 0$ für $r \to 0$ gilt. (87.5), (87.11) und die Tatsache, daß bei stetiger Verkleinerung von U auch u_l für alle r stetig in $\mathring{u}_l$ übergehen muß (hier zeigt sich der Vorteil, den das Hinzufügen des Terms $-\frac{l\pi}{2}$ in (87.6) mit sich bringt), ergeben dann, daß $u_l = \mathring{u}_l \propto r^{l+1}$ für kleine r ist.

Die *Energieabhängigkeit* der Phasenverschiebungen ergibt sich am einfachsten aus einer halbklassischen Betrachtung[1]). Klassisch ist der Drehimpuls in unserem Falle (vgl. Abb. 167) $L = Pq$, wo $P = (ME)^{1/2}$ den Impuls bedeutet. Dieser klassische Drehimpuls ist zu quanteln, also

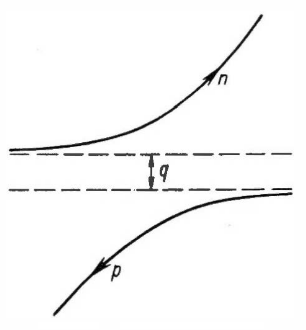


Abb. 167. Stoßparameter q bei Streuung im Schwerpunktssystem

$$Pq = l\hbar, \quad l = kq.$$

Bei einer Reichweite b der Kernkräfte kann nur bei $q < b$, d.h. $l < bk$, Wechselwirkung ($\delta_l \neq 0$) eintreten:

Bei gegebener Energie der einfallenden Teilchen ist nur eine beschränkteZahl von Phasen δ_l wesentlich von Null verschieden.

Ist insbesondere $bk < 1$, dann trägt in der Hauptsache nur $l = 0$ bei. Wenn wir vorsichtig abschätzen und für die Reichweite den sicher ziemlich hohen Wert $b \approx 3 \cdot 10^{-13}$ cm (vgl. § 84b) verwenden, so folgt:

Bei Teilchenenergien (im Laborsystem) $E_0 < 10$ MeV *wird* $\delta_l \approx 0$ *für* $l > 0$.

In diesem Fall *reiner S-Streuung* vereinfachen sich (87.9) und (87.10) beträchtlich, nämlich zu

$$\sigma(\Theta) = k^{-2} \sin^2 \delta_0, \quad \sigma = 4\pi k^{-2} \sin^2 \delta_0. \tag{87.15}$$

Die Neutron-Proton-Streuversuche[2]) zeigen in der Tat, daß $\sigma(\Theta)$ für kleine Energien unabhängig vom Streuwinkel Θ im Schwerpunktssystem ist.[3]) Die Herleitung von (87.15) berechtigt zu der Aussage:

Die experimentell erwiesene Isotropie des differentiellen Streuquerschnitts für Neutron-Proton-Streuung im Schwerpunktssystem bei kleinen Energien liefert einen weiteren Beweis für die kurze Reichweite der Neutron-Proton-Kernkräfte.

c) Berechnung der Phasenverschiebungen für das Kastenpotential

Die Berechnung der Phasenverschiebungen bei gegebenem Potential ist meistens eine mühsame Arbeit. Wir werden daher hier als Beispiel nur das analytisch am einfachsten zu handhabende *Kastenpotential* behandeln.

[1]) Eine rein quantenmechanische Argumentation führt zum gleichen Ergebnis (vgl. [M 52-1]).
[2]) Eine Zusammenstellung experimenteller Ergebnisse ist z.B. in [S 53-1] angegeben.
[3]) Im Laborsystem entspricht dem nach (86.6) eine cos Θ_0-Verteilung.

Die Differentialgleichung (87.5) zerfällt hier in zwei Teile, nämlich

$$\begin{aligned} u_l'' + \left[\varkappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_l &= 0\,, \quad \varkappa^2 = k^2 + \frac{M}{\hbar^2} V_0 \quad (r < b) \\ u_l'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_l &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (r > b) \end{aligned} \tag{87.16}$$

mit den der Randbedingung $u_l(0) = 0$ genügenden Lösungen (vgl. (87.12))

$$\begin{aligned} u_l &= r\, j_l(\varkappa r) \qquad\qquad\qquad (r < b), \\ u_l &= r[A_l\, j_l(kr) + B_l\, n_l(kr)] \quad (r > b), \end{aligned} \tag{87.17}$$

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(x)\,, \quad n_l(x) = (-1)^{l+1} \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{-l-\frac{1}{2}}(x)\,.$$

Mit $A^2{}_l + B_l{}^2 = C_l{}^2$ setzen wir

$$A_l = C_l \cos\delta_l\,, \quad B_l = -C_l \sin\delta_l\,; \tag{87.18}$$

denn dann steht wegen

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad n_l(x) \sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)$$

(s. z.B. [S 47-1]) die asymptotische Form

$$u_l \sim k^{-1} C_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right),$$

wie es nach (87.6) sein soll.

$\frac{u_l(r)}{r}$ muß bei $r = b$ stetig und mit stetiger Ableitung verlaufen, so daß wir aus (87.17) und (87.18) beim Auflösen dieser Anschlußbedingung nach tg δ_l die Gleichung

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{k j_l'(kb) - \varkappa \gamma_l\, j_l(kb)}{k n_l'(kb) - \varkappa \gamma_l\, n_l(kb)}\,, \quad \gamma_l = \frac{j_l'(\varkappa b)}{j_l(\varkappa b)}\,, \tag{87.19}$$

in der die Striche Ableitungen nach dem jeweiligen Argument bedeuten, als explizite Formel zur Berechnung der Phasenverschiebungen erhalten.

§ 88. Neutron-Proton-Streuung bei niedrigen Energien; Theorie der effektiven Reichweite

Am Anfang des § 86 wurde auf die Bedeutung der Streuversuche für die Theorie hingewiesen. Bei niedrigen Teilchenenergien darf man allerdings nicht zu viel erwarten; denn langsame Neutronen haben eine de Broglie-Wellenlänge $\gg 10^{-13}$ cm, so daß sie als Sonden zu grob sind, um Feinheiten des Potentialverlaufs feststellen zu können. Die Auswertung der Messungen wird also nicht die genaue Form, sondern nur gewisse *mittlere Eigenschaften* des Potentials ergeben. Demgemäß

versuchen wir, die Theorie mit Hilfe geeigneter Parameter, die eben diese mittleren Eigenschaften beschreiben, zu formulieren, bevor wir mit dem Experiment vergleichen.

a) Streulänge und effektive Reichweite

Die folgenden Betrachtungen gelten für Neutronen mit $E_0 < 10$ MeV, die nach § 87 reine S-Streuung erfahren.

Wir verzichten auf eine Kennzeichnung der Drehimpulsquantenzahl $l = 0$ bei der Radialfunktion $u(r)$ und erhalten nach (87.5) bei zwei verschiedenen Energien E_1 und E_2 die Differentialgleichungen

$$u_1'' + [k_1^2 - U(r)]u_1 = 0, \qquad k_1^2 = \frac{M E_1}{\hbar^2}, \tag{88.1}$$

$$u_2'' + [k_2^2 - U(r)]u_2 = 0, \qquad k_2^2 = \frac{M E_2}{\hbar^2}, \tag{88.2}$$

in denen sich die Indizes 1 und 2 jetzt auf die Energie, nicht auf den Bahndrehimpuls beziehen.

Durch Multiplikation von (88.1) mit u_2 und von (88.2) mit u_1, Subtraktion und anschließende Integration über r von 0 bis ∞ entsteht

$$\Big[u_1' u_2 - u_1 u_2'\Big]_0^\infty = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty u_1 u_2 \, dr\,. \tag{88.3}$$

Für große r gilt nach (87.6)

$$u(r) \sim v(r) = \frac{\sin(kr + \delta_0)}{\sin \delta_0}. \tag{88.4}$$

Hier ist die Normierung von $v(r)$, die die von $u(r)$ festlegt, anders als in (87.6), nämlich so, daß $v(0) = 1$ wird. $v(r)$ befriedigt statt (88.1) und (88.2) die Differentialgleichungen

$$v_i'' + k_i^2 v_i = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{88.5}$$

Dieselben Operationen wie oben, auf (88.5) angewendet, führen zu

$$\Big[v_1' v_2 - v_1 v_2'\Big]_0^\infty = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty v_1 v_2 \, dr\,. \tag{88.6}$$

Wenn wir (88.3) von (88.6) abziehen und $u(0) = 0$, $u(\infty) = v(\infty)$ und (88.4) beachten, bekommen wir

$$k_2 \operatorname{ctg} \delta_{02} - k_1 \operatorname{ctg} \delta_{01} = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (v_1 v_2 - u_1 u_2)\, dr\,. \tag{88.7}$$

Für $k_2 = k$ $(u_2 = u,\ v_2 = v)$ und $k_1 = 0$ [1] $(u_1 = u_0,\ v_1 = v_0)$ wird hieraus

$$\begin{aligned} k \operatorname{ctg} \delta_0 &= (k \operatorname{ctg} \delta_0)_{k=0} + \tfrac{1}{2} k^2 \varrho(E), \\ \varrho(E) &= 2 \int_0^\infty (v v_0 - u u_0)\, dr\,. \end{aligned} \tag{88.8}$$

---

[1]) Da wir hier die chemische Bindungsenergie der streuenden Protonen vernachlässigen (vgl. § 86a), betrifft der Grenzübergang $k \to 0$ hier nicht die *wirkliche*, sondern die aus den Daten für Energien $>$ einige eV auf verschwindende Energie *extrapolierte* Streuung.

Außerhalb der Reichweite der Kernkräfte verschwindet der Integrand in $\varrho(E)$; im Innern stellt

$$u(r) \approx u_0(r), \quad v(r) \approx v_0(r) \tag{88.9}$$

wegen der großen Stärke der Neutron-Proton-Wechselwirkung (vgl. § 84 c und (88.1)) eine gute Näherung für nicht zu große Energien E dar. Dann ist

$$\varrho(E) \approx 2\int_0^\infty (v_0{}^2 - u_0{}^2)\, dr \equiv r_0 \tag{88.10}$$

von der Energie unabhängig.[1]) Die durch (88.10) definierte *effektive Reichweite*[2]) r_0 ist einer der zur Beschreibung der Streuung verwendeten Parameter.

Die Gerade $v_0(r)$ (vgl. (88.5) für $k = 0$) schreiben wir wegen $v_0(0) = 1$ als

$$v_0(r) = 1 - \frac{r}{a} \tag{88.11}$$

Die Größe a, die *Streulänge*, benutzt man als zweiten Streuparameter. Ihre anschauliche Bedeutung zeigt Abb. 168.

Bei einem gebundenen Zustand ($E < 0$) muß sich an die Radialfunktion $u(r)$ im Innern nach außen hin eine fallende Exponentialfunktion glatt anschließen (vgl. § 84 a). Das ist nur dann möglich, wenn $u(r) \approx u_0(r)$ (vgl. (88.9)) wie in Abb. 168c verläuft.

Nur bei positiver Streulänge kann ein gebundener Zustand des Systems existieren.

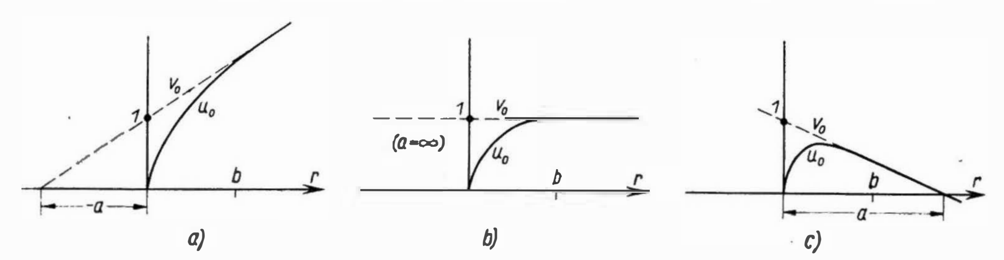


Abb. 168. Streulänge a und Radialfunktionen u_0 und v_0 für Energie 0 und Reichweite b (die Potentialtiefe wächst von a) nach c))

[1]) In [B 49-1] wird gezeigt, daß $\varrho(E) - r_0$ von der Ordnung k^2 und in der Tat in Anbetracht der experimentellen Unsicherheiten nicht sehr wesentlich ist. Man schreibt

$$\varrho(E) = r_0 - 2Pr_0{}^3k^2 + O(k^4),$$

wo P von der Potentialform abhängt. Diese läßt sich also im Prinzip bei Verbesserung der Versuchsgenauigkeit durch Messung von P feststellen.

[2]) Diese Bezeichnung ist berechtigt, weil der Integrand in (88.10) jenseits der Reichweite b verschwindet und für $r < b$ von der Ordnung 1 ist, aber insofern unglücklich, weil r_0 auch von der *Tiefe* des jeweiligen Potentials abhängt.

Wegen $k \operatorname{ctg} \delta_0 = \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{r=0}$ und (88.11) entsteht aus (88.8)

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = -a^{-1} + \tfrac{1}{2}\varrho(E) k^2 \tag{88.12}$$

oder mit (88.10)

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = -a^{-1} + \tfrac{1}{2} r_0 k^2 \tag{88.13}$$

in der sog. *formunabhängigen Näherung.*
Ähnliche Beziehungen für den *Grundzustand des Deuterons*, nämlich

$$\beta = a^{-1} + \tfrac{1}{2}\varrho(B)\beta^2 \approx a^{-1} + \tfrac{1}{2} r_0 \beta^2, \tag{88.14}$$

lassen sich herleiten, wenn man in (88.3) und (88.6) $k_1 = 0$, $k_2^2 = -\beta^2$ (s. (84.5)) setzt und subtrahiert.
Man kann a aus (88.13) und (88.14) eliminieren und findet dann nach (87.15) für den totalen Streuquerschnitt

$$\sigma = 4\pi \left\{(k^2 + \beta^2)\left[1 - \beta r_0 + \frac{r_0^2}{4}(k^2 + \beta^2)\right]\right\}^{-1}. \tag{88.15}$$

Für sehr kleine Energien ($k^2 \approx 0$) gilt andererseits nach (88.12) und (87.15)

$$\sigma(\Theta) = a^2, \quad \sigma = 4\pi a^2, \tag{88.16}$$

so daß Streulänge a und Streuamplitude $f(\Theta)$ in diesem Fall dem Betrag nach übereinstimmen.

b) Spinabhängigkeit der Kernkräfte

Die effektive Reichweite r_0 läßt sich nach (88.15) durch eine einzige Messung von σ bei irgendeiner Energie, z.B. $k = 0$, bestimmen. In diesem Fall wird

$$\sigma = \sigma_0 = 4\pi \left[\beta\left(1 - \frac{\beta r_0}{2}\right)\right]^{-2}. \tag{88.17}$$

Wegen der relativ großen Ausdehnung des Deuterons (vgl. § 84b) erwarten wir jedenfalls

$$r_0 < \frac{1}{\beta}, \quad \sigma_0 < \frac{16\pi}{\beta^2} = 9{,}3 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2.$$

Gemessen wird dagegen[1]) (s. [M 49-1])

$$\sigma_0 = (20{,}36 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2. \tag{88.18}$$

Bei einer so drastischen Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment muß bei der Herleitung der sonst durchaus wohlbegründeten Formel (88.15) eine funda-

[1]) Es handelt sich dabei um den von Energien > 5 eV auf 0 extrapolierten Wirkungsquerschnitt (vgl. Fußnote 1 auf S. 412).

mentale Eigenschaft der Kernkräfte außer acht geblieben sein. Es ist ihre *Spinabhängigkeit.*

Während der Grundzustand des Deuterons laut Messung ein Spintriplett (Spins parallel) ist, treten bei der Streuung von *unpolarisierten* Neutronen, die wir hier behandeln, Triplett- und Singulettzustände der Spins auf. Im Gesamtstreuquerschnitt

$$\sigma = \tfrac{3}{4}\,\sigma_t + \tfrac{1}{4}\,\sigma_s \tag{88.19}$$

sind daher beide Anteile mit ihren statistischen Gewichten vertreten.[1])

Wenn nun die Kernkräfte vom Spin abhängen ($V_s(r) \neq V_t(r)$), müssen auch die Größen δ_0, ϱ, r_0 und a unter 1. durch einen Index s oder t näher gekennzeichnet werden. Da die Herleitung der einzelnen Beziehungen, einmal mit Verwendung des Triplettpotentials und zum anderen mit dem Singulettpotential, in ganz analoger Weise in beiden Fällen geschieht, gelten die Formeln (88.1) bis (88.13) und (88.16) dann für Singulett und Triplett (Indizes s und t), die Formeln (88.14) und (88.15) aber nur für den Triplettfall, da hier der Grundzustand des Deuterons herangezogen wird. Also kann der am Meßwert (88.18) von σ_0 nach (88.15) fehlende Betrag durch Singulettstreuung gedeckt werden.

Indem wir (88.12) und (88.13) mit (87.15) kombinieren, erhalten wir den *totalen Singulettstreuquerschnitt*

$$\sigma_s = 4\pi\left\{k^2 + \left[-\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}\varrho_s(E)\,k^2\right]^2\right\}^{-1} \approx 4\pi\left\{k^2 + \left[-\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}r_{0s}k^2\right]^2\right\}^{-1}. \tag{88.20}$$

Die vier Größen a_s, a_t, r_{0s} und r_{0t} sind aus den Messungen von σ als Funktion von E (für $0 < E < 5$ MeV) festzulegen. Nach Wahl einer bestimmten Potentialform (Kasten-, YUKAWA- usw.) lassen sich dann daraus mit Hilfe der Definitionen von a und r_0 die Reichweiten b_s, b_t und die Tiefen V_{0s}, V_{0t} des betreffenden Potentials berechnen. Meist verwendet man für $V_s(r)$ und $V_t(r)$ dieselbe Form; nach unseren bisherigen Kenntnissen liegt aber dazu kein anderer Grund als der der Bequemlichkeit vor.

c) Vergleich mit dem Experiment; kohärente Streuung

Mit (88.14) läßt sich a_t durch r_{0t} ausdrücken. Da der nach (88.16) und (88.19) berechnete totale Streuquerschnitt für $E \to 0$

$$\sigma_0 = \pi(3a_t^2 + a_s^2) \tag{88.21}$$

eine Beziehung zwischen a_t und a_s liefert, bleiben nach Messung der Deuteron-Bindungsenergie B (d.h. β) und des Streuquerschnitts für ganz langsame Neutronen noch zwei unabhängige Parameter, z.B. r_{0t} und r_{0s}, zur Interpretation von σ bei $E > 0$.

---

[1]) Es gibt drei Triplettzustände und einen Singulettzustand bei einem System aus zwei Spins von je $\frac{\hbar}{2}$.

Während das Vorzeichen von a_t als positiv feststeht, weil das Deuteron im Triplettzustand gebunden ist (vgl. a), gibt eine Messung von σ_0 nach (88.21) nur Auskunft über den *Betrag* von a_s. Dazu kommt, daß die Versuchsgenauigkeit nicht ausreicht,[1] um r_{0s} und r_{0t} eindeutig festzulegen. Man kann z.B. r_{0s} beträchtlich ändern, ohne die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu stören, wenn man nur gleichzeitig r_{0t} entsprechend variiert.

Genauere Ergebnisse erhält man durch Untersuchung der Streuung in dem Gebiet $0 < E_0 < 5$ eV, wo die chemische Bindung der Protonen zu berücksichtigen ist und das wir durch Extrapolation bisher übersprungen haben, insbesondere durch Analyse der sog. *kohärenten Streuung.*

An Neutronenwellen, die an den beiden verschiedenen Protonen eines Wasserstoffmoleküls gestreut worden sind, beobachtet man *Interferenzerscheinungen,* wenn der Abstand der Streuzentren vergleichbar mit der Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-}_n$ (im Laborsystem) der Neutronenwellen ist. Da nun der Protonenabstand im Molekül $\approx 10^{-8}$ cm ist, erwarten wir für

$$\lambda\!\!\!^{-}_n = \tfrac{1}{2}k > 10^{-8}\,\text{cm}, \quad E_0 < 0{,}002\,\text{eV},$$

also für ganz langsame Neutronen, solche Interferenzen.

Die chemische Bindung der Protonen beachten wir zunächst nicht, sondern bringen erst am Ergebnis eine entsprechende Korrektur an. Es ist bequem, den Operator

$$a = \tfrac{1}{4}(3a_t + a_s) + \tfrac{1}{4}(a_t - a_s)\,(\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_p) \tag{88.22}$$

für die Streulänge zu verwenden. $\vec{\sigma}_n$ und $\vec{\sigma}_p$ sind die Pauli-Spinmatrizen von Neutron und Proton. Da, wie man leicht nachrechnet,

$$\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_p = \begin{cases} -3 & \text{Singulett-} \\ & \text{im} \qquad\qquad \text{Zustand des } n\text{-}p\text{-Systems} \\ +1 & \text{Triplett-} \end{cases}$$

gilt, haben wir

$$a = \begin{cases} a_s & \text{Singulett-} \\ & \text{im} \qquad\qquad \text{Zustand des } n\text{-}p\text{-Systems.} \\ a_t & \text{Triplett-} \end{cases}$$

Das Wasserstoffmolekül existiert in zwei Modifikationen: *Parawasserstoff* mit den beiden Protonenspins antiparallel und *Orthowasserstoff*, wo die beiden Kernspins parallel sind. Bei gewöhnlichen Temperaturen verhalten sich die beiden Anteile in normalem Wasserstoffgas wie 1 : 3, entsprechend den statistischen Gewichten der zugehörigen Spinzustände. Da der Grundzustand zum Parasystem gehört, kann man bei genügend tiefen Temperaturen und bei Anwesenheit geeigneter Katalysatoren, die das Umklappen der Spins erleichtern, reinen Parawasserstoff herstellen.

---

[1]) Die Messung eines Streuquerschnitts mit 1% Genauigkeit ist schon ein sehr schwieriges Experiment.

Das Quadrat des Molekül-Kernspinoperators (in Einheiten $\hbar$)

$$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \tag{88.23}$$

nimmt die Werte

$$\mathfrak{S}^2 = \begin{cases} 0 & \text{(Para)} \\ 2 & \text{(Ortho)} \end{cases} \tag{88.24}$$

für die beiden Modifikationen an. $\vec{\sigma}_p$ in (88.22) ist entweder $\vec{\sigma}_1$ oder $\vec{\sigma}_2$ aus (88.23). Bei sehr kleinen Energien ist die Amplitude der gestreuten Welle gleich der Streulänge. Der totale Streuquerschnitt ist dann gegeben durch (vgl. (88.16))

$$\sigma = 4\pi A^2, \tag{88.25}$$

wo wir mit A die Gesamtstreuamplitude unseres Vorgangs bezeichnet haben. Unter der Voraussetzung, daß die Neutronenwellenlänge sehr viel größer als der Protonenabstand im Molekül ist (äußerst langsame Neutronen), kann man die Phasendifferenz zwischen der Streuwelle, die vom ersten Proton herkommt, und derjenigen, die am zweiten Proton gestreut worden ist, vernachlässigen und die Amplituden einfach addieren, so daß sich dann

$$\begin{aligned} A &= a(\vec{\sigma}_p = \vec{\sigma}_1) + a(\vec{\sigma}_p = \vec{\sigma}_2) \\ &= \tfrac{1}{2}(3a_t + a_s) + \tfrac{1}{2}(a_t - a_s)(\vec{\sigma}_n \cdot \mathfrak{S}) \end{aligned} \tag{88.26}$$

nach (88.22) und (88.23) für die gesamte Streuamplitude ergibt.
Betrachten wir die *Streuung an reinem Parawasserstoff*, so dürfen wir nach (88.24) $\mathfrak{S} = 0$ setzen und erhalten dann mit (88.26) aus (88.25)

$$\sigma_{\text{para}} = \pi(3a_t + a_s)^2.$$

Bei Berücksichtigung der chemischen Bindung der Protonen entsteht statt dessen (vgl. [B 59-1])

$$\sigma_{\text{para}} = \frac{16}{9}\pi(3a_t + a_s)^2. \tag{88.27}$$

Obwohl an diesem Ausdruck noch weitere Korrekturen[1]) angebracht werden müßten, lohnt schon hier ein Vergleich mit dem Experiment. Dazu nehmen wir nach (88.14) in erster Näherung $a_t \approx \frac{1}{\beta} = 4{,}3 \cdot 10^{-13}$ cm an und berechnen damit aus (88.21) und (88.18) $a_s \approx \pm 2.4 \cdot 10^{-12}$ cm. Mit diesen Zahlen gibt (88.27)

$$\sigma_{\text{para}} = \begin{cases} 77{,}6 \\ 7{,}1 \end{cases} \cdot 10^{-24}\,\text{cm}^2 \qquad \begin{matrix} (a_s > 0), \\ (a_s < 0), \end{matrix}$$

---

[1]) Dazu gehören Korrekturen, die unelastische Stöße, die thermische Bewegung der Protonen und die mögliche Deuteronenbildung mit anschließender γ-Emission (Strahlungseinfang) berücksichtigen.

während der experimentelle Wert

$$\sigma_{\text{para}} = 3{,}9 \cdot 10^{-24}\ \text{cm}^2$$

ist. Ohne weitere Verfeinerungen läßt sich daraus schon entnehmen, daß nur $a_s < 0$ in Frage kommt:

Die Tiefe des Singulett-Neutron-Proton-Potentials reicht nicht aus, um einen gebundenen Singulettzustand des Deuterons zu ermöglichen.

Auf die weiteren Korrekturen, die an der Formel (88.27) für σ_{para} noch anzubringen sind, ehe man die *kohärente Streuamplitude*

$$f_c = 2\left(\tfrac{3}{4}a_t + \tfrac{1}{4}a_s\right) \tag{88.28}$$

aus den Meßwerten bestimmen kann, gehen wir hier nicht näher ein. Ferner sei nur erwähnt, daß f_c auch durch andere Experimente ermittelt werden kann, und zwar durch Totalreflexion von Neutronen an einem Spiegel aus flüssigen Kohlenwasserstoffen [H 50-1] oder durch Neutronenbeugung an protonenhaltigen Kristallen [S 48-1].

Durch Messung von σ_0 (Gl. (88.21)) und von f_c (Gl. (88.28)) bekommt man a_s und a_t einzeln mit größerer Genauigkeit. HUGHES u. a. [H 50-1] erhalten so

$$a_t = (0{,}538 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-12}\ \text{cm}, \quad a_s = -(2{,}369 \pm 0{,}006) \cdot 10^{-12}\ \text{cm}, \tag{88.29a}$$

und SQUIRES und STEWART [S 55-1] finden

$$a_t = (0{,}537 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-12}\ \text{cm}, \quad a_s = -(2{,}373 \pm 0{,}007) \cdot 10^{-12}\ \text{cm}. \tag{88.29b}$$

Obwohl das Neutron-Proton-System im Singulettzustand niemals gebunden vorkommen kann, spricht man von einem *virtuellen Singulettzustand* des Deuterons und ordnet diesem eine Energie $B_s (> 0)$ zu, die man folgendermaßen definiert: Berechne aus (88.14) mit $a_s (< 0)$ und r_{0s} die Größe $\beta_s (< 0)$, setze willkürlich $-\beta_s \equiv \beta_s^*$ und bestimme aus der (84.5) entsprechenden Gleichung

$$\frac{1}{\beta_s^*} = \hbar (M B_s)^{-1/2}$$

schließlich B_s! Die Werte $a_s = -2{,}37 \cdot 10^{-12}$ cm und $r_{0s} = 2{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm (vgl. (88.31)) führen zu $B_s \approx 68$ keV. Die Wellenfunktion bei dieser Energie ist aber durch nichts gegenüber denen bei anderen positiven Energien ausgezeichnet, und der Begriff „virtueller Zustand“ ist nur eine Redeweise (nach [B 59-1]).

Die Singulettstreulänge reagiert wegen ihres relativ großen Absolutbetrags schon auf kleine Änderungen der Krümmung der Radialfunktion innerhalb der Reichweite der Kernkräfte merklich, wie aus Abb. 168 folgt. *a_s ist daher eine empfindliche Funktion der Potentialtiefe.*

Für die effektive Triplettreichweite ergibt sich nun mit dem Meßwert (88.29) für a_t und der Bindungsenergie des Deuterons aus (88.14) die Größe

$$r_{0t} \approx \varrho(B) = (1{,}70 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-13}\ \text{cm}. \tag{88.30}$$

Der vierte Streuparameter, die effektive Singulettreichweite r_{0s}, läßt sich schließlich mit (88.29) und (88.30) aus den Meßwerten für den totalen Streuquerschnitt σ bei 5 eV $< E <$ 5 MeV, allerdings nicht sehr genau, bestimmen. STORRS und FRISCH [S 54-1] finden

$$r_{0s} = (2{,}4 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-13}\ \mathrm{cm} \tag{88.31}$$

in Übereinstimmung mit anderen Messungen ([S 53-2], [H 53-2]).

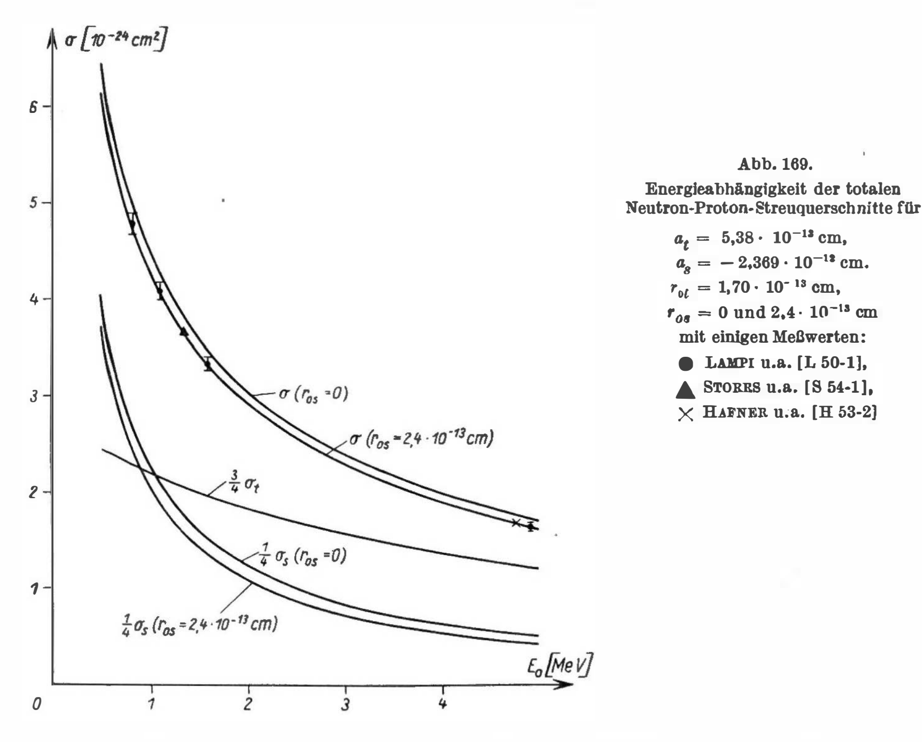


Abb. 169.
Energieabhängigkeit der totalen Neutron-Proton-Streuquerschnitte für
$a_t = 5{,}38 \cdot 10^{-13}$ cm,
$a_s = -2{,}369 \cdot 10^{-12}$ cm.
$r_{0t} = 1{,}70 \cdot 10^{-13}$ cm,
$r_{0s} = 0$ und $2{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm
mit einigen Meßwerten:
● LAMPI u.a. [L 50-1],
▲ STORRS u.a. [S 54-1],
× HAFNER u.a. [H 53-2]

In Abb. 169 sind die theoretisch mit (88.29) und (88.30) zu erwartenden Streuquerschnitte σ_s, σ_t und σ für $r_{0s} = 0$ und $2{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm zusammen mit einigen Meßergebnissen aufgetragen. Man sieht, daß große Änderungen von r_{0s} nur geringen Einfluß auf σ haben.

d) Potentialparameter

Mit den experimentellen Daten (88.29), (88.30) und (88.31) lassen sich nunmehr aus den Definitionen von a und r_0 (bzw. ϱ) die Parameter V_0 und b für die verschiedenen Potentialformen berechnen. BLATT und JACKSON [B 49-1] haben bequeme Formeln und Diagramme zu diesem Zweck angegeben. Mit deren Hilfe findet man die in den Tabellen 50, 51 und 52 zusammengestellten Werte.

Tabelle 50. Parameter für Triplett-n-p-Potentiale in formunabhängiger Näherung mit $a_t = 5{,}37 \cdot 10^{-13}$ cm und $r_{0t} = 1{,}70 \cdot 10^{-13}$ cm

Form	b_t [10^{-13} cm]	V_{0t} [MeV]
Kasten	2,01	36,4
Gauß......	1,49	72,1
Exponential	0,67	189,3
Yukawa ...	1,57	41,8

Tabelle 51. Parameter für Triplett-n-p-Potentiale mit $a_t = 5{,}38 \cdot 10^{-13}$ cm und $\varrho(B) = 1{,}704 \cdot 10^{-13}$ cm (nach SQUIRES *[S 53-2])*

Form	r_{0t} [10^{-13} cm]	b_t [10^{-13} cm]	V_{0t} [MeV]
Kasten	1,726	2,04	35,3
Gauß......	1,713	1,50	70,9
Exponential	1,688	0,66	193,0
Yukawa ...	1,638	1,38	52,3

Tabelle 52. Parameter für Singulett-n-p-Potentiale in formunabhängiger Näherung mit $a_s = -2{,}37 \cdot 10^{-12}$ cm (Längen in 10^{-13} cm, V_{0s} in MeV)

Form	$r_{0s} = 2{,}1$		$r_{0s} = 2{,}4$		$r_{0s} = 2{,}7$	
	b_s	V_{0s}	b_s	V_{0s}	b_s	V_{0s}
Kasten	2,03	23,2	2,31	17,8	2,64	13,5
Gauß......	1,40	52,9	1,60	40,6	1,78	32,2
Exponential	0,56	178,8	0,64	137,7	0,71	109,5
Yukawa ...	0,93	77,2	1,05	59,8	1,17	47,7

§ 89. Proton-Proton-Streuung

Da kein gebundenes Diproton (He^2) existiert, kann die Wechselwirkung zwischen zwei Protonen nur mit Hilfe von Streuversuchen untersucht werden. Bei deren Diskussion beschränken wir uns zunächst wieder auf *Zentralkräfte* und *kleine Energien.*

Protonen lassen sich besser als Neutronen nachweisen und leichter in mono- und hochenergetischen Strahlen herstellen. Diesen experimentellen Vorteilen der

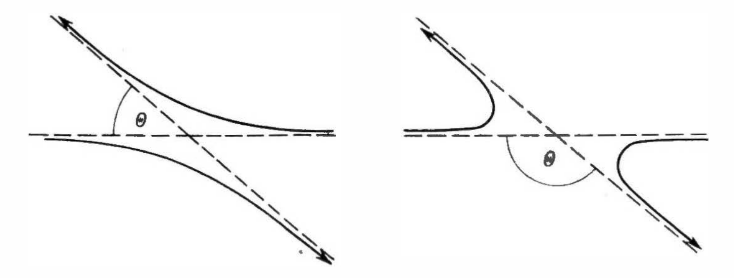


Abb. 170. Proton-Proton-Streuung im Schwerpunktssystem

Proton-Proton-Streuung stehen theoretische Komplikationen durch die *Coulomb-Kräfte* gegenüber.

Der Detektor zählt gestreute und Rückstoßprotonen gleichermaßen, so daß die beiden in Abb. 170 dargestellten Situationen experimentell nicht zu unterscheiden sind; das bedeutet

$$\sigma(\Theta) = \sigma(\pi - \Theta). \tag{89.1}$$

Nach dem *Pauli-Prinzip* sind im Proton-Proton-System nur die Zustände ^1S, ^3P, ^1D usw. möglich, während im Neutron-Proton-System auch die Zustände ^3S, ^1P, ^3D usw. auftreten.

a) Streuamplitude

Die Wechselwirkung zwischen zwei Protonen besteht aus Kern- und elektrostatischen Kräften, so daß in der Schrödinger-Gleichung im Schwerpunktssystem

$$\Delta \psi(\mathfrak{r}) + \frac{M}{\hbar^2}\left[E - V_p(r) - \frac{e^2}{r}\right]\psi(\mathfrak{r}) = 0 \tag{89.2}$$

neben dem Proton-Proton-Kernpotential $V_p(r)$ das Coulomb-Potential $\frac{e^2}{r}$ auftritt.

Die Schrödinger-Gleichung für *reine Coulomb-Streuung*

$$\Delta \psi_c(\mathfrak{r}) + \frac{M}{\hbar^2}\left[E - \frac{e^2}{r}\right]\psi_c(\mathfrak{r}) = 0 \tag{89.3}$$

hat wohlbekannte Lösungen (s. [F 52-1], [S 53-3]). Die asymptotische Form des bei $r = 0$ regulären Anteils

$$\psi_c \sim e^{i\eta \ln\left(2kr\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)} e^{ikz} - \frac{\eta}{2k\sin^2\frac{\Theta}{2}} e^{i\left[2\sigma_0 - \eta\ln\left(2kr\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)\right]} \frac{e^{ikr}}{r} \tag{89.4}$$

läßt sich auch als Summe von Partialwellen schreiben, nämlich (s. [F 52-1])

$$\begin{aligned}\psi_c &\sim (kr)^{-1}\sum_l (2l+1)\, i^l e^{i\sigma_l}\sin\left(kr - \eta\ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l\right) P_l(\cos\Theta)\\ &= \sum_l (2l+1)\, i^l e^{i\sigma_l}\frac{v_{cl}(r)}{r} P_l(\cos\Theta)\,.\end{aligned} \tag{89.5}$$

Hierbei bedeuten

$$\eta = \frac{e^2}{\hbar v} = \frac{e^2}{2\hbar}\left(\frac{M}{E}\right)^{1/2}, \quad \sigma_l = \arg\Gamma(l + 1 + i\eta), \tag{89.6}$$

und die Funktionen

$$v_{cl}(r) = k^{-1} \sin\left(kr - \eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l\right) \tag{89.7}$$

sind die asymptotischen Formen der bei $r = 0$ regulären Lösungen $\left(\text{d.h.}, \frac{u(r)}{r} \neq \infty\right.$ für $\left. r \to 0\right)$ der aus (89.3) folgenden Radialgleichungen

$$u_{cl}''(r) + \left[k^2 - \frac{M e^2}{\hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_{cl}(r) = 0\,. \tag{89.8}$$

Aus (89.4) ist die Sonderstellung des weitreichenden Coulomb-Potentials zu erkennen (vgl. § 87 a), da sowohl die einfallende (1. Term) als auch die Streuwelle (2. Term) nicht die einfache Form wie in (87.2) haben, sondern durch logarithmische Phasen verzerrt sind.

Die bei $r = 0$ nichtreguläre Lösung¹) von (89.3) heißt asymptotisch:

$$\tilde{\psi}_c \sim (kr)^{-1} \sum_l (2l+1)\, i^l e^{i\sigma_l} \cos\left(kr - \eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l\right) P_l(\cos\Theta)$$

$$= \sum_l (2l+1)\, i^l e^{i\sigma_l} \frac{\tilde{v}_{cl}(r)}{r} P_l(\cos\Theta)\,; \tag{89.9}$$

ähnlich wie in (89.7) verstehen wir unter

$$\tilde{v}_{cl}(r) = k^{-1} \cos\left(kr - \eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l\right) \tag{89.10}$$

die nichtreguläre Lösung von (89.8) $\left(\text{d.h.}, \frac{u}{r} \to \infty \text{ für } r \to 0\right)$ für $r \to \infty$.

Für den Streuquerschnitt brauchen wir aber die asymptotische Lösung der *vollständigen* Schrödinger-Gleichung (89.2). Da das Kernpotential V_p kurze Reichweite besitzt, können sich die Verhältnisse in großen Entfernungen nicht wesentlich gegenüber der reinen Coulomb-Streuung ändern. Wir dürfen nur nicht erwarten, daß in der asymptotischen Lösung die regulären Radialfunktionen $v_{cl}(r)$ allein auftreten. Sie wird vielmehr aus Linearkombinationen von $v_{cl}(r)$ und $\tilde{v}_{cl}(r)$, die wir in der Gestalt

$$\psi \sim \sum_l A_l (2l+1)\, i^l e^{i\sigma_l} \frac{1}{r} \left[\cos K_l\, v_{cl}(r) + \sin K_l\, \tilde{v}_{cl}(r)\right] P_l(\cos\Theta) \tag{89.11}$$

schreiben, bestehen.

Die Koeffizienten A_l lassen sich aus der Forderung, daß der durch die Kernstreuung zur reinen Coulomb-Streuung neu hinzukommende Beitrag $\psi - \psi_c$ nur auslaufende Kugelwellen ($\propto e^{+ikr}$) enthalten darf, bestimmen. Nach (89.5) und (89.11) haben wir

$$\psi - \psi_c \sim \sum_l (2l+1)\, i^l e^{i\sigma_l} \frac{1}{r} \left[A_l \cos K_l\, v_{cl} + A_l \sin K_l\, \tilde{v}_{cl} - v_{cl}\right] P_l(\cos\Theta)\,,$$

¹) $\tilde{\psi}_c(\mathfrak{r})$ hat bei reiner Coulomb-Streuung keine physikalische Bedeutung.

und aus (89.7) und (89.10) geht hervor, daß

$$A_l \cos K_l v_{cl} + A_l \sin K_l \tilde{v}_{cl} - v_{cl} \propto (A_l \cos K_l - 1)\,(e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ + i A_l \sin K_l (e^{ikr} + e^{-ikr})$$

gilt. Setzen wir darin den Faktor von e^{-ikr} gleich 0, so entsteht

$$A_l = e^{iK_l}. \tag{89.12}$$

Zur Berechnung der Größen K_l bemerken wir, daß die Funktionen

$$\begin{aligned} v_l(r) &= \cos K_l v_{cl}(r) + \sin K_l \tilde{v}_{cl}(r) \\ &= k^{-1} \sin\left(kr - \eta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l + K_l\right) \end{aligned} \tag{89.13}$$

die asymptotischen Formen der bei $r = 0$ regulären Lösungen[1]) der zu (89.2) gehörenden Radialgleichung

$$u_l''(r) + \left[k^2 - \frac{M}{\hbar^2} V_p(r) - \frac{M}{\hbar^2}\frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_l(r) = 0 \tag{89.14}$$

in Analogie zu (89.5), (89.7) und (89.8) sind. Der Vergleich von (89.13) mit (89.7) zeigt:

Das Kernpotential verschiebt die Phase der l-ten Partialwelle um K_l gegenüber der reinen Coulomb-Streuung.[2])

Für den Gesamtvorgang ergibt sich dann aus (89.11), (89.12), (89.7) und (89.10)

$$\psi = \psi_c + (\psi - \psi_c)$$

$$\sim \psi_c + e^{i(2\sigma_0 - \eta \ln 2kr)} \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)\, e^{2i(\sigma_l - \sigma_0)} (e^{2iK_l} - 1)\, P_l(\cos\Theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

und das läßt sich mit Hilfe von (89.4) in der zu (87.2) analogen Form

$$\psi \sim e^{i\eta \ln\left(2kr\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)} e^{ikz} - f(\Theta)\, e^{i(2\sigma_0 - \eta \ln 2kr)} \frac{e^{ikr}}{r} \tag{89.15}$$

schreiben, mit der *Streuamplitude*

$$\begin{aligned} f(\Theta) = &- \frac{\eta}{2k\sin^2\frac{\Theta}{2}}\, e^{-i\eta \ln\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)} \\ &+ \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1)\, e^{2i(\sigma_l - \sigma_0)} (e^{2iK_l} - 1)\, P_l(\cos\Theta). \end{aligned} \tag{89.16}$$

[1]) ψ muß, wie jede Wellenfunktion, die physikalisch realisierte Vorgänge beschreibt, überall regulär sein.

[2]) Bei der Neutron-Proton-Streuung bedeuten die δ_l dagegen Phasenverschiebungen gegenüber dem *kräftefreien Fall.*

b) Streuquerschnitt

Aus der Definition des Streuquerschnitts (s. § 86c) folgt, indem man dieselben Überlegungen wie in § 87a), anstellt, daß trotz der logarithmischen Phasen in (89.15) auch hier, wie in (87.3), gilt

$$\sigma(\Theta) = |f(\Theta)|^2. \tag{89.17}$$

Hierbei ist aber das Pauli-Prinzip noch nicht berücksichtigt worden. Bei einem System von zwei gleichen Teilchen mit halbzahligem Spin muß die Gesamtwellenfunktion, Ortsanteil · Spinanteil, *antisymmetrisch* gegen Vertauschung der beiden Teilchen gemacht werden. Wir haben die Möglichkeiten

$$[\psi(\mathfrak{r}) + \psi(-\mathfrak{r})]\chi_0 \quad \text{und} \quad [\psi(\mathfrak{r}) - \psi(-\mathfrak{r})]\chi_1;$$

denn die Singulett-Spinfunktion χ_0 ist antisymmetrisch, und die drei Triplettspinfunktionen χ_1 sind symmetrisch gegen Vertauschung der Protonen, die durch $\mathfrak{r} \to -\mathfrak{r}$ beschrieben wird.

Da der Ersetzung $\mathfrak{r} \to -\mathfrak{r}$ in Kugelkoordinaten $\Theta \to \pi - \Theta$, $\Phi \to \pi + \Phi$ entspricht und die statistischen Gewichte von Triplett- und Singulettzuständen sich wie 3 : 1 verhalten, erhalten wir bei Berücksichtigung des Pauli-Prinzips statt (89.17)

$$\sigma(\Theta) = \tfrac{1}{4}\,|f(\Theta) + f(\pi - \Theta)|^2 + \tfrac{3}{4}\,|f(\Theta) - f(\pi - \Theta)|^2 \tag{89.18}$$

als Streuquerschnitt unpolarisierter Protonen, in Übereinstimmung mit der Symmetrieforderung (89.1).

Für kleine Energien können wir, wie bei der Neutron-Proton-Streuung, $K_l = 0$ für $l \geq 1$ setzen und finden dann aus (89.16), (89.18) und (89.6)

$$\begin{aligned}\sigma(\Theta) = \left(\frac{e^2}{4E}\right)^2 \Bigg\{ &\sin^{-4}\frac{\Theta}{2} + \cos^{-4}\frac{\Theta}{2} - \sin^{-2}\frac{\Theta}{2}\cos^{-2}\frac{\Theta}{2}\cos\left(2\eta\ln\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right) \\ &-2\eta^{-1}\sin K_0\left[\sin^{-2}\frac{\Theta}{2}\cos\left(K_0 + 2\eta\ln\sin\frac{\Theta}{2}\right)\right. \\ &\left.+\cos^{-2}\frac{\Theta}{2}\cos\left(K_0 + 2\eta\ln\cos\frac{\Theta}{2}\right)\right] \\ &+4\eta^{-2}\sin^2 K_0\Bigg\}.\end{aligned} \tag{89.19}$$

Die erste Zeile in (89.19), die sog. *Mottsche Streuformel*, beschreibt die *reine Coulomb-Streuung*: Der erste Term ist die gewöhnliche *Rutherford-Streuung*, der zweite berücksichtigt die Rückstoßprotonen und der dritte, nur quantenmechanisch als Folge des Pauli-Prinzips verständliche, die Interferenz zwischen gestreuten und Rückstoßteilchen.

Das zu η^{-1} proportionale Glied drückt die *Interferenz zwischen Coulomb- und Kernstreuung* aus. Wegen des Faktors $\sin K_0$ liefert hier[1]) der Vergleich mit dem Experiment direkt das Vorzeichen von K_0, und zwar als positiv. Die Interferenz

[1]) Im Gegensatz zur Neutron-Proton-Streuung, wo $\sigma(\Theta) \propto \sin^2\delta_0$ ist.

zwischen elektrostatischen und Kernkräften ist also destruktiv, *die Proton-Proton-Kernwechselwirkung im ^1S-Zustand ist anziehend.* Das letzte Glied in (89.19) bedeutet *reine Kernstreuung*, wobei allerdings zu bemerken ist, daß die Phase K_0 auch mit durch das Coulomb-Potential bestimmt wird.

Die in Abb. 171 dargestellte *Winkelabhängigkeit* des Streuquerschnitts (89.19) zeigt, wie bei kleinen Winkeln[1]) die Coulomb-, bei großen dagegen die Kernstreuung überwiegt und wie sich bei mittleren Winkeln die destruktive Interferenz zwischen beiden bemerkbar macht.

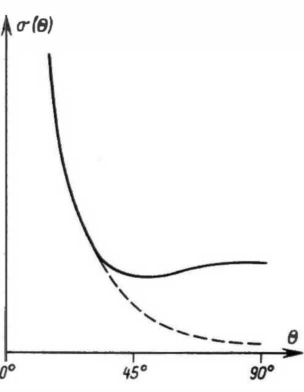


Abb. 171. Winkelabhängigkeit des Streuquerschnitts für *p-p*-Streuung bei kleinen Energien (reine Coulomb-Streuung gestrichelt)

Tabelle 53.
Energieabhängigkeit des Proton-Proton-Streuquerschnitts

E [MeV]	η^{-1}	η^{-2}
0,36	5,4	29
0,64	7,2	51
1	9,0	80
4	18	320

Die *Energieabhängigkeit* der einzelnen Glieder ist aus Tabelle 53 zu entnehmen. Man sieht, daß mit wachsender Energie der Einfluß der Kernstreuung stark zunimmt.

c) Theorie der effektiven Reichweite

Aus denselben Gründen wie beim Neutron-Proton-System empfiehlt es sich auch hier, die Streuung bei kleinen Energien durch zwei von der gewählten Form des Potentials unabhängige Parameter zu beschreiben. Da in diesem Energiebereich nur S-Zustände ($l = 0$) interessieren und nach dem Pauli-Prinzip ^3S-Zustände ausgeschlossen sind, kennzeichnen die beiden Parameter nur die Singulett-Proton-Proton-Wechselwirkung.

Um eine der Gleichung (88.12) entsprechende Beziehung, also eine Funktion der beobachteten Phasenverschiebung (hier K_0) und der kinetischen Energie ($\propto k^2$), die annähernd linear von k^2 abhängt, zu finden, schreiben wir die Radialgleichung (89.14) für $l = 0$ bei zwei verschiedenen Energien E_1 und E_2 auf, wobei wir

$$u_1'' + \left[k_1^2 - U_p(r) - \frac{1}{Dr}\right] u_1 = 0\,, \tag{89.20}$$

$$u_2'' + \left[k_2^2 - U_p(r) - \frac{1}{Dr}\right] u_2 = 0\,, \tag{89.21}$$

[1]) Die Singularität für $\Theta = 0$ in (89.19) läßt sich bei Berücksichtigung des Einflusses der Elektronenhülle beseitigen (vgl. [S 53-3]).

$$k_i^2 = \frac{M}{\hbar^2} E_i \ (i = 1, 2) \,, \quad U_p(r) = \frac{M}{\hbar^2} V_p(r) \,, \quad D = \frac{\hbar^2}{M e^2} = 2{,}88 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{cm}$$

erhalten. Die Indizes beziehen sich auf die Energie und nicht auf die Drehimpulsquantenzahl, die während der ganzen weiteren Rechnung $l = 0$ ist.

Die Multiplikation von (89.20) mit u_2, von (89.21) mit u_1, Subtraktion der erhaltenen Gleichungen und Integration der Differenz über r zwischen 0 und ∞ ergibt

$$\left[u_1' u_2 - u_1 u_2'\right]_0^\infty = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty u_1 u_2 \, dr \,. \tag{89.22}$$

Führen wir dieselben Operationen mit den asymptotischen Funktionen

$$v(r) = \left(\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}\right)^{1/2} \sin^{-1} K_0 \sin(kr - \eta \ln 2kr + \sigma_0 + K_0) \sim u(r) \,, \tag{89.23}$$

deren Normierung jetzt analog zu (88.4) und anders als in (89.13) für

$$v(0) = 1 \tag{89.24}$$

sorgt und die die Differentialgleichungen

$$v_i'' + \left[k_i^2 - \frac{1}{Dr}\right] v_i = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{89.25}$$

erfüllen, durch, so bekommen wir

$$\left[v_1' v_2 - v_1 v_2'\right]_0^\infty = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty v_1 v_2 \, dr \,. \tag{89.26}$$

Wegen (89.23), (89.24) und $u_i(0) = 0$ (vgl. Fußnote 1 auf S. 396) ist

$$(v_2' - v_1')_{r=0} = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (v_1 v_2 - u_1 u_2) \, dr \tag{89.27}$$

die Differenz von (89.22) und (89.26).

Nun gilt für kleine r (vgl. [M 52-1])

$$v(r) = 1 + \frac{r}{D}\left[\ln \frac{r}{D} + h(\eta) + 2C - 1 + \frac{\pi \operatorname{ctg} K_0}{e^{2\pi\eta} - 1}\right]. \tag{89.28}$$

Hierin bedeutet $C = 0{,}5772\ldots$ die Eulersche Konstante, und die Funktion $h(\eta)$, definiert durch

$$h(\eta) = -\ln \eta - C + \eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + \eta^2)} \,,$$

ist bei gegebener Energie bekannt. Mit Hilfe von (89.28) errechnen wir

$$\begin{aligned}(v_2' - v_1')_{r=0} &= \frac{1}{D}\left[h(\eta_2) + \frac{\pi \operatorname{ctg} K_{02}}{e^{2\pi\eta_2} - 1} - h(\eta_1) - \frac{\pi \operatorname{ctg} K_{01}}{e^{2\pi\eta_1} - 1}\right] \\ &= K'(k_2) - K'(k_1) \,,\end{aligned} \tag{89.29}$$

wobei die Abkürzung

$$K'(k_i) = \frac{1}{D}\left[h(\eta_i) + \frac{\pi \operatorname{ctg} K_{0i}}{e^{2\pi\eta_i} - 1}\right] \quad (i = 1, 2) \tag{89.30}$$

verwendet worden ist.

Spezialisieren wir jetzt die Formel (89.27) durch $k_2 = k$, $k_1 = 0$ und beachten den Wert (89.29) für die linke Seite, so sehen wir, daß die dem Ausdruck $k \operatorname{ctg} \delta_0$ bei

der Neutron-Proton-Streuung entsprechende Funktion hier durch $K'(k)$, definiert in (89.30), gegeben ist; denn es gilt

$$K'(k) = K'(0) + \tfrac{1}{2}\varrho_p(E)\,k^2. \tag{89.31}$$

Die Länge

$$\varrho_p(E) = 2\int_0^\infty (v v_0 - u u_0)\,dr = r_{0p} - 2 P_p r_{0p}^3\; k^2 + O(k^4), \tag{89.32}$$

$$\varrho_p(E) \approx r_{0p} = 2\int_0^\infty (v_0^2 - u_0^2)\,dr \tag{89.33}$$

ist dabei ganz analog zu (88.8) und (88.10) erklärt. Der energieunabhängige Parameter r_{0p} heißt *effektive Proton-Proton-Reichweite*; die dimensionslose Größe P_p beschreibt die Abhängigkeit von der Form des Potentials, weshalb man die Formel

$$K'(k) = K'(0) + \tfrac{1}{2} r_{0p} k^2 \tag{89.34}$$

als *formunabhängige Näherung* bezeichnet (vgl. (88.13) und Fußnote 1 auf S. 413). In Abb. 172 ist die Funktion $DK'(k)$ gemäß (89.31) und (89.32) als Funktion der Energie für drei verschiedene Werte P_p aufgetragen. Man sieht, daß die formunabhängige Näherung ($P_p = 0$), wo die Kurve eine Gerade ist, sehr gut zu den eingezeichneten Meßwerten paßt.

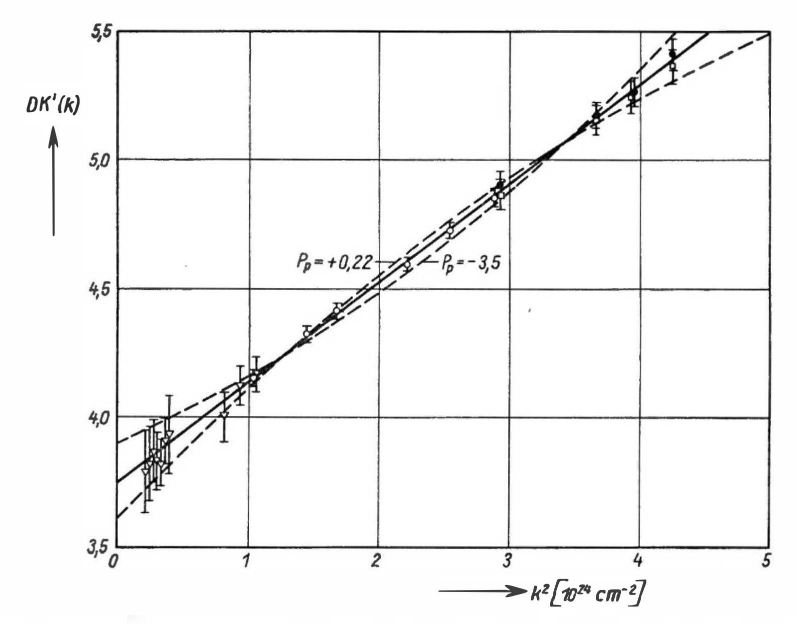


Abb. 172. $DK'(k)$ als Funktion von k^2 ($\propto$-Energie) für drei verschiedene Werte von P_p nach (89.31) und (89.32). Die formunabhängige Näherung ($P_p = 0$, Gl. (89.34)) stimmt am besten mit den eingetragenen Meßwerten überein. Ordinatenabschnitt und Steigung der Geraden ergeben die beiden Streuparameter $\frac{1}{K'(0)} = 7{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm und $r_{0p} = 2.65 \cdot 10^{-13}$ cm. (Nach [B 59-1])

Die Integranden in (89.32) und (89.33) geben nur innerhalb der Reichweite der Kernkräfte wesentliche Beiträge. Wenn dort die elektrostatischen viel schwächer als die Kernkräfte sind, werden u, u_0, v und v_0 kaum von den ersteren abhängen.

In dem Maße, wie im Bereich der Kernkräfte die Coulomb-Kräfte zu vernachlässigen sind, werden die effektive Reichweite r_{0p} und die Größe ϱ_p durch die Kernkräfte allein bestimmt.

Die Werte von r_{0p} und r_{0s} (bzw. ϱ_p und ϱ_s) gestatten in diesem Sinne einen Vergleich zwischen Neutron-Proton- und Proton-Proton-Kernkräften im ^1S-Zustand. Da aber r_{0s} nur mit ziemlich geringer Genauigkeit gemessen ist (vgl. (88.31)), sind die hieraus zu ziehenden Schlüsse nicht sehr sicher. Es empfiehlt sich daher, den Vergleich mit Hilfe des anderen Parameters, $K'(0)$, zu führen, obwohl dieser im Gegensatz zu r_{0p} merklich durch das Coulomb-Feld beeinflußt wird.
Zu diesem Zweck stellen wir eine Verknüpfung zwischen $K'(0)$ und der durch die ^1S-Proton-Proton-Kernkräfte bei (gedachter) Abwesenheit von Coulomb-Wechselwirkung hervorgerufenen Streulänge, die wir mit a_p bezeichnen, her. Neben den Funktionen $u(r)$ und $v(r)$, die die Differentialgleichungen (89.30) und (89.31) (ohne Index) erfüllen, brauchen wir noch die vom Coulomb-Feld unabhängigen Funktionen $u_N(r)$ und $v_N(r)$, die Lösungen der Differentialgleichungen

$$u_N'' + [k^2 - U_p(r)]u_N = 0, \tag{89.35}$$

$$v_N'' + k^2 v_N = 0 \tag{89.36}$$

die den Bedingungen

$$u_N \sim v_N, \quad u_N(0) = 0, \quad v_N(0) = 1 \tag{89.37}$$

genügen. Alle vier Funktionen interessieren hier offenbar nur für $k \to 0$, was wieder durch einen Index 0 angezeigt wird.
Durch Multiplikation von (89.20) mit u_{N_0} und von (89.35) mit u_0, Subtraktion und Integration der Differenz über r von r' bis ∞ entsteht

$$\left[u_0' u_{N_0} - u_0 u'_{N_0}\right]_{r'}^{\infty} = \frac{1}{D}\int_{r'}^{\infty} u_0 u_{N_0} \frac{dr}{r} \tag{89.38}$$

und durch Multiplikation von (89.25) mit v_{N_0}, von (89.36) mit v_0, Subtraktion und Integration wie eben

$$\left[v_0' v_{N_0} - v_0 v'_{N_0}\right]_{r'}^{\infty} = \frac{1}{D}\int_{r'}^{\infty} v_0 v_{N_0} \frac{dr}{r}. \tag{89.39}$$

Wir subtrahieren (89.39) von (89.38) und lassen dabei $r' \to 0$ gehen, was wegen (39.37) zu

$$\lim_{r'\to 0}[v_0'(r') - v'_{N_0}(r')] = \frac{1}{D}\lim_{r'\to 0}\int_{r'}^{\infty}(u_0 u_{N_0} - v_0 v_{N_0})\frac{dr}{r} \tag{89.40}$$

führt. Nach (39.28) folgt

$$v_0'(r') = K'(0) + \frac{1}{D}\left(\ln\frac{r}{D} + 2C\right), \qquad (89.41)$$

und v_{N_0} ist wie bei der Neutron-Proton-Streuung (vgl. (88.13)) die Gerade

$$v_{N_0}(r) = 1 - \frac{r}{a_p}$$

mit der Steigung

$$v_{N_0}' = -\frac{1}{a_p}. \qquad (89.42)$$

Indem wir nun (89.41) und (89.42) in (89.40) einführen, erhalten wir die gesuchte Beziehung zwischen a_p und $K'(0)$ in der Gestalt

$$a_p^{-1} = -K'(0) - \frac{1}{D}\left\{2C + \lim_{r'\to 0}\left[\ln\frac{r'}{D} - \int_{r'}^{\infty}(u_0 u_{N_0} - v_0 v_{N_0})\frac{dr}{r}\right]\right\}. \qquad (89.43)$$

Damit kann also a_p aus dem gemessenen $DK'(0)$, dem Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinatenachse in Abb. 172 bestimmt und mit der Singulett-n-p-Streulänge a_s verglichen werden.

Der für a_p aus (89.43) zu entnehmende Wert hängt über u_0 und u_{N_0} ein wenig von der Potentialform ab. Nach § 88c ist aber a_s eine sehr empfindliche Funktion der Potentialtiefe, so daß sich wesentliche Unterschiede in den Kernkräften als sehr große Differenz zwischen a_s und a_p bemerkbar machen sollten.

d) Vergleich mit dem Experiment; Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte

In Abb. 173 sind einige neuere Ergebnisse von Messungen des differentiellen Streuquerschnitts $\sigma(\Theta)$ bei Energien E_0 zwischen 1,855 und 4,203 MeV dargestellt. Die Kurven, die die Meßpunkte verbinden, sind nach (89.19) berechnet. Bei fester Energie in diesem Bereich reicht der eine Parameter K_0 der reinen S-Streuung[1]) aus, um die Versuchsdaten richtig wiederzugeben, eine Tatsache, die die kurze Reichweite der Kernkräfte erneut bestätigt.

Jackson und Blatt [J 50-1], Breit und Gluckstern [B 53-2] und Hall und Powell [H 53-1] haben die Experimente mit Hilfe der Theorie der effektiven Reichweite analysiert. Ihre Ergebnisse finden sich in Tabelle 54. Die erste Zeile bezieht sich auf die formunabhängige Näherung (Gl. (89.11)), während in den anderen Zeilen auch höhere Potenzen in k^2 gemäß (89.31) und (89.32) berücksichtigt worden sind, so daß $K'(0)$ und r_{0p} von der Potentialform abhängen. Ähnlich wie bei der Neutron-Proton-Streuung läßt sich aus dem Vorzeichen von $K'(0)$ auf die Existenz von gebundenen Zuständen des Proton-Proton-Systems schließen (vgl. [L 44-1]). Aus $K'(0) > 0$ ergibt sich so:

Der Kern He² *(Diproton) hat keinen gebundenen* ¹*S-Zustand.*

[1]) Nach [H 53-1] ist z. B. $K_0 = 44{,}212°$ bei 1,855 MeV und $K_0 = 53{,}808°$ bei 4,203 MeV.

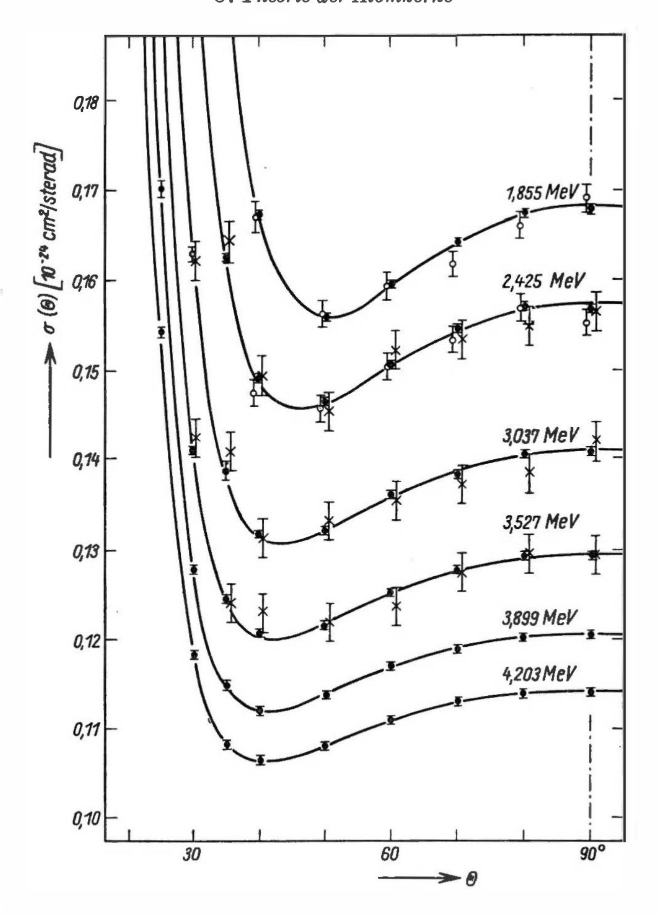


Abb. 173. Differentieller Streuquerschnitt $\sigma(\Theta)$ (in 10^{-24} cm² pro Raumwinkeleinheit) im Schwerpunktssystem für p-p-Streuung bei niedrigen Energien. Die Kurven sind für reine S-Streuung (Gl. (89.19)) berechnet. (Nach [W 53-1])

Tabelle 54. Proton-Proton-Streuparameter $\frac{1}{K'(0)}$ *und* r_{0p} *(in* 10^{-13} cm*)*

Form	[J 50-1] $\frac{1}{K'(0)}$	[J 50-1] r_{0p}	[B 53-2] $\frac{1}{K'(0)}$	[B 53-2] r_{0p}	[H 53-1] $\frac{1}{K'(0)}$	[H 53-1] r_{0p}
—	7,67 ± 0,05	2,65 ± 0,07	7,67	2,64	7,69	2,65
Kasten			7,66	2,59	7,65	2,57
Exponential			7,67	2,66	7,70	2,67
Yukawa.			7,70	2,74	7,75	2,79

Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt wurde, läßt sich mit Hilfe von r_{0s} und r_{0p} kein präziser Vergleich zwischen Neutron-Proton- und Proton-Proton-Kräften anstellen.[1]) Immerhin kann man so viel aussagen, daß die Werte von r_{0p} bei Berücksichtigung ihrer (in Tab. 54 meist nicht angegebenen) Unsicherheiten und der Meßwert (88.31) für r_{0s} mit der Annahme vereinbar sind, daß die Kernkräfte zwischen Neutron und Proton dieselben wie die zwischen zwei Protonen sind.

Ein genauerer Vergleich der beiden Kernkrafttypen kann mit Hilfe von a_p, der etwas formabhängigen *p-p*-Streulänge bei Abwesenheit von Coulomb-Kräften, und a_s, der Singulett-*n-p*-Streulänge, erfolgen.

Tabelle 55 gibt dafür Zahlenwerte nach SQUIRES [S 53-2].

Tabelle 55.

Neutron-Proton- und Proton-Proton-Singulettstreulängen (in 10^{-12} cm*) (nach* [S 53-2]*)*

Form	$-a_s$	$-a_p$
Kasten	2,369 ± 0,006	1,643 ± 0,035
Yukawa		1,832 ± 0,035

Man sieht (vgl. Abb. 168), daß bei gleicher Form und Reichweite das *n-p*- Potential etwas tiefer als das *p-p*-Potential im ^1S-Zustand ist. Die geringe Differenz kann nach SCHWINGER [S 50-1] durch *Nicht-Kernkräfte*, nämlich durch die wegen der unterschiedlichen Momente von Neutron und Proton verschiedenen magnetischen Wechselwirkungen, erklärt werden. So sind an den Neutron-Proton-Potentialparametern der Tabelle 52 und an den Proton-Proton-Potentialparametern der Tabelle 56, die nach BREIT und GLUCKSTERN [B 53-2] die *p-p*-Streuung bis 3,5 MeV richtig beschreiben, Korrekturen anzubringen, die zur Übereinstimmung der spezifischen Kernkräfte führen können.

Tabelle 56.

Parameter für p-p-Potentiale (nach [B 53-2]*)*

Form	b_p [10^{-13} cm]	V_{0p} [MeV]
Kasten *)	2,59	12,6
Kasten**)	2,59	13,5
Exponential	0,71	109,1
Yukawa	1,16	47,4

*) ohne Coulomb-Potential im Innern

**) mit Coulomb-Potential im Innern

Die Streuexperimente bei niedrigen Energien widersprechen nicht der Gleichheit der spezifischen Neutron-Proton- und Proton-Proton-Kernkräfte im ^1S*-Zustand.*

Diese Beobachtung bildet die Basis der viel weitergehenden Annahme:

Die Kernkräfte sind in allen Zuständen unabhängig von den Nukleonenladungen.

[1]) Insbesondere sei darauf hingewiesen, daß mit r_{0s} und r_{0p} nicht etwa nur die Reichweiten b der Potentiale verglichen werden; denn die effektiven Reichweiten hängen auch etwas von der Tiefe V_{0t} ab (vgl. § 88a).

Die hiermit ausgesprochene *Ladungsunabhängigkeit* hat sich als nützliche Arbeitshypothese auf vielen Gebieten der Kernphysik bewährt, obwohl sichere Beweise fehlen (vgl. hierzu auch § 91).

Obwohl die experimentelle Genauigkeit nicht ausreicht, um aus Streudaten bei kleinen Energien eine klare Entscheidung zugunsten einer bestimmten Potentialform zu fällen, scheinen Andeutungen zu bestehen, daß relativ *langschwänzige* Potentiale, wie das Yukawa-Potential, kleine Vorteile haben (vgl. [H 54-1], [Y 52-1]). Das wäre vom theoretischen Standpunkt aus deswegen zu begrüßen, weil das Yukawa-Potential das einzige ist, das sich feldtheoretisch begründen läßt (vgl. [W 43-1]).

§ 90. Richtungs- und geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Im Jahre 1939 entdeckten Rabi und Mitarbeiter das Quadrupolmoment des Deuterons. Es hat den Wert (vgl. [K 51-1])

$$Q = (2{,}74 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm}^2. \tag{90.1}$$

Da das Deuteron nach Abtrennen der Schwerpunktsbewegung einem Einteilchensystem äquivalent ist (vgl. (84.1)) und ein solches in einem Zentralkraftfeld einen S-Zustand mit $Q = 0$ als Grundzustand hat, folgt aus $Q \neq 0$, daß die Kernkräfte *nichtzentrale* Anteile enthalten.

Zur Bewertung des Ergebnisses (90.1) vergleichen wir es mit dem Quadrat des Deuteronradius nach (84.5), $R^2 \approx 2 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$, einem Maß für das mittlere Abstandsquadrat der beiden Nukleonen. Die Tatsache, daß Q sehr klein dagegen ist, der Deuteron-Grundzustand also trotz der Nichtzentralkräfte im wesentlichen ein S-Zustand ist, zeigt die Berechtigung der früher verwendeten Zentralkraftnäherung.

a) Tensorkraft

Die gesamte potentielle Energie

$$V(\mathfrak{r}) = V_C(r) + V_T(r) S_{12} \tag{90.2}$$

muß jetzt neben dem Zentralteil $V_C(r)$ einen weiteren Term enthalten, in dem der Operator S_{12} die Richtungs- und die gewöhnliche Funktion $V_T(r)$ die Radialabhängigkeit der Nichtzentralkräfte ausdrücken. Für $V_C(r)$ und $V_T(r)$ ist je eine der üblichen Potentialformen einzusetzen.

Der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen des Quadrupolmoments und dem der Funktion $V_T(r)$ ist noch nicht geklärt (vgl. [H 50-2], [M 54-1]), obwohl aus $Q > 0$ oftmals auf $V_T(r) < 0$ geschlossen wird.

Die Gestalt des Operators S_{12} scheint zunächst in weiten Grenzen beliebig wählbar zu sein. Das ist aber nicht der Fall. Der Hamilton-Operator unseres Problems,

$$H = -\frac{\hbar^2}{M}\Delta + V(\mathfrak{r}), \tag{90.3}$$

muß nämlich gewisse Invarianzbedingungen, die physikalisch als Erhaltungssätze zu interpretieren sind, erfüllen (s. [R 48-1]). Diese schränken zusammen mit der Forderung, daß die Kräfte unabhängig von der Nukleonengeschwindigkeit sein sollen, die Auswahl derart ein, daß für S_{12} nur der Ausdruck

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \mathfrak{r}) (\vec{\sigma}_2 \cdot \mathfrak{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \tag{90.4}$$

in Frage kommt (vgl. [B 59-1], [R 48-1]), in dem $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ die Spinoperatoren (Vektoren) der beiden Nukleonen bedeuten. Der zweite Term ist ein kugelsymmetrischer Zusatz, der den Mittelwert von S_{12} über alle $\mathfrak{r}$-Richtungen zu Null macht. Die aus $V_T(r) S_{12}$ mit (90.4) ableitbare Kraft nennt man *Tensorkraft*.
Um einige wichtige Eigenschaften des Tensorpotentials angeben zu können, denken wir uns, wie üblich, die Operatoren $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ durch die Pauli-Matrizen

$$\sigma_{jx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{jy} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{jz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2)$$

und die Spinfunktionen durch die Spalten

$$\alpha(j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta(j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2)$$

dargestellt. Wir wenden S_{12} zunächst auf die Singulettspinfunktion χ_0 an und finden

$$S_{12}\chi_0 = S_{12} \cdot 2^{-1/2} [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)] = 0. \tag{90.5}$$

In Singulettzuständen sind die Kernkräfte rein zentral.

Lassen wir weiter S_{12} auf eine der drei Triplettspinfunktionen

$$\chi_1^{\,1} = \alpha(1)\alpha(2), \quad \chi_1^{\,0} = 2^{-1/2}[\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)], \quad \chi_1^{\,-1} = \beta(1)\beta(2), \tag{90.6}$$

die der Reihe nach zu den Werten $m_s = 1, 0, -1$ für die z-Komponente und alle zum Betrag $S = 1$ des Spins gehören, einwirken, so bekommen wir

$$S_{12}\chi_1^{\,1} = \left(\frac{16\pi}{5}\right)^{1/2} (y_2^{\,0}\chi_1^{\,1} - 3^{1/2} y_2^{\,1}\chi_1^{\,0} + 6^{1/2} y_2^{\,2}\chi_1^{\,-1}) \tag{90.7}$$

und ähnliche Ergebnisse für $\chi_1^{\,0}$ und $\chi_1^{\,-1}$. Die Kugelfunktionen

$$y_l^{m_l} = \frac{(-1)^{l+m_l}}{2^l \cdot l!} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m_l)!}{(l+m_l)!}\right]^{\frac{1}{2}} (\sin\Theta)^{m_l} \frac{d^{l+m_l} (\sin\Theta)^{2l}}{(d\cos\Theta)^{l+m_l}} e^{i m_l \Phi} \tag{90.8}$$

sind Eigenfunktionen des Quadrats des Bahndrehimpulsoperators $\mathcal{L}$ zum Eigenwert $l(l+1)$ und seiner z-Komponente $\mathcal{L}_z$ zum Eigenwert m_l und so normiert, daß

$$\int (y_l^{m_l})^* \, y_{l'}^{m_l'} \, d\Omega = \delta_{ll'} \, \delta_{m_l m_l'} \tag{90.9}$$

bei Integration über den vollen Raumwinkel gilt.

Aus (90.7) läßt sich schließen:

1. S_{12} mischt Zustände mit verschiedenem m_s.

2. Bei Anwendung von S_{12} bleibt S (= 1) erhalten.[1]

Und weil χ_1^1 bis auf einen konstanten Faktor der Winkel-Spinteil einer ^3S-Funktion ($l = m_l = 0$) ist,

3. mischt S_{12} Zustände mit verschiedenem m_l derart, daß $M = m_l + m_s$ erhalten bleibt.

4. S_{12} mischt S- und D-Zustände, also Zustände mit verschiedenem l, aber gleicher Parität $(-1)^l$.

Eigenzustände eines Hamilton-Operators, der das Tensorpotential enthält, lassen sich nicht mehr wie bei Zentralkräften durch feste Werte von l, m_l und m_s kennzeichnen, sondern nur noch durch die Quantenzahlen J (Betrag des Gesamtdrehimpulses), $M = m_l + m_s$ (z-Komponente des Gesamtdrehimpulses), S (Betrag des Spins)[1]) *und die Parität.*

Die allgemeine Begründung dieser Aussagen liegt darin, daß der Hamilton-Operator (90.3) mit (90.2) und (90.4) ein Skalar (Erhaltung von J und M), vertauschbar mit $\mathfrak{S}^2 = [\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)]^2$ (Erhaltung von S)[1]) und invariant gegen die Spiegelung $\mathfrak{r} \to -\mathfrak{r}$ (Erhaltung der Parität) ist, aber nicht mehr mit $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}_z$ und $\mathfrak{S}_z$ kommutiert.

Die Anzahl der aus geeigneten Versuchsergebnissen festzulegenden Triplettpotentialparameter wird durch das Auftreten der Tensorkraft verdoppelt: Nach Wahl der analytischen Formen von $V_C(r)$ und $V_T(r)$, die a priori durchaus verschieden voneinander sein können, aber fast stets als gleich angenommen werden, sind Reichweite und Tiefe beider Potentiale zu bestimmen. Im Prinzip genügen dazu vier experimentelle Daten, für die Neutron-Proton-Wechselwirkung z.B. die Bindungsenergie, das Quadrupol- und das magnetische Moment des Deuterons sowie der n-p-Streuquerschnitt bei verschwindender Energie. Praktisch reicht aber die Versuchsgenauigkeit bisher noch nicht für eine eindeutige Festlegung der Parameter aus.

b) Bindungsenergie des Deuterons

Für den Grundzustand des Deuterons wird $J = S = 1$ gemessen, womit $l = 0$, 1 oder 2 verträglich ist. Da die Parität fest ist und gerade Zustände im allgemeinen tiefer als ungerade liegen, *wird der Grundzustand des Deuterons aus einem $^3S_1$- und einem $^3D_1$-Zustand gemischt sein.*

Als Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\left[\frac{\hbar^2}{M}\Delta + B - V(\mathfrak{r})\right]\psi(\mathfrak{r}) = 0\,, \qquad (90.10)$$

[1]) Das gilt für *zwei* Teilchen; bei drei und mehr Nukleonen mischt S_{12} Zustände mit verschiedenem S.

in der $V(\mathfrak{r})$ durch (90.2) gegeben ist, setzen wir demgemäß

$$\psi(\mathfrak{r}) = \psi_S(\mathfrak{r}) + \psi_D(\mathfrak{r}) = \frac{u(r)}{r} F^M_{101} + \frac{w(r)}{r} F^M_{121}, \tag{90.11}$$

wobei die Winkel-Spinfunktionen F^M_{JlS} Eigenfunktionen zu den indizierten Eigenwerten der entsprechenden Operatoren sind. Sie sind zudem orthonormiert, d.h., sie erfüllen

$$\sum_{\text{Spin}} \int (F^M_{JlS})^* F^M_{Jl'S}\, d\Omega = \delta_{ll'}\,. \tag{90.12}$$

Die Integration geht dabei über den vollen Raumwinkel, und $\sum\limits_{\text{Spin}}$ bedeutet eine Summierung über die Spinindizes, die formal nach den Regeln

$$\alpha(j)\,\alpha(j) = \beta(j)\,\beta(j) = 1, \quad \alpha(j)\,\beta(j) = \beta(j)\,\alpha(j) = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{90.13}$$

durchzuführen ist.
In unserem Falle haben wir z.B. für $M = 1$ (vgl. [C 53-1])

$$F^1_{101} = y^0_0 \chi^1_1, \quad F^1_{121} = 10^{-1/2}(y^0_2 \chi^1_1 - 3^{1/2} y^1_2 \chi^0_1 + 6^{1/2} y^2_2 \chi^{-1}_1) \tag{90.14}$$

mit den Kugelfunktionen (90.8) und den Spinfunktionen (90.6).
Wegen (90.12) lautet die Normierungsbedingung zu (90.11)

$$1 = \int |\psi(\mathfrak{r})|^2\, d\tau = p_S + p_D = \int_0^\infty u^2(r)\, dr + \int_0^\infty w^2(r)\, dr, \tag{90.15}$$

in der p_l die Wahrscheinlichkeit, das Deuteron in einem l-Zustand anzutreffen, bedeutet.
Geht man nun mit (90.8) (etwa für $M = 1$ nach (90.14)) in (90.10) ein, berechnet die Wirkung des Operators S_{12} auf die Winkel-Spinfunktionen,

$$S_{12} F^M_{101} = 8^{1/2} F^M_{121}, \quad S_{12} F^M_{121} = 8^{1/2} F^M_{101} - 2 F^M_{121}, \tag{90.16}$$

und setzt dann die Koeffizienten von F^M_{101} und F^M_{121} für sich gleich Null, so entsteht

$$\left[\frac{\hbar^2}{M}\frac{d^2}{dr^2} + B - V_C(r)\right] u = 8^{1/2}\, V_T(r)\, w,$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{M}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\right) + B - V_C(r) + 2\,V_T(r)\right] w = 8^{1/2}\, V_T(r)\, u, \tag{90.17}$$

ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die beiden Radialfunktionen $u(r)$ und $w(r)$.
Die Lösung dieses Systems zum Eigenwert $B = -2{,}226$ MeV, die für keine der üblichen Potentialformen in geschlossener Weise gelungen ist, liefert eine erste Beziehung zwischen den gesuchten vier Potentialparametern.

c) Quadrupolmoment des Deuterons

Das Quadrupolmoment des Deuterons ist definiert durch den Erwartungswert des Operators $\frac{1}{4}(3z^2 - r^2)$ im Zustand mit $M = J = 1$ (vgl. Bd. I, § 11), also nach (90.11) mit (90.14), (90.12) und (90.13) durch

$$Q = \sum_{\text{Spin}} \int \frac{1}{4}(3z^2 - r^2) \, |\psi(\mathfrak{r}; M = 1)|^2 d\tau$$
$$= \sum_{\text{Spin}} \int \frac{1}{4} r^2 (3\cos^2\Theta - 1) \left| \frac{u(r)}{r} y_0^0 \chi_1^1 \right.$$
$$\left. + 10^{-1/2} \frac{w(r)}{r} \left[y_2^0 \chi_1^1 - 3^{1/2} y_2^1 \chi_1^0 + 6^{1/2} y_2^2 \chi_1^{-1} \right] \right|^2 r^2 \, dr \, d\Omega$$
$$= 50^{-1/2} \int_0^\infty u(r) \, w(r) \, r^2 \, dr - 20^{-1} \int_0^\infty w^2(r) \, r^2 \, dr \, . \qquad (90.18)$$

Nach willkürlicher Wahl von zwei Parametern, etwa b_C und b_T, lassen sich die beiden anderen, z.B. V_{0C} und V_{0T}, nach (90.17) und (90.18) mit Hilfe der Meßwerte von Bindungsenergie B und Quadrupolmoment Q berechnen. FESHBACH und SCHWINGER [F 51-1] haben dies für die Yukawa-Form von $V_C(r)$ und $V_T(r)$ durchgeführt,[1]) wobei sie $Q = 2{,}766 \cdot 10^{-27}$ cm² und $B = -2{,}23$ MeV annehmen. Einen Teil ihrer Ergebnisse einschließlich der zugehörigen Werte für p_D, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im D-Zustand (vgl. (90.15) und d)), und für die effektive n-p-Triplettreichweite r_{0t} (vgl. e)) gibt Tabelle 57 an.

Tabelle 57. Parameter für n-p-Triplett-Yukawa-Potentiale, die $B = -2{,}23$ MeV *und* $Q = 2{,}766 \cdot 10^{-27}$ cm² *liefern, und zugehörige Werte für die Wahrscheinlichkeit* p_D *des D-Anteils und für die effektive Reichweite* r_{0t} *nach* [F 51-1] (*Längen in* 10^{-13} cm, *Tiefen in* MeV)

b_C	b_T	V_{0C}	V_{0T}	p_D	r_{0t}
1,35	2,12	44,2	12,1	0,024	1,93
	1,53	32,8	32,0	0,036	1,79
	1,38	25,5	45,6	0,042	1,71
1,19	2,12	54,6	12,6	0,026	1,79
	1,53	39,5	33,0	0,038	1,71
	1,38	30,8	46,4	0,043	1,66
1,10	2,12	61,8	12,8	0,027	1,77
	1,53	45,1	33,1	0,039	1,68
	1,38	34,6	46,8	0,045	1,63
0,97	2,12	77,7	13,2	0,028	1,68
	1,53	56,3	33,7	0,039	1,63
	1,38	42,4	47,7	0,046	1,57

[1]) In dieser Arbeit sind ähnliche Rechnungen mit anderen Potentialen zitiert, in denen aber meist $b_C = b_T$ angenommen wird.

d) Magnetisches Moment des Deuterons

Für das magnetische Moment des Deuterons in Kernmagnetonen $\left(\mu_K = \frac{e\hbar}{2\,M_p}\right)$ gilt

$$\mu_d = \sum_{\text{Spin}} \int \psi^*(\mathfrak{r};\ M = 1)\,[\mu_n \vec{\sigma}_{nz} + \mu_p \vec{\sigma}_{pz} + \mu_K \mathfrak{L}_{pz}]\,\psi(\mathfrak{r};\ M = 1)\,d\tau\,. \tag{90.19}$$

Wenn man die Beziehung $\mathfrak{L}_p = \frac{\mathfrak{L}}{2}$ zwischen Protonen- und Gesamtbahndrehimpulsoperator (in Einheiten $\hbar$) im Schwerpunktssystem verwendet, erhält man mit (90.11), (90.14), (90.15), (90.12) und (90.13) aus (90.19)

$$\begin{aligned}
\mu_d = \sum_{\text{Spin}} \int & \left\{\frac{u}{r}\, y_0^{0*}\, \chi_1^1 + 10^{-1/2}\, \frac{w}{r}\, [y_2^{0*}\, \chi_1^1 - 3^{1/2} y_2^{1*}\, \chi_1^0 + 6^{1/2} y_2^{2*}\, \chi_1^{-1}]\right\} \Big[\mu_n \vec{\sigma}_{nz} \\
& \qquad + \mu_p \vec{\sigma}_{pz} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}_z\Big] \cdot \\
& \left\{\frac{u}{r}\, y_0^0 \chi_1^1 + 10^{-1/2}\, \frac{w}{r}\, [y_2^0 \chi_1^1 - 3^{1/2} y_2^1 \chi_1^0 + 6^{1/2} y_2^2 \psi_1^{-1}]\right\} r^2\, dr\, d\Omega \\
= \sum_{\text{Spin}} \int & \left\{\frac{u}{r}\, y_0^{0*}\, \chi_1^1 + 10^{-1/2}\, \frac{w}{r}\, [y_2^{0*}\, \chi_1^1 - 3^{1/2} y_2^{1*}\, \chi_1^0 + 6^{1/2} y_2^{2*}\, \chi_1^{-1}]\right\} \cdot \\
& \Big\{(\mu_n + \mu_p) \Big[\Big(\frac{u}{r}\, y_0^0 + 10^{-1/2}\, \frac{w}{r}\, y_2^0\Big)\chi_1^1 - \Big(\frac{6}{10}\Big)^{1/2} \frac{w}{r}\, y_2^2 \chi_1^{-1}\Big] \\
& - (\mu_n - \mu_p) \Big(\frac{3}{10}\Big)^{1/2} \frac{w}{r}\, y_2^1 \chi_0^0 \\
& + \frac{1}{2}\, 10^{-1/2}\, \frac{w}{r}\, [- 3^{1/2} y_2^1 \chi_1^0 + 2 \cdot 6^{1/2}\, y_2^2 \chi_1^{-1}]\Big\} r^2\, dr\, d\Omega \\
= \int & \Big[(\mu_n + \mu_p) \Big(u^2 - \frac{1}{2}\, w^2\Big) + \frac{3}{4}\, w^2\Big]\, dr \\
= \mu_n & + \mu_p - \frac{3}{2} \Big(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2}\Big)\, p_D\,.
\end{aligned} \tag{90.20}$$

Die Abweichung des magnetischen Moments des Deuterons von der Summe der magnetischen Momente des Neutrons und des Protons ist ein Maß für den D-Anteil im Grundzustand.

Mit den experimentellen Werten für μ_n, μ_p und μ_d ergibt sich $p_D \approx 0{,}04$. Die Beziehung (90.20) ist allerdings unvollständig, indem z. B. Beiträge aus *relativistischen* Effekten (vgl. [S 47-2], [B 47-1]) fehlen. Bei deren Berücksichtigung schätzt man die Wahrscheinlichkeit, das Deuteron in einem *D*-Zustand vorzufinden, auf etwa 2 bis 6%.

Alle in Tabelle 57 verzeichneten Parameter liefern p_D-Werte in diesen Grenzen.

e) Streuung

Da die p-p-Streuung bei niedrigen Energien im wesentlichen in ^1S-Zuständen geschieht (vgl. § 89), haben die Tensorkräfte keinen Einfluß darauf. Auch zur n-p-Streuung unter 10 MeV tragen sie nur wenig bei, da die Abweichung vom Zentralkraftfall nur in der geringen Beimischung eines D-Zustandes ($l = 2(!)$) besteht. Es wird dadurch eine Anisotropie des differentiellen Streuquerschnitts erzeugt (vgl. [B 59-1], [C 56-1]), die aber viel zu klein ist, um mit den gegenwärtigen experimentellen Mitteln nachgewiesen werden zu können.

Ebenso wie bei Zentralkräften läßt sich eine Theorie der effektiven Reichweite aufbauen (vgl. [B 54-1]), in der eine zu (88.13) ganz analoge Formel gilt, wobei die effektive Reichweite durch

$$r_{0t} = 2\int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 - u_0^2 - w_0^2\right] dr$$

gegeben ist. a bedeutet die Streulänge; $u_0(r)$ und $w_0(r)$ sind Lösungen von (90.17), die einer Streuung bei verschwindender Energie entsprechen und so gewählt sind, daß bei dem Grenzübergang $V_T \to 0$ auch $w_0 \to 0$ und u_0 gegen die entsprechende Zentralkraftfunktion geht. (Näheres in [B 54-1].)

Der Meßwert (88.30) für r_{0t} schränkt die Zahl der von Tabelle 57 brauchbaren Parameter deutlich ein. *Insbesondere sind die danach erlaubten Reichweiten der Tensorkraft größer als diejenigen der Zentralkraft.*

f) Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

In den bisherigen Überlegungen haben wir uns auf *statische* Potentiale beschränkt. Verschiedene Kernmodelle (s. Kap. IX) und Mesonentheorien führen aber zu *geschwindigkeitsabhängigen* Zusatzkräften vom Typ der *Spin-Bahn-Kopplung*, wie sie auch in der Elektronenhülle auftritt und die sich durch ein Potential $V_{LS}(r)$ $(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{S})$ ($\mathfrak{L}$ = Bahndrehimpuls-, $\mathfrak{S}$ = Spinoperator) beschreiben läßt.

Obwohl diese Spin-Bahn-Kräfte in den meisten Untersuchungen über leichte Kerne vernachlässigt werden, zeigen einige neuere Arbeiten [H 50-3], [A 55-1], [A 56-1]), daß ihr Einfluß durchaus beachtenswert sein kann. Die Genauigkeit der Ergebnisse geht allerdings noch nicht über Abschätzungen hinaus.

§ 91. Streuung bei hohen Energien

Wie wir in den vorigen Paragraphen gesehen haben, gestatten die Zweinukleonensysteme bei *niedrigen* Energien keineswegs eine vollständige Beschreibung der Kernkräfte. Die notwendigen Ergänzungen und Verfeinerungen sind von Streuversuchen bei *hohen* Energien zu erhoffen, insbesondere deswegen, weil die der

Erhöhung der Energie entsprechende Verkleinerung der de Broglie-Wellenlänge es den Teilchen ermöglicht, weiter in die Region der Kernkräfte einzudringen, so daß die Ergebnisse deutlich von der Form des Potentials abhängen sollten. Obwohl in den letzten Jahren sehr viele Streuversuche bei hohen Energien (bis zu 3000 MeV) angestellt worden sind,[1]) ist ihre theoretische Deutung noch recht unsicher. Das liegt vor allem daran, daß die Bestimmung höherer Phasenverschiebungen, die bei hohen Energien merklich zum Streuquerschnitt beitragen, bei Anwesenheit von Tensorkräften äußerst langwierige Rechnungen erfordert und daß nicht genau bekannte relativistische Korrekturen zu beachten sind. Nur eine Tatsache hat sich sehr deutlich gezeigt, nämlich die, daß die Extrapolation der Schlußfolgerungen, die man aus den Versuchen bei niedrigen Energien gezogen hatte, auf die Verhältnisse bei hohen Energien nicht ohne weiteres erlaubt ist. Wir müssen uns hier damit begnügen, einige wesentliche Punkte anzudeuten.

a) Neutron-Proton-Streuung; Austauschkräfte

Aus den Abbn. 174 und 175, die neuere Versuchsergebnisse zeigen, geht hervor, daß die Winkelverteilung schneller Neutronen nach der Streuung annähernd

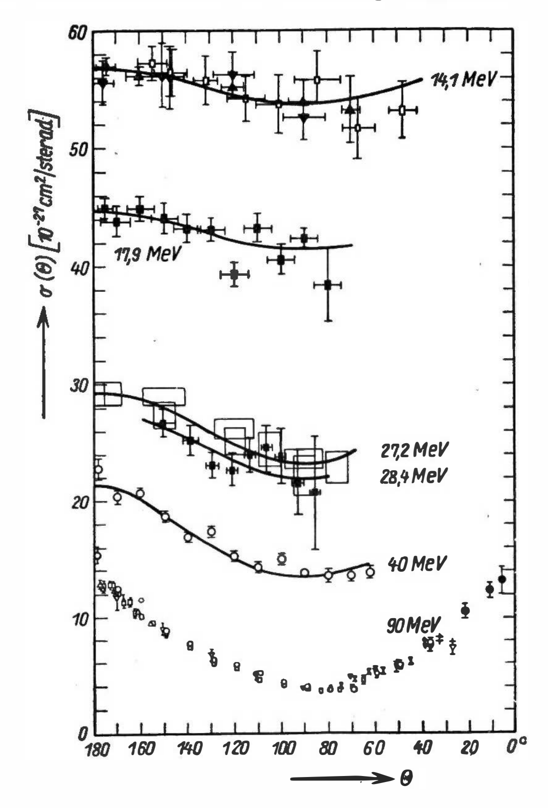


Abb. 174.
Differentieller Streuquerschnitt $\sigma(\Theta)$ (in 10^{-27} cm^2 pro Raumwinkeleinheit) im Schwerpunktssystem für n-p-Streuung bei mittleren Energien. (Nach [G 55-1])

[1]) Eine Zusammenstellung von Literatur findet man in [C 56-1] und von Versuchsergebnissen in [O 56-1], [K 56-1], [G 55-1], [P 55-1].

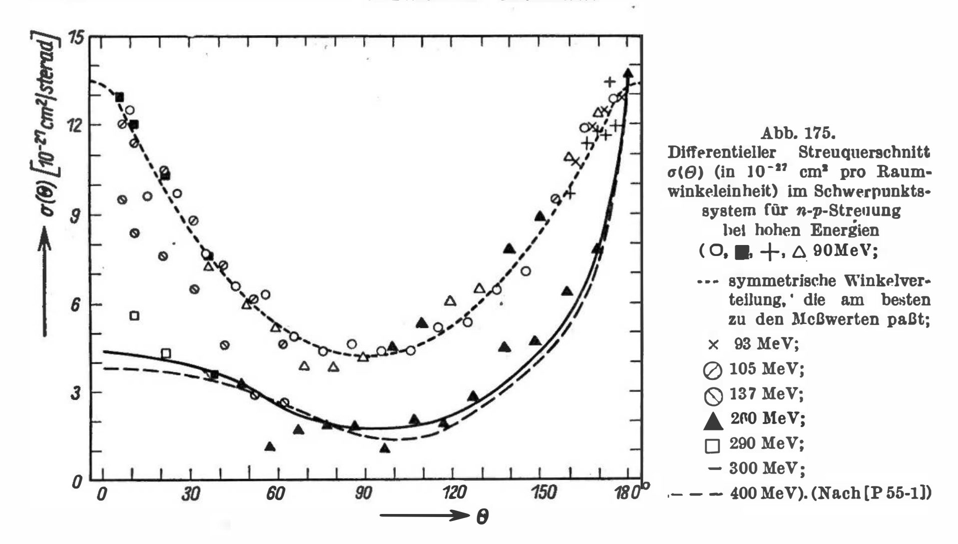


Abb. 175. Differentieller Streuquerschnitt $\sigma(\Theta)$ (in 10^{-27} cm² pro Raumwinkeleinheit) im Schwerpunktssystem für n-p-Streuung bei hohen Energien (○, ■, +, △ 90 MeV; --- symmetrische Winkelverteilung, die am besten zu den Meßwerten paßt; × 93 MeV; ⊘ 105 MeV; ⊗ 137 MeV; ▲ 260 MeV; □ 290 MeV; — 300 MeV; – – – 400 MeV). (Nach [P 55-1])

symmetrisch um $\Theta = 90°$ ist. Nun schließen im Laborsystem die Impulsvektoren zweier Teilchen mit gleicher Masse nach einem elastischen Stoß einen rechten Winkel ein, und die zunächst ruhenden Protonen können höchstens eine kinetische Energie von der Ordnung der mittleren n-p-Wechselwirkungsenergie (bei einem Kastenpotential z.B. V_0) aufnehmen. Bei genügend schnellen Neutronen sollte also die Vorwärtsstreuung ($\Theta_0 < 45°$, $\Theta < 90°$) bevorzugt werden (Abb. 176a). Da dies dem experimentellen Befund widerspricht, muß man annehmen, daß zum Teil auch *Austauschkräfte* auftreten, die bei der Streuung die Ortskoordinaten der beiden Teilchen vertauschen und somit Rückwärtsstreuung begünstigen

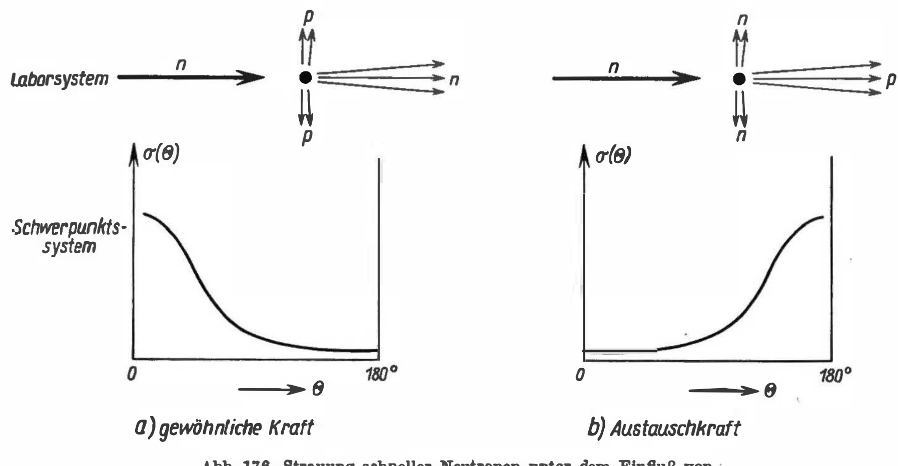


Abb. 176. Streuung schneller Neutronen unter dem Einfluß von a) gewöhnlichen Kräften b) Austauschkräften

(Abb. 176b). Sie lassen sich darstellen durch den sog. *Majorana-Operator*[1]) mit der Wirkung

$$P^M \psi(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = \psi(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_1), \quad P^M \psi(\mathfrak{r}) = \psi(-\mathfrak{r}) \tag{91.1}$$

im Potential

$$\tfrac{1}{2}(1 + g P^M) V(\mathfrak{r}). \tag{91.2}$$

Der zunächst unbekannte Parameter g, der den Anteil der Majorana-Kräfte festlegt, wird wegen der annähernden Symmetrie des Streuquerschnitts um $\Theta = 90°$ etwa 1 sein.

Wegen $\psi(-\mathfrak{r}) = (-1)^l \psi(\mathfrak{r})$ im Zweiteilchensystem wirken die Austauschkräfte bei anziehendem $V(\mathfrak{r})$ und geradem l abstoßend, und wir können allgemein feststellen:

Die Kernkräfte hängen nicht nur vom Spin, sondern auch vom Bahndrehimpuls ab.

Es ist vom theoretischen Standpunkt aus befriedigend, daß Austauschkräfte auch noch aus anderen Gründen angenommen werden müssen. Während *gewöhnliche* Kräfte Bindungsenergien schwerer Kerne mit A Nukleonen $\propto A^2$ im Gegensatz zum experimentellen Befund ($\propto A$) ergeben, *können Majorana-Kräfte die Sättigung erklären.* Aber dazu muß $g > 4$ sein, was sich durchaus nicht mit den Streuexperimenten, die $g \approx 1$ fordern, vereinbaren läßt. Diese Diskrepanz zeigt, wie bescheiden unsere Kenntnisse von den Kernkräften eigentlich noch sind.

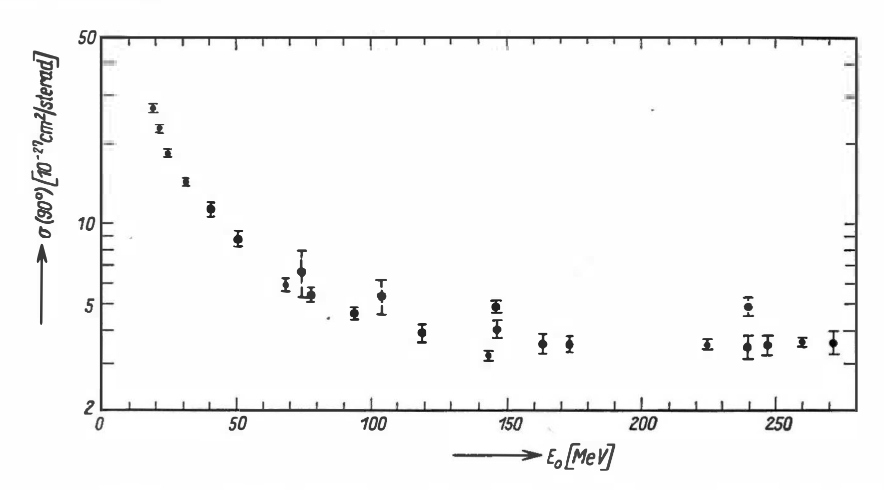


Abb. 177. Differentieller Streuquerschnitt bei $\Theta = 90°$ (in 10^{-27} cm² pro Raumwinkeleinheit) im Schwerpunktssystem für p-p-Streuung in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Protonen im Laborsystem. (Nach [K 56-1])

[1]) Nach dem italienischen Physiker, der zuerst diese Art von Austauschkräften vorgeschlagen hat. Es gibt noch andere Typen und zugehörige Operatoren, z. B. solche, die die Spins oder die Ladungen der beiden Nukleonen vertauschen. Näheres darüber in § 97.

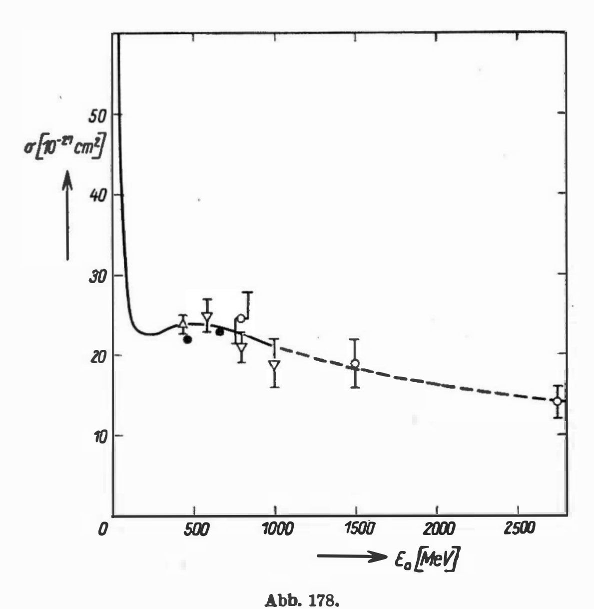


Abb. 178.
Energieabhängigkeit des totalen Streuquerschnitts σ (in 10^{-27} cm²) für p-p-Streuung.
(Nach [C 56-2])

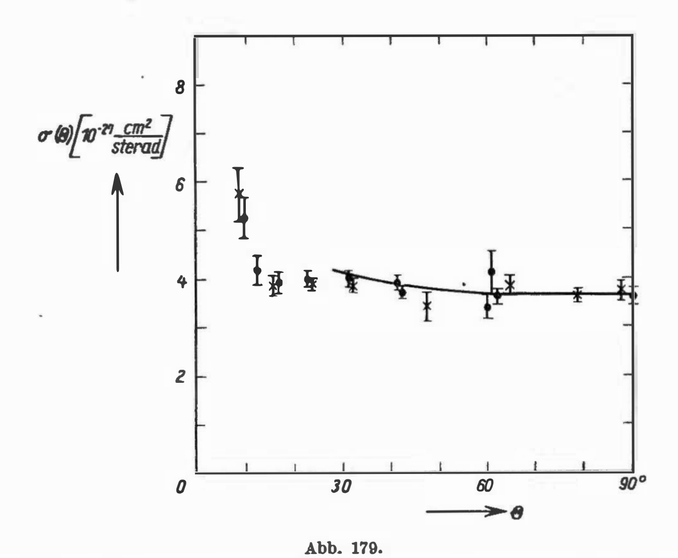


Abb. 179.
Differentieller Streuquerschnitt $\sigma(\Theta)$ (in 10^{-27} cm² pro Raumwinkeleinheit) im Schwerpunktssystem für p-p-Streuung bei hohen Energien (● 164 bis 174 MeV, × 250 bis 260 MeV).
(Nach [O 56-1])

b) Proton-Proton-Streuung; Polarisation

Die p-p-Streuexperimente bei höheren Energien, von denen die Abbn. 177, 178 und 179 einige Ergebnisse zeigen, lieferten überraschende Resultate: Der totale elastische Streuquerschnitt, der bis 100 MeV erwartungsgemäß ziemlich rasch mit wachsender Energie abnimmt (vgl. (89.19)), bleibt zwischen 100 und 1000 MeV fast konstant und sinkt erst dann allmählich weiter (Abbn. 177 und 178). Die Winkelverteilung im Schwerpunktssystem, die wegen des zunehmenden Einflusses von Phasenverschiebungen höherer Ordnungen bei hohen Energien auch bei mittleren und großen Streuwinkeln eine deutliche Anisotropie haben sollte, ist zwischen 100 und 350 MeV bei nicht zu kleinen Winkeln praktisch isotrop (Abb. 179) und zeigt erst über 450 MeV eine wachsende Bevorzugung der Vorwärtsstreuung.

Von den wenigen Deutungsversuchen (zur Übersicht vgl. [B 53-2] und [G 56-1]), in denen zum Teil Spin-Bahn-Kräfte, zum Teil hochsinguläre Potentiale ($\propto r^{-2}$, r^{-3} für $r \to 0$) herangezogen werden, ist der von JASTROW [J 51-1] vielleicht der erfolgreichste. Hier wird das Potential

$$\text{Singulett: } V = \begin{cases} \infty & r < r_0, \\ V_{0s}\, e^{\frac{-(r-r_0)}{b_s}} & r > r_0; \end{cases}$$

$$\text{Triplett: } V = \left\{a + (1-a)\,P^M + [b + (1-b)\,P^M]\,\gamma S_{12}\right\} V_{0t}\, e^{\frac{-r}{b_t}},$$

das im Singulettzustand wegen des abstoßenden Kerns („hard core") *nichtmonoton* ist, gewählt. Das Ziel ist nun, die acht Parameter dieses Potentials so einzurichten, daß neben den p-p- auch die n-p-Streudaten bei allen Energien richtig wiedergegeben werden, daß also die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte gewahrt bleibt. Der günstigste Radius des Potentialkerns wird dabei zu $r_0 = 0{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm gefunden. Die Zahl der bisher ausgeführten Rechnungen genügt aber nicht, um entscheiden zu können, ob der von JASTROW vorgeschlagene Potentialtyp brauchbar ist oder nicht. Insbesondere ist es noch sehr zweifelhaft, ob die Kernkräfte auch bei hohen Energien der kollidierenden Nukleonen unabhängig von deren Ladung sind. Mit einiger Sicherheit läßt sich dagegen sagen, daß die Wechselwirkung zwischen Nukleonen in Abständen $< 1 \cdot 10^{-13}$ cm sehr stark ist.

Ein weiteres Mittel zur Untersuchung der Eigenschaften der Kernkräfte, das erst seit neuester Zeit verwendet wird, sind *Doppelstreuversuche*. Ein vorher unpolarisierter Nukleonenstrahl zeigt nämlich nach der Streuung unter Umständen eine merkliche Polarisation: Tensor- und Spin-Bahn-Kräfte bewirken, daß eine Spinrichtung bevorzugt wird, was in einem zweiten Streuversuch nachgewiesen werden kann. Obwohl schon zahlreiche Experimente durchgeführt worden sind und eine Theorie in allgemeiner Form vorliegt,[1]) bedarf es auch hier noch vieler Arbeit, ehe sich definitive Schlüsse über Einzelheiten der Kernkräfte ziehen lassen.

---

[1]) Literaturangaben über Theorie und Experimente in [C 56-1].

§ 92. Drei- und Viernukleonensysteme

Im Vergleich zur Coulomb-Kraft, die die Physik der Atomhülle bestimmt, sind die Kernkräfte sehr kompliziert. Sie hängen vom Eigen- und Bahndrehimpuls der Nukleonen, von der Richtung zwischen ihnen und höchstwahrscheinlich auch von ihrer Geschwindigkeit ab. Doch damit nicht genug, man muß auch noch die Möglichkeit ins Auge fassen, daß *Mehrkörperkräfte* auftreten können, d. h. Kräfte, die durch die Koordinaten von mehr als zwei Teilchen bestimmt werden.
Bei der Klärung dieser Frage spielen offenbar die Drei- und Viernukleonensysteme eine fundamentale Rolle. Das Problem läßt sich auch so formulieren: „Gibt es eine phänomenologische Zweikörperwechselwirkung, die bei geeigneter Parameterwahl die Bindungsenergien der Kerne H^2, H^3, He^3 und He^4, das Quadrupolmoment des Deuterons und die Streudaten bei niedrigen Energien richtig wiedergibt?"
Da zur Lösung umfangreiche Rechnungen nötig sind, müssen wir uns wieder auf Andeutungen beschränken.

a) Berechnung der Bindungsenergien

Wir zeigen den Gang der Rechnung am Triton, das wegen des Fehlens der Coulomb-Kräfte noch das einfachste System darstellt.
In der Schrödinger-Gleichung, in der das Potential aus den drei Summanden $V(1,2)$, $V(2,3)$ und $V(3,1)$ besteht, wird nach Einführen geeigneter Relativkoordinaten die Schwerpunktsbewegung abgetrennt. Der Winkel-Spinanteil der Wellenfunktion für den Grundzustand ($J = \frac{1}{2}$, gerade Parität), das Analogon zu (90.14), besteht aus wenigstens acht Termen, nämlich zwei ^2S-, zwei ^2P-, drei ^4D-Zuständen und einem ^4P-Zustand, mit jeweils verschiedenen Radialteilen $u_1(r)$ bis $u_8(r)$ (Näheres hierzu in [S 53-4]), für die nach Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung acht simultane Differentialgleichungen 2. Ordnung entstehen. Der Versuch einer exakten Lösung dieses Systems ist ein ziemlich hoffnungsloses Unterfangen, so daß man sich mit dem Variationsverfahren weiterhilft: Für die Radialfunktionen werden plausible Ansätze (meist Exponentialfunktionen) mit variablen Parametern gemacht, die so eingerichtet werden, daß der Erwartungswert des Hamilton-Operators, d. h. die Gesamtenergie, zu einem Minimum wird.
Aus der Analyse von Zweinukleonenversuchen lassen sich über die *n-p-* und die *p-p-*Kräfte eine ganze Reihe von Aussagen gewinnen, über die *n-n-Kräfte* aber nur eine: Sie sind zu schwach, um ein gebundenes Dineutron zu ermöglichen.[1]) Hier führt nun ein Vergleich der Bindungsenergien von H^3 und He^3 weiter. Die beiden Kerne unterscheiden sich dadurch, daß ein Neutronenpaar in H^3 durch

[1]) *n-n*-Streuversuche sind bisher praktisch nicht möglich, weil kein Streuer mit genügender Neutronendichte existiert.

ein Protonenpaar in He^3 bei gleicher Zahl von n-p-Paaren ersetzt ist. Wenn also der (mit dem H^3-Kernpotential) berechnete Erwartungswert der Coulomb-Energie der beiden Protonen mit der beobachteten Differenz der Bindungsenergien übereinstimmt, kann man auf Gleichheit der n-n- und der p-p-Kernkräfte schließen.

b) Ergebnisse

Die Rechnung mit einer Mischung von Zentral- und Tensorkräften *gleicher Reichweite* ergibt viel zu kleine Bindungsenergien für H^3 und He^4 (vgl. [G 42-1]). In neueren Arbeiten geht man daher von der Voraussetzung *verschiedener Reichweiten* aus, zumal das auch die Zweikörper-Daten (Tabelle 57) verlangen.
Pease und Feshbach [P 52-1] ist es gelungen, ein Potential zu finden, das alle Zweinukleonen-Ergebnisse bei niedrigen Energien und die Bindungsenergie des Tritons, $B(H^3) = -8{,}48$ MeV, richtig wiedergibt. Es hat Yukawa-Radialabhängigkeit mit den Parametern

$$b_s = b_C = 1{,}184 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}, \qquad b_T = 1{,}70 \cdot 10^{-13}\ \text{cm},$$

$$V_{0s} = 46{,}5\ \text{MeV}, \qquad V_{0C} = 47{,}0\ \text{MeV}, \qquad V_{0T} = 23{,}9\ \text{MeV} \qquad (92{,}1)$$

und führt zu dem Wert $p_D \doteq 0{,}031$ für die Wahrscheinlichkeit des D-Anteils im Grundzustand des Deuterons und zu einer effektiven Triplettreichweite $r_{0t} = 1{,}74 \cdot 10^{-13}$ cm. Nach Abschätzung von Abraham, Cohen und Roberts [A 55-1], die zu ähnlichen Ergebnissen wie Pease und Feshbach kommen, wird das Potential (92.1) auch ungefähr die richtige Bindungsenergie für He^4, $B(He^4) = -28{,}23$ MeV, liefern.
Für die Coulomb-Energie der beiden Protonen in He^3 ergibt das Pease-Feshbach-Potential 1,041 MeV, einen Wert also, der deutlich von der zu 0,764 MeV gemessenen Energiedifferenz zwischen H^3 und He^3 abweicht. Es ist aber eventuell möglich, die Gleichheit von n-n- und p-p-Kernkräften durch Einführen eines abstoßenden Kerns im Potential zu retten (vgl. [K 56-2]).
Die Tatsache, daß die Nukleonen im Triton und im Heliumkern viel dichter gepackt sind, ihre kinetische Energie also wesentlich größer ist als im Deuteron und nur sehr schwer zu übersehende relativistische Effekte wichtiger werden, und daß der Einfluß der bisher nur wenig untersuchten Spin-Bahn-Kopplung wahrscheinlich nicht vernachlässigt werden darf (vgl. [A 55-1]), mahnen zu einer vorsichtigen Einschätzung der Ergebnisse:

Der Beitrag von Mehrkörperkräften zur Bindungsenergie der Kerne mit drei und vier Nukleonen ist noch nicht sicher; die bisherigen Resultate widersprechen nicht der Annahme reiner Zweikörperkräfte.

Literatur

[A 55-1] Abraham, G., L. Cohen und A. S. Roberts, Proc. Phys. Soc. A 68, 265 (1955)
[A 56-1] Abraham, G., Nucl. Phys. 1, 415 (1956)
[B 47-1] Breit, G., und I. Bloch, Phys. Rev. 72, 135 (1947)
[B 49-1] Blatt, J. M., und J. D. Jackson, Phys. Rev. 76, 18 (1949)
[B 53-1] Блохинцев, Д И., Основы квантовы механики;
deutsch: Blochinzew, D. I., Grundlagen der Quantenmechanik, 2. Aufl. Berlin 1958
[B 53-2] Breit, G., und R. L. Gluckstern, Ann. Rev. Nucl. Sci. 2, 365 (1953)
[B 54-1] Biedenharn, L. C., und J. M. Blatt, Phys. Rev. 93, 1387 (1954)
[B 59-1] Blatt, J. M., und V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics;
deutsch: Theoretische Kernphysik, Leipzig 1959
[C 53-1] Condon, E. U., und G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra; Cambridge 1953
[C 56-1] Cap, F., Fortschr. d. Phys. 4, 149 (1956); 3, 371 (1955)
[C 56-2] Chen, F. F., C. P. Leavitt und A. M. Shapiro, Phys. Rev. 103, 211 (1956)
[F 51-1] Feshbach, H., und J. Schwinger, Phys. Rev. 84, 194 (1951)
[F 52-1] Flügge, S., und H. Marschall, Rechenmethoden der Quantentheorie, 1. Teil, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952
[G 42-1] Gerjuoy, E., und J. Schwinger, Phys. Rev. 61, 138 (1942)
[G 55-1] Galonsky, A., und J. P. Judish, Phys. Rev. 100, 121 (1955)
[G 56-1] Geissler, D., Ann. d. Phys. 18, 125 (1956)
[H 50-1] Hughes, D. J., G. R. Ringo und M. T. Burgy, Phys. Rev. 77, 291 (1950); 84, 1160 (1951)
[H 50-2] Heisenberg, W., Progr. Theor. Phys. 5, 523 (1950)
[H 50-3] Hughes, J., und K. J. Le Couteur, Proc. Phys. Soc. A 63, 1219 (1950)
[H 53-1] Hall, H. H., und J. L. Powell, Phys. Rev. 90, 912 (1953)
[H 53-2] Hafner, E. M., W. F. Hornyak, C. E. Falk, G. Snow und T. Coor, Phys. Rev. 89, 204 (1953)
[H 54-1] Hall, H. H., Phys. Rev. 95, 424 (1954)
[J 50-1] Jackson, J. D., und J. M. Blatt, Revs. Mod. Phys. 22, 77 (1950)
[J 51-1] Jastrow, R., Phys. Rev. 81, 165 (1951)
[K 51-1] Kolsky, H. G., T. E. Phipps jr., N. F. Ramsey und H. B. Silsbee, Phys. Rev. 81, 1061 (1951)
[K 56-1] Kruse, U. E., J. M. Teem und N. F. Ramsey, Phys. Rev. 101, 1079 (1956)
[K 56-2] Kikuta, T., M. Yamada und M. Morita, Phys. Rev. 101, 509 (1956)
[L 44-1] Ландау, Л , и Я Смородинский, журн. физ. (Landau, L., und J. Smorodinsky, J. Phys. 8, 154 (1944)
[L 50-1] Lampi, E. E., G. D. Freier und J. H. Williams, Phys. Rev. 80, 853 (1950)
[M 49-1] Melkonian, E., Phys. Rev. 76, 1744 (1949)
[M 50-1] Mobley, R. C., und R. A. Laubenstein, Phys. Rev. 80, 309 (1950)
[M 52-1] Mott, N. F., und H. S. W. Massey, The Theory of Atomic Collisions, Oxford 1952
[M 54-1] Matsumoto, M., und W. Watari, Progr. Theor. Phys. 12, 503 (1954)
[O 56-1] Ohnuma, S., und D. Feldmann, Phys. Rev. 102, 1641 (1956)
[P 52-1] Pease, R. L., und H. Feshbach, Phys. Rev. 88, 945 (1952)
[P 55-1] De Pangher, J., Phys. Rev. 99, 1447 (1955)
[R 48-1] Rosenfeld, L., Nuclear Forces, Amsterdam 1948

[S 47-1] SOMMERFELD, A., Partielle Differentialgleichungen der Physik, Leipzig 1958
[S 47-2] SACHS, R. G., Phys. Rev. 72, 91 (1947)
[S 48-1] SHULL, C. G., E. O. WOLLAN, G. A. MORTON und W. L. DAVIDSON, Phys. Rev. 73, 842 (1948)
[S 50-1] SCHWINGER, J., Phys. Rev. 78, 135 (1950)
[S 53-1] SEGRÈ, E. (Editor), Exper. Nucl. Phys., Vol. I, New York 1953
[S 53-2] SQUIRES, G. L., Progr. Nucl. Phys. 2, 89 (1953)
[S 53-3] SOMMERFELD, A., Atombau und Spektrallinien, Bd. II, Braunschweig 1953
[S 53-4] SACHS, R. G., Nuclear Theory, Cambridge (Mass.) 1953
[S 54-1] STORRS, C. L., und D. H. FRISCH, Phys. Rev. 95, 1252 (1954)
[S 55-1] SQUIRES, G. L., und A. T. STEWART, Proc. Roy. Soc. A 230, 19 (1955)
[W 43-1] WENTZEL, G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943
[W 53-1] WORTHINGTON, H. R., J. N. MCGRUER und D. E. FINDLEY, Phys. Rev. 90, 899 (1953)
[Y 52-1] YOVITS, M. C., R. L. SMITH, M. H. HULL, J. BENGSTON und G. BREIT, Phys. Rev. 85, 540 (1952)

IX. Theorie leichter bis schwerer Kerne

In den vorhergehenden Abschnitten wurde das Zwei-, Drei- und Vier-Nukleonen-System mit der Absicht betrachtet, dabei Aussagen über die zwischen den Nukleonen wirkenden Kernkräfte zu erhalten. Im Abschnitt *Kernkräfte* (Teil 1 des Kapitels IX) führen wir diese Überlegungen nach einer kurzen Zusammenstellung des bisherigen Wissens über Kernkräfte fort, indem wir versuchen, aus Eigenschaften von Kernen mit mehr als vier Nukleonen[1]) ebenfalls Aussagen über die Kernkräfte zu erhalten.

Der darauffolgende Abschnitt *Kernmodelle* (Teil 2) greift die andere große Entwicklungslinie der theoretischen Kernphysik auf, die versucht, bei möglichst *geringen* Annahmen über die Kernkräfte Modelle zu finden, die einen möglichst großen Bereich aus dem Erfahrungsmaterial über leichte bis schwere Kerne wiedergeben können. Diese Verwendung von Modellen ist einmal – wie in der Atomhülle – dadurch bedingt, daß wir selbst bei genauer Kenntnis der Kräfte zwischen den Teilchen keine exakte Lösung des quantenmechanischen Vielkörperproblems finden können. Zum anderen kommt hier in der Kernphysik dazu, daß wir die Kernkräfte nicht sehr genau kennen, wie sich schon in den vorigen Abschnitten zeigte. Auch die folgenden Abschnitte über Kernkräfte werden daran kaum etwas ändern. Das zwingt uns um so mehr, nach einfachen Modellen zu suchen.

---

[1]) Ab und zu werden wir auch die leichtesten Kerne $A \leqslant 4$ mit betrachten.

TEIL 1: Kernkräfte

Bisheriges Wissen über Kernkräfte. Wir stellen zunächst zusammen, was sich aus den experimentellen Erfahrungen bei leichtesten Kernen, besonders beim Zwei-Nukleonen-System, über die Kernkräfte (besser Kernpotentiale) ergab. Die Potentiale der Kernkräfte müssen sein:

1. kurzreichweitig (§ 83, § 87, § 89),
2. stark (§ 84),
3. spinabhängig (§ 88),
4. nichtzentral (§ 83, § 90),
5. ladungsunabhängig (§ 89),
6. „austauschend" (§ 83, § 91),
7. nichtmonoton (§ 91).

Die drei letzten Eigenschaften waren im Gegensatz zu den ersten vier durch die Erfahrungen an den leichtesten Kernen nur nahegelegt und noch nicht vollkommen gesichert worden: Die Hypothese der Ladungsunabhängigkeit stand *nicht im Widerspruch* zur Erfahrung bei niederenergetischer *n*-*p*- und *p*-*p*-Streuung; der Austauschcharakter ergab sich nur aus der hochenergetischen *n*-*p*-Streuung und der nichtmonotone Verlauf nur aus der hochenergetischen *p*-*p*-Streuung; die Interpretation der hochenergetischen Streuung ist aber heute noch mit einer gewissen Unsicherheit belastet.
Glücklicherweise ergeben die Kerne $A > 4$ genauere Aussagen gerade über diese drei fraglichen Eigenschaften, und zwar die leichten Kerne ($A \lesssim 25$) durch ihre Termsysteme über die Ladungsunabhängigkeit und die mittleren bis schweren Kerne ($A \gtrsim 20$) durch die Eigenschaft der „Sättigung" über den Austauschcharakter und den nichtmonotonen Verlauf des Potentials, den sog. hard core (harter Kern).

1. LADUNGSUNABHÄNGIGKEIT DER KERNKRÄFTE

Der Vergleich der *p*-*p*- und *n*-*p*-Streuung bei niedrigen Energien ergab (§ 89), daß im $^1S_0$-Zustand des *p*-*p*- und *n*-*p*-Systems dasselbe Potential der spezifischen Kernkräfte wirksam zu sein scheint. Das legte die *Hypothese der „Ladungsunabhängigkeit"* dieser Kernkräfte (Breit und Feenberg [B 36-1]) nahe, die besagt, daß die Kernkräfte (Potentiale) zwischen zwei Nukleonen für das *p*-*p*-, *n*-*p*- und *n*-*n*-System gleich sind, wenn der vorliegende Zustand bei allen drei Systemen in allen Bestimmungsstücken außer der Ladung (Bahndrehimpuls, Spin, Gesamtdrehimpuls) derselbe ist. Oder kürzer:

In Zuständen aller drei Zwei-Nukleonen-Systeme, die sich nur durch die Ladungen der Nukleonen voneinander unterscheiden, sind die Kernkräfte (Potentiale) dieselben.

Nach dieser Hypothese sollten also die Kernkräfte zwischen irgend zwei Nukleonen nicht nur im ^1S-, sondern auch im ^3P-, ^1D-, ^3F-, ^1G- ... Zustand[1]) gleich sein – ^3S-, ^1P-, ^3D-, ^1F- ... Zustände gibt es wegen des Pauli-Prinzips für das n-n- und p-p-System nicht (vgl. § 89).

Eine schwächere, in der Ladungsunabhängigkeitshypothese enthaltene Hypothese ist die der *Ladungssymmetrie*:

In Zuständen des n-n- und des p-p-Systems, die sich nur durch die Ladungen der Nukleonen voneinander unterscheiden, sind die Kernkräfte dieselben.

Der Vergleich der Bindungsenergien von H^3 und He^3 hatte in § 92 auf diese Hypothese geführt. Auch im folgenden werden wir gelegentlich mit ihr zu tun bekommen.

Wir wollen festhalten, daß wir in beiden Hypothesen nur die Gleichheit der *Kernkräfte* postuliert haben; die *Gesamtkraft* zwischen zwei Nukleonen dagegen ist natürlich nicht gleich, da die elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen den magnetischen Momenten der Nukleonen und beim p-p-System zusätzlich die zwischen den Ladungen hinzukommen.

Wenn wir im folgenden die Konsequenzen der Ladungsunabhängigkeitshypothese verfolgen, können wir wegen der großen Stärke der Kernkräfte gegenüber diesen elektromagnetischen Kräften (vgl. Fußnote 1 auf S. 399) letztere zunächst in erster Näherung vernachlässigen und somit die Hypothese als exakt gültig ansehen. Später wird man dann die Coulomb-Abstoßung der Protonen als Störung berücksichtigen, während die viel kleineren magnetischen Wechselwirkungen auch dann noch vernachlässigt werden können.

Im einzelnen gehen wir folgendermaßen vor: Wir entwickeln zunächst einen mathematischen Formalismus, der bei ladungsunabhängigen Kernkräften besonders zweckmäßig ist und sich in der Kernphysik mehr und mehr durchgesetzt hat, weil er viele Rechnungen durchsichtig macht bzw. vereinfacht. Es handelt sich um den Formalismus des *isotopic spins* oder *Isobarenspins* – beide Bezeichnungen sowie die Bezeichnung *Isospin* sind üblich.[2])

Wir müssen dabei den Leser um einige Geduld bitten, da sich der Nutzen dieses formalen Apparates erst zeigt, wenn wir ihn anschließend bei der Behandlung der Termsysteme leichter Kerne verwenden. Sie wird uns eine bessere Bestätigung der Ladungsunabhängigkeitshypothese liefern als die niederenergetische Nukleon-Nukleon-Streuung. Darüber hinaus erweist sich der Isospinformalismus auch bei anderen Problemen der Kernphysik als unentbehrliches Hilfsmittel, wie z. B. § 97 zeigen wird. – Zusammenfassungen zum Isospin in der Kernphysik findet der Leser in dem Artikel von BURCHAM [B 55-1] und dem von SCHINTLMEISTER herausgegebenen Buch [S 60-1].

Von größter Bedeutung ist der Isospin für die Elementarteilchenphysik geworden. So zeigt sich, daß für die π-Meson-Nukleon-Wechselwirkung die Ladungs-

[1]) Tensorkräfte vernachlässigt, so daß keine Mischungen von Funktionen mit verschiedenem l auftreten.

[2]) Die Bezeichnung „Isospin“, die den Sachverhalt wohl am besten trifft, ist leider bisher nicht überall eingeführt.

unabhängigkeit recht gut erfüllt ist. Darüber hinaus ist er sehr nützlich für das Verständnis der zahlreichen neuentdeckten Elementarteilchen (K-Mesonen und Hyperonen) (vgl. Kap. VII).

§ 93. Isospin für Nukleonensysteme

Der im folgenden zu entwickelnde Formalismus lehnt sich sehr eng an die Paulische Behandlung des Elektronen- (oder Nukleonen-) Spins an (vgl. z. B. SCHIFF [S 49-1], BLOCHINZEW [B 53-1]), deren Kenntnis wir voraussetzen. Formal ist der Isospinformalismus geradezu identisch mit dem Paulischen Spinformalismus, von der Verwendung anderer Buchstaben und Zahlenfaktoren abgesehen. Wir wollen deshalb zunächst die wichtigsten Formeln für den mechanischen Spin $\frac{1}{2}$ zusammenstellen.[1])

a) (Mechanischer) Spin

Für *ein Teilchen* mit Spin $\frac{1}{2}$ kennzeichnet man die jeweilige Spineinstellung in bekannter Weise entweder durch eine zur Ortsvariable hinzutretende Spinvariable (Spinkoordinate) σ,

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{r}, \sigma)\,, \quad \sigma = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} \text{„Spin auf"} \\ \text{„Spin ab"} \end{matrix}\,, \quad \text{kurz} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}\,, \tag{93.1 a}$$

oder durch eine mit der (Orts-)Eigenfunktion multiplizierte Spineigenfunktion χ (genauer Spin*teil* der Gesamteigenfunktion):[2])

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{r})\,\chi. \tag{93.1 b}$$

Beide Schreibweisen sind einander äquivalent:

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \equiv \varphi(\mathfrak{r})\,\chi. \tag{93.1 c}$$

Um die Spineigenfunktionen χ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens zu bestimmen, wird dem Teilchen zunächst ein Spinoperator $\vec{s}$ zugeordnet, der zweckmäßigerweise durch die Paulischen Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \tag{93.2}$$
$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1\,, \quad [\sigma_j, \sigma_k] = 2\,i\,\sigma_l \; (j\,k\,l \text{ zykl. } x\,y\,z)$$

als Matrix-Vektor-Operator dargestellt wird:

$$\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \qquad [s_j, s_k] = i\,\hbar\,s_l\,, \tag{93.3}$$
$$\vec{s}^{\,2} = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\vec{\sigma}^{\,2} = \hbar^2 s(s+1)\,\mathbf{1}\,, \quad s = \frac{1}{2}\,; \; \left[\vec{s}^{\,2}, s_j\right] = 0\,.$$

---

[1]) Für andere Spinwerte läßt sich ein ähnlicher Formalismus angeben.

[2]) $\varphi(\mathfrak{r})\,\chi$ ist noch nicht die allgemeinste mögliche Form, sondern eine Linearkombination $\varphi_1(\mathfrak{r})\,\chi_1 + \varphi_2(\mathfrak{r})\,\chi_2 \quad (\chi_1 = \alpha, \chi_2 = \beta)$.

Da die einzelnen Komponenten s_x, s_y, s_z nicht untereinander, jedoch mit $\vec{s}^2$ vertauschbar sind, läßt sich ein gemeinsames Orthonormalsystem von Eigenfunktionen für s_z und $\vec{s}^2$ in Form von zweizeiligen Spalten angeben:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow \qquad \alpha \cdot \alpha = \beta \cdot \beta = 1, \quad \alpha \cdot \beta = 0\,,$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \downarrow \qquad [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1,2} a_i b_i]\,.$$

Damit gilt für die gesuchten Spineigenfunktionen χ

$$\boldsymbol{s}_z \chi = \hbar m_s \chi = s_z \chi\,, \tag{93.4}$$
$$\vec{s}^2 \chi = \hbar^2 s(s+1)\chi\,,$$
$$\chi = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}, \quad s = \tfrac{1}{2}\,, \quad m_s = \begin{cases} +\tfrac{1}{2} & \uparrow \\ -\tfrac{1}{2} & \downarrow \end{cases} \quad (-s \leqslant m_s \leqslant s)\,.$$

Die zu den beiden Zuständen α, β gehörigen „Einstellungen" des Spins müssen wir genauer als durch die beiden Pfeile ↑, ↓ durch folgendes Vektormodell beschreiben (Abb. 180):

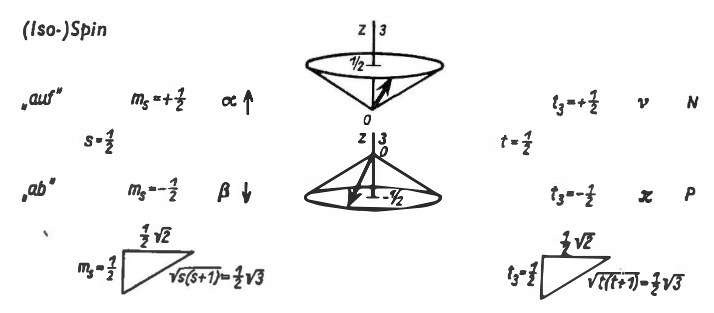


Abb. 180.
Vektormodell für Spin oder Isospin eines Einteilchensystems: Spin- oder Ladungs-Eigenwerte und -Eigenfunktionen links für Spin-$^1/_2$-Teilchen, rechts für Isospin-$^1/_2$-Teilchen (Nukleonen)

Alle Bezeichnungen auf der rechten Hälfte der Abbildung beachten wir vorläufig nicht. Wir haben in unserem Vektormodell gegenüber der Kurzbezeichnung ↑, ↓ berücksichtigt, daß 1. von den drei Komponenten s_x, s_y, s_z nur s_z „scharf" ist, d.h. einen Eigenwert annimmt, und 2. der Betrag des Spinvektors den Eigenwert $\hbar\sqrt{s(s+1)}$ und nicht $\hbar s$ hat (daher Umlauf auf Kegelmantel, wo Länge der Kegel-Mantellinie $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$; vgl. rechtwinklige Dreiecke).

Für *zwei Teilchen* mit Spin $\frac{1}{2}$ haben wir den Gesamtspin

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z) = \vec{s}_1 + \vec{s}_2, \quad \vec{s}_i = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_i = \frac{\hbar}{2}(\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \sigma_{zi})\,, \quad [S_j, S_k] = i\hbar S_l\,, \tag{93.5}$$
$$\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \vec{s}_1^{\,2} + \vec{s}_2^{\,2} + 2(\vec{s}_1\vec{s}_2)\,, \qquad [\vec{S}^2, S_j] = 0.$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\mathbf{S}_z$ und $\vec{\mathbf{S}}^2$:

Eigenwerte:

$$\mathbf{S}_z\chi = \hbar M_s\chi = S_z\chi\,,$$

$$\vec{\mathbf{S}}^2\chi = \hbar^2 S(S+1)\,\chi\,, \qquad (93.6\,\mathrm{a})$$

$$S = 1 \quad M_s = \begin{cases} 1 & \uparrow\uparrow \\ 0 & \rightarrow\rightarrow\,, \\ -1 & \downarrow\downarrow \end{cases} \qquad -S \leqslant M_s \leqslant S\,.$$

$$S = 0 \quad M_s = 0 \;\uparrow\downarrow\,,$$

Eigenfunktionen:

$$S = 1 \quad M_s = 1 \quad \chi_1^1 = \alpha(1)\,\alpha(2) = \alpha\,\alpha\,^{1)} \quad \uparrow\uparrow\,,$$

$$= 0 \quad \chi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha(1)\,\beta(2) + \beta(1)\,\alpha(2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta + \beta\alpha) \;\rightarrow\rightarrow\,,$$

$$= -1 \quad \chi_1^{-1} = \beta(1)\,\beta(2) = \beta\beta \quad \downarrow\downarrow\,,$$

$$S = 0 \quad M_s = 0 \quad \chi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha(1)\,\beta(2) - \beta(1)\,\alpha(2)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta - \beta\alpha) \;\uparrow\downarrow\,,$$

$$\chi_k^l \cdot \chi_{k'}^{l'} = \delta_{kk'}\;\delta_{ll'}\,. \qquad (93.6\,\mathrm{b})$$

Das zugehörige Vektormodell wurde in Abb. 181 gezeichnet. Wieder interessieren vorläufig nur die Bezeichnungen der linken Abbildungshälfte. — Wir haben das bekannte Triplett mit „parallelen“ Spins für $S = 1$ und das Singulett mit antiparallelen Spins für $S = 0$.

Für spätere Rechnungen wollen wir noch notieren, daß der Operator

$$(\vec{\sigma}_1\,\vec{\sigma}_2) = \frac{2}{\hbar^2}(\vec{\mathbf{S}}^2 - \vec{\mathbf{s}}_1^{\,2} - \vec{\mathbf{s}}_2^{\,2})$$

$$= \frac{2}{\hbar^2}\left[\vec{\mathbf{S}}^2 - \frac{\hbar^2}{4}(3+3)\,\mathbf{1}\right] = \frac{2}{\hbar^2}\vec{\mathbf{S}}^2 - 3\cdot\mathbf{1}$$

wegen

$$\vec{\mathbf{S}}^2\chi = \hbar^2 S(S+1)\,\chi \qquad S = \begin{cases}1\\0\end{cases}$$

die Eigenwerte 1 und -3 hat:

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)\,\chi = [2S(S+1) - 3]\,\chi = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix}\cdot\chi\,, \qquad S = \begin{cases}1\\0\end{cases}\!\!. \qquad (93.7)$$

[1]) In dieser Kurzschreibweise ist die Teilchennummer der einzelnen Faktoren durch deren Reihenfolge festgelegt.

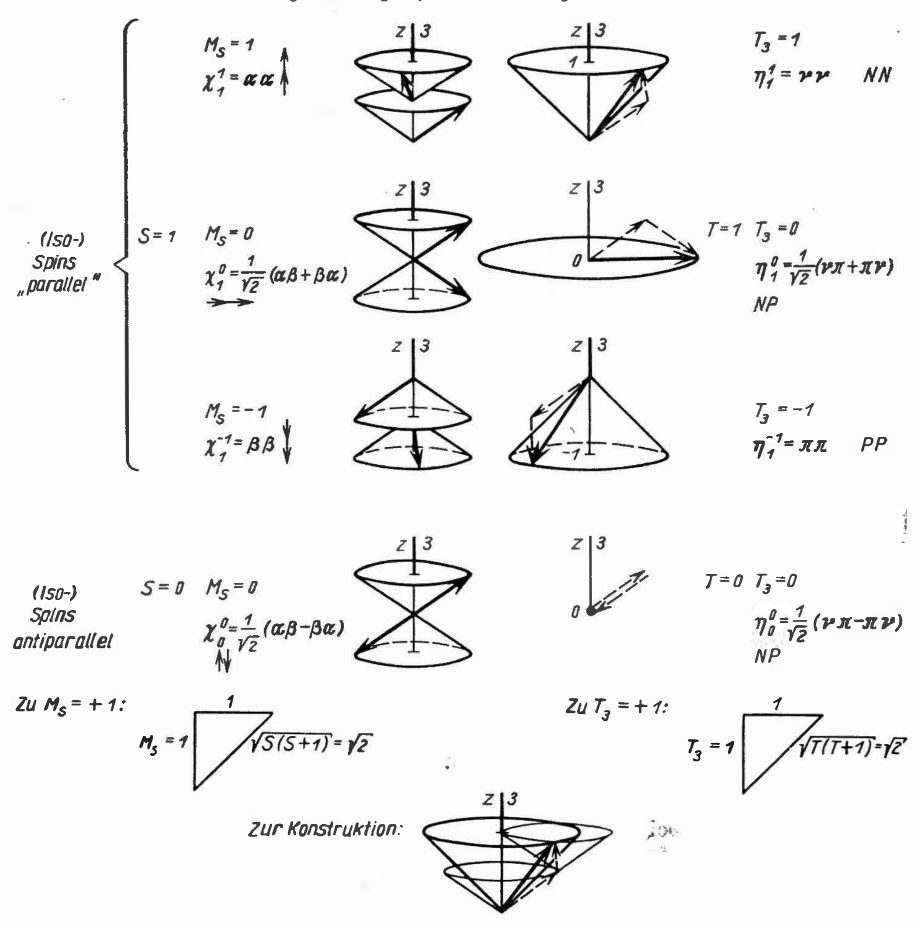


Abb. 181. Vektormodell für Spin oder Isospin eines Zweiteilchensystems: Spin- oder Ladungs-Eigenwerte und -Eigenfunktionen links für Spin-$^1/_2$-Teilchen, rechts für Isospin-$^1/_2$-Teilchen (Nukleonen)

Man sieht nun leicht, was sich bei n Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ ergibt, deren Einzelspins sich zu einem Gesamtspin zusammensetzen:

$$\vec{S} = (S_x; S_y, S_z) = \sum_{i=1}^{n} \vec{s}_i\,, \quad [S_j, S_k] = i\hbar S_l\,, \tag{93.8}$$

$$\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2, \qquad [\vec{S}^2, S_i] = 0\,.$$

$$\begin{aligned} S_z\chi &= \hbar M_s\chi = S_z\chi\,,\\ \vec{S}^2\chi &= \hbar^2 S(S+1)\,\chi\,,\\ -S &\leqslant M_s \leqslant S\,, \end{aligned} \tag{93.9}$$

$$S = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \ldots, \frac{1}{2} \text{ oder } 0, \quad M_s = S,\ S-1, \ldots, -S+1,\ -S.$$

Die Eigenfunktionen χ für $n = 3, 4$ sind im Anhang I, Tabelle 1, angegeben[1]): Man ersetze dort $\nu \to \alpha$, $\pi \to \beta$, $T \to S$, $T_3 \to M_s$. Die Zusammensetzung der Spins nach dem Vektormodell ist dabei verkürzt angedeutet, sie wäre genauer wieder nach Art von Abb. 181 vorzunehmen.

b) Isospin für ein Nukleon

Für Proton und Neutron ist der gemeinsame Name „*Nukleon*" allgemein üblich. Wir verschärfen dies jetzt, indem wir

Proton und Neutron als zwei Zustände ein und desselben Teilchens Nukleon, genauer, als die beiden „Ladungszustände" des Nukleons, ansehen.

Das ist zunächst nichts anderes als eine neue Bezeichnungsweise, die sich bald als sehr zweckmäßig erweisen wird.

Eine tiefergehende Rechtfertigung erhält sie durch die Mesonenfeldtheorie (vgl. § 100), die zeigt, daß die Kernkräfte durch Austausch von („virtuellen") Mesonen zwischen den Nukleonen zustande kommen. Weil diese Mesonen zum Teil geladen ($\pm e$) sind, ist mit dem Austausch, d. h. mit dem Wirken der Kernkräfte, eine Umladung der Nukleonen verbunden. Da so die Kernkräfte Neutronen und Protonen dauernd ineinander umwandeln, wird die jeweilige Ladung der Nukleonen zur *Variablen.*

Mit dieser Auffassung hat damit das Nukleon eine Variable „Ladung", die nur zwei Werte 0 und $+e$ annehmen kann. Analog besitzt ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ die Variable „z-Komponente des Spins", die ebenfalls nur zweier Werte $\pm \frac{\hbar}{2}$ fähig ist. Diese Analogie benutzen wir nun dazu, genau parallel zum Formalismus des (mechanischen) Spins den des Isospins aufzubauen.

Wir führen dazu einen Ladungsoperator $\mathbf{e}$ des Nukleons ein, der 0 und $+e$ als Eigenwerte hat; dabei messen wir die Ladung in Einheiten der Elementarladung:[2])

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad (e = \text{Protonladung} = 1). \tag{93.10}$$

Die zugehörigen „Ladungseigenfunktionen" sind

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{„Neutronzustand",}^{2)} \qquad n,$$

kurz

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{„Protonzustand",}^{2)} \qquad p;$$

$$\nu \cdot \nu = \pi \cdot \pi = 1, \qquad \nu \cdot \pi = 0;$$
$$\mathbf{e}\nu = 0 \cdot \nu,$$
$$\mathbf{e}\pi = e \cdot \pi.$$

---

[1]) Die Eigenfunktionen für $n = 4$ wurden freundlicherweise von Herrn Dr. LYONS zur Verfügung gestellt.

[2]) Oft wird der Formalismus mit vertauschten Zeilen entwickelt.

Wie beim gewöhnlichen Spin können wir den Ladungszustand des Nukleons an seiner Eigenfunktion auf zwei Arten kennzeichnen:

1. Wir multiplizieren die bisherige orts- und spinabhängige Eigenfunktion $\varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \equiv \varphi(\mathfrak{r}) \cdot \chi$ mit der jeweiligen Ladungsfunktion η:

$$\psi = \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \cdot \eta = \begin{cases} \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \cdot \nu & n, \\ \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \cdot \pi & p. \end{cases} \tag{93.11 a}$$

2. Wir fügen den bisherigen Koordinaten $\mathfrak{r}, \sigma$ eine fünfte „Ladungskoordinate" τ[1]) hinzu, die ebenso wie σ nur zwei Werte annimmt:

$$\psi = \psi(\mathfrak{r}, \sigma, \tau), \quad \tau = \begin{cases} +1 & n, \\ -1 & p, \end{cases} \tag{93.11 b}$$

$$\psi = \begin{cases} \psi(\mathfrak{r}, \sigma, +1) & n, \\ \psi(\mathfrak{r}, \sigma, -1) & p. \end{cases}$$

Da beide Schreibweisen äquivalent sein sollen, muß gelten

$$\psi(\mathfrak{r}, \sigma, +1) \equiv \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \cdot \nu \qquad n,$$
$$\psi(\mathfrak{r}, \sigma, -1) \equiv \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \cdot \pi \qquad p;$$

allgemein hat die Eigenfunktion eines Nukleons die Form

$$\psi = \psi(\mathfrak{r}, \sigma, \tau) \equiv \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \cdot \eta \equiv \varphi(\mathfrak{r}) \cdot \chi \eta. ^{2)} \tag{93.11 c}$$

Die Ladungseigenfunktionen ν, π sind ihrer Gestalt nach bereits identisch mit den früheren Eigenfunktionen α, β von $\boldsymbol{s}_z$. Darüber hinaus führen wir jetzt rein formal – um die Analogie zu wahren[3]) – die „Isospinmatrizen" ein:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\tau}_i^2 = \mathbf{1}, \quad [\boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j] = 2i\boldsymbol{\tau}_k \quad (ijk \text{ zykl. } 123). \tag{93.12}$$

Mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ versehen[4]), fassen wir sie analog zu $\vec{\boldsymbol{s}}$ zum „Isospinoperator" $\vec{\boldsymbol{t}}$ zusammen:

$$\vec{\boldsymbol{t}} = (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3) = \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\tau}} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3); \qquad [\boldsymbol{t}_i, \boldsymbol{t}_j] = i\boldsymbol{t}_k;$$
$$\vec{\boldsymbol{t}}^2 = \boldsymbol{t}_1^2 + \boldsymbol{t}_2^2 + \boldsymbol{t}_3^2 = \tfrac{1}{4}\vec{\boldsymbol{\tau}}^2 = t(t+1) \cdot \mathbf{1}, \quad t = \tfrac{1}{2}; \quad [\vec{\boldsymbol{t}}^2, \boldsymbol{t}_i] = 0. \tag{93.13}$$

---

[1]) Nicht zu verwechseln mit den im folgenden eingeführten *Operatoren* $\boldsymbol{\tau}_i$!

[2]) $\varphi \cdot \chi$ ist nicht die allgemeinste mögliche Orts-Spin-Funktion für ein Teilchen (vgl. Fußnote 2 auf S. 450).

[3]) Eine tiefergehende Begründung liefert die Gruppentheorie (der Drehgruppe, s. Kockel [K 55-1]), die zeigt, daß unsere Ansätze zwangsläufig sind.

[4]) Den hier unnötigen Faktor $\hbar$ sparen wir uns.

$\vec{t}$ ist danach ein (Matrix-Operator-)Vektor in einem dreidimensionalen Raum, den wir damit rein formal eingeführt haben und den wir „Ladungsraum" oder „Isospinraum" nennen. Er hat mit dem Ortsraum nichts zu tun; wir kommen auf seine Bedeutung noch zurück. Mit Hilfe von $\vec{t}$ läßt sich der Ladungsoperator $\boldsymbol{e}$ ausdrücken als

$$\boldsymbol{e} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{1} - \boldsymbol{t}_3\,, \tag{93.14}$$

so daß seine Eigenfunktionen ν und π zugleich Eigenfunktionen von $\boldsymbol{t}_3$ und trivialerweise auch von $\vec{t}^{\,2} = \frac{3}{4}\ \mathbf{1}$ sind:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_3\eta &= t_3\,\eta\,(\equiv m_t\,\eta)\,, \\ \vec{t}^{\,2}\eta &= t\,(t+1)\,\eta\,; \end{aligned} \tag{93.15}$$

$$\eta = \begin{cases} \nu \\ \pi, \end{cases} \quad t = \tfrac{1}{2}, \quad t_3 = \begin{cases} +\tfrac{1}{2} & n, \\ -\tfrac{1}{2} & p, \end{cases} \quad -t \leqslant t_3 \leqslant t\,.$$

Der Vektor-Operator $\vec{t}$ hat damit genau dieselben Eigenschaften (Eigenfunktionen, Eigenwerte, Vertauschungseigenschaften) wie $\vec{s}$, nur mit dem einen Unterschied, daß $\vec{t}$ im Ladungsraum, $\vec{s}$ aber im gewöhnlichen Ortsraum definiert ist und wirkt. $\vec{t}$ läßt sich deshalb (im Ladungsraum) durch genau das gleiche Vektormodell beschreiben wie $\vec{s}$ (im Ortsraum); wir haben das durch die Bezeichnungen in der rechten Hälfte der Abb. 180 festgehalten. Man sieht, daß die ausgezeichnete Achse im Ladungsraum die dritte Achse ist (früher z-Achse): Wenn in bezug auf diese Achse Isospin „auf" vorliegt, interpretieren wir das als Neutronzustand; „ab" bedeutet Protonzustand.

Während wir also formal vollkommene Analogie zwischen dem $\vec{s}$- und dem $\vec{t}$-Formalismus haben, ist die Interpretation verschieden: Im Gegensatz zu $\vec{s}$ hat nur eine Komponente von $\vec{t}$ direkte physikalische Bedeutung: $\boldsymbol{t}_3 = \frac{1}{2}\,\mathbf{1} - \boldsymbol{e}$ ist „im wesentlichen" der Ladungsoperator; wir werden bald sehen, daß er *genau* den „Neutronenüberschuß-Operator" darstellt. Auch $\boldsymbol{t}_1$ und $\boldsymbol{t}_2$ haben eine (nicht ganz so direkte) physikalische Bedeutung: $\boldsymbol{\tau}_\pm = \boldsymbol{t}_1 \pm i\,\boldsymbol{t}_2 = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\tau}_1 \pm i\,\boldsymbol{\tau}_2)$ verwandelt Proton in Neutron und umgekehrt: $\boldsymbol{\tau}_+\,\pi = \nu$, $\boldsymbol{\tau}_-\,\nu = \pi$.

Zweifellos erscheint dieses Gebilde „Isospinvektor" zunächst künstlich. Da sich jedoch – wie wir gleich sehen werden – bei Mehrnukleonensystemen die Isospinvektoren der einzelnen Nukleonen ebenso zusammensetzen wie gewöhnliche Spinvektoren und man *dadurch physikalische Aussagen z. B. über Termsysteme solcher Mehrnukleonensysteme gewinnen kann*, die sich experimentell bestätigen, ist der Isospin trotz seiner Merkwürdigkeit der Natur aufs beste angepaßt. Daß er uns merkwürdig erscheint, ist dabei vielleicht nur ein Hinweis darauf, daß wir seine wahre Bedeutung noch nicht verstehen, wie einige Tatsachen der neueren Elementarteilchenphysik (vgl. Kapitel VII) vermuten lassen.

c) Isospin für Mehrnukleonen-System

So, wie wir bisher Proton und Neutron als zwei Ladungszustände des einen Teilchens Nukleon auffaßten, verfahren wir auch bei mehreren Nukleonen: Wir fassen

alle möglichen Systeme von A Nukleonen (z. B. für $A = 3$: 3 Protonen, 2 Protonen + 1 Neutron, 1 Proton + 2 Neutronen, 3 Neutronen) als verschiedene Ladungs*zustände* des *einen* A-Nukleonensystems auf. Das bedeutet, daß wir Systeme, die wir in der Natur als ganz verschiedene isobare Kerne finden (im Beispiel: Li^3, He^3, H^3, n^3; sie brauchen nicht alle tatsächlich beobachtbar zu sein), als Zustände desselben Systems ansehen:

Alle Isobare eines bestimmten A werden als verschiedene Ladungszustände des A-Nukleonensystems aufgefaßt.

Es ist notwendig, sich diese Auffassung bei jedem einzelnen Schritt im folgenden immer wieder vor Augen zu halten, um die Interpretation unseres Formalismus zu verstehen.

Nennen wir den Ladungsoperator des i-ten Nukleons

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}_i,$$

dann definieren wir als Gesamtladungsoperator unseres Systems von A Nukleonen

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{A} \boldsymbol{e}_i . \tag{93.16}$$

Weiter definieren wir in Analogie zum mechanischen Gesamtspin als gesamten Isospin $\vec{\boldsymbol{T}}$ die vektorielle Summe der einzelnen Isospins $\vec{\boldsymbol{t}}_i$:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{T}} &= (\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3) = \sum_{i=1}^{A} \vec{\boldsymbol{t}}_i; \qquad [\boldsymbol{T}_i, \boldsymbol{T}_k] = i\boldsymbol{T}_l; \\ \vec{\boldsymbol{T}}^2 &= \boldsymbol{T}_1^2 + \boldsymbol{T}_2^2 + \boldsymbol{T}_3^2; \qquad [\vec{\boldsymbol{T}}^2, \boldsymbol{T}_i] = 0 . \end{aligned} \tag{93.17}$$

Wegen $\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{2} - \boldsymbol{t}_{3i}$ [1]) erhält man den Zusammenhang

$$\boldsymbol{Q} = \frac{A}{2} - \boldsymbol{T}_3 . \tag{93.18}$$

Da $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ und $\boldsymbol{T}_3\,(\boldsymbol{Q})$ [2]) vertauschbar sind, lassen sich gemeinsame Eigenfunktionen η finden:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}_3 \eta = T_3 \eta, \qquad \boldsymbol{Q}\eta = Z\eta, && Z = \text{Protonenzahl}, \\ &\vec{\boldsymbol{T}}^2 \eta = T(T+1)\eta, && N = \text{Neutronenzahl}, \\ &(-T \leqslant T_3 \leqslant T), && A = N + Z \end{aligned} \tag{93.19}$$

$$T = \frac{A}{2}, \frac{A}{2} - 1, \ldots, \frac{1}{2} \text{ oder } 0 \qquad T_3 = T, T-1, \ldots, -T+1, -T.$$

Von den Komponenten von $\vec{\boldsymbol{T}}$ hat wieder nur $\boldsymbol{T}_3$ direkte physikalische Bedeutung: Da $\boldsymbol{Q}$ als Gesamtladungsoperator den Eigenwert Z haben muß, hat

---

1) Von hier an lassen wir alle Einheitsmatrizen weg.

2) Man findet als Bezeichnung der drei Richtungen im Ladungsraum statt der Zahlen 1, 2, 3 oft die Buchstaben ξ, η, ζ, also z. B. T_ζ statt T_3.

$\boldsymbol{T}_3 = \frac{A}{2} - \boldsymbol{Q}$ den Eigenwert $T_3 = \frac{A}{2} - Z = \frac{1}{2}(N - Z) =$ (halber) „Neutronenüberschuß"; $\boldsymbol{T}_3$ nennen wir deshalb „Neutronenüberschuß-Operator". Seine Eigenwerte T_3 sind also ganz- bzw. halbzahlig, wenn A gerade bzw. ungerade ist. Dasselbe gilt von T, da es wegen $|T_3| \leqslant T$ den maximalen „Neutronenüberschuß" angibt. Weil es später für uns besonders wichtig sein wird, wollen wir hier in einfacher Form beweisen, daß T den in (93.19) angegebenen Wertebereich hat. Dabei können wir voraussetzen, daß T_3 den Wertebereich $T_3 = T, T - 1, \ldots, -T$ hat, da dies bekanntlich – ebenso wie die beiden Eigenwertgleichungen in (93.19) – für die Eigenwerte einer Komponente und des Quadrates jedes Vektoroperators gilt, der die Vertauschungsrelationen (93.17) hat. Infolgedessen gilt für das größtmögliche T: $T_{\max} \geqq |T_3| = \left|\frac{A}{2} - Z\right|$. Das gilt für alle T_3, also auch für den größten Wert $T_3 = \frac{A}{2}$: $T_{\max} \geqq \frac{A}{2}$. In dieser Ungleichung kann aber nur das Gleichheitszeichen richtig sein: $T_{\max} = \frac{A}{2}$; denn T_3 nimmt alle Werte von T wirklich an, also auch den Wert $T_{\max}$, was bei $T_{\max} > \frac{A}{2}$ nicht möglich wäre. Für einen Operator $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ mit den Vertauschungsrelationen (93.17) unterscheiden sich benachbarte Eigenwerte T stets um eins und sind positiv. Folglich erhält man den Wertebereich $T = T_{\max}, T_{\max} - 1, \ldots = \frac{A}{2}, \frac{A}{2} - 1, \ldots, \frac{1}{2}$ oder 0. Für jeden dieser T-Werte nimmt T_3 die Werte von $-T$ bis $+T$ an.

Aus der Tatsache, daß der Neutronenüberschuß bzw. die Ladung unseres A-Nukleonensystems verschiedene Eigenwerte annehmen können, sieht man besonders deutlich, daß wir Systeme ganz verschiedener Ladung (nur gleicher Nukleonenzahl), die in der Natur als Kerne ganz verschiedener Elemente auftreten, gedanklich vereinigen, indem wir sie uns als Zustände desselben A-Nukleonensystems denken. Die Eigenfunktionen η von $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ und $\boldsymbol{T}_3$ bauen sich genauso aus den Ladungseigenfunktionen ν und π des einzelnen Nukleons auf wie die entsprechenden Spineigenfunktionen aus den Spineigenfunktionen α und β des einzelnen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens. Für $A = 3, 4$ sind sie im Anhang I, Tabelle 1, angegeben, für $A = 2$ wollen wir sie noch etwas genauer studieren. Nach dem eben Gesagten erhalten wir letztere und die zugehörigen Eigenwerte aus den Zweiteilchen-Spineigenfunktionen von S. 452 durch die Substitutionen

$$\alpha \to \nu\,(\uparrow \to n), \quad \beta \to \pi\,(\downarrow \to p), \quad \chi \to \eta, \quad S \to T, \quad M_S \to M_T \equiv T_3:$$

$$\left.\begin{array}{llll} T = 1 \quad T_3 = 1 & \eta_1^1 = \nu\nu & nn & \overline{12}, \\ = 0 & \eta_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\pi + \pi\nu) & np & \overline{12}, \\ = -1 & \eta_1^{-1} = \pi\pi & pp & \overline{12}, \end{array}\right\} \text{Triplett}; \qquad (93.20)$$

$$\begin{array}{llll} T = 0 \quad T_3 = 0 & \eta_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\pi - \pi\nu) & np & \widetilde{12}, \end{array} \quad \text{Singulett};$$

$$\eta_k^l \cdot \eta_{k'}^{l'} = \delta_{kk'}\,\delta_{ll'}.^{1)}$$

[1]) Vgl. hierzu die Rechenregeln auf S. 460.

Wir haben dabei und im Anhang wieder die Kurzschreibweise von S. 452 verwendet, in der die Reihenfolge der ν- und π-Faktoren die Nummer des betreffenden Teilchens angibt: $\nu\pi$ bedeutet $\nu(1)\pi(2)$ usw.
Das zugehörige Vektormodell des Zwei-Nukleonen-Systems im Ladungsraum ist wieder mit dem entsprechenden für zwei gewöhnliche Spins im Ortsraum (vgl. Abb. 181 auf S. 453) identisch; es gelten jetzt dort die Bezeichnungen der rechten Seitenhälfte.
Wie vom mechanischen Spin her gewohnt, haben wir beim Zweiteilchen-System für $T = 1$ ein Triplett von Zuständen, dessen drei „Komponenten" sich durch die Quantenzahlen $T_3 = +1, 0, -1$ unterscheiden; für $T = 0$ ergibt sich ein Singulett mit einer durch $T_3 = 0$ gekennzeichneten Komponente. Die Komponenten des Tripletts sind der n-n-Zustand η_1^1, der p-p-Zustand η_1^{-1} und ein n-p-Zustand η_1^0; die eine Komponente des Singuletts ist ein anderer n-p-Zustand η_0^0. (Man prüfe das durch Anwenden von Q (T_3) auf die η nach!)
Entscheidend für die physikalischen Anwendungen sind – wie wir noch sehen werden – die Symmetrieeigenschaften der Eigenfunktionen η gegenüber Vertauschung von Teilchen 1 und 2: Die drei Komponenten des Tripletts sind *symmetrisch* in 1 und 2 (kurz $\overline{12}$), die des Singuletts ist *antisymmetrisch* ($\widetilde{12}$). Die beiden n-p-Zustände unterscheiden sich also durch ihre Symmetrieeigenschaften: Es gibt einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Neutron-Proton-Zustand – eine Tatsache, die wir erst durch unseren Isospin-Formalismus finden konnten, da sie anschaulich wohl kaum zu sehen ist. Für das n-n- und das p-p-System existiert dagegen nur je ein symmetrischer Zustand.
Schließlich wollen wir darauf aufmerksam machen, daß wir in den beiden n-p-Zuständen

$$\left.\begin{matrix}\eta_1^0\\ \eta_0^0\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu(1)\,\pi(2) \pm \pi(1)\,\nu(2)) \tag{93.21}$$

Zustände vor uns haben, in denen zwar stets ein Neutron und ein Proton vorhanden ist, von denen wir aber nicht angeben können, welches Teilchen (1 oder 2) sich im Neutron- bzw. im Proton-Zustand befindet. Denn die Eigenfunktion (93.21) besteht aus zwei Summanden mit einander entgegengesetzten Ladungsverteilungen: Teilchen 1 = Proton, 2 = Neutron bzw. 1 = Neutron, 2 = Proton, die im Verhältnis 1 : 1 in die Gesamtfunktion eingehen.
So wie beim Zwei-Nukleonen-System ergeben sich ganz allgemein bei jedem A-Nukleonensystem Multipletts von Zuständen; die Komponenten eines solchen Multipletts haben alle dasselbe T und unterscheiden sich durch die zugehörigen Werte von $T_3 = -T, \ldots, +T$, so daß die Multiplizität analog zum gewöhnlichen Spin $2T + 1$ ist. Die einzelnen Komponenten können dabei noch entartet sein, d.h., zu einem bestimmten T und T_3 können noch mehrere Eigenfunktionen gehören. Man vergleiche hierzu Anhang I, Tabelle 1.

Hinter den Eigenfunktionen haben wir im Anhang wieder deren Symmetrieeigenschaften kurz gekennzeichnet. Auf eine daraus leicht abzulesende Eigenschaft, die schon beim Zwei-Nukleonen-System vorlag, wollen wir besonders hinweisen: Bei *festem* T_3 und laufendem

$T = \frac{A}{2}, \frac{A}{2} - 1, \ldots, |T_3|$[1]) existiert stets für den kleinsten Wert von T, für $T = |T_3|$, eine Eigenfunktion, die unter allen Eigenfunktionen dieses T_3-Wertes „am antisymmetrischsten", d. h. in der Höchstzahl von Teilchenpaaren antisymmetrisch ist. So hat beim Vier-Nukleonen-System (vgl. Anhang I, Tabelle 1) die antisymmetrischste aller Eigenfunktionen mit $T_3 = 0$ $(\widetilde{12}\;\widetilde{34})$ die Quantenzahl $T = 0 = |T_3|$, für $T_3 = \pm 1$ hat die antisymmetrischste $(\overline{12}\;\widetilde{34}$ oder $\widetilde{12}\;\overline{34})$ $T = 1 = T_3|$, für $T_3 = \pm 2$ schließlich gibt es nur eine Eigenfunktion mit $T = 2 = |T_3|$. Es läßt sich beweisen, daß diese Gesetzmäßigkeit für alle Werte A gilt.

An dieser Stelle wollen wir eine Bemerkung allgemeiner Art machen. Mit dem Isospin ist es wie mit jedem Kalkül: Seine volle Bedeutung erkennt man erst, wenn man „mit ihm umgehen kann". Denn ein Kalkül liefert im Grunde nichts, was man nicht auch ohne ihn erhalten könnte, allerdings dann nur auf viel komplizierterem Wege; er erhält seine Bedeutung dadurch, daß er komplizierte Zusammenhänge zusammenfaßt und so durchsichtig macht. Da wir hier den Isospinformalismus aus der Analogie zum gewöhnlichen Spinformalismus heraus entwickelt haben, ist es deshalb für den Anfänger dringend nötig, die gefundenen Zusammenhänge *unabhängig* vom gewöhnlichen Spin (mindestens für das Zweiteilchen-System) wirklich *nachzurechnen!*

Dabei sind für Zwei- und Mehrnukleonen-Systeme folgende Regeln für das Rechnen mit unseren Matrizen zu beachten:[2])

1. Die Addition von Matrizen darf nur dann als gewöhnliche Matrixaddition $(A + B)_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$ aufgefaßt werden, wenn beide Matrizen zu demselben Teilchen gehören. (Ist das nicht der Fall, braucht die betreffende Addition in unseren Rechnungen nie explizit ausgeführt zu werden.)

Beispiele:

explizite Addition erlaubt:

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(1)} + i\,\boldsymbol{\tau}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} & 1 - i^2 \\ 1 + i^2 & \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} & 2 \\ 0 & \end{pmatrix}_1;$$

explizite Addition verboten:

$$\boldsymbol{e}^{(1)} + \boldsymbol{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}_2 \neq \begin{pmatrix} 0 & \\ & 2 \end{pmatrix} (!)$$

2. Die Multiplikation von Matrizen darf nur dann als gewöhnliche Matrixmultiplikation $(A \cdot B)_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$ aufgefaßt werden, wenn beide Matrizen zu demselben Teilchen gehören. (Ist das nicht der Fall, braucht die betreffende Multiplikation in unseren Rechnungen nie explizit ausgeführt zu werden.)

---

[1]) Dieser Wertebereich von T bei festem T_3 folgt aus $-T \leqslant T_3 \leqslant T$.

[2]) Diese Regeln gelten natürlich auch für das Rechnen mit (gewöhnlichen) Spinmatrizen $\boldsymbol{\sigma}_i$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$. In einigen Beispielen $(\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_x^{(i)})$ haben wir vorübergehend die Indizes i hochgeschrieben.

Beispiele:

explizite Multiplikation erlaubt:

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}_1 = -i\boldsymbol{\tau}_2^{(1)},$$

$$\alpha(1) \cdot \beta(1) = (1\ 0)_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 = 0,$$

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \cdot \nu(1) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 = \pi(1);$$

explizite Multiplikation verboten:

$$\sigma_x^{(1)} \times \sigma_x^{(2)} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}_1 \times \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}_2 \neq \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

$$\nu(1) \times \pi(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 \neq (1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Wir schreiben die gewöhnliche Matrixmultiplikation mit „·“, die „explizit verbotene“ mit „×“.)

3. In Produkten von Matrizen verschiedener Teilchen müssen die Faktoren stets in der Reihenfolge der Teilchennummern stehen. Ist die Reihenfolge eine andere, sind die Faktoren in die normale Reihenfolge umzuordnen; dabei sind Matrizen verschiedener Teilchen als vertauschbar anzusehen.

Beispiele:

$$\boldsymbol{\tau}_3^{(2)} \times \boldsymbol{\tau}_1^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \times \boldsymbol{\tau}_3^{(2)} \qquad (\text{dagegen } \boldsymbol{\tau}_3^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \neq \boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_3^{(1)}),$$

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(3)} \times \boldsymbol{\tau}_2^{(1)} \times \boldsymbol{\tau}_1^{(2)} = \boldsymbol{\tau}_2^{(1)} \times \boldsymbol{\tau}_1^{(2)} \times \boldsymbol{\tau}_1^{(3)}.$$

Das gilt auch für in „·“ und „×“ gemischte Produkte:

$$(\boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \boldsymbol{\tau}_1^{(2)})(\nu(1)\, \pi(2)) = (\boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \times \boldsymbol{\tau}_1^{(2)}) \cdot (\nu(1) \times \pi(2))$$
$$= (\boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \cdot \nu(1)) \times (\boldsymbol{\tau}_1^{(2)} \cdot \pi(2)).$$

In Worten: „Jeder Operator wirkt nur auf die Eigenfunktionen *seines* Teilchens; mit Operatoren und Eigenfunktionen *anderer* Teilchen ist er vertauschbar“.

Die genauere Begründung dieser Regeln, die wir hier nur andeuten wollen, ergibt sich daraus, daß die Multiplikation „ד von Matrizen verschiedener Teilchen als „direkte Multiplikation“ (Übermatrixbildung) von Matrizen aufgefaßt werden muß:

$$(A \times B)_{iklm} = A_{ik} B_{lm},$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} A B_{11} & A B_{12} \\ & \\ A B_{21} & A B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} B_{11} & A_{12} B_{11} & A_{11} B_{12} & A_{12} B_{12} \\ \vdots & & & \\ A_{21} B_{21} & \cdot & \cdot & A_{22} B_{22} \end{bmatrix}. \qquad (93.22)$$

Beispiel:

$$\boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \times \boldsymbol{\tau}_3^{(2)} = \boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \times \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \cdot 1 & \\ & \boldsymbol{\tau}_1^{(1)} \cdot (-1) \end{vmatrix}_{1,2} = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & \end{bmatrix}_{1,2}.$$

In Worten: „Um die Gesamtmatrix $A \times B$ zu erhalten, setze man den vorderen Faktor als Ganzes in den hinteren ein und schreibe die entstehenden Untermatrizen ($1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1^{(1)}$ und $-1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1^{(1)}$) aus". Eine solche Vorschrift für das Ausmultiplizieren ist notwendig, um die *Anordnung* der Elemente in $A \times B$ eindeutig festzulegen, was das allgemeine Multiplikationsgesetz $(A \times B)_{iklm} = A_{ik} B_{lm}$ nicht tut. (Analoge Vorschrift bei gewöhnlicher Matrixmultiplikation: „Zeile mal Spalte".)

Da also „$\times$" = Direktprodukt, folgt selbstverständlich Regel 2. Nach unserer Vorschrift ist die Anordnung der Elemente durch die Faktorenreihenfolge festgelegt. Damit in allen Direktprodukten dasselbe Anordnungsrezept in bezug auf die verschiedenen Teilchen befolgt wird, muß stets dieselbe Teilchenreihenfolge eingehalten werden, was auf Regel 3 führt. Weiter rechnet man leicht nach, daß

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C) \times (B \cdot D) \tag{93.23}$$

ist, was die Ausdehnung der Regel 3 auf „gemischte" Produkte liefert.

Regel 1 erhält man, wenn man bei der Addition von Matrizen verschiedener Teilchen jeden Summanden, der zu einem bestimmten Teilchen gehört, als mit den Einheitsmatrizen der anderen Teilchen direkt multipliziert auffaßt. Dann kann die Addition als gewöhnliche Matrixaddition der entstandenen Übermatrizen aufgefaßt werden.

Beispiele:

$$\boldsymbol{e}^{(1)} + \boldsymbol{e}^{(2)} = \boldsymbol{e}^{(1)} \times \boldsymbol{1}^{(2)} + \boldsymbol{1}^{(1)} \times \boldsymbol{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}_1 \times \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}_1 \times \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{1,2} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}_{1,2}.$$

(D. h., das Zwei-Nukleonen-System hat die Ladungseigenwerte $Z = 0, 1, 1, 2$.)

$$\boldsymbol{e}^{(1)} + \boldsymbol{e}^{(2)} + \boldsymbol{e}^{(3)} = \boldsymbol{e}^{(1)} \times \boldsymbol{1}^{(2)} \times \boldsymbol{1}^{(3)} + \boldsymbol{1}^{(1)} \times \boldsymbol{e}^{(2)} \times \boldsymbol{1}^{(3)} + \boldsymbol{1}^{(1)} \times \boldsymbol{1}^{(2)} \times \boldsymbol{e}^{(3)}.$$

d) Das Pauli-Prinzip

Wir haben bis jetzt überwiegend formal die Eigenschaften der Ladungsoperatoren $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ und $\boldsymbol{T}_3$ und der zugehörigen Ladungseigenfunktionen untersucht. Die volle *physikalische* Bedeutung dieses Formalismus zeigt sich erst, wenn wir die *Gesamt*-eigenfunktion eines Nukleonen-Systems betrachten.

Für das einzelne Nukleon konnten wir sie (S. 455) in den beiden Formen schreiben

$$\psi = \psi(1) = \psi(\mathfrak{r}, \sigma, \tau) \equiv \varphi(\mathfrak{r}, \sigma) \cdot \eta.$$

Ganz analog hat die Eigenfunktion eines Zwei-Nukleonen-Systems in den beiden Schreibweisen die Gestalt[1])

$$\psi = \psi(1, 2) = \psi(\mathfrak{r}_1 \sigma_1 \tau_1, \mathfrak{r}_2 \sigma_2 \tau_2) \equiv \varphi(\mathfrak{r}_1 \sigma_1, \mathfrak{r}_2 \sigma_2) \cdot \eta(1, 2), \tag{93.24}$$

wobei φ die „alte" Eigenfunktion unseres Systems o h n e Isospinformalismus darstellt.

---

[1]) Die allgemeinste mögliche Form von $\psi(1, 2)$ ist eine Linearkombination von Termen der Form $\varphi \cdot \eta$ (siehe z. B. Seite 464).

Solange wir zunächst Neutron und Proton als verschiedene Teilchen ansehen („alte" Auffassung), würden wir auf Grund des Pauli-Prinzips die Antisymmetrie der Orts-Spin-Eigenfunktion φ im n-n-Fall und im p-p-Fall verlangen:

$$\varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2) = -\varphi(\mathfrak{r}_2\sigma_2, \mathfrak{r}_1\sigma_1).$$

Für das n-p-System würden wir dagegen nach der „alten" Auffassung keine bestimmte Symmetrie von φ verlangen, da es als System zweier verschiedener Teilchen angesehen wird.

Fassen wir jedoch von nun an wieder Neutron und Proton als zwei Zustände desselben Teilchens Nukleon auf, dann haben wir auch im n-p-Fall zwei identische Teilchen (mit „Isospin auf" und „ab"). Da jetzt die Ladung ebenso wie Ort und Spin als Variable angesehen wird, ist es in dieser Auffassung konsequent, das *Pauli-Prinzip* auf die Ladungsvariable auszudehnen, indem wir *Antisymmetrie der Gesamteigenfunktion ψ bei gleichzeitiger Vertauschung aller fünf Koordinaten der beiden Nukleonen fordern*:

$$\psi(\mathfrak{r}_1\sigma_1\tau_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2\tau_2) = -\psi(\mathfrak{r}_2\sigma_2\tau_2, \mathfrak{r}_1\sigma_1\tau_1) \tag{93.25}$$

für alle Werte von τ_1, τ_2.

Die beiden darin enthaltenen Gleichungen für den n-n- ($\tau_1 = \tau_2 = +1$) und den p-p-Zustand ($\tau_1 = \tau_2 = -1$) sind erfüllt, denn es ist ja nach (93.24) und (93.20)

$$\psi(\mathfrak{r}_1\sigma_1 + 1, \mathfrak{r}_2\sigma_2 + 1) = \varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2) \cdot \nu\nu \qquad nn,$$

$$\psi(\mathfrak{r}_1\sigma_1 - 1, \mathfrak{r}_2\sigma_2 - 1) = \varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2) \cdot \pi\pi \qquad pp,$$

und darin ist die „alte" Eigenfunktion φ antisymmetrisch gegen gleichzeitige Orts- und Spinvertauschung, der Ladungsfaktor symmetrisch, das Produkt also antisymmetrisch gegen gleichzeitige Orts-, Spin- und Ladungsvertauschung. Für den n-n- und den p-p-Zustand bedeutet also das erweiterte Pauli-Prinzip keine Einschränkung gegenüber dem „alten".

Dagegen scheint es im n-p-Zustand eine zusätzliche Einschränkung zu bedeuten; denn da hier $\varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2)$ keine bestimmte Symmetrieeigenschaft bei gleichzeitiger Ort- und Spinvertauschung hat, kann eine solche auch bei

$$\begin{aligned} &\varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2) \cdot \nu\pi \quad (= \psi_{12}(1,2)), \\ &\varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2) \cdot \pi\nu \quad (= \psi_{21}(1,2)) \end{aligned} \tag{93.26}$$

und ebenso bei

$$\varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\pi + \pi\nu),$$

$$\varphi(\mathfrak{r}_1\sigma_1, \mathfrak{r}_2\sigma_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\pi - \pi\nu)$$

gegenüber gleichzeitiger Vertauschung aller 5 Koordinaten nicht vorhanden sein.

Trotzdem können wir eine vollkommen antisymmetrische Gesamteigenfunktion aus φ und Ladungsfunktionen aufbauen, indem wir bilden (vgl. (93.26))

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{12}(1,2) - \psi_{12}(2,1)) .$$

Die Antisymmetrie dieses ψ wird deutlich, wenn man es umschreibt zu

$$\begin{aligned}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{12}(1,2) - \psi_{12}(2,1)) &= \frac{1}{2} [\varphi(\mathfrak{r}_1 \sigma_1, \mathfrak{r}_2 \sigma_2) + \varphi(\mathfrak{r}_2 \sigma_2, \mathfrak{r}_1 \sigma_1)] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu\pi - \pi\nu) \\ &+ \frac{1}{2} [\varphi(\mathfrak{r}_1 \sigma_1, \mathfrak{r}_2 \sigma_2) - \varphi(\mathfrak{r}_2 \sigma_2, \mathfrak{r}_1 \sigma_1)] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu\pi + \pi\nu) \\ &\equiv \varphi_{\mathrm{sym}} \cdot \eta_{\mathrm{anti}} + \varphi_{\mathrm{anti}} \cdot \eta_{\mathrm{sym}} .\end{aligned}$$

Bezeichnenderweise erscheinen hier ganz von selbst unsere Ladungsfunktionen η_0^0 und η_1^0 als Ladungsfaktoren der beiden Summanden.

Damit läßt sich also auch im n-p-Zustand aus jeder „alten" Ort-Spin-Eigenfunktion mit beliebiger Symmetrieeigenschaft und den Ladungsfunktionen η_0^0 und η_1^0 durch rein formale Operationen (Bilden von $\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{12}(1,2) - \psi_{12}(2,1))$ eine antisymmetrische Gesamteigenfunktion aufbauen.

In diesem Sinne gilt also allgemein:

Das erweiterte Pauli-Prinzip für Nukleonen ist ohne zusätzliche Einschränkungen für die Eigenfunktionen erfüllbar, wenn das „alte" Pauli-Prinzip für Neutronen und Protonen (als verschiedene Teilchen aufgefaßt) erfüllt ist.

Noch deutlicher erkennt man, daß das erweiterte Pauli-Prinzip *physikalisch* nichts Neues gegenüber dem „alten" liefert, wenn man die Zustände zweier Nukleonen im Zentralfeld betrachtet. Nach der „alten" Auffassung waren die in Tabelle 58 enthaltenen Zustände erlaubt (vgl. Beginn von § 89).

Tabelle 58. Erlaubte Zustände nach der „alten" Auffassung des Pauli-Prinzips

n-n-	n-p-		p-p-	System
^1S	^1S	^3S	^1S	
^3P	^3P	^1P	^3P	
^1D	^1D	^3D	^1D	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
antisym.	antisym.	sym.	antisym.	Ort-Spin-Eigenfunktion

Verwenden wir das Termsymbol ^{2S+1}L als Abkürzung für die zugehörige Orts-Spin-Eigenfunktion, dann haben wir nach der „neuen" Auffassung die in Tabelle 59 zusammengestellten erlaubten Zustände (Eigenfunktionen).

Tabelle 59. Erlaubte Zustände nach der „neuen" Auffassung

n-n-	n-p-		p-p-	Zustand (System)
$^1S \cdot \eta_1^1$	$^1S \cdot \eta_1^0$	$^3S \cdot \eta_0^0$	$^1S \cdot \eta_1^{-1}$	
$^3P \cdot \eta_1^1$	$^3P \cdot \eta_1^0$	$^1P \cdot \eta_0^0$	$^3P \cdot \eta_1^{-1}$	
$^1D \cdot \eta_1^1$	$^1D \cdot \eta_1^0$	$^3D \cdot \eta_0^0$	$^1D \cdot \eta_1^{-1}$	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
antisym.	antisym.	antisym.	antisym.	Gesamt-eigenfunktion

Das sind aber genau dieselben Zustände wie oben, nur jeder mit einem Ladungsfaktor versehen; insbesondere hat das n-p-System auch jetzt wieder doppelt soviel Zustände wie das n-n- oder p-p-System. Diese Verdopplung entstand nach der alten Auffassung, weil das (alte) Pauli-Prinzip auf das n-p-System nicht angewendet wurde. Nach der neuen Auffassung erhält man sie wieder, obwohl jetzt auch das n-p-System dem (neuen) Pauli-Prinzip unterworfen wird, weil für das n-p-System gerade doppelt soviele Ladungseigenfunktionen existieren wie für jedes der beiden anderen Systeme.

Wir wissen aus § 88, daß beim n-p-System nur der ^3S-Zustand gebunden ist (Deuteron), schon der ^1S-Zustand tritt nur als Streuzustand („virtueller Zustand") auf. Sind die Kernkräfte ladungsunabhängig, dann wirken nach der Definition der Ladungsunabhängigkeit von S. 448 im ^1S-Zustand des n-n- und p-p-Systems dieselben Kernkräfte, wie im ^1S-Zustand des n-p-Systems; dieser Zustand sollte also auch bei nn und pp ungebunden sein. (Die zusätzliche Coulomb-*Abstoßung* im p-p-Fall ändert daran nichts.) Der ^1S-Zustand ist aber für n-n- und p-p-System der niedrigste Zustand, da beide keinen ^3S-Zustand haben (vgl. Tabellen 58 und 59). Deshalb existiert bei ladungsunabhängigen Kernkräften für das n-n- und p-p-System überhaupt kein gebundener Zustand. Daß man experimentell tatsächlich kein „Diproton" (He^2) und „Dineutron" gefunden hat, ist damit ein Hinweis auf die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte.

Wir haben das *erweiterte Pauli-Prinzip* hier zunächst nur für das Zweinukleonensystem formuliert. Es läßt sich selbstverständlich auf Mehrnukleonensysteme übertragen in der Form:

Die Gesamteigenfunktion ψ eines Mehrnukleonensystems muß antisymmetrisch gegenüber gleichzeitiger Vertauschung aller fünf Koordinaten irgend zweier Nukleonen des Systems sein:

$$\psi(\ldots \mathfrak{r}_i \sigma_i \tau_i \ldots \mathfrak{r}_k \sigma_k \tau_k \ldots) = -\psi(\ldots \mathfrak{r}_k \sigma_k \tau_k \ldots \mathfrak{r}_i \sigma_i \tau_i \ldots). \quad (93.27)$$

e) Ladungserhaltung, Ladungssymmetrie und Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte

Wir haben bisher Potentiale kennengelernt, die von Ort und Spin der Nukleonen abhängen: $V = V(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$. Wir werden bald sehen, daß wir Potentiale brauchen, die analog auch von den Isospins abhängen:

$$V = V(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) .$$

Mittels unseres Isospin-Formalismus sind wir imstande, genau anzugeben, wann ein bestimmtes Potential und damit ein bestimmter Hamilton-Operator zur Ladungsunabhängigkeit führt. Dabei gehen wir in drei Schritten vor und beschränken uns der Einfachheit halber auf das Zwei-Nukleonen-System.

Als erstes fordern wir *Ladungserhaltung*, d.h., $[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{Q}] = 0$. Wegen $\boldsymbol{Q} = \frac{A}{2} - \boldsymbol{T}_3$ ist das gleichbedeutend mit $[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}_3] = 0$. Man rechnet leicht nach, daß das erfüllt ist, wenn im Potential und damit in $\boldsymbol{H}$ die Isospins in einer der folgenden Formen auftreten:

$$\mathbf{1},\ (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2),\quad \tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)},\ \tau_3^{(1)} \pm \tau_3^{(2)},\ [\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2]_3 \equiv \tau_1^{(1)}\tau_2^{(2)} - \tau_2^{(1)}\tau_1^{(2)} :$$

Ladungserhaltung durch die Kernkräfte ist gesichert, wenn

$$[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}_3] = 0$$

gilt, *d. h.*,

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\mathbf{1}, (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2), \quad \tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)}, \quad \tau_3^{(1)} \pm \tau_3^{(2)}, \quad [\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2]_3) : \qquad (93.28)$$

Man kann leicht zeigen, daß die sechs zugelassenen Isospinausdrücke die *einzigen* sind, die sich aus den Komponenten $\vec{\tau}_1$ und $\vec{\tau}_2$ bilden lassen und mit $\boldsymbol{T}_3$ vertauschbar sind [R48-1], S. 313, [S53-1], S. 177. Man sieht, daß alle sechs invariant gegenüber einer Drehung des Ladungsraums um die 3-Achse sind.

Zweitens fordern wir *Ladungssymmetrie* und behaupten:

Ladungssymmetrie der Kernkräfte liegt vor, wenn

$$[\boldsymbol{H}, \tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)}] = 0$$

gilt, d.h.,

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\mathbf{1}, (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2), \tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)}) . \qquad (93.29)$$

Um das zu beweisen, rechnet man zunächst leicht nach, daß von den sechs ladungserhaltenden Ausdrücken in (93.28) nur die ersten drei mit $\tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)}$ vertauschbar sind.

Weiter findet man, daß nur diese drei in Anwendung auf den n-n- und den p-p-Zustand den gleichen (nicht verschwindenden) Eigenwert haben, z. B.

$$\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)}\nu\nu = (+1)(+1)\nu\nu = +1\cdot\nu\nu,$$
$$\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)}\pi\pi = (-1)(-1)\pi\pi = +1\cdot\pi\pi.$$

Die anderen drei ladungserhaltenden Ausdrücke dagegen geben in Anwendung auf $\nu\nu$ und $\pi\pi$ entweder verschiedene Eigenwerte oder den Eigenwert 0; ein Potential, das $\tau_3^{(1)} \pm \tau_3^{(2)}$ oder $[\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2]_3$ enthält, gibt also entweder verschiedene oder überhaupt keine Kräfte zwischen zwei Neutronen und zwei Protonen. Man sieht, daß die drei ladungssymmetrischen Ausdrücke außer der Invarianz gegenüber einer Drehung um die 3-Achse auch Invarianz gegenüber gleichzeitiger Umkehrung der 1- und der 3-Achse ($\tau_1 \rightarrow -\tau_1$, $\tau_3 \rightarrow -\tau_3$) oder — was dasselbe ist — gegenüber Drehung um 180° um die 2-Achse besitzen, die anderen drei dagegen nicht.

Drittens schließlich fragen wir nach der *Ladungsunabhängigkeit*:

Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte liegt vor, wenn

$$[H, \vec{T}] = 0$$

gilt, d.h.,

$$V = V(1, (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)). \tag{93.30}$$

$[H, \vec{T}] = 0$ bedeutet natürlich $[H, T_1] = [H, T_2] = [H, T_3] = 0$. Statt von Ladungsunabhängigkeit kann man deshalb ebensogut von „Erhaltung des (Gesamt-) Isospins“ sprechen. Wieder rechnet man leicht nach, daß von den drei ladungssymmetrischen Ausdrücken nur 1 und $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$ mit allen drei Komponenten von $\vec{T}$ vertauschbar sind. Daß diese beiden die Ladungsunabhängigkeit sichern, ergibt sich daraus, daß sie an den drei Ladungseigenfunktionen gleicher Symmetrie — den Triplett-Funktionen — den gleichen Eigenwert erzeugen ($\tau_3^{(1)} \tau_3^{(2)}$ dagegen nicht!):

$$1\,\eta = 1 \cdot \eta$$

$$(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)\,\eta = (2\vec{T}^2 - 3 \cdot 1)\,\eta = (2\,T(T+1) - 3)\,\eta\,,$$

$$T = 1 \quad \text{für} \quad \eta = \eta_1^1 = \nu\nu\,,$$

$$\eta = \eta_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\pi + \pi\nu)\,,$$

$$\eta = \eta_1^{-1} = \pi\pi\,.$$

An der (antisymmetrischen) Singulettfunktion $\eta_0{}^0$ dagegen erzeugt zwar 1 trivialerweise denselben Faktor, jedoch $(\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$ einen anderen Faktor als an den (symmetrischen) Triplettfunktionen. Die Wirkung auf $\eta_0{}^0$ interessiert aber hier gar nicht, denn Ladungsunabhängigkeit heißt Gleichheit der Kernkräfte in Zuständen, die sich nur durch die Ladungen unterscheiden, also *dieselbe Orts-Spin-Funktion* haben. Das heißt insbesondere, daß die zu vergleichenden Zustände gleiche Symmetrie der Orts-Spin-Funktion haben und folglich *gleiche Symmetrie der Ladungsfunktionen* haben müssen, was nur bei den drei Triplettfunktionen der Fall ist. Über die Kernkräfte im Singulett-Ladungszustand sagt also die Ladungsunabhängigkeit gar nichts aus.

Man sieht, daß die beiden ladungsunabhängigen Isospinausdrücke im Gegensatz zu $\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)}$ invariant gegenüber einer Drehung des Ladungsraumes um eine *beliebige* Achse (durch den Ursprung) sind; darin sind die beiden vorhergehenden Fälle mit enthalten. Da also jetzt keine Richtung im Ladungsraum mehr ausgezeichnet ist, kann der Eigenwert E nicht mehr von T_3 – dem Eigenwert eines Operators, der einer speziellen Richtung zugeordnet ist – abhängen: $E = E_{nTT_3} = E_{nT}$. Wegen $Z = \frac{A}{2} - T_3$ heißt Unabhängigkeit von T_3 aber *Unabhängigkeit von der Ladung.* Es liegt hier der analoge Fall vor wie bei der Schrödinger-Gleichung eines Teilchens im Zentralfeld $V(r)$: Da dort $[\boldsymbol{H}, \mathfrak{L}] = 0$ und Invarianz gegenüber beliebigen Drehungen im Ortsraum vorliegt, hängt $E = E_{nlm} = E_{nl}$ nicht vom Eigenwert m von $\mathfrak{L}_z$ ab.

Aus $[\boldsymbol{H}, \vec{\boldsymbol{T}}] = 0$ folgt $[\boldsymbol{H}, \vec{\boldsymbol{T}}^2] = [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}_3] = 0$, so daß *bei Ladungsunabhängigkeit gemeinsame Eigenfunktionen von $\boldsymbol{H}$, $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ und $\boldsymbol{T}_3$ existieren.* Das ist der eigentliche Grund, weshalb wir früher die gemeinsamen Eigenfunktionen von $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ und $\boldsymbol{T}_3$ gesucht haben: Sie bilden den Ladungsteil der Gesamteigenfunktion bei ladungsunabhängigen Kernkräften. –

Unsere Beschränkung auf das Zwei-Nukleonen-System war für die drei Eigenschaften Ladungserhaltung, -symmetrie und -unabhängigkeit nicht wesentlich. Die ausgesprochenen Sätze gelten (bei Beschränkung auf Zweiteilchenpotentiale) in derselben Form für Mehrnukleonen-Systeme, nur ist dann unter $\boldsymbol{T}_3$ und $\vec{\boldsymbol{T}}$ der jeweilige Gesamtoperator des Mehrnukleonen-Systems zu verstehen, $\tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)}$ durch $\tau_2^{(1)} \cdot \tau_2^{(2)} \cdot \ldots \cdot \tau_2^{(A)}$ und die Teilchennummer 1 und 2 durch i und k zu ersetzen. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

Aus Gründen, die wir später einsehen werden, nennt man Potentiale ohne Abhängigkeit vom Isospin (1) *neutrale* Potentiale, solche mit der Abhängigkeit $(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)$ *symmetrische* Potentiale[1]) und mit $\tau_1^{(1)}\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)}$ *geladene.* Demnach sind neutrale und symmetrische Potentiale ladungsunabhängig, geladene dagegen sind wegen $\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)} = (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2) - (\tau_1^{(1)}\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)})$ ladungssymmetrische Potentiale.

Die bei der Ladungserhaltung, -symmetrie und -unabhängigkeit festgestellten Drehinvarianzen sind gleichbedeutend mit den jeweils vorausgesetzten Vertauschbarkeitseigenschaften, da der Operator $\boldsymbol{D}_k(\alpha)$ einer Drehung um einen Winkel α um die k-te Achse im Ladungsraum durch $\boldsymbol{T}_k$ bestimmt ist:

$$\boldsymbol{D}_k(\alpha) = \boldsymbol{1} + \frac{i\alpha}{1!}\boldsymbol{T}_k + \frac{i^2\alpha^2}{2!}\boldsymbol{T}_k^2 + \cdots \equiv e^{i\alpha\boldsymbol{T}_k}.$$

Vertauschbarkeit mit $\boldsymbol{T}_k$ bedeutet also Vertauschbarkeit mit $\boldsymbol{D}_k$, d.h. Invarianz gegen $\boldsymbol{D}_k$: *Ladungserhaltung = Invarianz gegen Drehung α um dritte Achse, Ladungsunabhängigkeit = Invarianz gegen Drehung α um eine beliebige Achse* (zusammensetzbar aus drei Drehungen um die drei Koordinatenachsen).

1) Nicht zu verwechseln mit ladungssymmetrischen Potentialen: Symmetrische Potentiale sind stets ladungssymmetrisch, aber nicht umgekehrt: $\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)}$!

Ladungssymmetrie = Invarianz gegen Drehung um 180° um die zweite Achse:

$$e^{i\pi T_2} = e^{i\frac{\pi}{2}(\tau_2^{(1)}+\tau_2^{(2)})} = e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2^{(1)}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2^{(2)}} \quad \text{(letzteres, weil } [\boldsymbol{\tau}_2^{(1)}, \boldsymbol{\tau}_2^{(2)}] = 0\text{)};$$

da
$$e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2^{(k)}} \equiv 1 + \frac{i\frac{\pi}{2}}{1!}\boldsymbol{\tau}_2^{(k)} + \cdots = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + i\,\boldsymbol{\tau}_2^{(k)} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i\boldsymbol{\tau}_2^{(k)},$$

ist
$$e^{i\pi T_2} = i\boldsymbol{\tau}_2^{(1)} \cdot i\boldsymbol{\tau}_2^{(2)} = -\boldsymbol{\tau}_2^{(1)}\boldsymbol{\tau}_2^{(2)}.$$

Man überzeuge sich an Hand der Abbildungen 180 und 181 anschaulich von der Wirkung der genannten Operationen. Z. B. bewirkt die Operation der Ladungssymmetrie: $\nu \leftrightarrow \pi$ bzw. $\nu\nu \leftrightarrow \pi\pi$; η_1^0 und η_0^0 bleiben unverändert.

§ 94. Termsysteme leichter Kerne

Wir wollen versuchsweise annehmen, daß in allen Kernen die Kräfte zwischen je zwei Nukleonen annähernd dieselben sind wie die am Zweinukleonensystem beobachteten; insbesondere wollen wir im folgenden überhaupt nur die eine Eigenschaft der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte voraussetzen. Man erwartet dann in einer ersten oberflächlichen Orientierung, daß die Termsysteme benachbarter isobarer Kerne starke Ähnlichkeiten aufweisen. Denn wenn wir von einem Kern Z, N zu einem benachbarten isobaren Kern $Z - 1$, $N + 1$ übergehen, bedeutet das nur Ladungswechsel eines Nukleons, und das soll nach Voraussetzung an den Kernkräften nichts ändern. Die Zustände beider Kerne sollten also gleich sein und damit auch ihre Termsysteme, wenn nur die Kernkräfte wirksam wären. In Wahrheit liegen die Verhältnisse etwas komplizierter, als wir sie eben schilderten: Die Termsysteme benachbarter isobarer Kerne mit ladungsunabhängigen Kräften sind, wie wir noch sehen werden, nicht vollkommen identisch, stimmen aber wenigstens in einem Teil ihrer Zustände (Terme) überein; letztere nennen wir „(einander) entsprechende Zustände“.

In der Natur kommen zu den Kernkräften noch Wirkungen hinzu, die ebenfalls das Termsystem mitbestimmen, aber die Protonen vor den Neutronen (bzw. umgekehrt) auszeichnen, also nicht ladungsunabhängig sind. Am stärksten machen sich dabei die Unterschiede durch das Coulomb-Feld der Protonen *(„Coulomb-Effekt“)* und durch die Massendifferenz zwischen Neutron und Proton *(„Massen-Effekt“)* bemerkbar. Der Coulomb-Effekt wirkt so, daß z.B. im Kern I ($Z - 1$, $N + 1$) ein Proton weniger zur Coulomb-Abstoßung beiträgt als in II (Z, N); I hat deshalb etwas stärkere Bindung und damit tiefer liegende Terme als II. Der Masseneffekt wirkt dagegen in umgekehrter Richtung: Da das Neutron schwerer ist, als das Proton ($M_n c^2 - M_p c^2 = 1{,}3$ MeV) hat z.B. $Z - 1$, $N + 1$ einen um 1,3 MeV höheren Energieinhalt als Z, N und damit höher liegende Terme. Insgesamt wird die Differenz beider Effekte zu beobachten sein, wobei sich zeigt, daß der Coulomb-Effekt stets überwiegt.

Ehe man also zwei empirische Termsysteme benachbarter isobarer Kerne I und II vergleichen kann, muß man für beide Effekte eine Korrektur anbringen, indem

man in unserem Beispiel alle Terme von I um 1,3 MeV nach oben und um die Differenz der Coulomb-Energien von I und II nach unten schiebt. Die Coulomb-Energien berechnet man dabei, indem man die Kerne I und II als $(Z-1)$-fach bzw. Z-fach homogen geladene Kugeln vom Radius $R = 1{,}4 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$[cm] ansieht:

$$\Delta E_{\mathrm{Coul}} = \frac{3}{5}\,\frac{e^2}{R}\,[Z^2 - (Z-1)^2] = (2Z-1)\,\frac{3}{5}\,\frac{e^2}{R}\,.$$

Unser einfaches Korrektur-Verfahren, **alle** Terme eines Kerns um den gleichen Betrag zu verschieben, wird sicher nur so lange brauchbar sein, als Coulomb- und Masseneffekt nicht zu stark werden, d.h. noch als „Störung" angesehen werden können (vgl. S. 449). Das ist nur für die leichten Kerne ($A \leqq 25$) der Fall, denn schon bei mittleren Kernen führt der Coulomb-Effekt zu Abweichungen der stabilen Kerne von $Z = N$; das bedeutet offenbar, daß er nicht mehr nur einen additiven Energiebeitrag liefert, sondern in die Struktur des Kernes selbst eingreift. Nur bei leichten Kernen können wir deshalb hoffen, die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte im wesentlichen ungestört beobachten zu können.

a) Experimentelles Material

In den Abbildungen 182 bis 185 sehen wir einige typische Termsysteme leichter isobarer Kerne. Abb. 182 zeigt die beiden Spiegelkerne B^{11} und C^{11}, wobei durch die beiden Korrekturen das Termsystem von B^{11} (um ~ 2 MeV) angehoben wurde, so daß die beiden Grundzustände auf nahezu gleiche Höhe kommen; bei Spiegelkernen sind nämlich die Grundzustände einander entsprechende Zustände (s. Abschn. b). Man sieht, daß bis etwa 8 MeV jedem Term von B^{11} ein etwa in gleicher Höhe liegender Term von C^{11} entspricht: Die Termsysteme dieser benachbarten isobaren Kerne sind tatsächlich im wesentlichen identisch. Zwei solche einander entsprechende Terme in den beiden Ladungszuständen B^{11} und C^{11} des Elf-Nukleonen-Systems nennen wir „Ladungsdublett" des Elf-Nukleonen-Systems. Bei O^{17}, F^{17} (Abb. 183) und allen anderen Paaren von Spiegelkernen (vgl. [B 57-1], [A 55-1], [L 52-1]) finden sich ebenfalls zahlreiche Ladungsdubletts, wenn auch

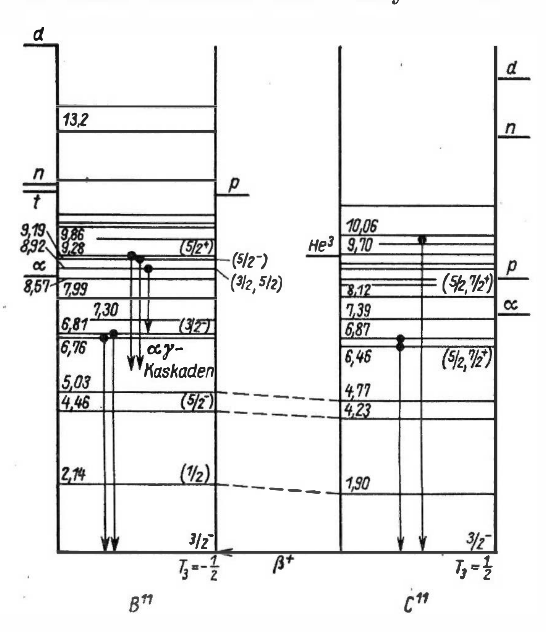


Abb. 182. Termsysteme für $A = 11$.
– – – – Gesicherte Ladungsdubletts.
(Nach BURCHAM [B 57-1])

nicht in allen Fällen so deutlich wie für $A=11$. Ladungsdubletts scheinen also für isobare Kerne mit ungeradem A charakteristisch zu sein.

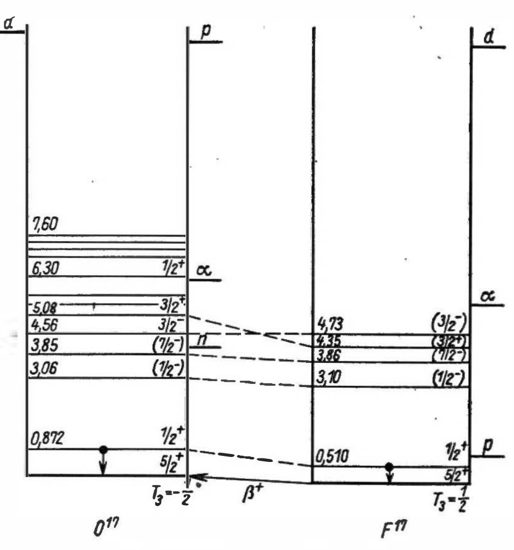


Abb. 183. Termsysteme für $A = 17$.
– – – – Gesicherte Ladungsdubletts.
(Nach Burcham [B 57-1])

Leider beweist die weitgehende Übereinstimmung der Termsysteme zweier Spiegelkerne nicht unsere Ladungsunabhängigkeitshypothese, sondern nur die der Ladungssymmetrie (vgl. S. 449). Wir machen uns das am Beispiel $A=11$ klar. Beide Kerne B^{11} und C^{11} haben denselben „Rumpf" von 5 Protonen + 5 Neutronen; Unterschiede zwischen den beiden können deshalb nur dadurch entstehen, daß das „letzte" (elfte) Nukleon je nach seinem Ladungszustand verschiedene Kräfte erfährt. In B^{11} steht das letzte Neutron unter der fünffachen Wirkung der n-n- und der fünffachen Wirkung der n-p-Kraft, in C^{11} dagegen das letzte Proton unter der fünffachen Wirkung der p-p- und ebenso oft der n-p-Kraft. Falls also die n-n-Kraft gleich der p-p-Kraft ist, erfährt das letzte Nukleon in beiden Fällen dieselbe Kraftwirkung, auch dann, wenn die n-p-Kraft von der n-n- = p-p-Kraft abweicht.

Abb. 184 zeigt die drei Isobare C^{14}, N^{14}, O^{14}, wobei durch die Korrekturen das Termsystem von C^{14} (um 1,6 MeV) angehoben und das von O^{14} (um 2,3 MeV) gesenkt wurde, so daß die Grundzustände von C^{14} und O^{14} und der erste angeregte Zustand von N^{14} auf fast gleiche Höhe kommen. Es wird sich bald zeigen, daß im jetzigen Beispiel diese drei Zustände einander entsprechen. Fast die gleiche Situation liegt bei der Triade $A = 10$ mit Be^{10}, B^{10}, C^{10} in Abb. 185 vor.

Wir finden, daß jetzt die Termsysteme benachbarter Kerne nicht mehr identisch sind, doch sieht man auch hier eine Reihe interessanter Regelmäßigkeiten: Statt Dubletts findet man Tripletts, nämlich Terme, die in allen drei Kernen etwa in der gleichen Höhe auftreten, und Singuletts, also Terme, die nur in einem Kern auftreten. Es fällt auf, daß die Singuletts nur im mittleren Kern N^{14} mit $T_3 = 0$ auftreten, die Terme der beiden Außenkerne $T_3 = \pm 1$ dagegen – soweit zu übersehen – stets zu einem Triplett gehören, so daß der mittlere Kern dichter liegende Terme hat als seine Nachbarn. Dieselben Regelmäßigkeiten finden sich mehr oder weniger deutlich bei anderen „Triaden" von Isobaren mit geradem A (vgl. [B 57-1], [L 52-1]). Für isobare Kerne mit geradem A scheinen also Ladungstripletts ($T_3 = +1, 0, -1$) und Ladungssingletts ($T_3 = 0$) charakteristisch zu sein. Abschließend merken wir noch an, daß die geringen Verschiebungen von

entsprechenden Termen gegeneinander in den Abbildungen 182 bis 185 zeigen, daß unsere einfache Coulomb- und Massenkorrektur zwar nicht exakt richtig, aber doch brauchbar ist.

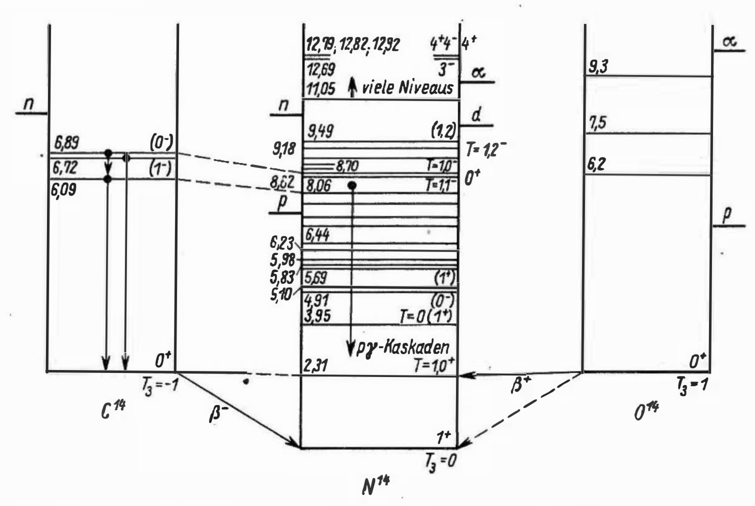


Abb. 184. Termsysteme für $A = 14$. ---- Gesicherte Ladungstripletts. (Nach BURCHAM [B'57-1])

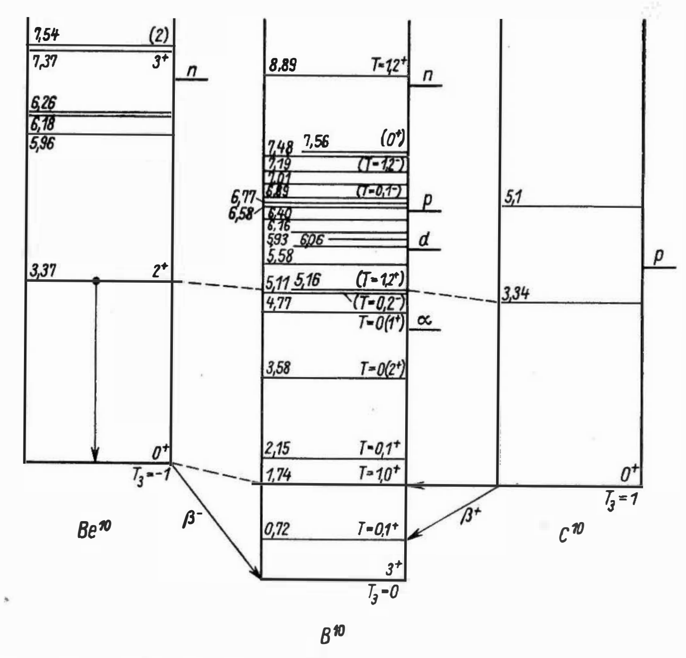


Abb. 185. Termsysteme für $A = 10$. ---- Gesicherte Ladungstripletts. (Nach BURCHAM [B57-1])

b) Vergleich mit der Theorie

Wir wollen zeigen, daß die eben experimentell gefundenen Regelmäßigkeiten theoretisch aus der Ladungsunabhängigkeitshypothese folgen und nehmen dazu an, daß zwischen den Nukleonen eines A-Nukleonensystems rein ladungsunabhängige Kräfte (Potentiale) wirken, vernachlässigen also Coulomb- und Masseneffekt u.ä. Wir wissen, daß dann der Hamilton-Operator $\boldsymbol{H}$ nicht nur mit $\boldsymbol{T}_3$ (Ladungserhaltung), sondern auch mit $\vec{\boldsymbol{T}}$ und folglich mit $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ vertauschbar ist, so daß sich für $\boldsymbol{H}$, $\vec{\boldsymbol{T}}^2$ und $\boldsymbol{T}_3$ ein gemeinsames Eigenfunktionssystem angeben läßt, dessen Eigenwerte E_{nT} nicht von T_3 (Z) abhängen.

Es liegt demnach Entartung vor: Alle Eigenwerte (Terme) E_{nT} zu einem festen n und T und den für dieses T erlaubten Werten $T_3 = -T, \ldots, +T$ sind gleich; sie bilden ein entartetes Multiplett von $2T+1$ Termen. Da nun T_3 die einzelnen Terme des Multipletts numeriert und den jeweiligen Neutronenüberschuß bedeutet, gehören die einzelnen Terme des Multipletts zu benachbarten isobaren Kernen A. Beachtet man (93.19) die Wertebereiche von $T = \frac{A}{2}, \frac{A}{2} - 1, \ldots, \frac{1}{2}$ oder 0 und zu jedem T zugehörig $T_3 = -T, -T+1, \ldots, +T$, dann bekommt man für ein festes n folgende mögliche (entartete) Ladungsmultipletts (Abb. 186):

A gerade

$T =$ 0 | 1 | 2

$T_3 =$ 0 | −1 0 1 | −2 −1 0 1 2

A ungerade

$T =$ $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$

$T_3 =$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$

Abb. 186. Mögliche Ladungsmultipletts eines A-Nukleonen-Systems bei ladungsunabhängigen Kernkräften

Für gerades A sind also als Multiplett-Typen Singulett, Triplett, Quintett, ... möglich, für ungerades A Dublett, Quartett, ..., wobei die einzelnen Terme T_3 jedes Multipletts zu dem jeweiligen isobaren Kern mit dem Neutronenüberschuß T_3 gehören. Weiter ergibt sich, daß alle Multipletts symmetrisch zum Nullpunkt der T_3-Achse sind.

Die wirklichen Termsysteme benachbarter isobarer Kerne müßten sich aus den für gerades bzw. ungerades A jeweils möglichen Multiplettypen so zusammensetzen, wie wir es z. B. in Abb. 187 schematisch gezeichnet haben.

Speziell Singuletts können danach nur für $T_3 = 0$, d.h. für Kerne mit $N = Z$ (folglich A gerade), auftreten; die drei Terme eines Tripletts ($T_3 = 1, 0, -1$) gehören zu den drei isobaren Kernen mit $Z = N - 2$, N, $N + 2$ mit geradem A; Dubletts ($T_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$) finden sich nur in Spiegelkernen: $Z = N - 1$, $N + 1$, A ungerade. Anders ausgedrückt: Zwei Kerne mit $T_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ haben alle Terme

gemeinsam; drei Kerne mit $T_3 = 1, 0, -1$ haben alle Terme gemeinsam außer den Singuletts, die nur im mittleren Kern $T_3 = 0$ auftreten. Damit haben wir alle typischen Züge wiedergefunden, die wir aus den empirischen Termsystemen leichter isobarer Kerne nach Korrektur der Ladungs- und Masseneffekte ablesen konnten. Wir hatten die Eigenwerte bisher mit E_{nT} bezeichnet, wobei wir n stillschweigend

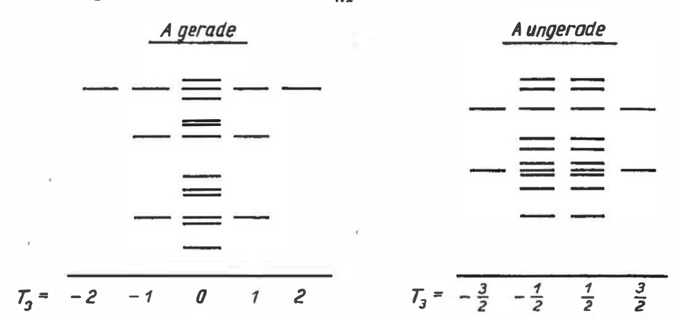


Abb. 187. Termsysteme benachbartes Isobare A (schematisch) bei ladungsunabhängigen Kernkräften

als Hauptquantenzahl ansahen, die die Eigenwerte eines festen T-Werts durchnumeriert. In Wirklichkeit hängt E jedoch noch von anderen Quantenzahlen ab (etwa von Gesamt-, Bahndrehimpuls, Spin, Parität). Wir brauchen sie nicht explizit als Indizes aufzuschreiben, wenn wir sie uns in n mit einbegriffen denken. In unseren obigen Überlegungen ist also überall statt „n fest" genauer zu lesen „alle Quantenzahlen fest, von denen E abhängt, außer T".

Das bedeutet, daß die Terme eines Ladungsmultipletts nicht nur dasselbe T, sondern auch alle anderen Quantenzahlen (J, Parität, evt. L, S) gleich haben. Damit haben wir ein wichtiges Hilfsmittel, um die zu einem Ladungsmultiplett gehörigen Terme in verschiedenen Kernen zu finden. Es sind deshalb – wo bekannt – an den Termen die Quantenzahlen J und die Parität (+ oder −) angegeben. Z.B. kann man in Abb. 184 sehen, daß wegen verschiedener J die Grundzustände von N^{14} und C^{14}, O^{14} nicht zum gleichen Ladungsmultiplett gehören können, wohl aber der erste angeregte Zustand von N^{14} ($J = 0$ gemessen) zu den Grundzuständen der beiden anderen Kerne; denn letztere haben als (g, g)-Kerne im Grundzustand $J = 0$. Aus den gleichen Gründen kann erst der zweite angeregte Zustand von B^{10} (Abb. 185) einem Ladungstriplett mit $J = 0$ angehören. Da man J (und Parität) bei zahlreichen Termen nicht kennt, muß man oft andere Eigenschaften der betreffenden Zustände heranziehen, um zu entscheiden, ob sie einander entsprechen können. So erfolgt z. B. der β-Übergang vom C^{14}-Grundzustand zu dem von N^{14} nur sehr langsam ($T_{1/2} = 5{,}6$a) und zeigt so, daß die beiden Zustände von sehr verschiedener Struktur sind. Andererseits zerfällt der Grundzustand von O^{14} sehr rasch ($T_{1/2} = 76$ sec) in den 1. angeregten Zustand von N^{14}; diese beiden Zustände haben demnach sehr ähnliche Struktur und können zum gleichen Ladungstriplett gehören. Man zeichne sich hierzu die tatsächliche relative Lage der drei Termsysteme auf. Ähnlich kann man oft Daten von γ-Übergängen heranziehen.

Auch Kernreaktionen geben Aufschluß über die Isospins von Zuständen. So findet man (Abb. 188), daß bei der Reaktion $B^{10}(d, d')B^{10*}$ der Wirkungsquerschnitt bei allen Zuständen des Endkerns B^{10} Resonanzen zeigt, nur nicht bei dem zweiten angeregten Zustand (1,74 MeV). Da das eingeschossene Teilchen d und das emittierte d' Isospin 0 haben (Grundzustand des Deuterons: ${}^3S \cdot \eta_0^0$ nach Tabelle 59, S. 465), kann sich während der Reaktion der Isospin des Kerns nicht ändern. Der Isospin des Kerns B^{10} bleibt also konstant, d.h., die Reaktion kann nur zu solchen Zuständen des Kerns B^{10} führen, die denselben Isospin haben wie der Ausgangszustand, der Grundzustand von B^{10}. Das Fehlen des zweiten angeregten Zustands läßt sich also so deuten, daß dieser Zustand einen anderen Isospin hat, als der Grundzustand von B^{10} ($T = 0$); vgl. Abb. 185.
In der Reaktion $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$ tritt der erste angeregte Zustand von N^{14} nicht auf, da hier die analoge Situation vorliegt: O^{16} hat im Grundzustand $T = 0$, und d und α haben (in ihrem Grundzustand) Isospin 0.

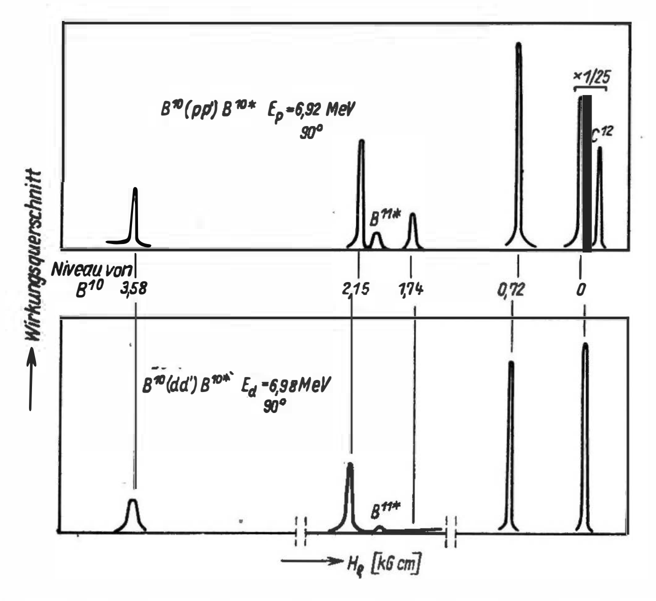


Abb. 188. Vergleich der Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $B^{10}(p, p')B^{10*}$ und $B^{10}(d, d')B^{10*}$. Man sieht, daß der 1,74 MeV-Zustand in der (d, d')-Reaktion nicht erscheint. (Nach BURCHAM [B 57-1])

Eine ausführliche Zusammenstellung über die Rolle des Isospins in der Kernphysik (Nukleon-Nukleon-Streuung, Termsysteme, β-, γ-Übergänge, Kernreaktionen, π-Meson-Nukleon-Streuung) gibt BURCHAM [B 55-1]; vgl. auch § 44c.

Schließlich wollen wir nach dem Ladungsmultiplett T_3 des *Grundzustands* eines Kernes A fragen. Nach S. 460 hat die Ladungsfunktion $\eta(1, \ldots, A)$, die „am antisymmetrischsten", d. h. in der größtmöglichen Zahl von Teilchenpaaren antisymmetrisch ist, stets $T = |T_3|$.

Wir behaupten nun, daß dieser Fall, d. h., $T = |T_3|$, gerade im *Grund*zustand unseres Kerns vorliegt, falls die Kernkräfte nicht nur

1. ladungsunabhängig sind, sondern auch

2. (überwiegend) anziehend,

3. spinabhängig, und zwar so, wie beim Zweinukleonensystem: Triplettzustand (↑↑) energetisch günstiger (tiefer), als Singulettzustand (↑↓).

Denn bei anziehenden Kernkräften (2.) ist eine möglichst *symmetrische Orts*eigenfunktion φ wegen der geringeren Knotenzahl stets energetisch günstiger (durchschnittlicher Teilchenabstand geringer), als eine gleich weit ausgedehnte antisymmetrischere; und bei einer Spinabhängigkeit der Kernkräfte nach (3.) ist es energetisch am günstigsten, in χ möglichst viele Teilchenpaare in einen Triplettzustand, d. h. in einen *spinsymmetrischen* Zustand, zu bringen. Damit $\varphi\chi$ in möglichst vielen Paaren symmetrisch ist, muß wegen der Antisymmetrie der Gesamteigenfunktion $\psi = \varphi\chi\eta$ die Ladungsfunktion η in derselben, möglichst großen Zahl von Paaren antisymmetrisch sein. Der energetisch günstigste Zustand ist also der mit dem antisymmetrischsten η, hat also $T = |T_3|$.

Wie die empirischen Termsysteme der leichten Kerne zeigen, hat tatsächlich der Grundzustand stets $T = |T_3|$[1]) – eine Bestätigung obiger Eigenschaften der Kernkräfte. (In Abb. 187 hatten wir das bereits stillschweigend berücksichtigt.) Zugleich erkennen wir besonders deutlich den Vorteil solcher Symmetriebetrachtungen, die erst der Isospinformalismus möglich macht: Sie erlauben, genaue physikalische Aussagen bei relativ geringen Annahmen über die Kernkräfte zu machen.

§ 95. Zusammenfassung

Zum Schluß wollen wir auf zwei allgemeine Fragen eingehen. Als erstes wollen wir fragen, inwieweit unsere Hypothese der *Ladungsunabhängigkeit* durch die Termsysteme leichter Kerne bestätigt wird. Wir sahen bereits, daß die zahlreichen Ladungsdubletts von Spiegelkernen nur die schwächere Hypothese der Ladungssymmetrie bestätigen, die damit recht gut gesichert ist. Die volle Ladungsunabhängigkeit kommt erst in den Ladungstripletts der geraden Isobaren zur Wirkung, wie man sich durch eine analoge Betrachtung wie auf S. 471 leicht überlegen kann. Nun sind bisher zwei Ladungstripletts – die am tiefsten liegenden bei $A = 10$ und 14 – vollkommen gesichert, einige weitere sind sehr wahrscheinlich, z.B. das höher liegende bei $A = 10$. Außerdem kennt man in einer Reihe von Fällen wenigstens zwei Komponenten eines Tripletts, so z.B. die beiden Terme 6,09 MeV von C^{14} und 8,06 MeV von N^{14} (beide $J = 1$, negative Parität). Diese Belege reichen wohl nicht aus, um von einer vollkommen gesicherten Bestätigung der Ladungsunabhängigkeitshypothese zu sprechen, doch wird sie zumindest sehr wahrscheinlich gemacht. Das ist bedeutend mehr, als wir aus der niederenergetischen Nukleon-Nukleon-Streuung erfahren konnten.

---

[1]) Als Ausnahme ist Cl^{34} ($T_3 = 0$) mit dem Grundzustand $T = 1$, $J = 0$ bekannt.

Als zweites wollen wir, nachdem wir nun die Anwendung des *Isospinformalismus* kennengelernt haben, nochmals auf seine physikalische Bedeutung eingehen. Wir sahen, daß als Folge der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte die Ladung der Nukleonen nicht so sehr durch ihre *direkte* Wirkung den Zustand eines Nukleonensystems beeinflußt – wir konnten die Wirkung des Coulomb-Feldes der Protonen als Korrektur berücksichtigen – als vielmehr dadurch, daß sie einen zusätzlichen Freiheitsgrad der Nukleonen darstellt, der seinen Ausdruck im Ladungsteil der Eigenfunktion findet. Nun legt durch das (erweiterte) Pauli-Prinzip die jeweilige Symmetrie dieses Ladungsteils die des Orts-Spin-Teils automatisch fest. Das heißt aber:

Das Verhalten eines Nukleonensystems wird entscheidend durch das Pauli-Prinzip bestimmt; bei ladungsunabhängigen Kräften spielen deshalb nicht die Ladung selbst, sondern der Ladungsteil der Eigenfunktion – d.h. die Ladungsfreiheitsgrade – die ausschlaggebende Rolle.

Es ist der entscheidende Vorzug des Isospinformalismus, daß er diese durch die Ladungsunabhängigkeit und das Pauli-Prinzip bedingten Tatsachen explizit formuliert, indem er mit den Ladungsfreiheitsgraden der Nukleonen rechnet; daher stammt seine große Bedeutung für die Kernphysik.

2. SÄTTIGUNG UND AUSTAUSCHCHARAKTER DER KERNKRÄFTE

§ 96. Sättigung

a) Definition und Deutung der Sättigung

Eine der auffälligsten Eigenschaften, die die Kernmaterie bei allen Kernen oberhalb $A \sim 20$ zeigt, ist die *Sättigung*, d.h. die Tatsache, daß *die Bindungsenergie pro Teilchen, $\frac{E}{A}$, und das Volumen pro Teilchen, $\frac{V}{A}$, von den leichten bis zu den schwersten Kernen annährend unabhängig von A sind*:

$$\frac{E}{A} \sim -8\,\text{MeV} \qquad \text{„Sättigung}^{1)} \text{ der Bindungsenergie“,}^{2)}$$

$$\frac{V}{A} \sim 10^{-39}\,\text{cm}^3 \quad \text{„Sättigung}^{1)} \text{ der Dichte“.} \tag{96.1}$$

[1]) Dieser rein experimentell definierte Begriff Sättigung, der das Erreichen eines Sättigungswertes von $\frac{E}{A}$ bzw. $\frac{V}{A}$ für $A \geqslant 20$ kennzeichnen soll, darf nicht mit dem auf S. 481 definierten Begriff „Absättigung“ verwechselt werden (vgl. Fußnote 1 auf S. 481).

[2]) Wir werden im folgenden sehen, daß die Sättigung eine Eigenschaft der „Kernmaterie schlechthin“ ist, d.h. für unendlich ausgedehnte Kernmaterie dieselbe wäre wie für die endlichen Kerne. Es ist deshalb besser, nur den Volumenanteil der Bindungsenergie zu berücksichtigen, für den nach der Bethe-Weizsäcker-Formel $\frac{E}{A} \sim -15$ MeV ist. In unseren Betrachtungen wird es jedoch auf den Zahlenwert nicht ankommen.

Die erste Tatsache kennen wir aus Abb. 9, S. 27, die zweite ist gleichbedeutend mit der Formel $R = R_0 A^{1/3}$ mit $R_0 \sim 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm, wie man sieht, wenn man das Volumen V eines Kernes mit Radius R aufschreibt:

$$V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \cdot A .$$

Nach dieser Formel steht jedem Teilchen durchschnittlich ein Volumen $\frac{4\pi}{3} R_0^3$ zur Verfügung, und die Teilchen haben einen mittleren Abstand

$$\bar{r} \sim \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} R_0 \sim 2 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} ,$$

wenn sie im Mittel mit konstanter Dichte über das gesamte Kernvolumen verteilt sind (Abb. 189).

Diese Sättigungseigenschaft hat die Kernmaterie mit kondensierter Materie, d.h. Flüssigkeiten und Festkörpern, gemeinsam: Energieinhalt und Volumen einer solchen Substanz sind additive Größen, d.h., sie wachsen bei Hinzufügen von Teilchen (Nukleonen bzw. Molekülen) zur Substanz proportional zur Anzahl dieser Teilchen.

Einen ersten Schritt zum Verständnis der beiden Sättigungserscheinungen tun wir, indem wir zeigen, daß sich beide gegenseitig bedingen, so daß es gerechtfertigt ist, von Sättigung schlechthin zu sprechen. Den Zusammenhang zwischen beiden finden wir, indem wir von der *Dichte*sättigung ausgehen und feststellen, daß die Reichweite r_0 ($\sim 2 \cdot 10^{-13}$ cm, vgl. z. B. § 88, Tabelle 50) der Kernkräfte von etwa derselben Größe ist wie der aus der Dichtesättigung folgende mittlere Teilchenabstand $\bar{r} \sim 2 \cdot 10^{13}$ cm.

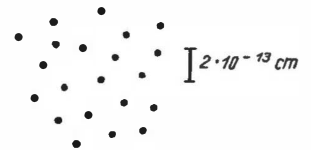


Abb. 189.
Durchschnittliche Nukleonenverteilung im Kern bei Vorliegen von Sättigung

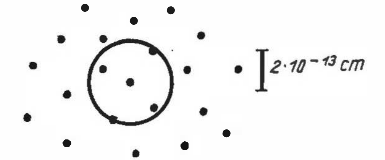


Abb. 190.
Wirkungsbereich eines Nukleons im Kern bei Vorliegen von Sättigung: Nur wenige Nachbarn befinden sich im Wirkungsbereich eines Nukleons

$r_0 \sim \bar{r}$ bedeutet offenbar, daß sich im Mittel nur wenige (n) Nachbarteilchen innerhalb der Reichweite eine herausgegriffenen Nukleons befinden, d.h. mit ihm wechselwirken (Abb. 190).

Wenn das der Fall ist, folgt gerade die ***Bindungsenergie***-Sättigung: Wenn (durchschnittlich) n Nukleonen sich innerhalb der Reichweite eines beliebig herausgegriffenen befinden, dann haben wir n wechselwirkende Nukleonenpaare, an denen unser herausgegriffenes Nukleon als einer der Partner beteiligt ist. Nehmen wir jetzt nacheinander jedes der A Teilchen des Kerns als das herausgegriffene, so erhalten wir insgesamt nA Paare (von Oberflächeneffekten sehen wir ab). Da

wir so jedes Paar doppelt zählen, existieren $\frac{1}{2}nA$ wechselwirkende Paare, und wir haben bei einer mittleren potentiellen Energie $\overline{V}$ pro Paar

$$E_{\text{pot}} = \tfrac{1}{2} n A \overline{V} \propto A.$$

Nach dem Thomas-Fermi-Modell (vgl. S. 261 oder 545) ist für $N = Z$

$$E_{\text{kin}} \propto A \cdot \left(\frac{A}{V}\right)^{2/3}, \qquad (96.2)$$

und da jetzt $V \propto A$ gilt, haben wir $E_{\text{kin}} \propto A$ und damit die Energiesättigung

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \propto A. \qquad (96.3)$$

Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn wir – im Gedankenexperiment – die Dichte im Kern wesentlich erhöhen. Dann geraten immer mehr Nukleonen in die Reichweite unseres herausgegriffenen. Wird schließlich der Grenzfall der Abb. 191 erreicht, in dem alle Teilchen sich innerhalb der Reichweite jedes anderen Teilchens befinden, ist der Kernradius $R \sim \frac{r_0}{2}$ unabhängig von A: keine Dichtesättigung. Dann steht jedes Nukleon mit jedem anderen in Wechselwirkung, wir haben $\frac{1}{2}A\,(A-1)$ wechselwirkende Paare und $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}A\,(A-1)\,\overline{V}$, für große A also

$$E_{\text{pot}} \propto A^2.$$

$2 \cdot 10^{-13}\,cm$

Abb. 191.
Wirkungsbereich eines Nukleons in einem zusammengestürzten Kern:
Alle Nukleonen befinden sich im Wirkungsbereich eines. Nukleons

Außerdem ist jetzt $V \sim \frac{4\pi}{3}\frac{r_0^3}{8} = \text{const}$ unabhängig von A und folglich nach (96.2) $E_{\text{kin}} \propto A^{5/3}$. Damit haben wir

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \propto A^2 \,(+\,\text{const} \cdot A^{5/3}), \qquad (96.4)$$

d.h. auch keine Sättigung der Bindungsenergie im Grenzfall $R \sim \frac{r_0}{2}$. Beim allmählichen Übergang von Abb. 190 zu Abb. 191 wird also $E \propto A$ nach und nach in $E \propto A^2$ übergehen.

Beide Formen der Sättigung bedingen sich demnach gegenseitig, und wir wissen jetzt:

Sättigung (von Dichte und Energie) bedeutet, daß die Nukleonen im Kern mittlere Abstände $\bar{r}$ ungefähr von der Größe der Reichweite r_0 der Kernkräfte haben, also Wechselwirkung jedes Nukleons nur mit wenigen nächsten Nachbarn erfolgt.

Im folgenden wollen wir qualitativ untersuchen, wie die Kernkräfte beschaffen sein müssen, damit sie die Nukleonen in der eben genannten Weise genügend „auf Distanz" halten.

b) Zustandekommen der Sättigung

Rein anziehende Potentiale. Als einfachste Möglichkeit wird man versuchen, rein anziehende Potentiale[1]) zwischen den Nukleonen anzunehmen (Abb. 192). Man sieht jedoch rasch ein, daß solche Potentiale niemals Sättigung ergeben können. Dazu betrachten wir einen Kern von A Nukleonen, und zwischen je zwei von ihnen

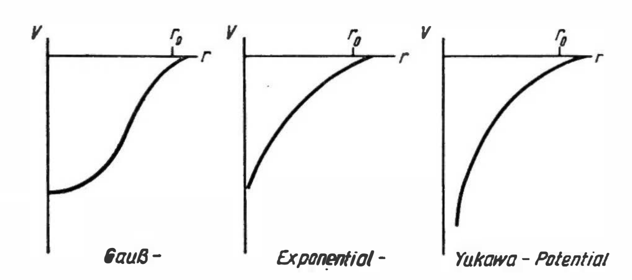


Abb. 192. Rein anziehende Potentiale

wirke ein solches rein anziehendes Potential. Wir nehmen an, daß dieser Kern unter Energieabgabe (z. B. γ-Strahlung) den energetisch günstigsten Zustand erreichen kann.

Im Fall der klassischen Mechanik zunächst wird sich der Kern immer weiter zusammenziehen, weil so jedes wechselwirkende Nukleonenpaar und damit der gesamte Kern immer niedrigere Energien erreicht: Der Kern stürzt auf einen Punkt zusammen („*Kollaps*").

Aus demselben Grund wird sich auch im Fall der Quantenmechanik der Kern zusammenziehen, doch wird der Kollaps hier etwas gemildert: Je weiter ein System von Teilchen zusammenstürzt, um so höher wird seine quantenmechanische Nullpunktsenergie, und deren Zunahme überwiegt schließlich den Energiegewinn durch die Abnahme der potentiellen Energie. Es erfolgt also ein Zusammenstürzen nicht bis auf einen Punkt, aber doch bis auf einen viel zu kleinen Kernradius. Die Rechnung (Blatt, Weisskopf [B59-1], Kap. III. 2) ergibt, daß alle Kerne einen Radius von etwa $\frac{r_0}{2} \sim 1 \cdot 10^{-13}$ cm haben sollten (d. h. $V = \text{const}$, also $\frac{V}{A} \propto \frac{1}{A} + \text{const}$) und die Bindungsenergie $\propto A^2$ sein sollte (d. h. $\frac{E}{A} \propto A + \text{const}$). Es entsteht also die Situation von Abb. 191.

Potentiale mit hard core. Demnach braucht man auf jeden Fall irgendeine Abstoßung, die das Zusammenstürzen des Kerns verhindert. Bei der Suche nach einer geeigneten Abstoßung ist es naheliegend, sich an das Vorbild der kondensierten Materie anzulehnen. Dort kommt die Sättigung dadurch zustande, daß bei größeren Abständen die van der Waalssche Anziehung der Moleküle, bei kleinen

---

[1]) Wir nehmen an, daß die Potentiale für kleine r höchstens wie $\frac{1}{r^2}$ unendlich werden (und natürlich kurze Reichweite haben).

Abständen die Abstoßung der Elektronenhüllen der Moleküle überwiegt, was effektiv zu einem nichtmonotonen Potential mit sehr starker Abstoßung bei kleinen Abständen (*„hard core“*) führt (s. Abb. 193).

Tatsächlich hat man in den letzten Jahren aus der Proton-Proton-Streuung bei hohen Energien Hinweise auf einen hard core gefunden (Jastrow [J 51-1], vgl. § 91 b). Danach sollte die starke Abstoßung bei einem Abstand $r_c \sim 0{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm einsetzen. Es ist anschaulich klar, daß so das vollkommene Zusammenstürzen des Kerns verhindert wird, denn die Teilchen können sich nicht stärker als bis auf Abstände r_c nähern, da die Eigenfunktion im Bereich von $r = 0$ bis $r = r_c$ praktisch verschwinden muß. Allerdings kann nur eine genauere Rechnung zeigen, welcher durchschnittliche Abstand $\bar{r} > r_c$ sich bei Wirkung eines solchen nichtmonotonen Potentials wirklich einstellt. Soweit solche – durch die Divergenz des Potentials sehr erschwerten – Rechnungen bisher durchgeführt wurden [M 56-1], [E 58-1], [G 58-1], [J 55-1], ergab sich stets ein $\bar{r}$ kleiner als r_0 – um wieviel kleiner, hängt stark von der genauen Gestalt des Potentials und der Art der verwendeten Näherung ab. Man wird das schon auf Grund von Abb. 193 qualitativ erwarten: In einem Zweiteilchensystem mit dem gezeichneten Potential stellt sich ein mittlerer Abstand $\bar{r}$ *zwischen* r_c und r_0 ein, also ist jedenfalls $\bar{r} < r_0$; bei einem Vielteilchensystem mit demselben Potential wird es qualitativ ähnlich sein. – Man erhält demnach mit hard-core-Potentialen der angegebenen Art zwar Sättigung, aber mit einer mehr oder weniger zu großen Dichte im Kern, denn die beobachtete Dichte erfordert $\bar{r} \sim r_0$.

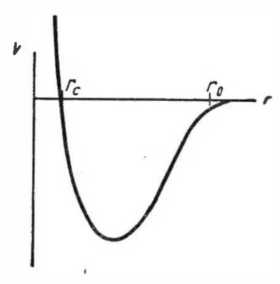


Abb. 193. Potential mit „hard core“ (nichtmonoton)

Austauschpotentiale. Eine zweite Möglichkeit, durch eine geeignete Abstoßung Sättigung zu erhalten, nimmt sich die chemische Bindung zum Vorbild. Diese zeigt nämlich die Eigenschaft, daß ein Teilchen nur mit wenigen anderen in Bindung tritt: „Absättigung[1]) der chemischen Bindung“. So hat man z. B. im einfachsten Fall des H-Moleküls H_2 Anziehung, dagegen wird jedes dritte H-Atom abgestoßen: Es existiert kein H_3.

Von der quantenmechanischen Behandlung des H_2-Problems [S 39-1] weiß man, daß dieses Verhalten der Bindungskräfte durch den Austausch von zwei Elektronen zwischen den Bindungspartnern bestimmt ist. Betrachtet man den ganz ähnlichen, aber noch einfacheren Fall des Wasserstoffmolekül-Ions H_2^+, bei dem nur ein Elektron ausgetauscht wird, dann erhält man folgendes Potential zwischen den beiden Protonen [B 33-1], [B 36-2]: Anziehung mit hard core im Singulett-Zustand der beiden *Protonen* (Spins antiparallel, d. h. Spineigenfunktion

[1]) Die Absättigung kennzeichnet also das Erreichen einer „Sättigungsanzahl“ von Bindungen. Da Kräfte zwischen den Nukleonen, die eine solche *Absättigung* zeigen, *Sättigung* hervorrufen, wurden und werden oft beide Begriffe als äquivalent angesehen. Es scheint jedoch zweckmäßig, sie auseinander zu halten, da es außer der Absättigung noch andere Ursachen für die Sättigung gibt. (Vgl. Fußnote 1 auf S 477.)

antisymmetrisch, also Ortseigenfunktion symmetrisch), reine Abstoßung im Triplettzustand (Spins parallel, Spinfunktion symmetrisch, Ortsfunktion antisymmetrisch); vgl. Abb. 194.[1]) Wie dort angedeutet, lassen sich diese beiden Potentiale zu einem Ausdruck zusammenfassen:

$$V(r) = V_C(r) \pm V_A(r), \tag{96.5}$$

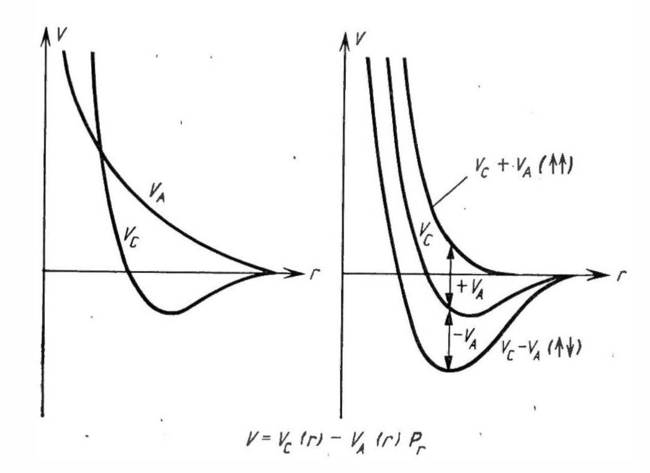


Abb. 194.
Potential im Triplett- (↑ ↑) und im Singulettzustand (↑ ↓) des Wasserstoffmolekül-Ions. Die Pfeile geben die Einstellung der *Protonen*spins an. Die Zusammensetzung des jeweiligen Potentials aus V_C und V_A wurde angedeutet. (Nach [B 33-1], Abb. 55)

worin das obere Vorzeichen für den ortsantisymmetrischen, das untere für den ortssymmetrischen Zustand gilt.

Wir führen nun den „Orts-Austauschoperator" P_r ein,[2]) der in Anwendung auf die Eigenfunktionen unseres Zwei-Protonen-Systems die *Orts*koordinaten der beiden Teilchen vertauscht. Auf die symmetrische Ortsfunktion $\varphi_s(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = \varphi_s(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1)$ des gebundenen und die antisymmetrische $\varphi_a(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = -\varphi_a(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1)$ des ungebundenen Zustandes wirkt demnach P_r folgendermaßen:

$$P_r\varphi_s(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = \varphi_s(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1) = \varphi_s(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2),$$
$$P_r\varphi_a(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = \varphi_a(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1) = -\varphi_a(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2).$$

Da das Potential $V(r)$, in die Schrödinger-Gleichung für 2 Protonen eingesetzt, auf die Eigenfunktion unseres Zwei-Protonen-Systems wirkt, können wir jetzt $V(r)$ mit Hilfe von P_r schreiben:

$$V = V_C(r) - V_A(r) \cdot P_r; \tag{96.6}$$

denn dieses V liefert bei Anwendung auf φ_s bzw. φ_a gerade (96.5).

---

[1]) Im Fall des Wasserstoff-Moleküls hat man (qualitativ) zwar dieselbe Figur. Jedoch ist dort Anziehung (Abstoßung) mit Singulett-(Triplett-)Zustand der beiden *Elektronen* verknüpft. (Die Einstellung der Protonenspins spielt bei H_2 nur eine untergeordnete Rolle, vgl. § 88 c.)

[2]) Von hier an entfällt die Kennzeichnung von Operatoren durch Fettdruck.

Man nennt Potentiale, die wie $- V_A P_r$ einen Austauschoperator enthalten, *Austauschpotentiale.* Sie sind eine erst in der Quantenmechanik mögliche Verallgemeinerung des Potentialbegriffes, da hier Potentiale als Operatoren erscheinen und als solche nicht unbedingt nur gewöhnliche Funktionen, d. h. Multiplikationsoperatoren, zu sein brauchen. Ihre typische Eigenschaft ist, daß sie je nach der Symmetrie der Eigenfunktion, auf die sie wirken, Anziehung oder Abstoßung ergeben: *Austauschpotentiale sind symmetrieabhängige Potentiale.*

Die chemische Bindung ist also (als Folge des Elektronenaustauschs) durch das Auftreten eines solchen Austauschpotentials gekennzeichnet, und dieses symmetrieabhängige Potential ist zugleich die Ursache für die Absättigung der chemischen Bindung des H_2^+: Nähern sich ein H-Atom und ein Proton, dann können sie in den gebundenen Zustand ($\uparrow\downarrow$) des H_2^+ treten. Kommt jetzt ein drittes Proton dazu, dann ist der gebundene Zustand bereits besetzt (Pauli-Prinzip), das dritte Proton kann jedem der ersten beiden Protonen gegenüber nur den ungebundenen Zustand ($\uparrow\uparrow$) einnehmen[1]) und wird somit abgestoßen.

Analog setzt man nun in der Kernphysik Austauschpotentiale (-Kräfte) zwischen je zwei Nukleonen an, um Sättigung zu erhalten. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt genauer eingehen. Hier wollen wir uns nur qualitativ klar machen, wie die Austauschpotentiale in Kernen mit vielen Nukleonen Sättigung hervorrufen können. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf ein Austauschpotential vom Typ $V = V(r) \cdot P_r$ – andere in der Kernphysik mögliche Typen werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen; sie führen zu analogen Überlegungen. Von diesem V wissen wir, daß es bei einer in den Teilchen i und j symmetrischen Ortseigenfunktion zwischen i und j Anziehung bewirkt ($V(r) \leqslant 0$ *sei monoton*):

$$V(r_{ij})\, P_r^{ij}\, \varphi(\ldots \mathfrak{r}_i \ldots \mathfrak{r}_j \ldots) = V(r_{ij})\, \varphi(\ldots \mathfrak{r}_j \ldots \mathfrak{r}_i \ldots) = + V(r_{ij})\, \varphi(\ldots \mathfrak{r}_i \ldots \mathfrak{r}_j),$$

bei einer in i und j antisymmetrischen Ortseigenfunktion dagegen abstößt:

$$V(r_{ij})\, P_r^{ij}\, \varphi(\ldots \mathfrak{r}_i \ldots \mathfrak{r}_j \ldots) = V(r_{ij})\, \varphi(\ldots \mathfrak{r}_j \ldots \mathfrak{r}_i \ldots) = - V(r_{ij})\, \varphi(\ldots \mathfrak{r}_i \ldots \mathfrak{r}_j).$$

Wir werden nachher beweisen, daß φ für $A > 4$ stets in einem Teil aller Nukleonenpaare symmetrisch, im anderen Teil antisymmetrisch ist. Wenn das der Fall ist, liegt bei dem einen Teil der Nukleonenpaare Anziehung, bei dem anderen Abstoßung vor. Damit haben wir aber schon die für die Sättigung notwendigen Abstoßungen erhalten, die das Zusammenstürzen des Kerns unter der Wirkung der Anziehungen verhindern und die Nukleonen genügend auf Distanz halten können, und zwar mit monotonen (!) Potentialen. Natürlich können wir aus dieser qualitativen Überlegung nur schließen, daß *möglicherweise* die Abstoßungen gerade das richtige Maß haben könnten, um Sättigung zu bewirken. Erst die quantitative Durchrechnung im § 98 wird zeigen, wann das tatsächlich so ist.

---

[1]) Dabei haben wir vernachlässigt, daß durch das dritte Proton natürlich die Bindung zwischen den ersten beiden verändert wird; doch kann man zeigen, daß dabei die Symmetrieeigenschaften der Zustände sich nicht ändern, so daß qualitativ dieselbe Situation erhalten bleibt.

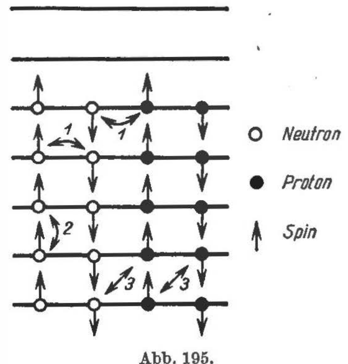


Abb. 195.
Besetzungsschema für $A = 20$, $N = Z$ (Ne^{20}) nach dem Einteilchenmodell

Um den noch ausstehenden Beweis nachzutragen, betrachten wir die Ortseigenfunktion $\varphi(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_A)$ zunächst in der „Einzelteilchennäherung" (Schalenmodellnäherung, vgl. § 104 ff.), in der jedem Nukleon i ein bestimmter (Orts-) Zustand $\varphi_i(\mathfrak{r}_i)$ zukommt. Nach dem Pauli-Prinzip kann dann jeder (Orts-)Zustand von vier Teilchen ($n\uparrow$, $n\downarrow$, $p\uparrow$, $p\downarrow$) besetzt werden, was wir für $A = 20$ in leicht verständlicher Weise in Abb. 195 schematisieren.[1])

Da wir uns hier nur für die Symmetrieeigenschaften der *Orts*eigenfunktion interessieren, verwenden wir das Pauli-Prinzip in „verkürzter" Form, in der Teilchen verschiedener Ladung oder/und verschiedener Spineinstellung als „verschiedene" Teilchen gerechnet werden. Das *Pauli-Prinzip* lautet dann:

Es dürfen nur „verschiedene" Teilchen den gleichen Term (Zustand) besetzen, oder: Die Ortseigenfunktion muß antisymmetrisch gegenüber Vertauschung „gleicher" Teilchen (Ladung und Spinrichtung gleich) sein.

Diese verkürzte Form des Pauli-Prinzips für die Ortseigenfunktion verhält sich zu der von der Hülle her gewohnten („alten", vgl. S. 463) Form für die Orts-Spin-Eigenfunktion wie ihrerseits diese „alte" Form zur „neuen", erweiterten Form für die Orts-Spin-Ladungs-Eigenfunktion. Alle drei Formen sind im selben Sinne physikalisch gleichwertig, wie es auf S. 463 ff. für die beiden letztgenannten Formen gezeigt wurde.

Damit können wir jetzt abzählen, in wieviel Paaren der Zustand des Kerns der Abb. 195 und damit φ in unserer Näherung symmetrisch bzw. antisymmetrisch ist. Vertauschen wir zunächst zwei Teilchen desselben Zustands (Pfeil 1), so sind die beiden wegen des Pauli-Prinzips stets „verschiedene" Teilchen. Gegenüber dieser Vertauschung braucht deshalb φ nicht antisymmetrisch zu sein. In der Tat bleibt φ *un*geändert, da ja zwei Teilchen im gleichen (Orts-)Zustand vertauscht werden: Der Term ist nach der Vertauschung noch durch genau dieselben Teilchen besetzt wie vorher. Je zwei „verschiedene" Teilchen im gleichen Zustand bilden also ein symmetrisches Paar. Pro Zustand lassen sich 6 solche Paare bilden, bei 5 besetzten Zuständen also 30 Paare $\left(\text{allgemein } 6 \cdot \frac{A}{4} = 6n\right)$, gegenüber deren Vertauschung φ symmetrisch ist.

Vertauschen wir weiter zwei „gleiche" Teilchen in verschiedenen Zuständen (Pfeil 2), wechselt die Eigenfunktion φ nach dem Pauli-Prinzip ihr Vorzeichen und wir haben ein antisymmetrisches Paar. Je zwei Terme liefern vier solche

---

[1]) Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf „α-Kerne": $A = 4n$, n ganz, so daß alle Zustände (Terme) voll besetzt sind. Diese Beschränkung hat auf unser Ergebnis qualitativ keinen Einfluß.

Paare, und unsere fünf (n) Terme lassen sich auf 10 ($\frac{1}{2}n(n-1)$) verschiedene Arten zu je zweien zusammenfassen; wir erhalten also 40 ($4 \cdot \frac{1}{2}n(n-1)$) antisymmetrische Paare.

Schließlich lassen sich noch Paare von „verschiedenen" Teilchen auf verschiedenen Termen vertauschen (Pfeil 3). Da hierdurch stets zwei „gleiche" Teilchen auf demselben Term entstehen, sind solche Vertauschungen nach dem Pauli-Prinzip verboten.

Wir haben damit wie gewünscht bewiesen, daß in unserem Kern eine bestimmte Anzahl von symmetrischen und antisymmetrischen Nukleonenpaaren existieren. Obwohl wir dieses Ergebnis zunächst nur in der Einzelteilchennäherung für φ gewonnen haben, gilt es doch allgemein. Denn die Symmetrieeigenschaften der Eigenfunktion können nicht von der gewählten Näherung abhängen: Man kann stets die Näherungseigenfunktionen stetig in die exakten überführen, was nur möglich ist, wenn beide gleiche Symmetrieeigenschaften haben. Außerdem weiß man, daß die Einzelteilchennäherung eine in vieler Beziehung gut brauchbare Näherung der Verhältnisse im Kern ist (s. Abschn. Schalenmodell, S. 502 ff.).

Problem der Sättigung. Es ist denkbar, daß – wie im Falle des H_2^+ (vgl. (96.6)) – neben einem Austauschpotential $V_2(r)\,P_r$ noch ein gewöhnliches Potential $V_1(r)$ wirkt ($V_i(r) \leqslant 0$); im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß das aus experimentellen Gründen sogar so sein *muß*. Da $V_1(r)$ als rein anziehendes Potential keine Sättigung bewirkt, ist zu erwarten, daß der Austauschanteil $V_2\,P_r$ an dem Gesamtpotential

$$V = V_1(r) + V_2(r) \cdot P_r$$

eine gewisse Mindeststärke haben muß, damit Sättigung möglich wird.

Unter der Vereinfachung, daß beide Funktionen $V_i(r)$ die gleiche (monotone) Radialabhängigkeit zeigen, $V_1(r) \propto V_2(r) \propto J(r)$, also

$$V = (A_1 + A_2 P_r) J(r) = \tfrac{1}{2}(1 + g P_r)\, V(r),$$

werden wir im § 98 sehen, daß

$$|g| = |A_2| : |A_1| \geqslant 4 : 1$$

sein muß, um Sättigung zu erhalten. Wie wir im Kap. VIII, § 91, sahen, ergibt sich jedoch experimentell aus der n-p-Streuung bei 100 MeV, daß dieses Verhältnis nur

$$|g| = |A_2| : |A_1| \sim 1 : 1$$

ist, der Austauschanteil also viel zu gering ist, um Sättigung zu bekommen. Man muß deshalb nach anderen Erklärungen für die Sättigung suchen.

Eine weitere Möglichkeit, um die nötige Abstoßung zu bekommen, die die Nukleonen genügend auf Distanz hält, bieten die Mehrkörperkräfte (Mehrnukleonen-Potentiale) (vgl. Kap. VIII, § 92). Sind nämlich z. B. neben rein anziehenden Zweinukleonen-Potentialen

abstoßende Dreinukleonen-Potentiale wirksam, dann können letztere das Zusammenstürzen des Kerns verhindern, wenn sie nur genügend stark sind. Diese Möglichkeit ist wegen einer Reihe von grundsätzlichen und rechnerischen Schwierigkeiten bisher wenig erforscht

In letzter Zeit hat sich durch grundlegende Arbeiten von BRÜCKNER [B 56-1], BETHE [B 56-2] und WEISSKOPF u. a. [G 58-1] ergeben, daß die Sättigung sehr wahrscheinlich doch nur durch Zweinukleonen-Potentiale zustande kommt, wobei ein hard core und ein gewisser Austauschanteil im Potential zusammenwirken, während — wie es nach S. 481 und S. 485 der Fall ist — jeder der beiden für sich allein nicht ausreicht, um die richtige Sättigung zu ergeben.

§ 97. Austauschpotentiale

a) Definition der Austauschpotentiale

Wir definieren zunächst die Austauschoperatoren, die meist nach ihren „Erfindern" benannt werden:

Ortsaustausch: $P_r\psi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2) \equiv P_M\psi = \psi(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1, \sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2)$;
(MAJORANA)

Spinaustausch: $P_\sigma\psi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2) \equiv P_B\psi = \psi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \sigma_2\sigma_1, \tau_1\tau_2)$; (97.1a)
(BARTLETT)

Orts- und Spinaustausch: $P_r P_\sigma\psi = P_\sigma P_r\psi \equiv P_H\psi = \psi(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1, \sigma_2\sigma_1, \tau_1\tau_2)$.
(HEISENBERG)

Einen besonderen *Ladungs*austauschoperator P_τ brauchen wir nicht, da für rein antisymmetrische Eigenfunktionen

$$\psi = \psi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2) = -\psi(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1, \sigma_2\sigma_1, \tau_2\tau_1)$$

der Operator $-P_H$ die Ladungen austauscht:

$$-P_H\psi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \sigma_1\sigma_2, \tau_1\tau_2) = -\psi(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1, \sigma_2\sigma_1, \tau_1\tau_2) = +\psi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, \sigma_1\sigma_2, \tau_2\tau_1).$$

Es ist evident, daß die P die Eigenschaften haben

$$P_B P_M = P_M P_B = P_H, \qquad P_M^2 = P_B^2 = P_H^2 = 1. \tag{97.1b}$$

Multipliziert man ein Potential $V(r)$ mit einem Austauschoperator[1]), erhält man ein Austauschpotential; Potentiale ohne Austauschoperator nennt man *Wigner-Potentiale* ($P_W \equiv 1$):

$$\begin{aligned} &\textit{Wigner-Potential}\ V_W(r),\\ &\textit{Majorana-Potential}\ V_M(r)\cdot P_M,\\ &\textit{Bartlett-Potential}\ V_B(r)\cdot P_B,\\ &\textit{Heisenberg-Potential}\ V_H(r)\cdot P_H. \end{aligned} \tag{97.2}$$

[1]) Man kann so auch nichtzentrale Potentiale zu Austauschpotentialen machen, s. [B 59-1], Kap. III. 4 und Tabelle 61.

Hat man ein solches Potential in der Schrödinger-Gleichung, dann bestimmt die Wirkung der Operatoren P auf ψ, wann das betreffende Potential anziehend, wann es abstoßend ist. Sie hängt von dem Symmetriecharakter des Teiles der Gesamteigenfunktion ψ ab, auf den der Operator wirkt. Um das genauer zu verfolgen, beschränken wir uns wieder auf das Zweinukleonensystem. Für die Gesamteigenfunktion machen wir den Ansatz

$$\psi = \psi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2,\, \sigma_1\sigma_2,\, \tau_1\tau_2) = -\psi(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1,\, \sigma_2\sigma_1,\, \tau_2\tau_1) = \varphi(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)\cdot\chi(1,2)\cdot\eta(1,2).$$

Setzt man dieses ψ in die Schrödinger-Gleichung für zwei Nukleonen mit einem der Austauschpotentiale $V(r_{12})\cdot P$ ein, dann kann man zunächst η weglassen, da keiner der Operatoren P auf die Ladungsvariablen wirkt (vgl. (97.1a)) – wegen der Antisymmetrie von ψ ist ja auch der Symmetriecharakter von η durch den von φ und χ bereits eindeutig festgelegt. Wir haben damit in Relativkoordinaten

$$H\varphi\chi \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{M}\Delta + V(r)\,P\right)\varphi(r\vartheta\varphi)\cdot\chi = E\cdot\varphi\chi.$$

H ist mit $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}_z$, $\vec{S}^2$ und S_z vertauschbar, wie sich für alle P leicht nachrechnen läßt. Wir können φ in Radial- und Winkelteil separieren, $\varphi = f(r)g(\vartheta\varphi)$, und wissen, daß wegen der Vertauschbarkeit mit $\mathfrak{L}^2$ und $\mathfrak{L}_z$ $g(\vartheta\varphi) = Y_l^m(\vartheta\varphi)$ gewählt werden kann. Ein in P enthaltenes P_r wirkt dann nur auf den Winkelteil, indem es $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ vertauscht (vgl. Abb. 196):

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 \rightarrow \mathfrak{r}' = -\mathfrak{r},$$
$$\vartheta \rightarrow \vartheta' = \pi - \vartheta,$$
$$\varphi \rightarrow \varphi' = \pi + \varphi.$$

$Y_l^m(\vartheta\varphi)$ multipliziert sich bei dieser Operation mit $(-1)^l$, wie aus

$$Y_l^m \propto P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}$$

und der bekannten Differentialdarstellung der zugeordneten Kugelfunktionen

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\cdot\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}(x^2-1)^l$$

Abb. 196.
Änderung der Winkelkoordinaten bei Spiegelung am Nullpunkt
$\mathfrak{r} \rightarrow \mathfrak{r}' = -\mathfrak{r}$

leicht abzulesen ist. Der Ortsteil $\varphi = f(r)\,Y_l^m(\vartheta\varphi)$ hat also gerade bzw. ungerade „(räumliche) Parität", wenn l gerade bzw. ungerade ist, d.h. multipliziert sich bei Anwendung von P_r mit $+1$ bzw. -1. Noch einfacher übersieht man die Wirkung eines in P enthaltenen P_σ: χ ist Eigenfunktion zu $\vec{S}^2$ und S_z; wegen $P_\sigma\chi(1,2) = \chi(2,1)$ ergibt sich demnach bei symmetrischem χ (Triplett-Zustand) $+1$, bei antisymmetrischem χ (Singulett) -1, vgl. S. 452. P_σ erzeugt also am Spinteil den Faktor $(-1)^{S+1}$, so wie P_r am Ortsteil den Faktor $(-1)^l$ erzeugt.

Damit erhalten wir die in Tabelle 60 angegebenen Werte der Austauschpotentiale $V(r)\cdot P$ in den verschiedenen Zuständen des Zwei-Nukleonen-Systems (man

überlege sich nach dem Pauli-Prinzip die zugehörigen Ladungs- und Spinzustände bzw. -Eigenfunktionen (vgl. Tabelle 59 und rechne nach!).

Tabelle 60. Austauschpotentiale $V(r) \cdot P$ des Zwei-Nukleonen-Systems

Potential	Zustand			
	l gerade (gerade Parität)		l ungerade (ungerade Parität)	
	$S = 1$ (Triplett)	$S = 0$ (Singulett)	$S = 1$ (Triplett)	$S = 0$ (Singulett)
$V_W(r)$	$+V_W$	$+V_W$	$+V_W$	$+V_W$
$V_M(r)\,P_M$	$+V_M$	$+V_M$	$-V_M$	$-V_M$
$V_B(r)\,P_B$	$+V_B$	$-V_B$	$+V_B$	$-V_B$
$V_H(r)\,P_H$	$+V_H$	$-V_H$	$-V_H$	$+V_H$

Das allgemeinste mögliche (zentrale) Austauschpotential ist die Überlagerung aller dieser Potentiale:

$$V = V_W(r) + V_M(r)\,P_M + V_B(r)\,P_B + V_H(r)\,P_H. \qquad (97.3\,\text{a})$$

Da für jeden Summanden Tiefe und Reichweite des Potentials angegeben werden müssen, enthält (97.3a) acht Parameter. Um diese hohe Parameterzahl etwas einzuschränken, ist es üblich, für alle vier Potentiale die gleiche Form $J(r)$ (Kasten-, Exponential-Potential usw.) anzunehmen und die Anteile der vier Typen durch Konstanten W, M, B, H anzugeben:

$$V = (W + M\,P_M + B\,P_B + H\,P_H)\,J(r). \qquad (97.3\,\text{b})$$

Man hat dann nur noch fünf unabhängige Parameter: Die vier Konstanten und die Reichweite von $J(r)$. —

Zum Schluß wollen wir unsere Austauschpotentiale mit denen der chemischen Bindung vergleichen. Ein erster Unterschied zu ihnen ergibt sich daraus, daß im Kern zu Ort und Spin auch noch die Ladung als Variable (Koordinate) hinzukommt. Deshalb hängt hier die Anziehung und Abstoßung der Potentiale nicht nur vom Symmetriecharakter des Ortsteils, sondern auch von dem des Spinteils der Eigenfunktion ab (dagegen dann natürlich nicht vom Symmetriecharakter des Ladungsteils, weil dieser durch den der anderen beiden Teile eindeutig festgelegt ist).

Ein zweiter Unterschied liegt darin, daß wir bei der chemischen Bindung wissen, wie das Austauschpotential zustande kam: durch den quantenmechanischen Austausch eines Elektrons zwischen den Protonen des H_2^+. In der Kernphysik dagegen setzen wir zunächst Austauschpotentiale einfach an, ohne danach zu fragen, wie sie zustande kommen. Erst die Mesonenfeldtheorie gibt hierauf die Antwort, daß auch die Austauschpotentiale der Kernphysik Ergebnis eines Austausches sind: des Austausches von (virtuellen) geladenen und neutralen Mesonen zwischen den Nukleonen (vgl. § 100).

b) Schreibweise mit Spin- und Isospin-Operatoren

Mit Hilfe der Paulischen Spinoperatoren zweier Nukleonen, $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$, und ihrer Isospin-Analoga $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ lassen sich die Austauschoperatoren explizit darstellen. Nach (93.7) hat der Operator

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2) \text{ die Eigenwerte } 2S(S+1) - 3 = \begin{cases} 1 & \text{Tripl.,} \\ -3 & \text{Sing.,} \end{cases}$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{2}(1 + (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)) \text{ die Eigenwerte } S(S+1) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{Tripl.,} \\ -1 & \text{Sing.} \end{cases} \tag{97.4}$$

$\tfrac{1}{2}(1 + (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2))$ wirkt also auf die Spineigenfunktionen χ ebenso wie P_B (vgl. Tabelle 60) und stellt P_B demnach dar:

$$P_B = P_\sigma = \tfrac{1}{2}(1 + (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)). \tag{97.5}$$

Tatsächlich vertauscht er in Anwendung auf $\chi(1, 2)$ die Spinvariablen der beiden Teilchen (man rechne das explizit nach!).
Wegen der vollkommenen formalen Gleichheit[1]) des Spin- und Isospin-Formalismus wirkt der genau analog gebaute Operator

$$P_\tau = \tfrac{1}{2}(1 + (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)), \qquad \text{Eigenwerte } T(T+1) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{Tripl.,} \\ -1 & \text{Sing.} \end{cases} \tag{97.6}$$

auf die entsprechenden *Ladungs*eigenfunktionen ebenso als Vertauschungsoperator der Ladungsvariablen (nachrechnen!). Folglich ist er nach S. 486 in Anwendung auf *antisymmetrische* Gesamteigenfunktionen identisch mit $-P_H$:

$$P_H = -P_\tau = -\tfrac{1}{2}(1 + (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)). \tag{97.7}$$

Damit folgt sofort die Darstellung von P_M:

$$P_M = P_r = P_B P_H = -P_\sigma P_\tau = -\tfrac{1}{4}(1 + (\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2))\,(1 + (\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)). \tag{97.8}$$

Mit den eben gewonnenen Darstellungen von P_M, P_B, P_H kann man unser allgemeinstes (zentrales) Austauschpotential $V(r)$ in der Form schreiben

$$V = V_0(r) + V_\sigma(r)\,(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2) + V_\tau(r)\,(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2) + V_{\sigma\tau}(r)\,(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)\,(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2) \tag{97.9a}$$

bzw.

$$V = (a_0 + a_\sigma(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2) + a_\tau(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2) + a_{\sigma\tau}(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)\,(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2))\,J(r). \tag{97.9b}$$

Wir können daraus ablesen, daß dieses allgemeinste Austauschpotential ladungsunabhängig ist, denn es enthält die Isospins nur in der Form 1 und $(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)$ (vgl. § 93 e), besteht also nur aus neutralen und symmetrischen Potentialen. Man rechne die $a_0, a_\sigma, a_\tau, a_{\sigma\tau}$ auf W, M, B, H um – womit die vollständige Äquivalenz der Schreibweisen (97.3b) und (97.9b) bewiesen wird – und stelle fest, inwieweit W-, M-, B-, H-Potentiale neutral oder symmetrisch sind.

---

[1]) Von dem Faktor $\hbar$ abgesehen.

c) Anwendungen

Einem Bartlett-Potential sind wir im Grunde schon in Kap. VIII, § 88 b, begegnet, als bei der niederenergetischen Neutron-Proton-Streuung eine Spinabhängigkeit der Kernkräfte (-potentiale) angenommen werden mußte, die dort jedoch nur im Wirkungsquerschnitt berücksichtigt wurde. Um – wie dort notwendig – ein Potential zu erhalten, das im Triplettzustand anders ist als im Singulettzustand, braucht man eine Mischung z. B. aus Wigner- und Bartlett-Potential[1]), denn nach Tabelle 60 hat man

$$V = V_W(r) + V_B(r)\, P_B = \begin{cases} V_W + V_B \equiv V_{\text{Tripl}} & \uparrow\uparrow, \\ V_W - V_B \equiv V_{\text{Singul}} & \uparrow\downarrow. \end{cases}$$

Die experimentellen Daten liefern für Kastenpotentiale mit Radius

$$r_0 = b = 2 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}$$

eine Tiefe

$$V_{W0} \sim 30\ \text{MeV}, \quad V_{B0} \sim 6\ \text{MeV}$$

(vgl. § 88, Tabellen 50 und 52). Setzt man in $V\,P_B = \frac{1}{2}(1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2))$, sieht man die Spinabhängigkeit des Potentials explizit. Rechnet man mit diesem Potential die Neutron-Proton-Streuung durch, erhält man genau den früheren Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \tfrac{3}{4}\,\sigma_t + \tfrac{1}{4}\,\sigma_s.$$

Es ist bezeichnend, daß für die Spinabhängigkeit der Kernkräfte eine *Mischung* von Wigner- und Bartlett-Potential notwendig war; ein *reines* Bartlett-Potential ist ungeeignet, da es nach Tabelle 60 im ^3S- und ^1S-Zustand entgegengesetzt gleich groß ist, während für die niederenergetische Neutron-Proton-Streuung beide Male Anziehung nötig ist, im ^3S stärker (Grundzustand des Deutrons), im ^1S schwächer (kein gebundener Zustand). Wegen genau desselben Verhaltens in diesen beiden Zuständen (vgl. Tabelle 60) scheidet auch ein reines Heisenberg-Potential aus. Umgekehrt kommt ein reines Majorana- oder ein reines Wigner-Potential ebenfall nicht in Frage, da zwar beide Potentiale in ^3S und ^1S gleiches Vorzeichen, aber auch gleiche Größe haben, so daß es einen gebundenen ^1S-Zustand mit derselben Bindungsenergie wie der ^3S-Zustand geben müßte.
Insgesamt kommen deshalb nur Mischungen von mindestens zwei Austauschpotentialen in Frage. Zugleich haben wir gesehen, daß wir schon für die niederenergetischen (und in Kap. VIII, § 91, für die hochenergetischen) Daten des *Zwei*nukleonen-Systems Austauschpotentiale brauchen. Auch ohne das Sättigungsproblem, das uns zunächst auf diese Potentiale führte, sind also Austauschpotentiale notwendig.

---

[1]) Andere Mischungen sind ebenfalls geeignet. Welche?

§ 98. Austauschpotentiale und Sättigung

Wir wollen nun die quantitative Behandlung des Sättigungsproblems für Austauschpotentiale kurz darstellen; dabei beschränken wir uns darauf, den wesentlichen Gedankengang anzugeben. Als Ausgangspunkt nehmen wir den Vergleich der experimentell gefundenen Abhängigkeit der Bindungsenergie $B = -E_{0\,\mathrm{exp}}$ von der Nukleonenzahl A mit der theoretisch berechneten. Theoretisch würden wir die Gesamtenergie E_0 des Grundzustandes als Erwartungswert des exakten Hamilton-Operators H, gebildet mit dessen Eigenfunktion ψ_0 des Grundzustandes, erhalten:

$$E_0 = \int \psi_0^* H \psi_0 d\tau = (\psi_0, H\psi_0) = \langle H \rangle_0 = E_{0\,\mathrm{exp}}; \tag{98.1}$$

sie würde mit der gemessenen Bindungsenergie übereinstimmen.

Nun kennen wir weder den exakten Hamilton-Operator H des Kerns, noch seine Eigenfunktionen. Wir versuchen deshalb, einen Näherungs-Hamilton-Operator $\bar{H}$ anzusetzen, indem wir als Potential $V(ik)$ unsere Austauschpotentiale verwenden:

$$\bar{H} = T + V \equiv -\frac{\hbar^2}{2M}\sum_k \Delta_k + \sum_{i<k}\sum V(ik),$$

$$\bar{H}\bar{\psi}_\nu = \bar{E}_\nu \bar{\psi}_\nu, \qquad (\bar{\psi}_\mu, \bar{\psi}_\nu) = \delta_{\mu\nu}.$$

Wir hätten dann $\bar{E}_0 = (\bar{\psi}_0, \bar{H}\bar{\psi}_0)$ mit $E_0 = E_{0\,\mathrm{exp}}$ zu vergleichen, und dieses $\bar{E}_0$ müßte in der Nähe von E_0 liegen, d.h. Sättigung zeigen. Leider können wir das A-Teilchen-Problem nicht exakt lösen, d.h. $\bar{\psi}_0$ und damit $\bar{E}_0$ nicht berechnen. Aber wir können wenigstens eine obere Schranke für $\bar{E}_0$ angeben, denn nach einem allgemeinen quantenmechanischen Satz ist der mit *irgendeiner* Probierfunktion Φ_0 gebildete Erwartungswert $\tilde{E}_0$ von $\bar{H}$ stets größer als $\bar{E}_0$:

$$\tilde{E}_0 = (\Phi_0, \bar{H}\Phi_0) \geqslant \bar{E}_0 = (\bar{\psi}_0, \bar{H}\bar{\psi}_0).^{1)} \tag{98.2}$$

(Beweis: Man setze $\Phi_0 = \Sigma c_\nu \bar{\psi}_\nu$ in $\tilde{E}_0$ ein und beachte $1 = (\Phi_0, \Phi_0) = \Sigma\,|c_\nu|^2$). Man wählt deshalb als Φ_0 eine aus Einzelteilchen-Funktionen gebildete Slater-Determinante (Einzelteilchennäherung, Hartree-Fock-Näherung, s. S. 519), mit der sich $\tilde{E}_0$ berechnen läßt, und ist dann sicher, daß das eigentlich interessierende $\bar{E}_0$ stets kleiner als $\tilde{E}_0$ ist. Wir führen diese etwas langwierige Rechnung hier nicht durch (vgl. z.B. [B 59-1], Kap. III. 4, [S 53-1], S. 217 ff., [R 48-1], S. 227 ff., [H 51-1], S. 61 ff.), sondern geben nur das für uns wesentliche Ergebnis an.

Nimmt man als Φ_0 die Slater-Determinante eines „schweren Standardkerns", d.h. eines Kerns mit $N = Z$ und gleich viel Spins ↑ und ↓ als vereinfachten Prototyps der wirklichen Kerne, dann ergibt sich zunächst für den Erwartungswert der *potentiellen* Energie für alle vier Typen von Austauschpotentialen ein Ausdruck

$$\langle V \rangle_0 = C_1 A + C_2 A^2,$$

[1]) Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle $\Phi_0 \equiv \bar{\psi}_0$.

in dem die Konstanten C_i von Typ und Gestalt des gewählten Potentials abhängen. Das Thomas-Fermi-Modell ergibt nach S. 545 für die *kinetische* Energie

$$\langle T\rangle_0 = C_3 A,$$

so daß wir insgesamt erhalten

$$\tilde{E}_0 = K_1 A + K_2 A^2, \qquad K_1 = C_1 + C_3, \qquad K_2 = C_2. \tag{98.3}$$

Wir haben damit die drei Größen zu vergleichen:

$$\begin{aligned} E_0 &= (\psi_0, H\psi_0) = E_{0\,\mathrm{exp}} = CA, \qquad C \sim -8\ \mathrm{MeV/Teilchen} < 0, \\ \bar{E}_0 &= (\bar{\psi}_0, \bar{H}\bar{\psi}_0), \\ \tilde{E}_0 &= (\Phi_0, \bar{H}\Phi_0) = K_1 A + K_2 A^2. \end{aligned} \tag{98.4}$$

Wenn unser gewähltes Potential und damit $\bar{H}$ eine brauchbare Näherung sein soll, muß offenbar

$$\bar{E}_0 \sim E_{0\,\mathrm{exp}} = CA \tag{98.5}$$

sein. Andererseits gilt stets

$$\bar{E}_0 \leqslant \tilde{E}_0 = K_1 A + K_2 A^2.$$

Damit also $\bar{E}_0$ überhaupt in der Nähe von $E_{0\,\mathrm{exp}}$ liegen kann, ist demnach *positives oder verschwindendes* K_2 *notwendig*, denn mit negativem K_2 wird $\tilde{E}_0$ und damit $\bar{E}_0$ bei großen A-Werten viel stärker negativ, als das nur linear abnehmende $E_{0\,\mathrm{exp}}$.

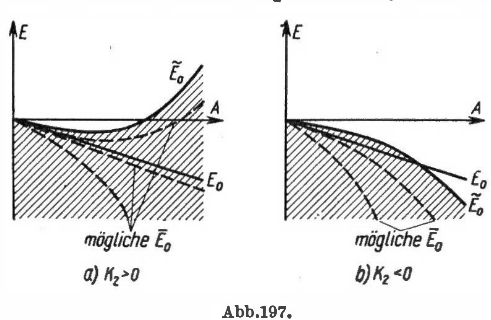


Abb. 197.
Erläuterung zur notwendigen Sättigungsbedingung (93.6)
a) Sättigungsbedingung erfüllt: $\tilde{E}_0 \geqslant E_0$ für alle A
b) Sättigungsbedingung nicht erfüllt: $\tilde{E}_0 < E_0$ für große A
(K_1 wurde für die Zeichnung negativ, $> C$ angenommen)

Abb. 197 zeigt das anschaulich und macht darüber hinaus in 197 a besonders deutlich, daß die Bedingung $K_2 \geqslant 0$ nur notwendig, aber nicht hinreichend ist:
Sie sichert nur, daß das (schraffierte) Gebiet, in dem $\bar{E}_0 = \bar{E}_0(A)$ irgendwo verläuft, die experimentelle Gerade $E_0 = E_0(A)$ für alle A bedeckt; es ist also bei Erfüllung der Bedingung noch keineswegs gesagt, daß dann $\bar{E}_0(A)$ wirklich in der Nähe von $E_0(A)$ verläuft. Unsere notwendige Bedingung muß deshalb durch hinreichende Bedingungen ergänzt werden ([R 48-1], S. 227).

Hier zeigt sich ein entscheidender Nachteil der Hartree-Fock-Näherung: Sie bietet keine Möglichkeit für eine Fehlerabschätzung, d. h. für eine Abschätzung der Differenz $\bar{E}_0 - \tilde{E}_0$. Brückner hat neuerdings ein Näherungsverfahren angegeben, das die Hartree-Fock-Näherung als niedrigste Näherung enthält (vgl. S. 686 und [B 56-2]) und das folglich eine solche Abschätzung zumindest im Prinzip ermöglicht.

Unsere notwendige Sättigungsbedingung

$$K_2 \geqq 0 \tag{98.6}$$

ist eine Aussage allein über die Potentiale, da $K_2 = C_2$ ist und C_2 nur von dem gewählten $V(ik)$ abhängt. Wählt man

$$V(i,k) = (W + M P_M^{ik} + B P_B^{ik} + H P_H^{ik}) I(r_{ik}), \quad I(r) \geqslant 0,$$

dann ergibt die Rechnung[1])

$$K_2 = c\left(W + \frac{B}{2} - \frac{H}{2} - \frac{M}{4}\right), \quad c > 0. \tag{98.7}$$

Daraus liest man als notwendige Bedingung für die vier Fälle ab, in denen nur je eins der vier Potentiale vorliegt:

$$W \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad B \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad H \leqq 0 \quad \text{bzw.} \quad M \leqq 0.$$

Richtet man jedes der vier Potentiale so ein, daß das Deuteron existiert, d. h. im ^3S-Zustand Anziehung vorliegt, dann müssen alle vier Konstanten W, B, H, M negativ sein (im ^3S: $P_B = P_H = P_M = 1$), und wir haben als Ergebnis:

Ein Heisenberg- bzw. Majorana-Potential kann für sich allein Sättigung ergeben, ein Wigner-[2]) *bzw. Bartlett-Potential dagegen nicht (wenn man verlangt, daß das Potential im Deuteron-Grundzustand anziehend ist).*

Wie wir bereits wissen, interessieren für die Kernphysik nur Mischungen von mindestens zwei Potentialtypen. Nach dem eben Gesagten muß stets wenigstens ein Anteil Heisenberg- oder Majorana-Potential dabei sein, um überhaupt Sättigung bekommen zu können. Betrachten wir das häufig verwendete Beispiel Wigner- + Majorana-Potential ($B = H = 0$), dann erhalten wir aus $K_2 = c\left(W - \frac{M}{4}\right) \geqq 0$ als notwendige Sättigungsbedingung $4W \geqq M$. Wegen des Deuteron-Grundzustandes ^3S muß $M + W < 0$ sein, denn für $S = 1$, $l = 0$ erzeugen P_M und $P_W \equiv 1$ einen Faktor $+1$, so daß $V = (M + W) I(r)$ wird. Außerdem ist es nur sinnvoll, für ^3S als tiefstem Zustand des Zwei-Nukleonen-Systems beide Anteile anziehend zu wählen: $M < 0$, $W < 0$. Damit lautet unsere Bedingung

$$4|W| \leqq |M|.$$

WIGNER [W 36-1] hat gezeigt (vgl. [R 48-1], S. 227), daß unter der Bedingung $M \leqq 0$ unsere notwendige Sättigungsbedingung auch hinreichend ist, so daß sich schließlich ergibt:

Eine Mischung von Wigner- und Majorana-Potential ergibt Sättigung, wenn der Majorana-Anteil mindestens $\frac{4}{5}$ beträgt (und beide Potentiale im Deuterongrundzustand anziehend sind):

$$|g| = |A_2| : |A_1| = |M| : |W| \geqq 4 : 1. \tag{98.8}$$

Abschließend wollen wir bemerken, daß sich analoge Rechnungen auch für Tensorpotentiale durchführen lassen (vgl. [B 59-1], Kap. III. 4; [S 53-1], S. 221); das wesentliche Ergebnis ist, daß Tensorpotentiale nicht zur Sättigung beitragen.

---

[1]) Wegen der Rechnungen vgl. S. 491.

[2]) Damit ist nochmals gezeigt, daß rein anziehende Potentiale keine Sättigung ergeben.

3. KERNKRÄFTE UND MESONENTHEORIE

§ 99. Mesonenfeld

In der Elektrodynamik weiß man, daß das zwischen zwei Ladungen wirkende Coulomb-Potential sich auf das elektromagnetische Feld zurückführen läßt. 1935 versuchte in Analogie dazu YUKAWA, die Kernkräfte durch Potentiale zu erfassen, die sich auf ein „Kernkraftfeld" zurückführen lassen. Er stellte dazu folgende Überlegung an: In der Elektrodynamik gehorcht das elektrische Potential V allgemein der Wellengleichung

$$\Box V \equiv \Delta V - \frac{1}{c^2}\ddot{V} = -4\pi\varrho(\mathfrak{r}, t) \tag{99.1}$$

($c =$ Lichtgeschwindigkeit), speziell unter statischen Verhältnissen der Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\varrho.\ (\mathfrak{r}). \tag{99.2a}$$

Das hat als Lösung bekanntlich

$$V(\mathfrak{r}) = \int \varrho(\mathfrak{r}')\frac{1}{r}\,d\mathfrak{r}', \quad r = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|. \tag{99.2b}$$

Ziehen wir die Raumladung $\varrho(\mathfrak{r})$ in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{r}_1$ auf einen engen Bereich zusammen, dann können wir $V(r)$ bei diesem Zusammenziehungsprozeß schreiben als

$$V(\mathfrak{r}) = \overline{\frac{1}{r}}\int \varrho(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}',$$

wenn $\overline{\frac{1}{r}}$ ein geeigneter Mittelwert von $\frac{1}{r}$ über das kleine Gebiet ist, in dem $\varrho(\mathfrak{r}) \neq 0$ ist. Gehen wir schließlich so zum Grenzfall einer Punktladung an der Stelle $\mathfrak{r}_1$ über, daß dabei die Gesamtladung

$$e = \int \varrho(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}' \tag{99.3}$$

endlich bleibt, dann geht $\overline{\frac{1}{r}}$ gegen $\frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|}$, und wir erhalten[1]) das Coulomb-Potential einer Punktladung

$$V(\mathfrak{r}) = V(r) = e\frac{1}{r}, \quad r = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|. \tag{99.4}$$

---

[1]) Kürzer: Man setze $\varrho(\mathfrak{r})$ mittels δ-Funktion als Punktladung $\varrho(\mathfrak{r}) = e \cdot \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)$ an und in (99.2b) ein.

Analog suchen wir jetzt eine Gleichung für ein „Potential des Kernkraftfeldes“ $\varphi(\mathfrak{r})$, die wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte ein viel schneller (etwa exponentiell) abfallendes Potential liefern muß als das Coulomb-Potential (99.4).

Yukawa fand, daß man eine solche Gleichung erhält, wenn man statt (99.1) schreibt

$$\Box\varphi - \varkappa^2\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} - \varkappa^2\varphi = -4\pi\eta(\mathfrak{r}, t) \tag{99.5}$$

($\varkappa^2$ = positive Konstante, η = Dichte der Quellenverteilung des Kernkraftfeldes φ). Unter statischen Verhältnissen ergibt das

$$\Delta\varphi - \varkappa^2\varphi = -4\pi\eta(\mathfrak{r}) \tag{99.6 a}$$

mit der Lösung

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \int \eta(\mathfrak{r}')\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\,d\mathfrak{r}'. \tag{99.6 b}$$

Zieht man auch hier wieder die Quellenverteilung auf einen Punkt $\mathfrak{r}_1$ zusammen und definiert als (endlich bleibende) Stärke der Punktquelle unseres φ-Feldes

$$g = \int \eta(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}', \tag{99.7}$$

dann ergibt sich das „Yukawa-Potential“ einer Punktquelle des Kernkraftfeldes, die ein Nukleon verkörpern soll:

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \varphi(r) = g\frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \quad r = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|. \tag{99.8}$$

Damit haben wir ein sehr rasch abklingendes Potential gefunden, dessen Reichweite r_0 durch die neu eingeführte Konstante $\varkappa$ bestimmt ist; man muß

$$r_0 = \frac{1}{\varkappa} \sim 1{,}4 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \tag{99.9}$$

wählen, um die experimentellen Daten richtig wiedergeben zu können.

Es ist nun bemerkenswert, daß eine Gleichung der Gestalt (99.5) mit ganz anderer Bedeutung in der Quantenmechanik als nächstliegende relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung auftritt: Macht man im relativistischen Energieausdruck eines freien Teilchens,

$$c^2\mathfrak{p}^2 + c^4m_0^2 = E^2,$$

die üblichen Ersetzungen

$$\mathfrak{p} = i\hbar\,\text{grad},$$

$$E = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

und wendet die entstehende Operatorgleichung auf ein $\psi(\mathfrak{r}, t)$ an, dann erhält man

$$\left[- c^2 \hbar^2 \Delta + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c^4 m_0^2\right] \psi = 0$$

oder

$$\Box \psi - \frac{c^2 m_0^2}{\hbar^2} \psi = 0 , \qquad (99.10)$$

die relativistische Schrödinger-Gleichung oder Klein-Gordon-Gleichung.

Diese Gleichung ist als relativistische Verallgemeinerung der kräftefreien Schrödinger-Gleichung die quantenmechanische Gleichung eines spinlosen kräftefreien Teilchens der Ruhemasse m_0. Wegen ihrer formalen Gleichheit mit der Gleichung (99.5) eines quellenfreien ($\eta \equiv 0$) Kernkraftfeldes vermutet man einen Zusammenhang der Art, daß man die beiden Konstanten einander gleichsetzen kann:

$$\varkappa = \frac{m_0 c}{\hbar} . \qquad (99.11)$$

Tun wir das zunächst einmal ohne nähere Begründung, dann ergibt der empirische Wert von $\varkappa$ aus (99.9)

$$m_0 = \frac{\hbar \varkappa}{c} \sim 300\, m_e \qquad (99.12)$$

(m_e = Elektronenmasse). Falls sich also die Gleichsetzung (99.11) begründen läßt, sollte es Teilchen der Masse $\sim 300\, m_e$ und mit Spin 0 geben, die in einer engen, noch genauer zu klärenden Beziehung zu dem Kernkraftfeld φ stehen und der quantenmechanischen Gleichung (99.10) gehorchen. Tatsächlich glaubte man bereits 1937 (Anderson) in den damals entdeckten (μ-) Mesonen der Masse $m_0 = 207\, m_e$ diese Teilchen gefunden zu haben, fand sie in Wahrheit jedoch erst 1947 [P 47-1] in den π-Mesonen der Masse $m_0 = 273 m_e$, da nur letztere einen engen Zusammenhang mit den Kernkräften haben (vgl. § 79 b).

Die genauere Begründung der Gleichsetzung (99.11) können wir hier nur andeuten; sie wird von der Quantenfeldtheorie gegeben. Die Erfahrung zeigt, daß man nicht nur die Erscheinungen, die man in der klassischen Physik als Teilchen beschreibt, der Quantentheorie unterwerfen muß (Quanten*mechanik*), sondern auch die Felder der klassischen Physik (Quanten*feldtheorie*). So, wie die Quantenmechanik ergibt, daß die Teilchen auch Welleneigenschaften besitzen, erhält man aus der Quantenfeldtheorie, daß die Felder auch Teilcheneigenschaften besitzen: Sie ergibt z. B. in Anwendung auf das elektromagnetische Feld die Existenz von Lichtquanten oder Photonen. Unterwirft man ebenso unser Kernkraftfeld φ der Quantenfeldtheorie, dann erhält man, daß auch bei diesem Feld „Quanten" auftreten, jedoch im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik mit nichtverschwindender Ruhemasse, und zwar genau mit der Ruhemasse $\frac{\hbar \varkappa}{c}$, wie wir sie in (99.11) schon erraten hatten. Die π-Mesonen sind also im gleichen Sinne die Quanten des Kernkraftfeldes wie die Photonen die des elektromagnetischen Feldes. Man

nennt deshalb das Kernkraftfeld φ meist „Mesonenfeld", die Zahl g, die Stärke einer Punktquelle des φ-Feldes, oft „mesische Ladung".
Was schließlich den Vergleich der „Mesonenwellengleichung" (99.5) (mit $\eta \equiv 0$) mit der Klein-Gordon-Gleichung (99.10) betrifft, so ergibt die Quantentheorie des der Gleichung (99.5) genügenden Mesonenfeldes, daß tatsächlich ein einzelnes kräftefreies Meson genau der Gleichung (99.10) als quantenmechanischer Gleichung genügen sollte.

§ 100. Mesonenpotentiale

Wir hatten bis jetzt das Mesonenfeld *eines* Nukleons (= einer Punktquelle) berechnet. Um die Kräfte (Potentiale) zwischen *zwei* Nukleonen zu finden, denken wir uns zunächst zwei gleiche, kugelsymmetrische Ladungswolken $\eta_1(\mathfrak{r})$ bzw. $\eta_2(\mathfrak{r})$ in einem gewissen Abstand voneinander um die Punkte $\mathfrak{r}_1$ bzw. $\mathfrak{r}_2$ konzentriert: $\eta_1(\mathfrak{r}) = f(|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1|)$, $\eta_2(\mathfrak{r}) = f(|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_2|)$. Für die Kraft zwischen beiden ist ihre gegenseitige potentielle Energie U_{12} maßgebend. Die gesamte potentielle Energie ist[1])

$$U = -\tfrac{1}{2}\int \eta(\mathfrak{r}')\,\varphi(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}',$$

wo

$\eta(\mathfrak{r}) = \eta_1(\mathfrak{r}) + \eta_2(\mathfrak{r})$ die gesamte mesische Ladungsdichte und

$\varphi(\mathfrak{r}) = \varphi_1(\mathfrak{r}) + \varphi_2(\mathfrak{r})$ das gesamte von den beiden mesischen Ladungswolken erzeugte Potential ist. In U ist U_{12} enthalten als

$$\begin{aligned} U_{12} &= -\frac{1}{2}\int (\eta_1(\mathfrak{r}')\,\varphi_2(\mathfrak{r}') + \eta_2(\mathfrak{r}')\,\varphi_1(\mathfrak{r}'))\,d\mathfrak{r}' \\ &= -\frac{1}{2}\int (\eta_1(\mathfrak{r}')\,\eta_2(\mathfrak{r}'') + \eta_2(\mathfrak{r}')\,\eta_1(\mathfrak{r}''))\,\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\,d\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'' \\ &= -\int \eta_1(\mathfrak{r}')\,\eta_2(\mathfrak{r}'')\,\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\,d\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}'', \quad r = |\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''|, \end{aligned}$$

und gibt beim Zusammenziehen der beiden η_i auf mesische Punktladungen an den Stellen $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ der Stärke

$$g = g_1 = g_2 = \int \eta_i(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}:$$

$$U_{12} = -g^2\,\frac{e^{-\varkappa r_{12}}}{r_{12}}, \qquad r_{12} = |\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|. \tag{100.1}$$

Wir erhalten also ein zentrales Potential[2]) ohne Austauschanteil (Wigner-Potential), das rein anziehend ist.

---

[1]) Das in U im Gegensatz zur Elektrostatik stehende Minuszeichen ergibt sich in der betrachteten Mesonentheorie zwangsläufig.

[2]) Obwohl U_{12} eine potentielle Energie und kein Potential ist, verwenden wir von hier an wieder die in der Quantenmechanik leider übliche Bezeichnung Potential.

Die Mesonentheorie, die wir bis jetzt skizziert haben (φ reell, skalar), heißt „neutrale skalare Mesonentheorie", da sie nach der Quantisierung die Existenz von neutralen, skalaren Mesonen (Ladung 0, Spin 0, innere Parität + 1) ergibt. Man nennt deshalb Potentiale ohne τ-Abhängigkeit auch *neutrale Potentiale.* Da man experimentell außer neutralen π-Mesonen auch geladene findet (vgl. § 79), definiert man eine „geladene skalare Mesonentheorie", in der φ eine komplexe skalare Funktion ist. Auf ähnliche Weise wie oben ergibt sich in dieser Theorie als statisches Potential zwischen zwei Punktquellen

$$U_{12} = -\frac{g^2}{2}\left(\tau_1^{(1)}\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)}\right)\frac{e^{-\varkappa r_{12}}}{r_{12}}. \tag{100.2}$$

Man nennt deshalb Potentiale mit dem Isospin-Operator $(\tau_1^{(1)}\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)})$ *geladene Potentiale.*

Da geladene und neutrale π-Mesonen fast gleiche Masse haben ($273 m_e$ bzw. $265 m_e$), faßt man sie als drei Ladungszustände des einen Teilchens π-Meson auf. Dementsprechend fügt man in der zugehörigen Mesonenfeldtheorie das geladene und das neutrale Feld zu einem Gesamtfeld zusammen. Man erhält so die „symmetrische skalare Mesonentheorie", die als statisches Potential zweier mesischer Punktladungen

$$U_{12} = -\frac{g^2}{2}(\vec{\tau}_1\,\vec{\tau}_2)\frac{e^{-\varkappa r_{12}}}{r_{12}} \tag{100.3}$$

ergibt. Daher stammt der Name *symmetrisches Potential* für Austauschpotentiale mit der Isospin-Abhängigkeit $(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)$.

Man weiß, daß das π-Meson nicht skalar, sondern pseudoskalar ist (innere Parität -1), d. h. daß das Mesonenfeld $\varphi(\mathfrak{r})$ ein Pseudoskalar ist: $\varphi' = -\varphi$.[1] Statt einer skalaren Mesonentheorie muß deshalb eine pseudoskalare Theorie durchgerechnet werden, die wieder ihrer Ladungsabhängigkeit nach neutral, geladen oder symmetrisch sein kann. Es zeigt sich, daß eine solche pseudoskalare Theorie zwangsläufig zu spinabhängigen Potentialen führt; man erhält als statisches Potential zweier mesischer Punktladungen

$$U_{12} = g^2\,\mathrm{T}\left[\frac{\varkappa^2}{3}(\vec{\sigma}_1\,\vec{\sigma}_2) + f(r_{12})\,S_{12}\right]\frac{e^{-\varkappa r_{12}}}{r_{12}}, \tag{100.4}$$

$$f(r) = \frac{1}{r^2} + \frac{\varkappa}{r} + \frac{\varkappa^2}{3}, \qquad \mathrm{T} = \begin{cases} 1 & \text{neutr.,} \\ \frac{1}{2}\left(\tau_1^{(1)}\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)}\right) & \text{gelad. Th.,} \\ \frac{1}{2}(\vec{\tau}_1\,\vec{\tau}_2) & \text{symm.} \end{cases}$$

$$S_{12} = 3\frac{(\vec{\sigma}_1\mathfrak{r}_{12})(\vec{\sigma}_2\mathfrak{r}_{12})}{r_{12}^2} - (\vec{\sigma}_1\,\vec{\sigma}_2),$$

Wir erhalten so für die neutrale bzw. symmetrische pseudoskalare Mesonentheorie zentrale Austauschpotentiale vom Typ

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2) = -1 + 2P_B$$

bzw.

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2) = 1 - 2P_B + 2P_H - 4P_M$$

und gleichzeitig Tensorpotentiale. Die symmetrische pseudoskalare Mesonentheorie ergibt so gerade alle die Potentialtypen und keine anderen, die wir zur Erklärung der Eigenschaften der leichtesten bis schweren Kerne annehmen

[1]) Der Strich ′ bedeutet „Anwendung der Paritätsoperation".

mußten: zentrale Austauschpotentiale und Tensorpotentiale, beide kurzreichweitig und ladungsunabhängig.

In (100.4) haben wir noch einen Term weggelassen, den sog. Kontaktterm

$$-4\pi g^2 \mathrm{T}(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)\,\delta(\mathfrak{r}).$$

Nach der am besten zum Experiment passenden symmetrischen Theorie ergibt er für S-Zustände eine δ-funktionsartige Abstoßung (nachprüfen!). LEVY [L 52-2] hat gezeigt, daß diese δ-Abstoßung in Wahrheit über ein Gebiet der Größenordnung $\frac{\hbar}{Mc}$ verschmiert sein wird und so einen hard core mit brauchbarem r_c liefert. Die (unserer Rechnung im neutralen skalaren Fall ähnlichen) Rechnungen, die zu den Potentialen (100.2), (100.3) und (100.4) führen, findet man z.B. in [S 53-1], Kap.7.

Wir können hier auf diese Rechnungen und ihre quantenfeldtheoretische Begründung nicht eingehen, wollen aber wenigstens den physikalischen Hintergrund skizzieren, der hinter diesen Potentialen steht. Die Quantenfeldtheorie zeigt, daß man sich das Zustandekommen eines Potentials zwischen zwei Nukleonen so vorstellen muß, daß zwischen den beiden Nukleonen ein „virtuelles" Meson ausgetauscht wird.

Das bedeutet folgendes: Wir hatten die Nukleonen = Punktquellen als ruhend vorausgesetzt („statische Verhältnisse"), so daß an sich keine Energie zur Bildung des auszutauschenden Mesons (*Ruhe*energie $m_0c^2 = 140$ MeV) zur Verfügung steht. Nun gilt aber in der Quantentheorie die Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$, die besagt, daß während der Zeit Δt die Energie um $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta t}$ unscharf, d. h. während Δt der Energiesatz um ΔE unscharf ist („verletzt werden kann"). Während sehr kurzer Zeiten $\Delta t \lesssim \frac{\hbar}{m_0 c^2}$ wird diese Unschärfe der Energie größer als die Ruheenergie eines Mesons und damit die Erzeugung eines Mesons möglich. Ein solches „auf Kosten der Unschärferelation" erzeugtes und nach sehr kurzer Zeit wieder absorbiertes Meson heißt „virtuelles" Meson, weil es experimentell prinzipiell nicht nachweisbar ist, denn keine Messung kann die Grenzen der Unschärferelation unterschreiten.

Es ist bemerkenswert, daß bereits aus dieser einfachen Überlegung folgt, daß die Reichweite der so erzeugten Potentiale klein sein muß und durch die Ruhemasse der Mesonen bestimmt ist: Eine Energieunschärfe $\Delta E \geqq m_0 c^2$ ($m_0 = 273\, m_e$) ist während der Zeit $\Delta t \lesssim \frac{\hbar}{m_0 c^2} \sim 10^{-21}$ sec vorhanden, während der also der Austausch erfolgt sein muß. Selbst wenn sich das Meson während dieser Zeit mit Lichtgeschwindigkeit bewegte, könnte es höchstens eine Strecke $\Delta x = c\Delta t \lesssim \frac{\hbar}{m_0 c} = \frac{1}{\varkappa}$ zurücklegen. Die durch den Austausch eines virtuellen Mesons hervorgerufene Wechselwirkung kann also höchstens eine Reichweite $r_0 = \varkappa^{-1} = \frac{\hbar}{m_0 c}$ haben. Die endliche Ruhemasse der Quanten des Kernfeldes ist also äquivalent zu der kurzen Reichweite dieses Kraftfeldes.

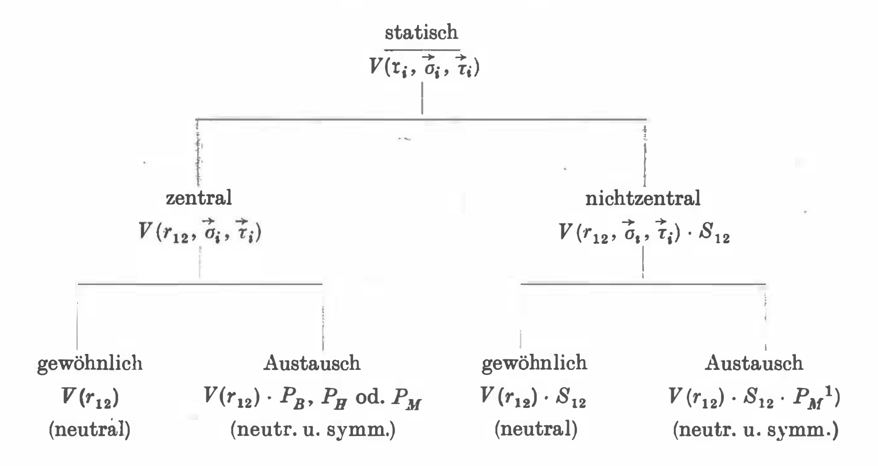
Wenn die Potentiale des Kernkraftfeldes durch Mesonenaustausch zustandekommen, versteht man, daß diese Potentiale z. T. (Ladungs-)Austauschpotentiale sein müssen. Denn ist das ausgetauschte Meson ein geladenes, ändern sich beim Austausch — d. i. beim Wirken des Potentials — die Ladungen der beiden Nukleonen; Austausch neutraler Mesonen kann dagegen die Ladungen der Nukleonen nicht ändern: neutrale Potentiale.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, abschließend davor zu warnen, die virtuellen Prozesse allzu real aufzufassen. Sie sind eigentlich nur eine Veranschaulichung für bestimmte mathematische Ausdrücke der Quantenfeldtheorie, die meist sehr zweckmäßig, aber nicht streng ist.

4. TYPEN VON POTENTIALEN

Abschließend stellen wir in Tabelle 61 alle wichtigen Potentialtypen zusammen, die uns begegnet sind. Dabei beschränken wir uns auf Zweikörperpotentiale und der Ladungsabhängigkeit nach auf ladungsunabhängige, d.h. neutrale (1) bzw. symmetrische $(\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2)$ Potentiale, lassen also geladene $(\tau_1^{(1)}\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(1)}\tau_2^{(2)})$ und sonstige ladungssymmetrische $(\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)})$ Potentiale weg. Neben statischen Potentialen geben wir das wichtigste Beispiel eines geschwindigkeits- (oder impuls-)abhängigen Potentials an. Einen Überblick über alle Typen von Zweikörperpotentialen, die auf Grund gewisser Invarianzforderungen möglich sind, gibt ROSENFELD [R 48-1], Kap. 15.

Tabelle 61. Wichtigste Typen von Zweikörperpotentialen $(i = 1, 2)$



nichtstatisch

(geschwindigkeitsabhängig)

$V(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{p}_i, \vec{\sigma}_i, \vec{\tau}_i)$

z. B. Spin-Bahn-Potential:

$$V(r_{12}) \cdot ([\mathfrak{r}_{12} \times \mathfrak{p}_{12}] \cdot \vec{\sigma}_{12}) \propto V(r_{12}) (\mathfrak{L} \cdot \vec{S})$$

$$\left(\mathfrak{r}_{12} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2, \quad \mathfrak{p}_{12} = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_2, \quad \vec{\sigma}_{12} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 = \frac{2}{\hbar}\vec{S}\right)$$

---

[1]) Es gilt effektiv $S_{12} P_B = S_{12}$ und folglich $S_{12} P_H = S_{12} P_B P_M = S_{12} P_M$.
(Beweis: $S_{12} P_B \psi_s = S_{12}(-1)\psi_s = -S_{12}\psi_s = 0 = +S_{12}\psi_s$ (s. Kap. VIII (90.5)),
$S_{12} P_B \psi_t = S_{12}(+1)\psi_t \qquad = +S_{12}\psi_t$.
$\psi_s = \psi_{\text{sing}}, \quad \psi_t = \psi_{\text{trip}}$.)

TEIL 2: Kernmodelle

Wir kommen nun zur zweiten wichtigen Entwicklungslinie der theoretischen Kernphysik (vgl. S. 447), zu den Kernmodellen. Während man bis 1947 nur das *Compoundkern-Modell* und das *Tröpfchenmodell* für brauchbar hielt, wurde seitdem eine ganze Reihe weiterer Modelle mit den verschiedensten Anwendungsbereichen entwickelt. Wir wollen uns zunächst einen ungefähren Überblick über die wichtigsten Modelle verschaffen. Dabei und bei der anschließenden genaueren Behandlung der einzelnen Modelle beschränken wir uns auf solche, die auf größere Gruppen von Kernen anwendbar sind, scheiden also z. B. das α-Teilchen-Modell aus, da es höchstens bei einigen wenigen Kernen eine gewisse Brauchbarkeit zu haben scheint [M 57-1]

Man kann die Kernmodelle in Einzel- und Vielteilchenmodelle gliedern. Für *Einzelteilchenmodelle* nimmt man an, daß jedem einzelnen Teilchen im Kern ein bestimmter Zustand zugeschrieben werden kann, wie es von der Elektronenhülle her geläufig ist. Das setzt voraus, daß die Wechselwirkung der Teilchen untereinander nur schwach ist, so daß sie sich (näherungsweise) gegenseitig in ihren Zuständen nicht stören. Beim *Vielteilchenmodell* macht man die entgegengesetzte Annahme, daß die Nukleonen im Kern so stark miteinander wechselwirken, daß sich Zustände einzelner Nukleonen nicht mehr näherungsweise definieren lassen, also nur der Zustand des Gesamtkerns definiert ist, an dem alle Nukleonen gleichmäßig beteiligt sind. Die wichtigsten Modelle sind in Tabelle 62 zusammengestellt.

Tabelle 62. Kernmodelle

	Einzelteilchenmodelle	Vielteilchenmodelle
gebundene Zustände	Schalenmodell Kollektives Modell	(Tröpfchenmodell)
ungebundene Zustände (Kernreaktionen)	Optisches Modell	Compoundkern-Modell

Wir wollen schon hier festhalten, daß die drei Einzelteilchenmodelle im Grunde nur Teile oder Abwandlungen e i n e s Modells sind. *Schalenmodell* und *Optisches Modell* bilden zusammen ein Modell – man könnte es etwa „starres Einzelteilchenmodell" nennen; das Schalenmodell befaßt sich mit den gebundenen, das Optische Modell mit den ungebundenen Zuständen dieses Modells. Das *Kollektive Modell* war ursprünglich als ein Mittelding zwischen Einzel- und Vielteilchenmodell, eine bestimmte Vereinigung von Schalen- und Tröpfchenmodell konzipiert worden; doch hat sich später gezeigt, daß man es vollkommen auf das Einzelteilchenmodell zurückführen muß, so daß wir es als „deformierbares Einzelteilchenmodell"

auffassen können, wie sich zeigen wird. Es ist damit eine Verallgemeinerung des starren Einzelteilchenmodells.
Auf der Seite der Vielteilchenmodelle haben wir das *Tröpfchenmodell* in Klammern gesetzt, da sich bei der Behandlung des Kollektiven Modells zeigen wird, daß dieses Modell nicht geeignet ist, gebundene Zustände von Kernen zu beschreiben.[1]) Im Gebiet der Kernreaktionen dagegen bewährt sich die Vielteilchenvorstellung beim *Compoundkern-Modell*, wenn auch unter gewissen Einschränkungen durch das Optische Modell, wie wir sehen werden.
Zusammenfassende Behandlungen aller Kernmodelle findet der Leser in sehr ausführlicher Form im Handbuchartikel von MOSZKOWSKI [M 57-1], kürzer in [E 57-2] und [W 57-1].

1. SCHALENMODELL

A. Magische Zahlen

Von der Elektronenhülle des Atoms ist bekannt, daß die *Hüllen* mit den Elektronenzahlen

$$Z = 2,\ 10,\ 18,\ 36,\ 54,\ 86,$$

die Edelgas-Hüllen, besonders stabil sind. Die theoretische Deutung dieser Tatsache ist, daß bei diesen Elektronenzahlen *Schalen*[2]) abgeschlossen werden, die sich aus dem Schalenmodell der Hülle ergeben.
Im folgenden werden wir sehen, daß auch für die *Kerne* solche ausgezeichneten „magischen" Zahlen existieren, bei denen sich eine besondere Stabilität zeigt: *Kerne mit den Protonen- oder Neutronenzahlen*

$$\left.\begin{matrix} N \\ Z \end{matrix}\right\} = 2,\ 8,\ 20,\ 28,\ 50,\ 82,\ 126$$

sind besonders stabil.

Um das zu zeigen, betrachten wir eine Reihe von Eigenschaften stabiler Kerne und von Kernen bei radioaktivem Zerfall und Kernreaktionen.
Kerne, deren Z oder N magisch ist, nennen wir „magische" Kerne; „doppelt magische" Kerne haben magisches Z und N.

---

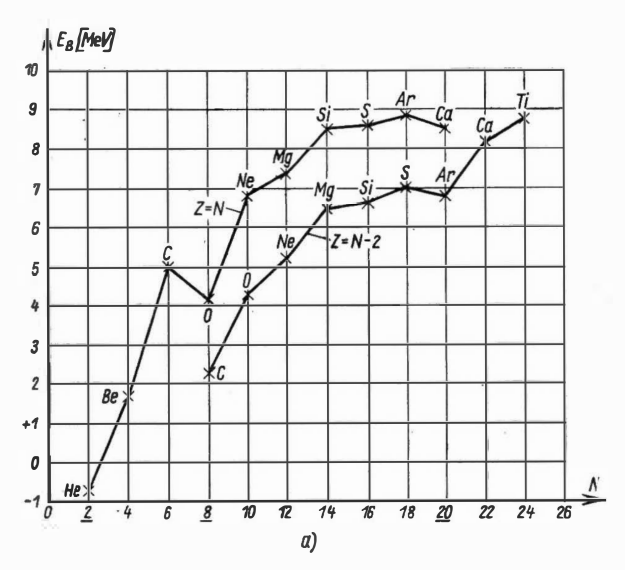
[1]) Genauer: Es kann die *dynamischen* Eigenschaften gebundener Zustände nicht quantitativ beschreiben. Für die *statischen* Eigenschaften (Bethe-Weizsäcker-Formel u. ä.) reicht es aus, weil dabei die eigentlichen Flüssigkeitseigenschaften nicht benutzt werden (vgl. S. 635).
[2]) Der Begriff Schale verliert in der Quantenmechanik, besonders der des Kerns, fast vollständig seinen geometrischen Sinn (vgl. Fußnote 1 auf S. 547).

§ 101. Stabile Kerne

a) Bindungsenergie

Die Bindungsenergie E_B eines Kerns ist ein direktes Maß für seine Stabilität. Wir erwarten also für magische Kerne besonders große Bindungsenergien.

Bei den leichten Kernen ist das außer bei He^4 ($Z = N = 2$) nicht allzu deutlich zu erkennen, wenn man die Bindungsenergie selbst über Z oder N aufträgt. Zeichnet man jedoch die Differenz zur Bindungsenergie des Nachbarkerns mit dem nächst höheren Z oder N in Abhängigkeit von Z oder N (Abb. 198), so findet man klar die Auszeichnung von $N = 2, 8, 20$ und $Z = 2, 8, 20$.



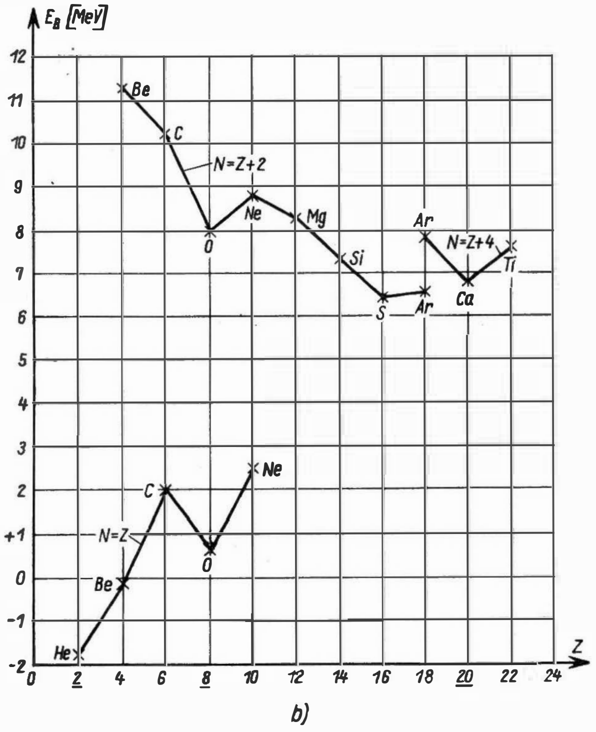


Abb. 198.
Bindungsenergie E_B
a) des nächsten Neutrons
b) des nächsten Protons
an den Kern $^N_Z X$
(N, Z gerade).
(Nach MAYER, JENSEN [M55-1])

Abb. 199 zeigt das Analoge für die Differenz zur Bindungsenergie des übernächsten Kerns, wobei auch $N = 28$ als schwach ausgezeichnet zu erkennen ist.
Ebenso erkennt man in Abb. 200 im Gebiet mittelschwerer Kerne deutlich die Auszeichnung von $N = Z = 20$, $Z = 28$, $N = 50$ und weniger deutlich von $N = 28$

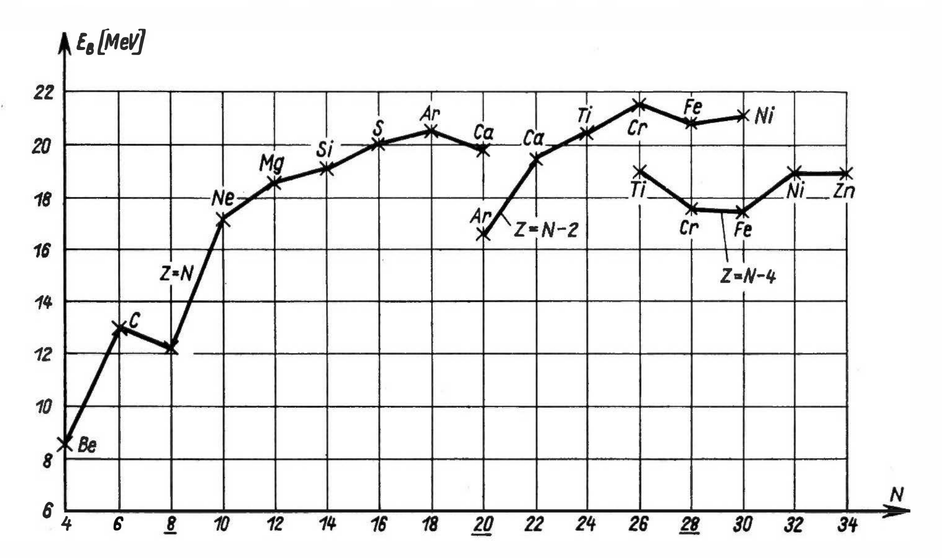


Abb. 199. Bindungsenergie der nächsten beiden Neutronen an den Kern $^{N}_{Z}$X (N, Z gerade). (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1])

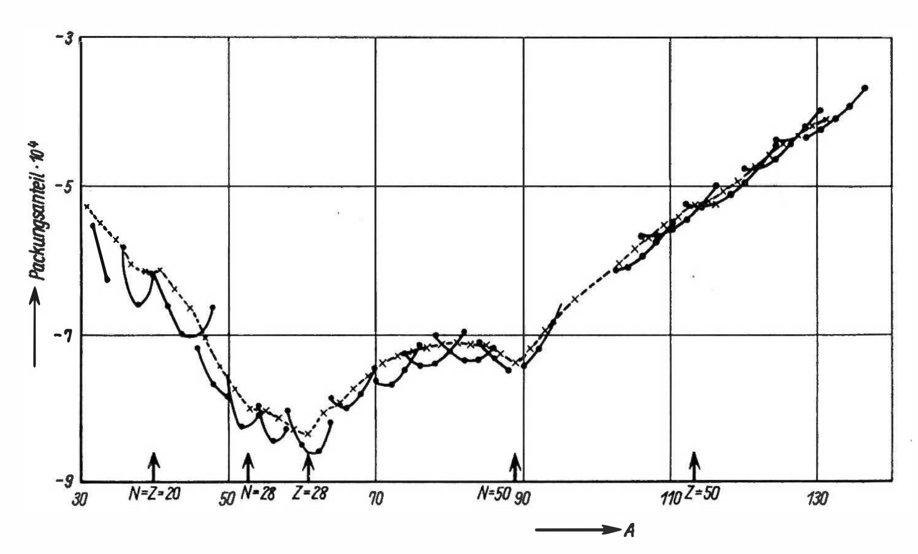


Abb. 200. Packungsanteil stabiler mittelschwerer Kerne. Gestrichelte Linie (Kreuze): ungerade Kerne; ausgezogene Linien (Punkte): gerade Kerne, die einzelnen Linien für $Z = \text{const.}$ (Nach COLLINS, Phys. Rev. 94, 398 (1954))

und $Z = 50$ durch die Packungsanteile. Abb. 201 schließlich zeigt an der Abweichung der experimentellen Bindungsenergie von der mit der halbempirischen Massenformel (Bethe-Weizsäcker-Formel) berechneten die besonders starke Bindung im Gebiet schwerer Kerne bei $N = 82$ und 126. Denn diese Formel behandelt alle Kerne gleichmäßig als Tröpfchen, zeichnet also keine spezielle Nukleonenzahl aus.

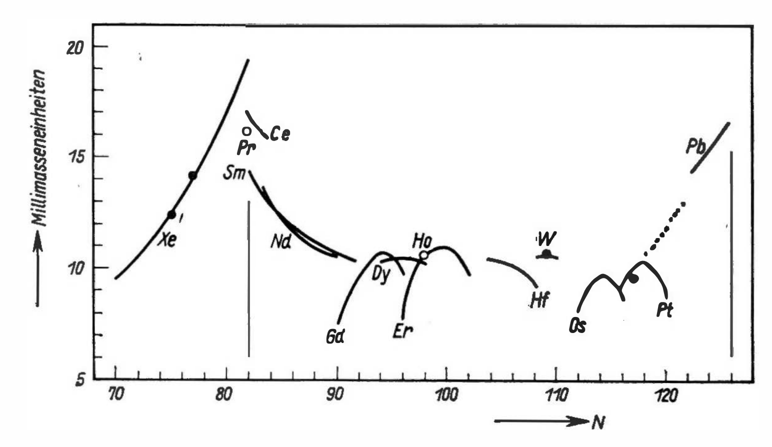


Abb. 201. Abweichung der Massen stabiler schwerer Kerne von den nach der halbempirischen Massenformel berechneten. Ausgezogene Linien: (g, g)-Kerne; Punkte: (u, g)-Kerne; Kreise: (g, u)-Kerne. (Nach HOGG, DUCKWORTH, Phys. Rev. 91, (289 (1953))

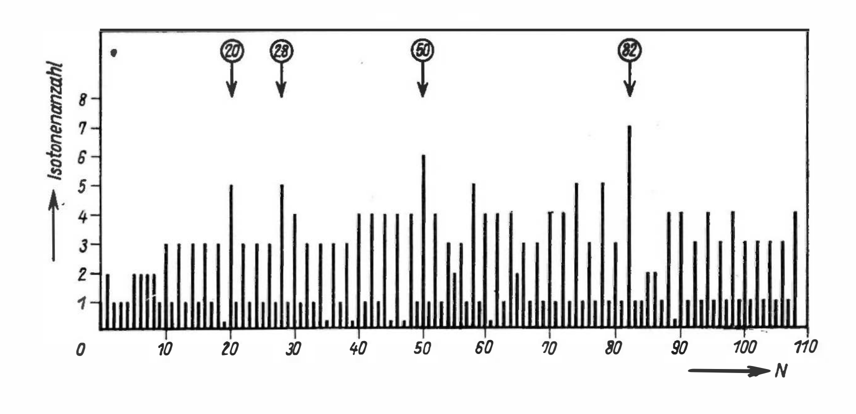
b) Isotopen- und Isotonenzahl und -breite

In der Darstellung der Abb. 202 findet man für magisches Z bzw. N besonders viele Isotope bzw. Isotone. Allerdings sind nur die magischen Neutronenzahlen $N = 20$, 28, 50, 82 klar ausgezeichnet, bei den Protonenzahlen dagegen nur $Z = 50$ und undeutlich 20.

Mit der hohen Isotopen- bzw. Isotonenzahl hängt die große Isotopen- bzw. Isotonenbreite zusammen: Die beiden „äußersten" stabilen Isotope bzw. Isotone eines bestimmten Z bzw. N haben in der Kerntafel am Ende des Buches einen besonders großen Abstand, das Energietal ist besonders breit, wenn Z bzw. N magisch ist. Wir haben das in Abb. 203 dargestellt: $N = 20$, 28, 50, 82 sind deutlich bevorzugt, ebenso $Z = 20$ und 50, undeutlich 28.

Hohe Isotopen- oder Isotonenzahl und besonders -breite bedeutet, daß Kerne mit N- oder Z-Werten, bei denen normalerweise schon Instabilität vorliegt, noch stabil sind, falls sie magisch sind.

Einige Einzelheiten verdienen noch besonders erwähnt zu werden, vgl. dazu die Kerntafel am Ende des Buches. Bei ungeraden Kernen mit geradem N ist für jedes N normalerweise nur ein stabiles Isoton vorhanden, bei $N = 20, 50, 82$



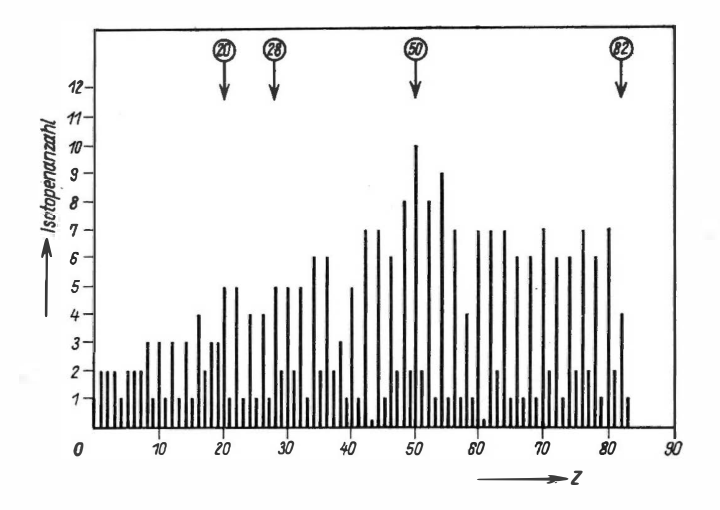


Abb. 202.
Anzahl der stabilen Isotone bzw. Isotope.
(Nach FLOWERS [F 52-1])

aber zwei. Betrachtet man bei (g, g)-Kernen für jedes (gerade) Z nur das jeweils schwerste bzw. leichteste stabile Isotop, dann sind unter diesen stabilen „Rand"-Isotopen für jedes N üblicherweise ein oder zwei Isotone vorhanden, bei $N = 28$, 50, 82 bzw. $N = 50$, 82 aber drei. Die analogen Verhältnisse bei den magischen Z sind nicht so deutlich.

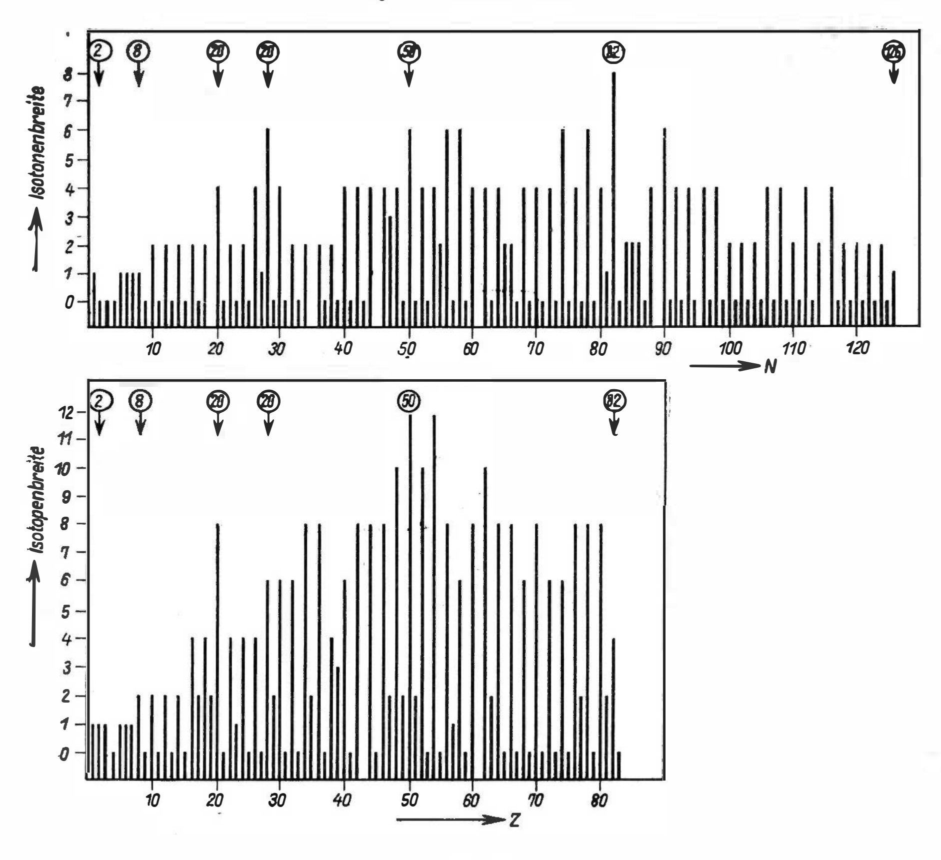


Abb. 203.
Isotonen- bzw. Isotopenbreite des „Tals" der stabilen Kerne

c) Isotopen-, Isotonen- und Elementenhäufigkeit

Man erwartet, daß bei der Entstehung der Elemente die stabilsten Kerne besonders häufig gebildet wurden. Wenn also magische Kerne besonders stabil sind, sollten sie auch eine besondere Häufigkeit haben. Tatsächlich findet man in Abb. 204, daß die besonders häufigen Elemente meist entweder magisches Z haben ($_{8}$O, $_{20}$Ca, $_{28}$Ni, $_{50}$Sn, $_{82}$Pb) oder ein Isotop mit magischem N enthalten (^{8}O, ^{20}Ca, ^{50}Zr, ^{82}Ba, ^{126}Pb). Wie wir später sehen werden, sind 14 und 40 als „schwach magische" Zahlen anzusehen, was die bekannte Häufigkeit von $^{14}_{14}$Si (und $_{40}$Zr) erklären könnte. Von Fe vermutet man, daß sein häufigstes Isotop $^{30}_{26}$Fe durch zweimaligen β^{+}-Zerfall des doppelt magischen Kernes $^{28}_{28}$Ni entstanden ist (Halbwertszeiten 6,4d und 72d).

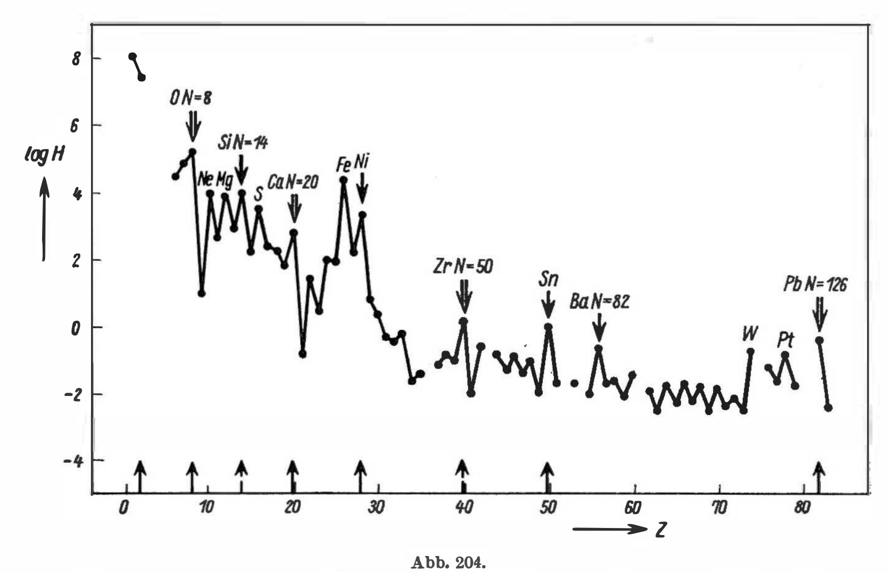


Abb. 204.
Häufigkeit H der chemischen Elemente, H gemessen in Anzahl der Atome pro 10^4 Atome Si. Einfache Pfeile: Elemente mit magischem Isotop; Doppelpfeile: Elemente mit doppelt magischem Isotop. (Nach MAYER, TELLER, Phys. Rev. **76**, 1226 (1949); siehe auch BROWN, Revs. Mod. Phys. **21**, 625 (1949))

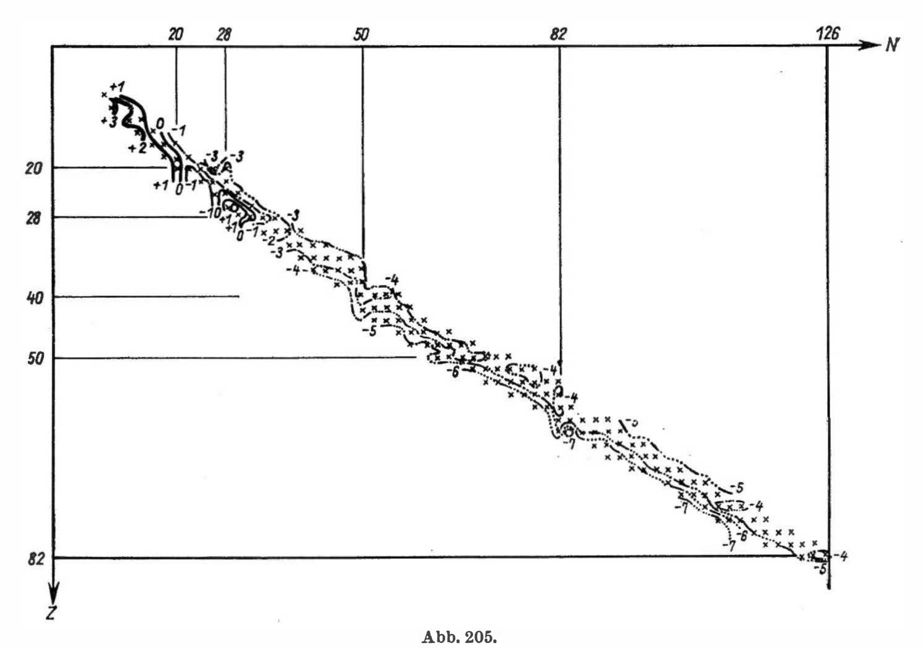


Abb. 205.
Linien gleicher Häufigkeit H für gerade Kerne. Zwischen zwei Höhenlinien Häufigkeitsunterschied um Faktor 10. Zahlenwerte geben log H; für Si wurde log 100 = 2 gesetzt. (Nach HAXEL, SUESS, JENSEN [H 52-3])

Noch genaueren Aufschluß erhält man aus der Häufigkeit der einzelnen Kernarten, die in Abb. 205 als „Häufigkeitsgebirge" dargestellt ist (vgl. auch Abb. 18, S. 35). Man erkennt deutlich „Höhenrücken" entlang der Linien $Z = 20, 28, 40(!), 50, 82$ und $N = 20, 28, 50, 82$. Längs $N = 126$ konnte sich keine Erhebung ausbilden, weil dort zu wenig stabile Elemente existieren. Der „Eisenberg" $^{30}_{26}$Fe ist wieder sehr auffällig.

§ 102. Radioaktiver Zerfall

Wenn magische Kerne besonders stabil sind, sollten radioaktive magische Kerne weniger stark zerfallen, d.h. eine geringere Zerfallsenergie bzw. größere Halbwertszeit haben, als benachbarte nichtmagische radioaktive Kerne.

a) α-Zerfall

Genau das zeigt die Abb. 206 für die α-Zerfallsenergien: steiler Anstieg nach Überschreiten der magischen Zahlen $Z = 82$ bzw. $N = 126$; erstere ist sogar die Stabilitätsgrenze gegen α-Zerfall überhaupt. Bemerkenswert ist, daß der steile Anstieg anhält, bis Z und N die magische Zahl um zwei Einheiten überschritten haben, d.h. bis ein ganzes α-Teilchen über die beiden Schalenabschlüsse hinaus vorhanden ist.

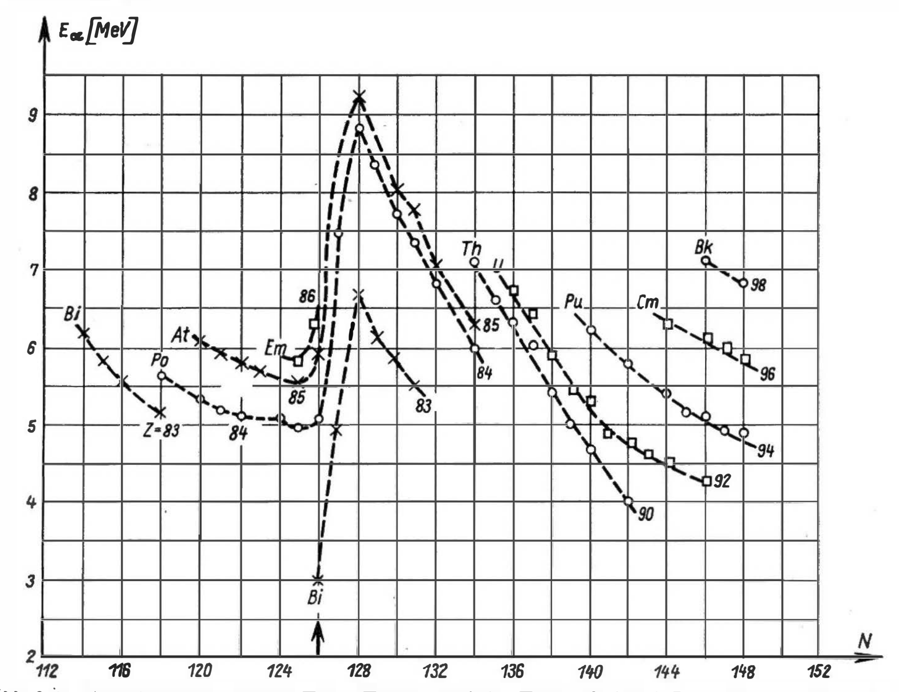
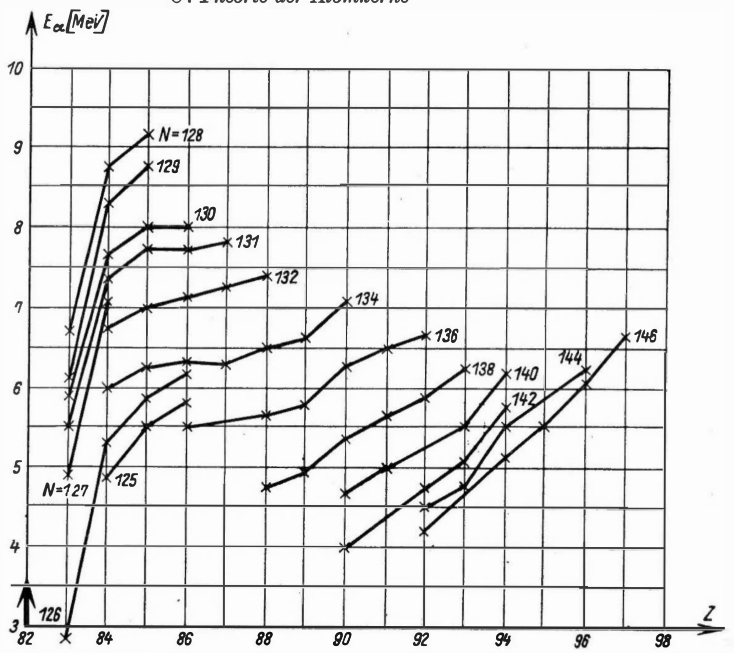


Abb. 206. α-Zerfallsenergien schwerer Kerne. Kurven verbinden Kerne mit den als Parameter angegebenen Z- bzw. N-Werten. (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1]).

Bitte wenden!



Zu Abb.206.

b) β-Zerfall

Ähnliche klare Verhältnisse haben wir beim β-Zerfall nur, wenn er zwischen Kernen mit ungeradem A erfolgt und beim Zerfall *das ungepaarte Nukleon* seinen Ladungszustand ändert:

$$ {}^{N+1}_{Z}\mathrm{X}^{A} \underset{\beta^{+}\ \text{od. Einfang}}{\overset{\beta^{-}}{\rightleftarrows}} {}^{N}_{Z+1}\mathrm{X}^{A} \quad (N,\ Z \text{ gerade, } A \text{ ungerade}). \tag{102.1} $$

In diesem Fall wird ein ungepaartes Neutron in ein ungepaartes Proton umgewandelt oder umgekehrt. Hat man dagegen zwischen ungeraden Kernen einen Zerfall der Art

$$ {}^{N+2}_{Z-1}\mathrm{X}^{A} \underset{\beta^{+}\ \text{od. Einfang}}{\overset{\beta^{-}}{\rightleftarrows}} {}^{N+1}_{Z}\mathrm{X}^{A} \quad (N,\ Z \text{ gerade, } A \text{ ungerade}), $$

so wird in diesem Fall ein gepaartes Neutron zu einem gepaarten Proton oder umgekehrt. Die frei werdende β-Energie wird deshalb hier[1]) durch die Paarungsenergien (s. w. u.) der beiden Paare beeinflußt, die sehr durch die spezielle Struktur des Kernes bestimmt sind und folglich unregelmäßige Schwankungen der β-Zerfallsenergien von Kern zu Kern hervorrufen.

In Abb. 207 wurden für die Prozesse (102.1) nach oben die β^{-}-, nach unten die β^{+}-Energien (genauer: Grenzenergien) über N aufgetragen. Die beiden Bereiche

---

[1]) Und ebenso bei β-Zerfällen zwischen Kernen mit geradem A.

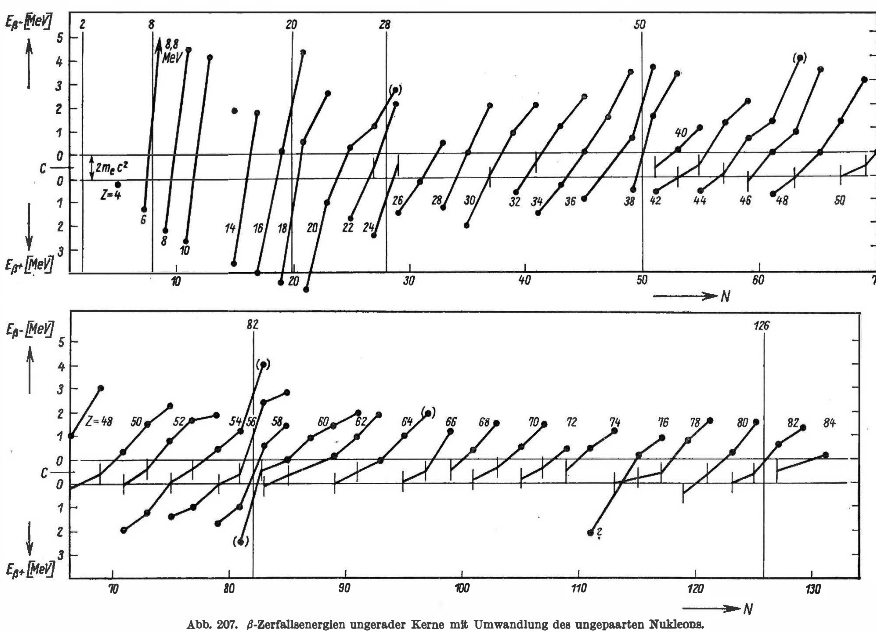


Abb. 207. β-Zerfallsenergien ungerader Kerne mit Umwandlung des ungepaarten Nukleons. (Zerfallsenergien nach HOLLANDER, SEABORG, PERLMAN, Revs. Mod. Phys. 25, 469 (1953))

wurden wegen der Erzeugung der Ruhemassen von Elektron bzw. Positron um $2\,m_e c^2 \sim 1$ MeV getrennt, so daß die von C aus gemessene Energie die vom Kern im β-Zerfall abgegebene Gesamtenergie darstellt. Im Gebiete zwischen den beiden Null-Linien liegen die Kerne, die nur Elektroneneinfang zeigen. Für sie wurden senkrechte Striche der Länge $2\,m_e c^2$ gezeichnet, weil bei ihnen nur ein Neutrino ausgesandt wird, dessen Energie nicht gemessen werden kann.[1]) Wie in Abb. 206 wurde die Zerfallsenergie an der Stelle des Anfangskernes eingezeichnet, wenn es sich um einen β^--Zerfall handelt; für β^+- und Einfangprozesse dagegen wurde der Endkern verwendet.[2]) In allen Fällen ist also die Zerfallsenergie an der Stelle des linken Kerns in (102.1) eingezeichnet.

Jeder Punkt stellt demnach einen bestimmten β-Zerfall dar. Die eingezeichneten Kurven verbinden nun alle Prozesse, deren „linke" Kerne (nach (102.1)) gleiches Z haben. Man sieht, daß beim Überschreiten eines magischen N die Kurven besonders stark ansteigen: Oberhalb einer magischen Zahl sind die β^--Energien höher, die β^+-Energien niedriger, als wenn keine magische Zahl überschritten worden wäre.

Das ist leicht zu verstehen, wenn man annimmt, daß das erste nach einer magischen Neutronenzahl eingebaute Neutron besonders schwach gebunden ist. Wir betrachten dazu den Fall $N = 50$, für den wir in Abb. 208 einen Ausschnitt aus Abb. 207 gezeichnet haben. Wäre N nicht magisch, läge die Zerfallsenergie von $^{51}_{36}\mathrm{Kr}^{87}$ etwa auf der gestrichelten Kurve an der Stelle des Kreuzes. Tatsächlich

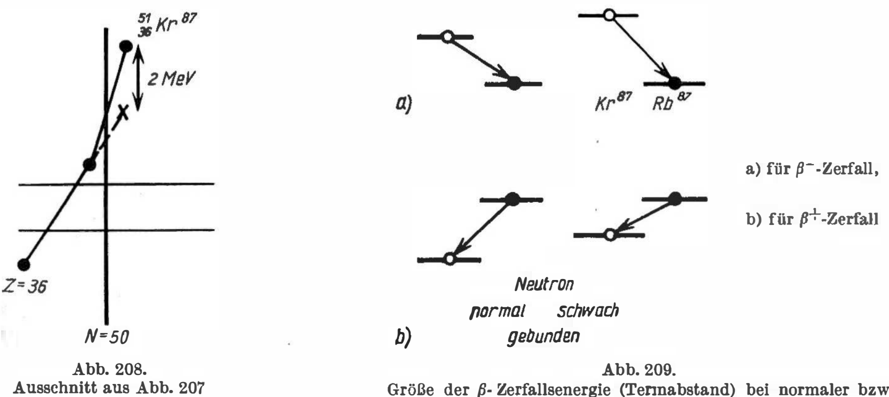


Abb. 208.
Ausschnitt aus Abb. 207

Abb. 209.
Größe der β-Zerfallsenergie (Termabstand) bei normaler bzw. schwacher Bindung des beteiligten Neutrons

wird sie fast 2 MeV höher gemessen. Wir nehmen nun an, daß das 51. Neutron, das sich bei $^{51}_{36}\mathrm{Kr}^{87} \xrightarrow{\beta^-} {}^{50}_{37}\mathrm{Rb}^{87}$ in ein Proton umwandelt, um diese $\Delta E \sim 2$ MeV schwächer gebunden ist, während das (37te) Endproton normal gebunden ist, da 36 nicht magisch ist. Dann haben wir in den beiden Kernen die in Abb. 209a

[1]) In einigen Fällen läßt sich die Energie aus der Wärmetönung von (n, p)-Reaktionen indirekt bestimmen.

[2]) Man vermeidet so Knicke in den Kurven.

gezeichneten Verhältnisse: Wäre das 51. Neutron normal gebunden, hätten wir die Terme der linken Zeichnungshälfte; da das Neutron um 2 MeV schwächer gebunden ist, steht diese Energie nach der rechten Zeichnungshälfte zusätzlich für den β^--Zerfall zur Verfügung. Abb. 209b zeigt analog, daß bei schwächer gebundenem Neutron ein β^+-Zerfall umgekehrt geringere Energie als bei normaler Bindung erhält, also ebenfalls ein steilerer Anstieg unserer Kurven entsteht. Man überlege sich die analogen Verhältnisse bei einem magischen Z, also schwach gebundenem $(Z + 1)$ten Proton.
Wir haben damit die Möglichkeit, aus den β-Zerfallsdaten abzulesen, um wieviel ein nach einer magischen Zahl – d.h., wie wir sehen werden, nach Abschluß einer Schale – neu eingebautes Nukleon schwächer gebunden ist. Wir brauchen dazu nur die Konstruktion von Abb. 208 bei allen magischen Zahlen zu wiederholen. So erhalten wir

$N = 8$	$\Delta E \sim 3{,}5$ MeV
20	$\Delta E \sim 2$ MeV,
28	undeutlich,
50	$\Delta E \sim 2$ MeV,
82	$\Delta E \sim 2$ MeV,
126	$\Delta E \sim 1$ MeV.

§ 103. Kernreaktionen

a) Neutroneneinfangquerschnitt

Abb. 210 gibt den Wirkungsquerschnitt von (n, γ)-Reaktionen mit thermischen Neutronen, Abb. 211 mit „schnellen Neutronen" von 1 MeV. Die Querschnitte für thermische Neutronen variieren sehr stark von Kern zu Kern, da sie wesentlich davon abhängen, ob sich im thermischen Energiegebiet zufällig ein Resonanzniveau des Compoundkerns befindet oder nicht. Trotzdem erkennt man deutlich besonders starke Minima in der Umgebung von $N = 20, 50, 82, 126$. Noch schärfer sind diese Minima für 1 MeV-Neutronen, da in diesem Energiegebiet die Niveaudichte des Compoundkerns bereits recht hoch ist, so daß der Einfangsquerschnitt abseits von magischen Zahlen den gestrichelt angedeuteten glatten Verlauf zeigt.
Es zeigt sich damit, daß sich die magischen Zahlen sogar bei Compoundniveaus, also bei Anregungsenergien über 6 bis 8 MeV (Bindungsenergie eines (ungepaarten) Nukleons im Kern), bemerkbar machen. Daß sie zu einer Verringerung des Wirkungsquerschnitts führen, läßt sich qualitativ aus der Zunahme der Niveaudichte eines Compoundkerns mit zunehmender Anregungsenergie (§ 59) verstehen. Die Anregungsenergie des aus Targetkern + Neutron gebildeten Compoundkerns setzt sich aus Bindungsenergie B des Neutrons im Compoundkern und

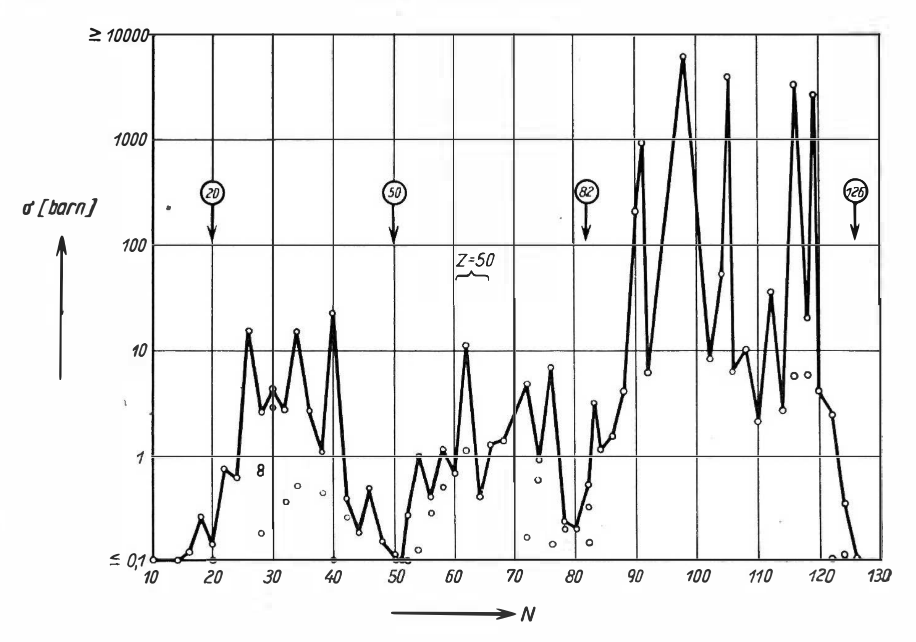


Abb. 210.
Wirkungsquerschnitt von (n, γ)-Reaktionen mit thermischen Neutronen. (Nach FLOWERS [F 52-1])

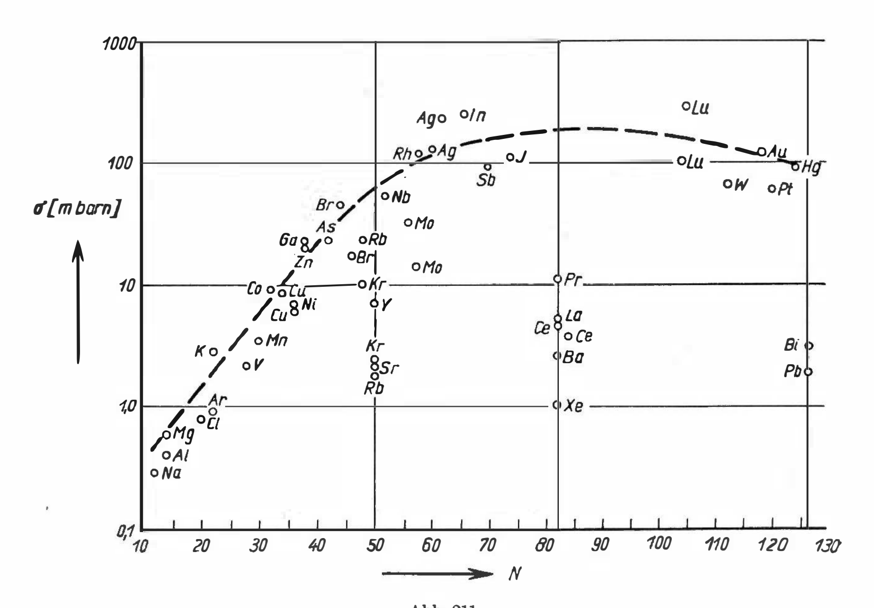


Abb. 211.
Wirkungsquerschnitt von (n, γ)-Reaktionen mit „schnellen" Neutronen (1 MeV).
(Nach HAXEL, SUESS, JENSEN [H 52-3])

kinetischer Energie K des Neutrons zusammen. Ist der Targetkern magisch, dann hat das eingeschossene Neutron eine besonders kleine Bindungsenergie B, die Anregungsenergie $E = K + B$ wird also kleiner als bei nichtmagischem Targetkern, und wir kommen nach Abb. 212 bei magischem Targetkern in ein Gebiet wesentlich geringerer Niveaudichte als bei nichtmagischem. Geringere Niveaudichte bedeutet aber (vgl. Abb. 212) geringeren Einfangquerschnitt.

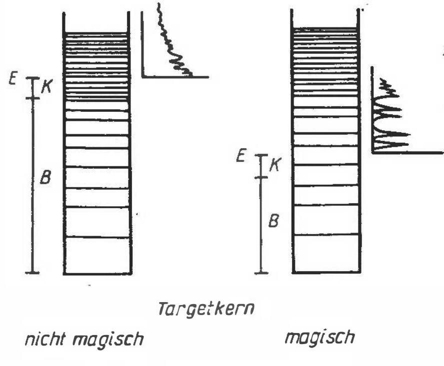


Abb. 212. Erläuterung zu Abb. 211

b) Neutronenbindungsenergie

Man überlegt sich leicht, daß man die Bindungsenergie eines Neutrons aus der Schwellenergie von (γ, n)-Prozessen, der γ-Energie von (n, γ)-Prozessen mit thermischen Neutronen und der „Wärmetönung" von (d, p)- und (d, t)-Reaktionen erhalten kann. In Abb. 213 ist die Differenz zwischen dieser experimentellen

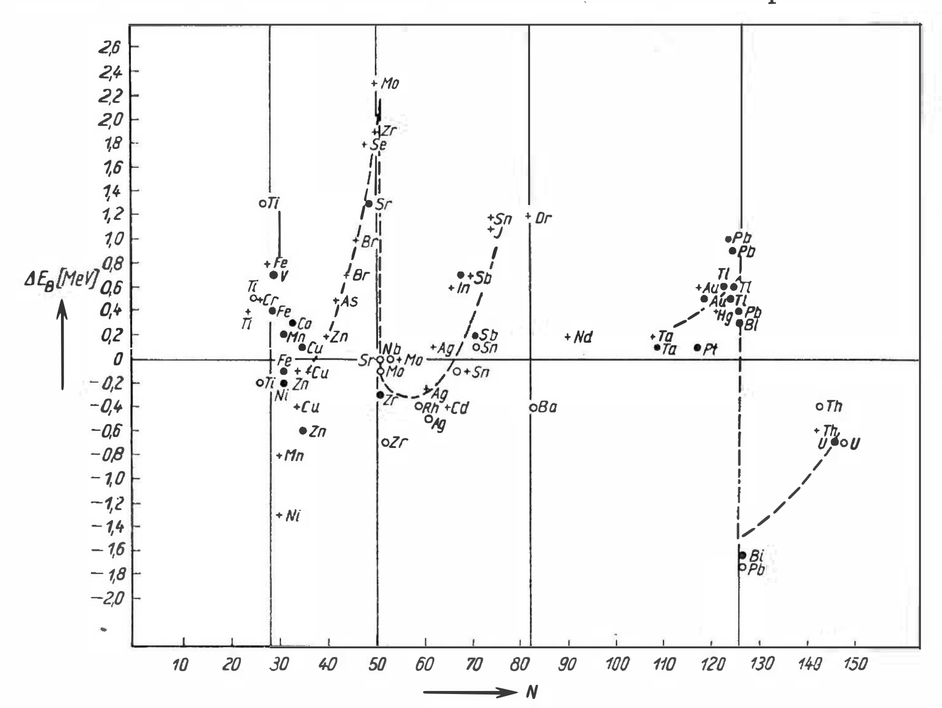


Abb. 213. Abweichung der aus (γ, n)-, (d, p)- und (d, t)-Reaktionen ermittelten Neutronenbindungsenergien E_B von den aus einer halbempirischen Formel berechneten. (Nach HAXEL, SUESS, JENSEN [H 52-3])

und der aus einer halbempirischen Formel berechneten Neutronenbindungsenergie eingezeichnet. Da die halbempirische Formel keine „magischen" Effekte (Schaleneffekte) berücksichtigt, sind die Sprünge in den Differenzwerten bei Überschreiten der magischen N-Werte ein Maß für den Sprung ΔE der Bindungsenergie. Man liest ab

$$\begin{aligned} N &= 28 \qquad \Delta E \sim 1 \text{ MeV},\\ &\ \ 50 \qquad \Delta E \sim 2 \text{ MeV},\\ &\ \ 82 \qquad \Delta E \sim 1{,}6 \text{ MeV},\\ &126 \qquad \Delta E \sim 2 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

in brauchbarer Übereinstimmung mit den ΔE-Werten aus den β-Energien (S. 513).

c) Verzögerte Spaltungsneutronen

Die Produkte der Kernspaltung zerfallen normalerweise durch γ- und β-Prozesse Nur wenn sie ein besonders locker gebundenes Neutron enthalten, wird daneben die Neutronenemissions-Wahrscheinlichkeit merklich: Es werden die für die Reaktorsteuerung so wichtigen, gegenüber den Spaltungsneutronen „verzögerten" Neutronen ausgesandt.
Man kennt bis jetzt drei Kerne, die verzögerte Neutronen aussenden: ${}_{8}O^{17}$, ${}_{36}Kr^{87}$ und ${}_{54}Xe^{137}$. Alle drei haben ein Neutron mehr als magisch, und dieses Neutron ist also schwach gebunden.
Die oft zu findende Ansicht, daß die Unsymmetrie bei der Uranspaltung mit langsamen Neutronen (§ 50) mit den magischen Zahlen zusammenhängt, konnte mangels einer detaillierten Theorie der Spaltung bisher weder bewiesen noch widerlegt werden.

Wir haben damit an einer größeren Zahl von Kerneigenschaften gesehen,[1]) daß tatsächlich magische Kerne besonders stabil sind und der Einbau eines weiteren Neutrons bzw. Protons in einen Kern, der magisches N bzw. Z hat, mit besonders kleiner Bindungsenergie erfolgt. Das sind aber gerade die typischen Eigenschaften eines Schalenabschlusses, die man von der Elektronenhülle her kennt: Hüllen (bzw. Kerne) mit abgeschlossenen Schalen sind besonders stabil; wird ein weiteres Teilchen eingebaut, muß eine neue, höhere Schale angefangen werden, was schwächere Bindung bedingt.

B. Theorie

Wir sahen eben, daß ein umfangreiches experimentelles Material darauf hindeutet, daß die magischen Zahlen im gleichen Sinne Schalenabschlüsse im *Kern* bedeuten wie die Ordnungszahlen der Edelgase in der *Hülle*. Wir wollen deshalb

[1]) Weiteres Material findet man z. B. in [E 57-1], [F 52-1], [M 55-1], [M 57-1], in § 8 und in den §§ 109 ff. und §§ 121 ff.

versuchen, ein den Verhältnissen im Kern angepaßtes Schalenmodell zu finden, das die magischen Zahlen als Schalenabschlüsse liefert. Vorher wollen wir am Beispiel der Hülle die wichtigsten Grundzüge des Schalenmodells so zusammenstellen, daß sie sich leicht auf den Kern übertragen lassen. Dabei kommt es uns vor allem darauf an, folgende Begriffe aus der Theorie des Schalenmodells bereitzustellen:

Slater-Determinante,	äußere Teilchen (und Löcher),
Besetzung,	Restwechselwirkung,
Konfiguration,	*L*-*S*-Kopplung oder Russell-Saunders-Kopplung,
Schale (Unterschale),	*j*-*j*-Kopplung,
Rumpf,	Konfigurationsmischung.

§ 104. Allgemeines über Schalenmodelle (am Beispiel der Elektronenhülle)

In Schwerpunktskoordinaten lautet die Schrödinger-Gleichung für die Z Hüllenelektronen:[1])

$$H\psi = E\psi\,,$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \Delta_i - \sum_i \frac{Ze^2}{r_i} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\sum \frac{e^2}{r_{ik}} + \sum_i \xi(r_i)(\vec{s}_i\cdot\vec{l}_i)\,, \quad \sum_i = \sum_{i=1}^{Z}\,, \tag{104.1}$$

$$\psi = \psi(1,\cdots,i,\cdots,Z)\,, \qquad i = \mathfrak{r}_i, \sigma_i\,.$$

Die einzelnen Terme von H bedeuten die Operatoren der kinetischen Energie, der Coulomb-Anziehung durch den Kern, der gegenseitigen Coulomb-Abstoßung der Elektronen und der Spin-Bahn-Wechselwirkung. $\vec{l}_i$ und $\vec{s}_i$ sind Bahndrehimpulse und Spins der einzelnen Elektronen. Die Funktion ξ ist durch das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ festgelegt, in dem sich die Elektronen bewegen.

Die Spin-Bahn-Wechselwirkung berücksichtigt die relativistische Wechselwirkung, die entsteht, wenn sich magnetische Dipole $\vec{\mu}_i$ (Elektronen) in einem elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$ bewegen:[2])

$$E(\vec{\mu}_i, \mathfrak{E}) = -\frac{1}{2c}(\vec{\mu}_i\,[\mathfrak{E}(\mathfrak{r}_i)\times\mathfrak{v}_i])\,.$$

Mit $\qquad \mathfrak{v}_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{m}\,, \qquad \vec{\mu}_i = \frac{2}{\hbar}\mu_B\vec{s}_i\,, \qquad \mathfrak{E}(\mathfrak{r}_i) = -\operatorname{grad} V(\mathfrak{r}_i)$

erhält man

$$E(\vec{\mu}_i, \mathfrak{E}) = \frac{e}{2m^2c^2}(\vec{s}_i\,[\operatorname{grad} V(\mathfrak{r}_i)\times\mathfrak{p}_i])\,.$$

---

[1]) Diese Gleichung ist als unrelativistische Gleichung natürlich nicht exakt. Eine exakte relativistische Gleichung des Mehrteilchenproblems ist nicht bekannt.

[2]) Thomas-Korrektion berücksichtigt (vgl. [S 39-1], Teil I, S. 707).

Nähert man das elektrische Feld $\mathfrak{E}(\mathfrak{r}_i)$ bzw. sein Potential durch ein Zentralfeld an,[1] $V(\mathfrak{r}_i) \sim V(r_i)$, dann ergibt sich

$$E(\vec{\mu}_i, \mathfrak{E}) \sim E_{\text{Sp.B.}} = \frac{e}{2m^2c^2}\frac{1}{r_i}\frac{dV(r_i)}{dr_i}(\vec{s}_i[\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{p}_i])$$
$$= \frac{e}{2m^2c^2}\frac{1}{r_i}\frac{dV(r_i)}{dr_i}(\vec{s}_i \cdot \vec{l}_i),$$

d. h.
$$\xi(r_i) = \frac{e}{2m^2c^2}\frac{1}{r_i}\frac{dV(r_i)}{dr_i}. \qquad (104.2)$$

Die Gleichung (104.1) ist nur näherungsweise lösbar, und das wichtigste Näherungsverfahren führt auf das Schalenmodell. Nach diesem Verfahren macht man die Gleichung in den einzelnen Teilchen separierbar, indem man die Coulomb-Abstoßung streicht. Außerdem vernachlässigt man die (meist noch kleinere) Spin-Bahn-Wechselwirkung. In dieser Näherung befindet sich dann jedes Elektron nur in dem vom Kern erzeugten Coulomb-Feld:

$$\sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i - \frac{Ze^2}{r_i}\right)\psi^0 = E^0\psi^0.$$

Man verbessert diese Näherung noch etwas, indem man einen Teil der Coulomb-Abstoßung der Elektronen näherungsweise[1] als Zentralfeld behandelt: Die Coulomb-Abstoßung äußerer Elektronen durch innere Elektronen wirkt sich hauptsächlich als teilweise Abschirmung der Kernladung aus. Man berücksichtigt das, indem man das Coulomb-Potential des Kerns durch ein günstiger gewähltes Zentralpotential $-eU(r)$ ersetzt. Die Abweichung dieses abgeschirmten Potentials vom Coulomb-Potential ist qualitativ leicht zu übersehen: Im innersten Bereich der Hülle ist fast keine Abschirmung vorhanden, nach außen wird sie immer stärker; folglich wird das Potential nach außen zunehmend schwächer als das Coulomb-Potential, wie in Abb. 214 gezeichnet. Dieses Potential $U(r)$ ist in (104.2) für $V(r)$ einzusetzen.

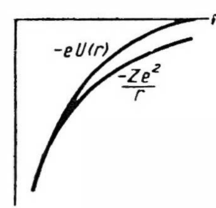


Abb. 214. Vergleich von Coulomb-Potential und abgeschirmtem Potential $-eU(r)$

Die so entstehende Näherungsgleichung

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0,$$
$$H^0 = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i - eU(r_i)\right) = \sum_i H_i^0 \qquad (104.3)$$

ist separierbar:

$$\psi^0 = \psi^0(1\ldots Z) = u_1(1)\cdot u_2(2)\cdot\ldots\cdot u_Z(Z), \qquad (104.4)$$
$$E^0 = \sum_{i=1}^{Z} E_i^0,$$
$$H_i^0 u_i = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i - eU(r_i)\right)u_i(i) = E_i^0\cdot u_i, \quad u_i(i) = \varphi_i(\mathfrak{r}_i)\cdot\chi_i(i). \qquad (104.5)$$

---

[1]) Die Coulomb-Abstoßung $\sum_{i(\neq k)} \frac{e^2}{r_{ik}^2}\frac{\mathfrak{r}_{ik}}{r_{ik}}$, die ein bestimmtes Elektron erfährt, ist kein Zentralfeld!

Die ursprüngliche Gleichung zerfällt also in Z unabhängige (!) Gleichungen: Jedes Teilchen hat „seine" Schrödinger-Gleichung, nach der es sich unabhängig von allen anderen Teilchen bewegt, jedes Teilchen „besetzt" einen Zustand u_i, der eine der Lösungen seiner Schrödinger-Gleichung ist. Wir nennen diese Näherung „Schalenmodell" und halten fest:

Im Schalenmodell bewegt sich jedes Teilchen ohne Wechselwirkung mit den anderen Teilchen in einem Zentralfeld.

Die Gleichungen (104.5) der einzelnen Teilchen sind ihrer Form nach identisch. Jedes Teilchen hat deshalb dieselben Eigenwerte und denselben Eigenfunktionssatz wie alle anderen; mit anderen Worten: Es existiert ein gemeinsames Termsystem (mit den zugehörigen Zuständen), das allen Teilchen zur Verfügung steht, vgl. Abb. 215.

Die oben (104.4) angegebene Eigenfunktion ψ^0 ist noch nicht die „richtige", da Elektronen als Fermionen eine total antisymmetrische Eigenfunktion haben müssen. Die „richtige" Eigenfunktion ist die aus den *besetzten* u_i gebildete Slater-Determinante[1])

$$\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} u_1(1)\, u_2(1) \ldots u_Z(1) \\ u_1(2) \cdots \\ \vdots \\ u_1(Z)\, u_2(Z) \ldots u_Z(Z) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \sum_P \varepsilon_P P u_1(1) \cdot \ldots \cdot u_Z(Z), \quad (104.6)$$

die ihr Vorzeichen bei Vertauschung der Koordinaten zweier Teilchen wechselt (Vertauschung zweier Zeilen) und verschwindet, wenn ein Zustand u_i doppelt besetzt ist (Gleichheit zweier Spalten). – Die Näherung mit der Eigenfunktion (104.4) heißt „Hartree-Näherung", die mit der antisymmetrischen Eigenfunktion (104.6) „Hartree-Fock-Näherung".

Jeder Einzelteilchenzustand u_i in (104.6) wird also nur von einem Teilchen besetzt. Er wird aber im Gegensatz zu (104.4) von keinem bestimmten der Z Elektronen besetzt; denn schreibt man die Slater-Determinante nach (104.6) als $\sum_P$, dann erscheint ein bestimmter Zustand u_k in verschiedenen Summanden dieser Summe mit dem Koordinatenquadrupel verschiedener Elektronen als Argument. Man mache sich das am Fall nur zweier besetzter Zustände u_1 und u_2 klar.

a) Energien (Termsystem)

Unser Näherungsproblem ist im allgemeinen entartet, denn die Schrödinger-Gleichungen (104.5) der einzelnen Teilchen sind Zentralfeldprobleme; die $u_i(k) = \varphi_i(\mathfrak{r}_k) \cdot \chi_i(k)$ enthalten also Ortseigenfunktionen $\varphi_i(\mathfrak{r}) = R_{\bar{n}_i l_i}(r) \cdot Y_{l_i}^{m_{l_i}}(\theta, \varphi)$, $(\chi_i(k) = \chi^{m_{s_i}}(k))$, und die einzelnen E_i^0 hängen nur von $\bar{n}_i$, l_i, nicht von m_{l_i} ab. Da H_i^0 spinunabhängig ist, hängt E_i^0 auch nicht von m_{s_i} ab, so daß die Eigen-

[1]) P ist der Permutationsoperator, der die Argumente $1, \ldots, Z$ der u_i permutiert. $\sum_P$ bedeutet Summation über alle möglichen Permutationen P der Argumente. $\varepsilon_P = \pm 1$ für gerade bzw. ungerade Permutation P.

werte E_i^0 des allen Teilchen gemeinsamen Termsystems durch Angabe der $\bar{n}_i$, l_i aller besetzten Zustände vollständig bestimmt sind. Es ergibt sich so ein Termsystem wie in Abb. 215. Es ist „coulombähnlich", d.h., die Terme gleicher Hauptquantenzahl $\bar{n}_i$, die beim Coulomb-Feld exakt gleiche Höhe haben, liegen nahe beieinander. Da das Potential $U(r_i)$ nach Abb. 214 außen schwächer als das Coulomb-Potential ist, werden Teilchen in Zuständen mit größeren l_i schwächer gebunden als im Coulomb-Potential, also die Terme mit wachsendem l_i nach oben verschoben. Jeder Term $\bar{n}_i$, l_i kann wegen der Entartung in bezug auf m_{l_i} und m_{s_i} von $2(2l_i + 1)$ Teilchen besetzt werden.

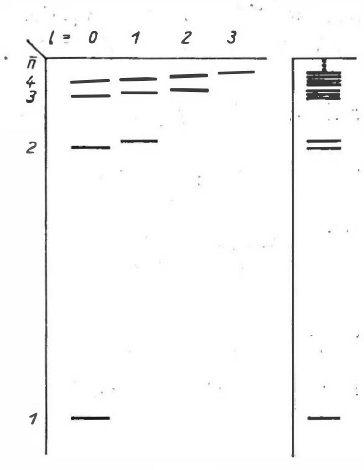


Abb. 215.
Termsystem eines „coulombähnlichen" (= schwach abgeschirmten) Potentials, links nach den einzelnen Bahndrehimpulsen auseinandergezeichnet, rechts zusammengeschoben.
Hauptquantenzahl $\bar{n} = n_r + l + 1$

Jedes u_i ist eindeutig gekennzeichnet durch das zugehörige Quadrupel von Quantenzahlen $\bar{n}_i$, l_i, m_{l_i}, m_{s_i}. Da die Slater-Determinante sich aus allen besetzten u_i aufbaut, ist sie eindeutig bestimmt durch Angabe der Quantenzahl-Quadrupel aller besetzten Zustände u_i. Nennen wir die Gesamtheit der Quantenzahl-Quadrupel aller besetzten u_i eine „Besetzung", so können wir feststellen: *Zu jeder Besetzung gehört eine bestimmte Slater-Determinante = Eigenfunktion* ψ^0. — Der Eigenwert E^0 ist die Summe der E_i^0 aller besetzten Zustände. Da jedes E_i^0 nur von $\bar{n}_i$, l_i abhängt, ist E^0 bestimmt durch Angabe der Quantenzahlen $\bar{n}_i$, l_i aller besetzten Zustände oder, kürzer, durch Angabe der „Konfiguration", nämlich der Quantenzahlen $\bar{n}$, l aller besetzten Terme und der Anzahl von Teilchen auf jedem solchen Term $\bar{n}$, l. Dann gilt: *Zu jeder Konfiguration gehört ein bestimmter Eigenwert* E^0.

Zur Kennzeichnung einer Konfiguration schreibt man die Anzahl der Teilchen auf einem Term als Exponent an dem ihnen gemeinsamen $\bar{n}$, l an; z. B. bedeutet $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^5$, daß zwei Zustände $1s$ ($m_l = 0$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$), zwei Zustände $2s$($m_l = 0$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$), sechs Zustände $2p$($m_l = 0, \pm 1$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$), zwei Zustände $3s$($m_l = 0$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$) und fünf Zustände $3p$ (fünf von den sechs Zuständen $m_l = 0, \pm 1$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$) besetzt sind, vgl. Abb. 216.[1]) Daraus erkennt man, daß

im allgemeinen zu einer Konfiguration und damit zu einem Eigenwert E^0 *mehrere Besetzungen und damit Eigenfunktionen (Slater-Determinanten) gehören, also Entartung vorliegt.*

Denn in unserem Beispiel gehören zur betrachteten Konfiguration diejenigen sechs Besetzungen, die entstehen, wenn nacheinander jeder der sechs $3p$-Zustände einmal unbesetzt gelassen und die übrigen fünf jeweils besetzt werden.

---

[1]) Da in (104.6) ein besetzter Zustand von keinem bestimmten Teilchen besetzt ist, bedeutet ein Punkt auf einem Term in Abb. 216 nur, daß der betreffende Zustand besetzt ist, aber nicht, daß er mit einem bestimmten Teilchen besetzt ist.

Die charakteristische Eigenschaft eines „coulombähnlichen“ Termsystems (vgl. Abb. 215 rechts) ist, daß Terme mit gleichem $\bar{n}$ und verschiedenem l dicht beieinander liegen und durch einen größeren Abstand von benachbarten Termgruppen getrennt sind. *Eine solche dichte Gruppe von Termen nennen wir „Schale“.* Wenn alle Terme einer Schale voll besetzt sind, ist die Schale „gefüllt“; ein weiteres Teilchen kann nur im tiefsten Term der nächsthöheren Schale eingebaut werden, also mit einer um so viel niedrigeren Bindungsenergie, wie der Abstand der beiden Schalen beträgt. Dasselbe erfolgt in kleinerem Maßstab innerhalb einer Schale, wenn ein Term $\bar{n}$, l gefüllt ist; man sagt statt Term deshalb auch gelegentlich *Unterschale.*

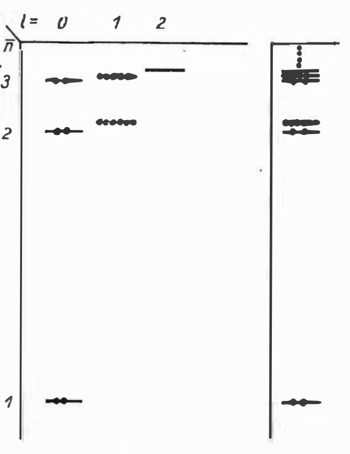


Abb. 216. Besetzungsverhältnisse der Konfiguration $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^5$

Für unser coulombähnliches Potential erhalten wir demnach Schalenabschlüsse, wenn alle Terme einer bestimmten Hauptquantenzahl gefüllt sind, d.h. für die Konfiguration bis zu den senkrechten Strichen:

$$\underset{Z=2}{1s^2} \;\Big|\; 2s^2\,2p^6 \;\underset{10}{\Big|}\; 3s^2\,3p^6\,3d^{10} \;\underset{28}{\Big|}\; 4s^2\,4p^6\,4d^{10}\,4f^{14} \;\underset{60}{\Big|}\; \ldots$$

Nur die ersten beiden Schalenabschlüsse ($_2$He, $_{10}$Ne) werden bei den angegebenen Z-Werten beobachtet, statt 28, 60 (110) findet man jedoch 18, 36, 54, 86. Man erhält die richtigen Schalenabschlüsse, wenn das Potential $U(r)$ so stark vom Coulomb-Feld abweichend angenommen wird, daß von der dritten Schale an der höchste Term (vgl. Abb. 217) und von der vierten Schale an die beiden höchsten Terme bis in die nächsthöheren Schalen verschoben sind:[1])

$$\underset{Z=2}{1s^2} \;\Big|\; 2s^2\,2p^6 \;\underset{8}{\Big|}\; 3s^2\,3p^6 \;\underset{18}{\Big|}\; 4s^2\,3d^{10}\,4p^6 \;\underset{36}{\Big|}\; 5s^2\,4d^{10}\,5p^6 \;\underset{54}{\Big|}\; 6s^2\,4f^{14}\,5d^{10}\,6p^6 \;\underset{86}{\Big|}\; 7s^2\,5f^{14}$$

Lanthaniden (bei $4f^{14}$) — Actiniden (bei $5f^{14}$)

Ähnliche Termverschiebungen werden wir auch beim Schalenmodell des Kerns vornehmen müssen, um die beobachteten Schalenabschlüsse zu erhalten. Fermi konnte die beobachteten Schalenabschlüsse bis zu einem gewissen Grad[2]) theoretisch ableiten, indem er die Elektronenhülle als Fermigas behandelte (vgl. [S 39-1], S. 696).

[1]) Oft wird der Begriff Schale als „Gruppe von Termen gleicher Hauptquantenzahl“ definiert. Nach dieser Definition bedeuten die genannten Termverschiebungen, daß eine neue Schale angefangen wird, ehe die alte voll gefüllt ist. Es erscheint jedoch physikalisch sinnvoller und ist im Atomkern üblich, die *wirklich* dicht beieinanderliegenden Terme als Schale zu definieren, vgl. S. 532.

[2]) Für die Anwendung statistischer Methoden ist die Teilchenzahl $Z < 100$ eigentlich noch zu klein.

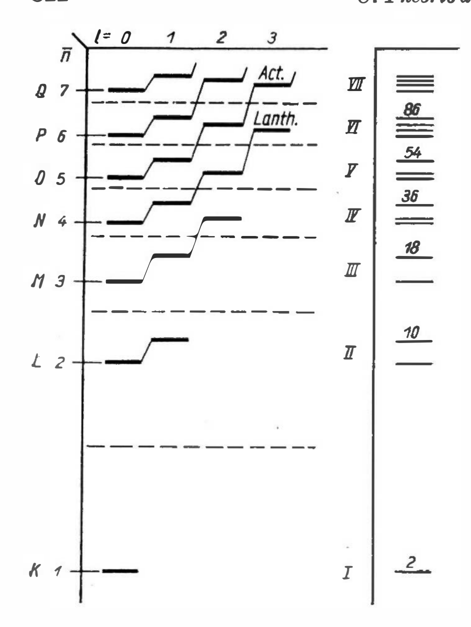


Abb. 217. Termsystem des Schalenmodells der Hülle (schematisch).
Die angegebenen Hauptquantenzahlen $\bar{n}$ (bzw. Buchstaben $K, L, M, \ldots$) gehören zu den Gruppen von miteinander verbundenen Termen.
Die römischen Zahlen geben die Nummer der Schale, gehören also zu der Gruppe von (dichtbeieinander liegenden) Termen, die zwischen zwei gestrichelten Geraden liegt. Vgl. Fußnote 1, S. 521

b) Drehimpulse

Ein abgeschlossenes System hat stets feste Energie und festen Gesamtdrehimpuls, seine Eigenfunktionen müssen also auch Eigenfunktionen von $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{J}_z$ sein. Deshalb betrachten wir im folgenden die Eigenwerte J des Gesamtdrehimpulses. Sie sind im Gegensatz zu denen der Energie für eine bestimmte Konfiguration nicht immer eindeutig festgelegt.

Eine einzelne Slater-Determinante ist zwar Eigenfunktion von H^0, aber im allgemeinen nicht von $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{J}_z$. Wegen der Entartung dürfen wir jedoch beliebige Linearkombinationen der *zum gleichen* E^0 gehörigen Slater-Determinanten bilden. Unsere Aufgabe wird deshalb sein, die Linearkombinationen zu bestimmen, die Eigenfunktionen von $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{J}_z$ sind.

Haben wir zunächst den Fall (die Konfiguration) einer gerade abgeschlossenen Schale oder Unterschale, d.h., sind alle Terme bis zu einem bestimmten voll besetzt, alle darüberliegenden vollkommen unbesetzt (Abb. 218a), so ergibt sich eindeutig der Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J} = 0$ ($J_0 = 0$, $M_{J_0} = 0$). Die Teilchen jedes *voll* besetzten Terms kompensieren nämlich ihre Bahndrehimpulse und Spins genau zu 0, da zu jedem besetzten Zustand mit einem bestimmten m_l, m_s im gleichen Term auch der Zustand mit $-m_l$, $-m_s$ besetzt ist oder, anschaulicher, da in einem vollbesetzten Term die Bahndrehimpulse und die Spins zu je zweien antiparallel stehen. Da nach Voraussetzung alle besetzten Terme voll besetzt sind, gibt es hier nur eine Besetzung und folglich nur eine Slater-Determinante.

Haben wir keine abgeschlossene Schale oder Unterschale, so wollen wir die Gesamtheit aller Teilchen auf den vollbesetzten Termen als „Rumpf", die Teilchen auf nicht voll besetzten Termen als „äußere" Teilchen bezeichnen. Gelegentlich

werden wir die unbesetzten Plätze der nicht vollbesetzten Terme „Löcher" nennen. Aus denselben Gründen wie vorhin hat der Rumpf keinen Gesamtdrehimpuls:

Der Rumpf trägt nichts zum Gesamtdrehimpuls der Hülle bei, letzterer stammt also nur von den äußeren Teilchen.

Ist nur ein äußeres Teilchen vorhanden (Abb. 218b), ist folglich der Gesamtdrehimpuls der Hülle eindeutig gleich dem des äußeren Teilchen s: $\mathfrak{J} = \mathfrak{j} = \vec{l} + \vec{s}$, also $J_0 = j$, $M_{J_0} = m_j = m_l + m_s$. Jedoch sind mehrere Besetzungen möglich, nämlich alle die, die entstehen, wenn das äußere Teilchen nacheinander jeden der $2(2l+1)$ Zustände des Terms $\overline{nl}$ besetzt. Wir haben also ebenso viele Slater-Determinanten, alle mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{j}$; sie unterscheiden sich in den Quantenzahlen m_l, m_s und damit m_j des äußeren Teilchens.

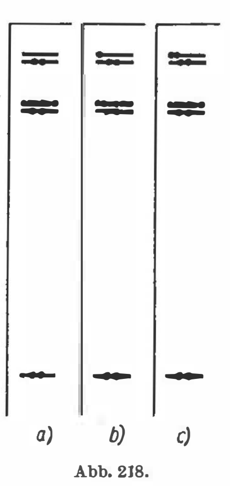


Abb. 218. Besetzungsverhältnisse bei a) abgeschlossener s-Unterschale, b) einem äußeren Teilchen, c) zwei äußeren Teilchen auf einem p-Term

Sobald aber eine Konfiguration mit mehr als einem äußeren Teilchen vorliegt (Abb. 218c), sind verschiedene J-Werte möglich, je nachdem, welche Eigenfunktionen von $\mathfrak{J}^2$, $\mathfrak{J}_z$ wir als Linearkombinationen von Slater-Determinanten der verschiedenen möglichen Besetzungen der betrachteten Konfiguration bilden. So haben wir im Beispiel der Konfiguration der Abb. 218c zwei äußere Teilchen auf einen p-Term, es stehen also die 15 Besetzungen und die zugehörigen 15 Slater-Determinanten zur Verfügung, die man erhält, wenn die beiden Teilchen mit $l_1 = l_2 = 1$ einen der Zustände mit $m_{l_1} = 0, \pm 1$, $m_{s_1} = \pm \frac{1}{2}$; $m_{l_2} = 0, \pm 1$, $m_{s_2} = \pm \frac{1}{2}$ besetzen (Ununterscheidbarkeit der Teilchen und Pauli-Prinzip beachten:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2\,(2l_1 + 1) \cdot [2(2l_2 + 1) - 1] = 15).$$

Aus ihnen sind die zu $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{J}_z$ passenden Linearkombinationen zu bilden.

Um diese Linearkombinationen zu finden, erinnern wir uns, daß unser Schalenmodell nur eine Näherung ist. Wir können es deshalb als nullte Näherung einer Störungsrechnung verwenden, indem wir die beim Schalenmodell vernachlässigten Potentialterme als Störung ansehen. Daß verschiedene Slater-Determinanten zum gleichen Energieeigenwert (zur gleichen Konfiguration) vorhanden sind, heißt dann, daß die nullte Näherung entartet ist; wir haben also Störungsrechnung mit Entartung zu treiben.

Ist $E^0_\mu \left(= \sum_i E^0_{\mu i}\right.$, vgl. (104.4)) der entartete Eigenwert nullter Näherung der Konfiguration μ, dann gilt

$$H^0 \psi^0_{\mu\lambda} = E^0_\mu \psi^0_{\mu\lambda},$$

und μ numeriert die verschiedenen Konfigurationen durch, λ die verschiedenen Slater-Determinanten jeder Konfiguration μ[1]) oder aus ihnen gebildete Linear-

[1]) λ müßte genauer als λ_μ bezeichnet werden.

kombinationen[1]). Für die Eigenwertstörung erster Näherung $E^{(1)}$ erhält man bekanntlich das einfache Resultat

$$E_\mu^{(1)} = E_{\mu\lambda}^{(1)} = (\psi_{\mu\lambda}^0, H' \psi_{\mu\lambda}^0), \qquad (104.7)$$

wenn die $\psi_{\mu\lambda}^0$ *so gewählt werden,* daß H' von ihnen als Diagonalmatrix dargestellt wird:

$$(\psi_{\mu\lambda}^0, H' \psi_{\mu\varkappa}^0) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa .$$

Um diese $\psi_{\mu\lambda}^0$ zu ermitteln, betrachten wir den Störoperator H', d.h. die Differenz zwischen dem „exakten“ H (104.1) und dem H^0 des Schalenmodells (104.3), die „Restwechselwirkung“

$$H' = H - H^0 = -\sum_i \left(\frac{Z e^2}{r_i} - e U(r_i)\right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}\sum \frac{e^2}{r_{ik}} + \sum_i \xi(r_i) (\vec{s}_i \cdot \vec{l}_i) .$$

Darin ist der erste Term, der die Veränderung des Coulomb-Feldes des Kerns durch die Abschirmung angibt, als Zentralfeld mit $\mathfrak{J}^2$, $\mathfrak{J}_z$, $\mathfrak{L}^2$, $\vec{S}^2$ und mit allen $\vec{l}_i^2$, $\vec{s}_i^2$, $\mathfrak{j}_i^2$ vertauschbar. Der zweite Term (Coulomb-Wechselwirkung) kommutiert mit $\mathfrak{J}^2$, $\mathfrak{J}_z$, $\mathfrak{L}^2$, $\vec{S}^2$, aber nicht mit $\vec{l}_i^2$, $\mathfrak{j}_i^2$, der dritte (Spin-Bahn-Wechselwirkung) dagegen mit $\mathfrak{J}^2$, $\mathfrak{J}_z$ und mit jedem $\vec{l}_i^2$, $\vec{s}_i^2$, $\mathfrak{j}_i^2$, aber nicht mit $\vec{\mathfrak{L}}^2$, $\vec{S}^2$. Die Spektren der Elemente zeigen nun, daß in sehr vielen Elektronenhüllen die Spin-Bahn-Wechselwirkung klein gegen die Coulomb-Wechselwirkung ist und folglich als klein von *zweiter* Ordnung gerechnet werden muß. In diesen Fällen wählen wir als Eigenfunktionen nullter Näherung die Linearkombinationen von Slater-Determinanten als $\psi_{\mu\lambda}^0$, *die Eigenfunktionen zu* $\mathfrak{J}^2$, $\mathfrak{J}_z$ *und* $\mathfrak{L}^2$, $\vec{S}^2$ sind,[2]) so daß die zugehörigen J, M_J, L, S gute Quantenzahlen sind. Bildet man mit ihnen die Matrix $(\psi_{\mu\lambda}^0, H' \psi_{\mu\varkappa}^0)$, dann liefern auf Grund der genannten Vertauschungseigenschaften die ersten beiden Terme von H' nur Diagonalelemente, die Spin-Bahn-Wechselwirkung dagegen auch Nichtdiagonalelemente, die aber in der ersten Näherung vernachlässigt werden. In erster Näherung erhalten wir also ein diagonales H' und folglich die Eigenwertstörungen (104.7), die von der Coulomb-Wechselwirkung und dem ersten Term von H' stammen.[3]) Man spricht in diesem Fall – Eigenfunktionen nullter Näherung als Eigenfunktionen von $\mathfrak{L}^2$, $\vec{S}^2$, $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{J}_z$ gewählt – von „L-S-Kopplung“ oder „Russell-Saunders-Kopplung“. Da die so gefundenen Eigenfunktionen des Schalenmodells ($\equiv$ der nullten Näherung) außer einem bestimmten Gesamtdrehimpuls J auch einen bestimmten Gesamtbahndrehimpuls L und Gesamtspin S haben, kann man ein Vektormodell angeben, das diesen Sachverhalt kurz und anschaulich ausdrückt:

Bei Russell-Saunders-Kopplung setzen sich die Bahndrehimpulse $\vec{l}_i$ bzw. Spins $\vec{s}_i$ der äußeren Teilchen zu einem Gesamtbahndrehimpuls $\mathfrak{L}$ bzw. Gesamtspin $\vec{S}$ der Hülle und diese beiden zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ der Hülle zusammen, vgl. Abb. 219a.

---

[1]) Wegen der Entartung dürfen die $\psi_{\mu\lambda}^0$ beliebigen Linearkombinationen $\sum_\lambda c_\lambda \psi_{\mu\lambda}^0$ unterworfen werden.

[2]) Für mehr als zwei äußere Teilchen sind dann die Eigenfunktionen immer noch nicht eindeutig festgelegt, vgl. [C 35-1], S. 189.

[3]) Der Beitrag der Spin-Bahn-Wechselwirkung zu den Diagonalelementen von H' (dieser Beitrag ist klein von 2. Ordnung) liefert die Feinstruktur.

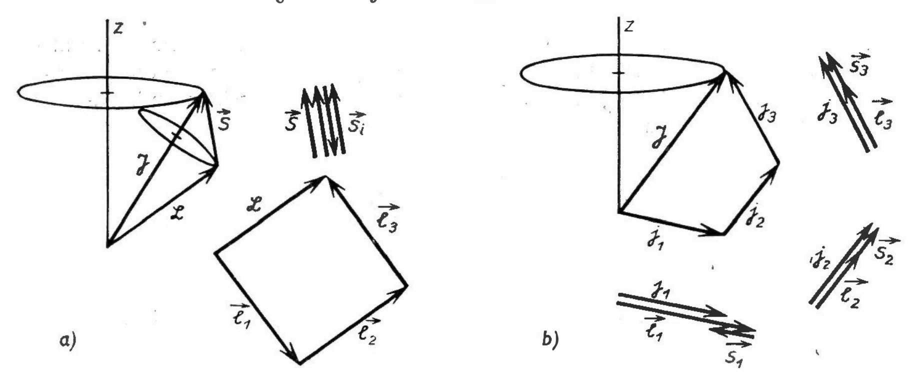


Abb. 219. **Zusammensetzung der Einzel(-bahn und -spin)-drehimpulse zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ der Hülle: a) bei L-S-Kopplung; b) bei j-j-Kopplung. Bei a) präzedieren $\mathfrak{L}$ und $\vec{S}$ wie gezeichnet um $\mathfrak{J}$, bei b) präzedieren ebenso $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \mathfrak{j}_3$ um $\mathfrak{J}$ (nicht gezeichnet). Die Präzessionsgeschwindigkeit wächst mit der Stärke der (Coulomb- bzw. Spin-Bahn-)Wechselwirkung, die die betreffende Kopplung bestimmt**

Bei einigen weiteren Elektronenhüllen (schwere Atome und solche mit fast abgeschlossenen Schalen) zeigen die Spektren, daß umgekehrt die Coulomb-Wechselwirkung klein gegen die Spin-Bahn-Wechselwirkung ist und als klein von zweiter Ordnung gerechnet werden kann. Wir wählen deshalb als Schalenmodelleigenfunktionen $\psi^0_{\mu\lambda}$ jetzt solche Linearkombinationen von Slater-Determinanten, *die Eigenfunktionen zu* $\mathfrak{J}^2$, $\mathfrak{J}_z$ *und* $\vec{l}_i^2$, $\vec{s}_i^2$, $\mathfrak{j}_i^2$ sind, so daß J, M_J und l_i, s_i, j_i gute Quantenzahlen sind. Man nennt diesen Fall „j-j-Kopplung“, und gibt wieder ein Vektormodell an:

Bei j-j-Kopplung[1]) *setzen sich Bahndrehimpuls* $\vec{l}_i$ *und Spin* $\vec{s}_i$ *jedes einzelnen äußeren Teilchens zunächst zum Gesamtdrehimpuls* $\mathfrak{j}_i$ *dieses Teilchens zusammen; diese Gesamtdrehimpulse der einzelnen äußeren Teilchen ergeben den Gesamtdrehimpuls* $\mathfrak{J}$ *der Hülle, vgl. Abb. 219 b.*

Wir haben hier nur das Prinzip angedeutet, nach dem die Eigenfunktionen des Schalenmodells bei mehr als einem äußeren Teilchen bestimmt werden und die erste Näherung über das Schalenmodell hinaus berechnet wird. Die wirkliche Durchführung des Verfahrens findet der Leser in dem Standardwerk von Condon und Shortley [C 35-1]. —

Am Beispiel der beiden Kopplungen und bei der Behandlung von Spin und Isospin sahen wir, daß ein Vektormodell eine (an der klassischen Physik orientierte und deshalb anschauliche) „Kurzschrift“ für in Wahrheit rein quantenmechanische Aussagen ist. Es ist deshalb häufig zweckmäßig, mit dieser Kurzschrift zu arbeiten, besonders wenn die genaue quantenmechanische Behandlung zu umfangreich ist, wie es im folgenden oft der Fall sein wird. —

Bekanntlich gibt es in der Störungstheorie Fälle, in denen es trotz der Kleinheit der Störung nicht genügt, nur die erste Näherung zu berücksichtigen. Das tritt ein, wenn neben

---

[1]) Wir verwenden das Wort Kopplung nur in dem speziellen Sinn der j-j- und L-S-Kopplung. In allen anderen Fällen sprechen wir von Wechselwirkung, z. B. Spin-Bahn-Wechselwirkung statt Spin-Bahn-Kopplung.

dem speziellen Eigenwert E_α^0, dessen Störung wir gerade berechnen wollen, so dicht ein anderer Eigenwert E_β^0 liegt, daß $E_\alpha^0 - E_\beta^0$ vergleichbar mit den Eigenwertstörungen erster Näherung, $E^{(1)}$, wird ($E_\alpha^0 - E_\beta^0$ klein von erster Ordnung). Dann wird nämlich der Summand $\nu = \beta$ in der Eigenwertstörung zweiter Näherung,[1])

$$E_{\alpha\lambda}^{(2)} = \sum_{\substack{\nu,\varkappa \\ (\nu \neq \alpha)}} \frac{(\psi_{\alpha\lambda}^0, H'\psi_{\nu\varkappa}^0)(\psi_{\nu\varkappa}^0, H'\psi_{\alpha\lambda}^0)}{E_\alpha^0 - E_\nu^0},$$

dadurch eine Größe erster Ordnung, daß er einen Nenner von erster Ordnung — statt normalerweise nullter Ordnung — hat.

Für uns bedeutet das, daß auch die Matrixelemente des Störoperators zwischen *verschiedenen Konfigurationen* α und β

$$(\psi_{\alpha\lambda}^0, H'\psi_{\beta\varkappa}^0) \qquad (\alpha \neq \beta)$$

in die Eigenwertstörung erster Ordnung eingehen, wenn die Konfigurationen α und β dicht beieinander liegende Eigenwerte E_α^0 und E_β^0 haben. Man spricht in diesem Fall von „Konfigurationsmischung", da hier der gestörte Eigenwert nicht mehr durch eine Konfiguration allein bestimmt ist. Ein Beispiel für Konfigurationsmischung ist die sog. Autoionisation, vgl. [C 35-1], S. 369.

§ 105. Zentralfeld

Wir versuchen nun, analog zur Hülle auch für den Kern ein Schalenmodell zu finden, das die magischen Zahlen als Schalenabschlüsse liefert (Zusammenfassende Literatur: Standardwerke von MAYER, JENSEN [M 55-1] und FEENBERG [F 55-1], Handbuchartikel von ELLIOT, LANE [E 57-1].) Da wir aus früheren Erfahrungen wissen, daß die Coulomb-Abstoßung der Protonen relativ geringen Einfluß auf die Struktur der Kerne hat, werden wir sie zunächst vernachlässigen. Das wird durch die Tatsache unterstützt, daß die *gleichen* Neutronen und Protonenzahlen magisch sind.

Dann lautet die Schrödinger-Gleichung für die A Nukleonen des Kerns

$$H\psi = E\psi,$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\sum_i \Delta_i + \frac{1}{2}\sum_{i \neq k}\sum V(i,k), \quad \sum_i = \sum_{i=1}^{A}, \qquad (105.1)$$

$$\psi = \psi(1,\ldots,i,\ldots,A), \qquad i = \mathfrak{r}_i, \sigma_i, \tau_i.$$

Darin sind die Zweinukleonenpotentiale $V(i,k) = V(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_k, \vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_k, \vec{\tau}_i, \vec{\tau}_k)$ solche starken kurzreichweitigen Potentiale mit Spin-, Isospin- und Tensorabhängigkeit, wie wir sie früher z. B. beim Zweinukleonenproblem kennengelernt haben.

Der Grundgedanke des Schalenmodells ist nach S. 519, diese Schrödinger-Gleichung so anzunähern, daß alle Teilchen sich unabhängig in einem gemeinsamen Zentralfeld bewegen. Hier stoßen wir auf eine erste Schwierigkeit: In der Hülle war von vornherein das starke Zentralfeld der Kernladung vorhanden. Nur die

[1]) Die $\psi_{\mu\lambda}^0$ sind wieder so gewählt, daß $(\psi_{\mu\lambda}^0, H'\psi_{\mu\varkappa}^0) = 0$ für $\lambda \neq \varkappa$ ist.

außerdem existierende schwache gegenseitige Wechselwirkung (Coulomb-Abstoßung) mußte durch ein zum Kern-Coulomb-Feld hinzukommendes Abschirmungszentralfeld $\left(e\,U(r) - \frac{Z e^2}{r}\right)$ angenähert werden. Im Kern dagegen ist alle überhaupt vorhandene Wechselwirkung nur gegenseitige Wechselwirkung der Teilchen und muß durch das Gesamt-Zentralfeld angenähert werden.

a) Wahl des Zentralfeldes

Es ist sicher eine schwierige Aufgabe, starke, kurzreichweitige Kräfte zwischen den einzelnen Teilchenpaaren des Kerns durch ein Zentralfeld anzunähern, in dem sich die Teilchen „im Mittel" befinden. Trotzdem läßt sich leicht angeben, wie dieses Zentralfeld ungefähr aussehen muß, wenn man zunächst einmal *voraussetzt*, daß eine solche Mittelung der einzelnen Paarwechselwirkungen sich irgendwie physikalisch rechtfertigen läßt (s. hierzu S. 685ff.).

Man kann annehmen, daß 1. die Nukleonen im Kerninnern mit annähernd konstanter Dichte verteilt sind, so daß keine Stelle – etwa das Zentrum oder der Bereich nahe der Oberfläche – durch eine extrem hohe oder tiefe Nukleonenkonzentration ausgezeichnet ist, und 2. die Nukleonendichte am Kernrand relativ rasch auf Null abfällt, vgl. Abb. 220a. Durch Streuung von hochenergetischen Elektronen mit einigen 100 MeV [H 56-1] bzw. von Protonen mit etwa 20 MeV und mehr [W 54-1] läßt sich die Gestalt der Protonen- bzw. Nukleonenverteilung im Kern „ausmessen", da in den genannten Energiegebieten die Wellenlänge der gestreuten Teilchen klein gegen den Kernradius ist. Die Experimente bestätigen [H 57-1] unsere qualitative Vorstellung der Dichteverteilung und ergeben darüber hinaus, daß der Randabfall der Dichte bei allen Kernen etwa auf einer Strecke von $2{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm erfolgt.

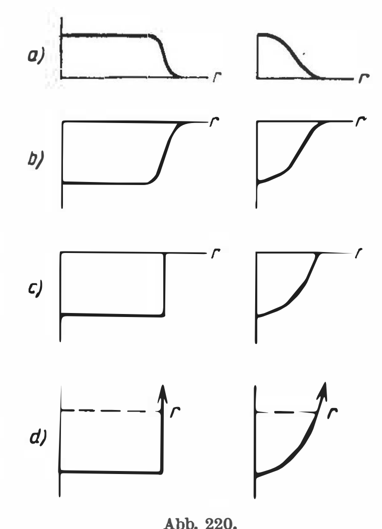


Abb. 220.
Zur Wahl des Zentralfeldes für das Schalenmodell des Kerns. links bei mittelschweren bis schweren, rechts bei leichten Kernen.

Das Zentralfeld, in dem sich ein beliebig herausgegriffenes Nukleon im Mittel befindet, kann unter diesen Umständen nur eine analoge Form haben wie die Dichteverteilung im Kern: Im Kerninnern erzeugt die nahezu homogene Nukleonenverteilung ein annähernd konstantes – natürlich anziehendes – Potential, das am Rand rasch auf den Vakuumwert 0 ansteigt (Abb. 220b).

Bei leichten Kernen ist kein Platz zur Ausbildung eines Gebiets konstanter Dichte vorhanden, da die „Oberfläche" – der Bereich des raschen Abfalls – fast das gesamte Volumen ausfüllt; man erhält deshalb ein muldenartiges Zentralfeld.

Um mit einem solchen Potential einfach rechnen zu können, wird man es für schwere Kerne zu einem Kastenpotential, für leichte Kerne zu einem abgeschnittenen Oszillatorpotential idealisieren (Abb. 220c). Auch für diese Potentiale ist die Schrödinger-Gleichung nur numerisch lösbar, weshalb man üblicherweise zum unendlich tiefen Kasten- bzw. zum Oszillatorpotential nach Abb. 220d übergeht. Man kann zeigen, daß durch diesen letzten Schritt die Termsysteme der jeweiligen Potentiale sich nur unwesentlich ändern:[1]) Schneidet man die Termsysteme der unendlich tiefen Potentiale in der entsprechenden Höhe ab (in Abb. 220d gestrichelt), so stimmen die Terme der Reihenfolge nach genau und den relativen Abständen nach ungefähr mit den Termsystemen der endlich tiefen Potentiale der Abb. 220c überein, sind aber etwas weniger dicht.

Damit haben wir den Übergang zur *Schalenmodell-Näherung*: Wir nähern die Gleichung (105.1) an durch die separierbare Gleichung

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0,$$

$$H^0 = \sum_i H_i{}^0 \equiv \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_i + V(r_i)\right), \tag{105.2}$$

$$V(r) = \begin{cases} 0\,^{2)} & r < R\,, \\ \infty & r > R\,, \end{cases} \qquad \text{schwere Kerne,}$$

$$V(r) = \frac{M\omega^2}{2} r^2,\,^{2)} \qquad \text{leichte Kerne.}$$

Jedes Nukleon bewegt sich jetzt unabhängig nach der Gleichung ($E^0 = \sum_i E_i^0$ usw.)

$$H_i^0 u_i = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_i + V(r_i)\right) u_i(i) = E_i^0 u_i(i)\,, \tag{105.3}$$

$$u_i(k) = \varphi_i(\mathfrak{r}_k)\cdot\chi_i(k)\cdot\eta_i(k)\,, \quad \varphi_i(\mathfrak{r}) = R_{n_i l_i}(r)\cdot Y_{l_i}^{m_{l_i}}(\theta,\varphi)$$

und wir erhalten die Radialgleichung des Zentralfeldproblems

$$R'' + \frac{2}{r_i}R' + \left[\frac{2M}{\hbar^2}(E_i^0 - V(r_i)) - \frac{l_i(l_i+1)}{r_i^2}\right]R(r_i) = 0\,. \tag{105.4}$$

Im folgenden lassen wir alle Indizes i weg und schreiben E statt E_i^0.

Es ist uns damit gelungen, auch für den Kern ein Schalenmodell anzugeben – allerdings unter wesentlich fraglicheren Annahmen, als bei der Hülle. Wir müssen deshalb von vornherein damit rechnen, daß unser Modell die Wirklichkeit nur grob beschreibt, falls es überhaupt brauchbar ist.

b) Berechnung der Termsysteme

Im Falle des (unendlich tiefen) Kastenpotentials muß die Eigenfunktion im Außenraum wegen der unendlich hohen Potentialwand verschwinden,

$$R(r) = 0 \quad \text{für} \quad r \geqq R\,, \tag{105.5}$$

[1]) vgl. Newton [N 59-1].

[2]) Wir wählen in beiden Fällen zweckmäßig den tiefsten Punkt des Potentials als Nullpunkt der Energieskala.

so daß wir nur Lösungen im Innenraum zu suchen brauchen, die für $r = R$ verschwinden. Mit $R(r) = r^{-1/2} v(r)$ geht die Radialgleichung (105.4) in die Gleichung der Zylinderfunktionen $Z_{l+1/2}(kr)$ über:

$$v'' + \frac{1}{r} v' + \left(k^2 - \frac{(l + 1/2)^2}{r^2}\right) v = 0 , \quad k^2 = \frac{2M}{\hbar^2} E,$$
$$v = Z_{l+1/2}(kr) .$$

Als einzige Zylinderfunktionen kommen die Besselschen in Frage, da nur sie für $r \to 0$ nicht divergieren:

$$v = J_{l+1/2}(kr) .$$

Die Randbedingung (105.5) ergibt die Eigenwerte

$$(E_i^0 =)\, E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2M} k^2_{nl} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{x^2_{nl}}{R^2} , \quad n = n_r + 1 = 1, 2, \ldots , \tag{105.6}$$

wo die x_{nl} die Nullstellen der $J_{l+1/2}(x)$ bedeuten[1]), die im allgemeinen numerisch aus transzendenten Gleichungen bestimmt werden müssen (s. [F 47-1], S. 87 ff.). Als Eigenfunktionen der niedrigsten Zustände erhalten wir

$$R_{nl}(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(k_{nl} r) = \sqrt{\frac{2 k_{nl}}{\pi}}\, j_l(k_{nl} r) , & r < R , \\ 0 , & r > R , \end{cases}$$

$$l = 0: \; J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} ,$$

$$l = 1: \; J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(- \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{x \sqrt{x}}\right) ,$$

$$l = 2: \; J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(- 1 + \frac{3}{x^2}\right) \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 3 \frac{\cos x}{x \sqrt{x}}\right] ,$$

$$J_{l+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{l+1/2} \left(- \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x} .$$

Für den (dreidimensionalen, isotropen, harmonischen) Oszillator erhalten wir durch $R(r) = r^{-1} v(r)$ die Gleichung

$$v'' + \left(k^2 - \lambda^2 r^2 - \frac{l(l + 1)}{r^2}\right) v = 0 ,$$
$$k^2 = \frac{2M}{\hbar^2} E , \qquad \lambda = \frac{M\omega}{\hbar} ,$$

und mit $v(r) = r^{l+1} e^{-1/2 \lambda r^2} y(r)$

$$y'' + 2\left(\frac{l+1}{r} - \lambda r\right) y' - \left[2\lambda \left(l + \frac{3}{2}\right) - k^2\right] y = 0 .$$

---

[1]) n numeriert die Nullstellen für jedes l der Größe nach durch. $n_r = n - 1$ gibt die Zahl der r-Knoten (Knoten bei $r = 0$ und ∞ nicht gezählt).

Geht man zu der neuen unabhängigen Variablen $x = \lambda r^2$ über, so erhält man für $y(x)$ die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktionen:

$$x\frac{d^2 y}{d x^2} + (\gamma - x)\frac{d y}{d x} - \alpha y = 0\,,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(l + \frac{3}{2} - \frac{k^2}{2\lambda}\right), \qquad \gamma = l + \frac{3}{2}\,, \qquad x = \lambda r^2.$$

Das Endlichbleiben von $R(0)$ wird durch die Lösung dieser Gleichung gesichert, die üblicherweise als die konfluente hypergeometrische Funktion bezeichnet wird:

$$y = {}_1F_1(\alpha, \gamma; x) = F(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

Bricht diese Potenzreihe nicht ab, so divergiert sie für große $x = \lambda r^2$ proportional $e^{+\lambda r^2}$, so daß $v(r)$ im Unendlichen divergieren würde. Setzen wir jedoch den Parameter[1])

$$\alpha = -n, \qquad n = n_r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{105.7}$$

dann bricht die Potenzreihe ab und wird zum Polynom n-ten Grades in x, so daß $v(r)$ im Unendlichen exponentiell $\propto e^{-\frac{\lambda}{2}r^2}$ verschwindet.

Die Abbruchbedingung (105.7) liefert uns schließlich unter Einsetzen der Werte für α, k und λ die Eigenwerte

$$(E_i^0) = E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \tfrac{3}{2}) = \hbar\omega(N + \tfrac{3}{2}), \tag{105.8}$$

also ein äquidistantes Termsystem wie beim eindimensionalen harmonischen Oszillator. Im Gegensatz zu dem des Kastenpotentials zeigt es sog. zufällige Entartung, denn die Eigenwerte hängen nicht von n und l einzeln ab, sondern nur von der Kombination $2n + l = N$.

Als Eigenfunktionen der niedrigsten Zustände erhält man

$$R_{nl}(r) = r^l e^{-\frac{\lambda}{2}r^2} \cdot F(-n, l + \tfrac{3}{2}; \lambda r^2),$$

$$\begin{aligned}
N = 0:&\quad n = 0, \quad l = 0, \quad F = 1,\\
N = 1:&\quad n = 0, \quad l = 1, \quad F = 1,\\
N = 2:&\quad n = 0, \quad l = 2, \quad F = 1,\\
&\quad n = 1, \quad l = 0, \quad F = 1 - \tfrac{2}{3}\lambda r^2,\\
N = 3:&\quad n = 0, \quad l = 3, \quad F = 1,\\
&\quad n = 1, \quad l = 1, \quad F = 1 - \tfrac{2}{5}\lambda r^2,\\
N = 4:&\quad n = 0, \quad l = 4, \quad F = 1,\\
&\quad n = 1, \quad l = 2, \quad F = 1 - \tfrac{2}{7}\lambda r^2,\\
&\quad n = 2, \quad l = 0, \quad F = 1 - \tfrac{4}{3}\lambda r^2 + \tfrac{4}{15}\lambda^2 r^4.
\end{aligned} \tag{105.9}$$

[1]) Wegen n_r vergleiche Fußnote S. 529.

Nach S. 487 hat die Eigenfunktion eines Zentralfeldproblems $u = R_{nl}\, Y_l^m \chi \eta$ die (räumliche) Parität $(-1)^l$. Aus (105.9) sehen wir, daß alle Zustände mit gleichem N – alle Zustände der „Oszillatorschale“ N[1]) – gleiche Parität, und die Zustände zweier aufeinanderfolgender Oszillatorschalen entgegengesetzte Parität haben.

c) Diskussion der Termsysteme

Die berechneten Termsysteme des Oszillators (105.8) und des Kastens (105.6), die nach unserem Schalenmodell jedem Nukleon zur Verfügung stehen, sind in Abb. 221a links und rechts angegeben. Sie wurden maßstabmäßig so aneinander angepaßt, daß einander entsprechende Terme – d. h. Terme mit gleichem $\bar{n} = n_r + l + 1$ und l (mit gleicher Radialknotenzahl n_r und gleichem Bahndrehimpuls l) – im Mittel etwa in gleiche Höhe kommen. Zwischen beiden Termsystemen wurde interpoliert, indem entsprechende Terme durch Geraden ver-

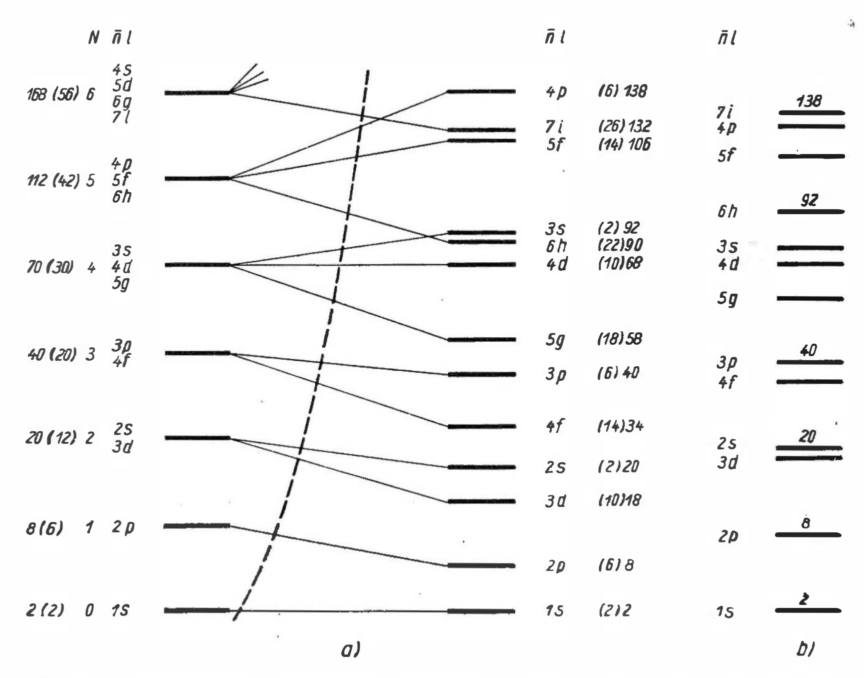


Abb. 221. a) Termsystem des Oszillators links, des Kastens rechts; b) interpoliertes Termsystem. Zu a): Die eingeklammerten Zahlen geben die Besetzungszahl $2 \cdot (2l + 1)$ jedes Terms. die danebenstehenden nicht eingeklammerten Zahlen die vom untersten bis zu dem betreffenden Term aufsummierten Besetzungszahlen. Letztere geben also die Gesamtzahl von Neutronen bzw. Protonen im Kern bei vollständiger Besetzung des betreffenden Terms an. Zu b): Die Zahlen auf den Termen geben die Besetzungszahlen des interpolierten Termsystems bei den Schalenabschlüssen an.

[1]) Das ist genau unser Begriff der Schale (S. 521), angewandt auf den Oszillator; denn die Terme mit gleichem N liegen hier (unendlich) dicht beieinander.

bunden und diese Geraden mit der gestrichelten Kurve zum Schnitt gebracht wurden. Wir haben dadurch die Interpolation „schräg" ausgeführt, d.h. bei den niedrigen Termen, die bei leichten Kernen allein besetzt werden, mehr das Oszillatortermsystem angenähert, bei den höheren Termen mehr das des Kastenpotentials. Das Ergebnis der Interpolation ist das Termsystem der Abb. 221 b.
Die Termsysteme sind im Sinne von Abb. 220d oberhalb des obersten besetzten Terms abgeschnitten zu denken. Die Bindungsenergie eines Nukleons – die Energie, die nötig ist, um ein Nukleon des obersten besetzten Terms aus dem Kern zu entfernen – beträgt etwa 6 bis 8 MeV.[1]) Folglich muß das Abschneiden ebenso viele MeV über dem obersten besetzten Term erfolgen. Über diesem Term bleiben also noch einige unbesetzte Terme „im Potentialtopf", die als angeregte Zustände des Kerns auftreten sollten, wie die unbesetzten Terme in den Spektren der Elektronenhüllen.
Neben den Termen wurden die Quantenzahlen $N\bar{n}l$ bzw. $\bar{n}l$[2]) und die Besetzungszahlen angegeben. Jeder Term $\bar{n}l$ kann von maximal $2 \cdot 2 \cdot (2l+1)$ Nukleonen besetzt werden, da sich die einzelnen Zustände, die denselben Eigenwert $E_{\bar{n}l}$ haben, jetzt nicht nur wie in der Hülle in $m_l = -l, \ldots, +l$ und $m_s = \pm\frac{1}{2}$, sondern auch noch in $(m_t \equiv) t_3 = \pm\frac{1}{2}$ unterscheiden. Wir geben in Abb. 221 trotzdem nur $2 \cdot (2l+1)$ als Besetzungszahl an, indem wir Neutronen und Protonen für sich behandeln. Die angeschriebenen Besetzungszahlen gelten also sowohl für Neutronen als auch für Protonen.
Danach erhalten wir folgende Schalenabschlüsse, d.h. größere Abstände zwischen Gruppen dichter Terme:

Kasten ($\bar{n}l$)

$$1s^2 \;|\; 2p^6 \;|\; 3d^{10}\,2s^2 \;|\; 4f^{14} \;|\; 3p^6 \;\vdots\; 5g^{18} \;|\; 4d^{10}\,6h^{22}\,3s^2 \;|\; 5f^{14}\,7i^{26} \;|\; \ldots$$

$$N, Z = \quad 2 \quad 8 \quad 20 \quad 34 \quad (40) \quad 58 \quad 92 \quad 132$$

Oszillator ($\bar{n}l$)

$$1s^2 \;|\; 2p^6 \;|\; 3d^{10}\,2s^2 \;|\; 4f^{14}\,3p^6 \;|\; 5g^{18}\,4d^{10}\,3s^2 \;|\; 6h^{22}\,5f^{14}\,4p^6 \;|\; \ldots$$

$$N, Z = \quad 2 \quad 8 \quad 20 \quad 40 \quad 70 \quad 112$$

Schräg interpoliert ($\bar{n}l$)

$$1s^2 \;|\; 2p^6 \;|\; 3d^{10}\,2s^2 \;|\; 4f^{14}\,3p^6 \;|\; 5g^{18}\,4d^{10}\,3s^2\,6h^{22} \;|\; 5f^{14}\,4p^6\,7i^{26} \;|\; \ldots$$

$$N, Z = \quad 2 \quad 8 \quad 20 \quad 40 \quad 92 \quad 138$$

Wie bei der Hülle erhalten wir nur die ersten Schalenabschlüsse richtig bei N bzw. $Z = 2$, 8, 20 (40), alle anderen ergeben sich falsch, selbst beim interpolierten und vermutlich günstigsten Termsystem.

---

[1]) Diese Werte gelten nur für die Entfernung eines ungepaarten Nukleons. Für ein gepaartes Nukleon muß außer der Bindungsenergie noch die Paarungsenergie aufgewendet werden, was auf wesentlich höhere Ablöseenergie führt ([F 53-1], Tab. 14).
[2]) $\bar{n} = n_r + l + 1$ ist in Analogie zur Hauptquantenzahl der Hülle eingeführt worden. Wegen n_r vgl. Fußnote S. 529.

Dieses Ergebnis fand man schon Anfang der dreißiger Jahre; es war eine der Ursachen, daß man reichlich 10 Jahre lang bis 1948 das Schalenmodell nicht wesentlich weiterverfolgte. Eine zweite, wohl noch wichtigere Ursache war der geringe Umfang des experimentellen Materials, das damals zur Verfügung stand: Die höheren magischen Zahlen 28, 50, 82, 126 waren damals wirklich noch „magisch“, d.h. nur mittels „höherer“ Einsichten zu erkennen.[1]) Dies und der Erfolg des Compoundkern-Modells 1936 (vgl. S. 101) führte dazu, daß man dem Schalenmodell bis 1948 höchstens für leichte Kerne eine gewisse Brauchbarkeit zubilligte, während wir heute wissen, daß es über den gesamten A-Bereich brauchbar ist.

Als die höheren magischen Zahlen 1948 durch ein breites experimentelles Material deutlich ausgezeichnet erschienen (GÖPPERT-MAYER [M 48-1]), versuchte man analog zur Hülle (vgl. S. 521), durch geeignete Termverschiebungen die richtigen Zahlen zu erhalten. FEENBERG und HAMMACK [F 49-1] und NORDHEIM [N 49-1] konnten so zwar alle richtigen magischen Zahlen (außer 28) erhalten, doch zeigte sich bald, daß diese Versuche nicht aufrechterhalten werden konnten.

FEENBERG und HAMMACK erhielten die magischen Zahlen, indem sie als Zentralfeld das „Weinflaschenpotential“ der Abb. 222 verwendeten, dessen zentrale Erhebung mit wachsendem A immer höher angenommen wird, so daß Terme mit niedrigem l gegenüber solchen mit höherem l angehoben werden (vgl. Abb. 223). Doch zeigte sich [S 50-2], daß die zentrale Erhebung um ungefähr eine Größenordnung stärker angenommen werden müßte, als sie durch eine von der Coulomb-Abstoßung der Protonen verursachte geringere Dichte der Protonen im Kernzentrum zustande kommen könnte. Außerdem liegen nach Abb. 223 an mehreren Stellen Verstöße gegen den allgemeinen Satz der Quantenmechanik des Zentralfelds vor, daß stets $E_{n_r l} \leqq E_{n_r l'}$, wenn $l < l'$ ist (Beweis des Theorems: SACHS [S53-1], S. 206).

NORDHEIM verschob die Terme rein ad hoc (vgl. Abb. 223), ohne dafür eine bestimmte Form des Potentials oder irgendeinen anderen bestimmten physikalischen Grund angeben zu können. Auch dieses „Modell“ — das demnach eigentlich gar kein Modell ist — mußte deshalb zugunsten des im folgenden zu besprechenden aufgegeben werden, weil dieses zwar auch (wenigstens zunächst) eine ad-hoc-Hypothese macht, aber wenigstens eine *physikalische* Hypothese: die starke Spin-Bahn-Wechselwirkung.

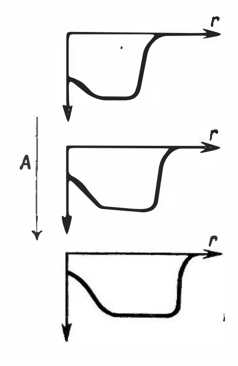


Abb. 222. Änderung des „Weinflaschenpotentials“ von FEENBERG und HAMMACK bei Zunahme von A

Es ist demnach nicht möglich, allein durch Annahme eines geeigneten, physikalisch vertretbaren Zentralfelds die richtigen höheren magischen Zahlen zu erhalten. „Daraus muß man schließen, daß entweder die ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Phänomenen bei den niedrigen magischen Zahlen rein zufällig und damit die Konzeption der unabhängigen Nukleonenbewegung grundsätzlich falsch ist oder daß in unserem Bild noch eine wichtige Eigenschaft fehlt“ (MAYER, JENSEN [M 55-1], S. 54).

[1]) So wurden z. B. die Zahlen $Z = 20, 36, 54, 84$, $N = 50, 82$ [E 34-1] und $N = 2, 8, 18, 32, 50, 60, 126$ [G 34-1] für magisch gehalten.

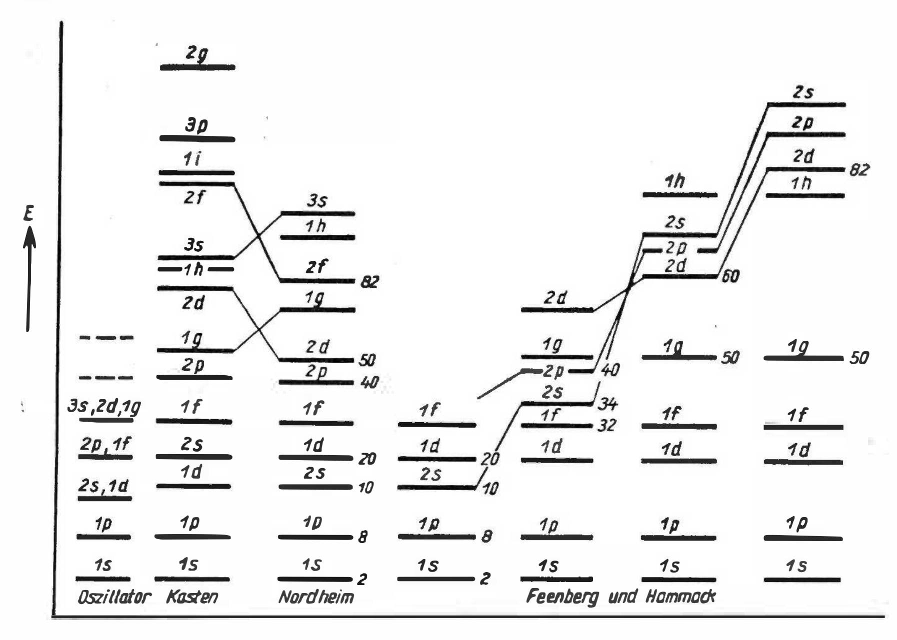


Abb. 223. Termsystem von Feenberg und Hammack und von Nordheim im Vergleich zum Oszillator- und Kasten-Termsystem. An den einzelnen Termen sind die Quantenzahlen n_r+1, l angegeben (nicht $\bar{n}, l$!). (Nach Flowers [F 52-1])

§ 106. Spin-Bahn-Wechselwirkung

a) Hypothese der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung

Den Ausweg aus dieser Schwierigkeit fanden 1949 Maria Göppert-Mayer [M 49-1] und Haxel, Jensen und Suess [H 48-1], indem sie eine zusätzliche Spin-Bahn-Wechselwirkung zunächst ad hoc postulierten, aber nicht als kleine Störung wie in der Hülle, sondern als *starke Spin-Bahn-Wechselwirkung*:

$$H^0 \psi^0 = E^0 \psi^0,$$

$$H^0 = \sum_i H_i^0 \equiv \sum_i \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_i + V(r_i) + \lambda \xi(r_i) (\vec{l}_i \cdot \vec{s}_i) \right] \tag{106.1}$$

(man vergleiche mit (105.2)). Dabei ist λ ein Maß für die Stärke der Spin-Bahn-Wechselwirkung und $\xi(r)$ eine außerhalb des Kerns verschwindende, positive Funktion.

Die Gleichung (106.1) läßt sich wieder separieren und ergibt zu unserer Gleichung (105.3) des einzelnen Nukleons die zusätzliche Spin-Bahn-Wechselwirkung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_i + V(r_i) + \lambda \xi(r_i) (\vec{l}_i \cdot \vec{s}_i) \right) u_i(i) = E_i^0 u_i \,. \tag{106.2}$$

Wegen der Vertauschbarkeit von $(\vec{l}_i \vec{s}_i)$ und damit von H_i^0 mit $\vec{s}_i^{\,2}$, $\vec{l}_i^{\,2}$, $\mathfrak{j}_i^2$ wählen wir $u_i = u_i(\mathfrak{r}_i, \sigma_i, \tau_i)$ als Eigenfunktion der Operatoren $\vec{s}_i^{\,2}$, $\vec{l}_i^{\,2}$, $\mathfrak{j}_i^2$ und erhalten (Indizes i von hier an weggelassen)

$$(\vec{l} \cdot \vec{s})\, u \equiv \frac{1}{2} (\mathfrak{j}^2 - \vec{l}^{\,2} - \vec{s}^{\,2})\, u = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\, u ,$$

wobei

$$j = \begin{cases} l \pm s & \text{für } l \neq 0 , \\ s & \text{für } l = 0 \end{cases}$$

und $s = \frac{1}{2}$ ist. In (106.2) eingesetzt, ergibt sich

$$\left(- \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(r) + \frac{\lambda \hbar^2}{2} \xi(r)\, a_j(l)\right) u = E u , \tag{106.3a}$$

$$a_j(l) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} l \\ -l-1 \end{matrix}\right\} & \text{für } l \neq 0 \quad \text{und} \quad \left\{\begin{matrix} j = l + \frac{1}{2} , \\ j = l - \frac{1}{2} , \end{matrix}\right. \\ 0 & \text{für } l = 0, \quad \text{also} \quad j = \frac{1}{2} . \end{cases}$$

b) Berechnung des Termsystems

Um das Termsystem zu erhalten, müssen wir außer $V(r)$ (vgl. (105.2)) ein spezielles $\xi(r)$ wählen. Da wir über die Spin-Bahn-Wechselwirkung im Augenblick noch nichts wissen, versuchen wir die einfachstmögliche Annahme eines konstanten $\xi(r) = \text{const} = 1 > 0$.[1]) Damit läßt sich (106.3a) schreiben

$$\left(- \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(r)\right) u = E' u , \tag{106.3b}$$

$$E = E' + \varepsilon a_j = \begin{cases} \left.\begin{matrix} E' + \varepsilon l \\ E' - \varepsilon (l+1) \end{matrix}\right\} & \text{für } l \neq 0 , \quad j = l \pm \frac{1}{2} ; \\ E' & \text{für } l = 0 , \quad j = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \lambda \hbar^2,$$

wobei E' den Eigenwert mit demselben Potential $V(r)$, aber ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung bedeutet, d.h. den Eigenwert, den wir früher (Abb. 221) gefunden hatten.

Unser jetziger Eigenwert E unterscheidet sich vom früheren Eigenwert E' um den Term $+ \varepsilon a_j(l)$.

Wir erhalten also durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung eine mit l bzw. j wachsende Aufspaltung der Terme der Abb. 221 in Dubletts, außer für s-Terme, was wir in Abb. 224a am interpolierten Termsystem der Abb. 221 b für verschiedene Werte von ε zeigen. Es wurde $\varepsilon < 0$, d.h. $\lambda < 0$, gewählt, da man nur so die richtigen Schalenabschlüsse erhält (s.u.).

[1]) Daß die Spin-Bahn-Wechselwirkung dadurch im Außenraum nicht verschwindet, schadet nichts, da wir beim Schalenmodell nur die wenig nach außen reichenden *gebundenen* Zustände betrachten.

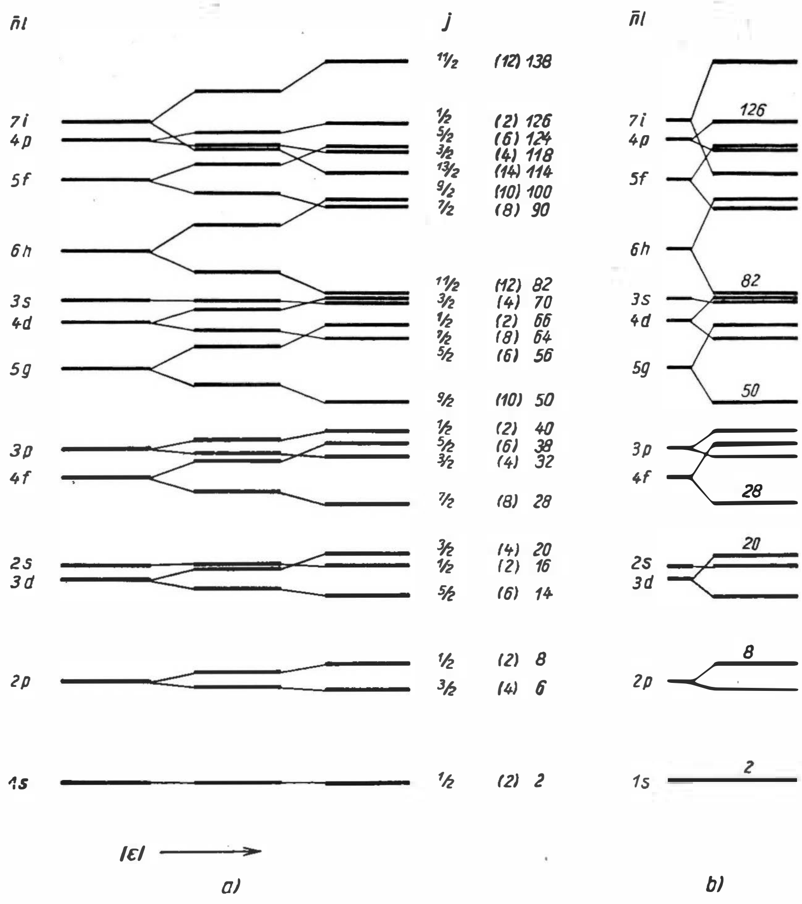


Abb. 224.

a) Aufspaltung der Terme des interpolierten Termsystems der Abb. 221 b durch eine zusätzliche Spin-Bahn-Wechselwirkung wachsender Stärke $|\varepsilon|$.
Besetzungszahlen analog Abb. 221; Besetzungszahl jedes Terms (eingeklammert): $2j + 1$
b) Aufgespaltenes Termsystem der rechten Spalte von a). Die Besetzungszahlen der Schalenabschlüsse sind auf den Termen angegeben.

An den Termen wurden die zugehörigen Quantenzahlen in der üblichen Form $\bar{n}lj$ angegeben, außerdem die Besetzungszahlen $2j + 1$ ($m_j = m_l \pm \frac{1}{2} = -j, \ldots, +j$ für $j = l \pm \frac{1}{2}$).[1] Man überzeuge sich, daß die Summe der Besetzungszahlen der beiden Terme eines Dubletts gleich der Besetzungszahl des unaufgespaltenen Terms ist.

Man sieht mit wachsender Aufspaltung in Abb. 224a folgende wesentliche Züge:

1. Der $4f_{7/2}$-Term trennt sich durch das Aufspalten des $4f$-Terms allein als selbständige Schale ab und gibt dadurch den Schalenabschluß 28.

---

[1]) Wieder werden Neutronen und Protonen für sich gezählt.

2. Der $5g_{9/2}$-Term trennt sich durch die Aufspaltung des $5g$-Terms ebenfalls von seiner ursprünglichen Schale ab, bleibt aber wegen der stärkeren Aufspaltung nicht selbständig, sondern gerät in die nächst niedere Schale, deren Abschluß dadurch von 40 auf 50 steigt.

3. und 4. Ebenso ergibt das Aufspalten des $6h$- bzw. $7i$-Terms gerade die Schalenabschlüsse bei 82 und 126.

Wir haben also durch die einzige zusätzliche Annahme einer Spin-Bahn-Wechselwirkung solche Termaufspaltungen bekommen, daß sich bei einer geeigneten Stärke und geeignetem Vorzeichen[1]) alle Schalenabschlüsse richtig ergeben (Abb. 224b). Die Konfiguration in den einzelnen Schalen ist danach

$$1s^2_{1/2} \,\Big|\, 2p^4_{3/2}\, 2p^2_{1/2} \,\Big|\, 3d^6_{5/2}\, 2s^2_{1/2}\, 3d^4_{3/2} \,\Big|\, 4f^8_{7/2} \,\Big|\, 3p^4_{3/2}\, 4f^6_{5/2}\, 3p^2_{1/2} \quad 5g^{10}_{9/2} \,\Big|$$

$$N, Z = 2 \qquad\qquad 8 \qquad (14) \qquad\qquad 20 \quad 28 \qquad\qquad\qquad (40) \quad 50$$

$$5g^{10}_{9/2} \,\Big|\, 4d^6_{5/2}\, 5g^8_{7/2}\, 3s^2_{1/2}\, 4d^4_{3/2}\, 6h^{12}_{11/2} \,\Big|\, 5f^8_{7/2}\, 6h^{10}_{9/2}\, 7i^{14}_{13/2}\, 4p^4_{3/2}\, 5f^6_{5/2}\, 4p^2_{1/2} \,\Big|\, \ldots$$

$$50 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 82 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 126$$

Es fällt auf, daß die magischen Zahlen 50, 82, 126 um 10, 12, 14 über den Schalenabschlüssen 40, 70, 112 des Oszillators liegen. Das erklärt sich so, daß unsere jetzigen Schalen fast die des Oszillators sind:[2]) Sie unterscheiden sich von letzteren (vgl. S. 532) nur dadurch, daß die Spin-Bahn-Wechselwirkung in jede Oszillatorschale aus der nächst höheren den Term mit dem größten j herunterschiebt. Dieser „Eindringling" hat gerade die Besetzungszahlen 10 ($g_{9/2}$), 12 ($h_{11/2}$), 14 ($i_{13/2}$). Dieses „Eindringen" hat eine wichtige Folge: Nach S. 531 haben alle Zustände einer Oszillatorschale gleiche räumliche Parität und aufeinanderfolgende Schalen entgegengesetzte räumliche Parität. In jeder unserer jetzigen Schalen haben also alle Terme gleiche Parität, nur der „Eindringling" hat entgegengesetzte.[3]) Man prüfe das im einzelnen nach.

Um eine Vorstellung von der notwendigen Stärke der Spin-Bahn-Wechselwirkung zu bekommen, beachten wir, daß nach Abb. 224b der Abstand zwischen den benachbarten Schalen bei 50 ungefähr durch die Aufspaltung des $5g$-Terms ($l = 4$) gegeben ist. Diese Aufspaltung ist nach (106.3b) $|\varepsilon|\,(2l + 1) = 9\,|\varepsilon|$. Andererseits wissen wir von S. 513, 516, daß der Schalenabstand bei 50 etwa 2 MeV sein muß, also $|\varepsilon| \sim 0{,}2$ MeV. Die Aufspaltung eines p-Terms ($3\,|\varepsilon|$) müßte demnach etwa von der Größe $\frac{1}{2}$ MeV sein, d. h. fast von der Größenordnung der Schalenabstände selbst. In der Hülle dagegen ist die entsprechende Spin-Bahn-Aufspaltung (*Fein*struktur) z. B. des $6p$-Terms des Cäsiumatoms ($Z = 55$) 0,07 eV,

---

[1]) Mit $\lambda > 0$ hätten wir 26, 48, 80, 124 erhalten.

[2]) Die Terme, die zu einer bestimmten Oszillatorschale gehören, wurden oben durch Unterstreichung verbunden.

[3]) Die Parität $(-1)^l$ eines Zustandes ändert sich nicht bei Verschieben des zugehörigen Terms, weil sich l dabei nicht ändert.

d.h. mehr als eine Größenordnung kleiner als die dortigen Schalenabstände von ~ 1 eV. Daran wie auch am Termsystem der Abb. 224b selbst sehen wir, daß im Kern die Spin-Bahn-Aufspaltung eine *Grob*struktur verursacht.

Das negative Vorzeichen der Spin-Bahn-Wechselwirkung ($\lambda < 0$, $\xi > 0$) bedeutet, daß wir im Gegensatz zur Hülle ($\lambda = 1 > 0$, $\xi > 0$ nach (104.2) im Kern eine anziehende Spin-Bahn-Wechselwirkung haben. In der Sprechweise der Hüllenphysik haben wir also im Kern „verkehrte" Spin-Bahn-Dubletts.

c) Experimenteller Nachweis der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung

Ehe wir zur Diskussion des Termsystems im einzelnen übergehen, wollen wir zeigen, daß die Hypothese der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung heute keine ad hoc-Hypothese mehr ist, sondern vielmehr als die theoretische Vorhersage einer neuen Eigenschaft der Kernmaterie gewertet werden muß, die inzwischen direkt experimentell nachgewiesen wurde.

Sehr geeignet für eine experimentelle Nachprüfung sind die beiden Kerne He^5 und Li^5, in denen man sich das fünfte (äußere) Nukleon in Wechselwirkung mit einem α-Teilchen als kugelsymmetrischem Rumpf vorstellen muß, der das Schalenmodell-Zentralfeld erzeugt, in dem sich das fünfte Nukleon bewegt. Da letzteres eine neue Schale anfängt, muß es viel schwächer gebunden sein als die vier Nukleonen des α-Teilchens. Tatsächlich reicht die Anziehung durch den Rumpf nicht einmal zur Bindung aus, so daß beide Kerne instabil sind, also nur bei Streuung von Neutronen oder Protonen an He^4 als Zwischenzustand auftreten.

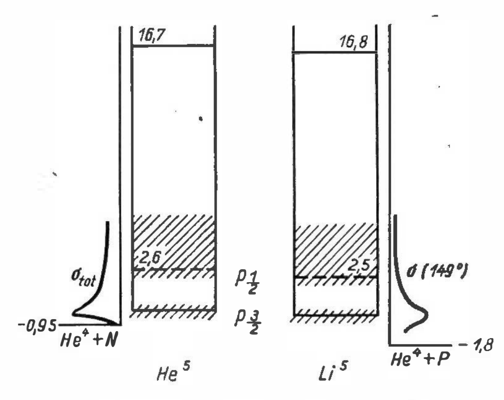


Abb. 225. Termsystem von He^5 bzw. Li^5. Coulomb- und Massenkorrektion nach S. 470 berücksichtigt. Daneben der Wirkungsquerschnitt für Streuung eines Neutrons bzw. Protons an He^4. Energien in MeV. (Nach AJZENBERG, LAURITSEN, Revs.Mod.Phys. **27**, 77 (1955)

Die Wirkungsquerschnitte dieser Streuungen zeigen nun deutliche Resonanzen bei 0,95 MeV (He^5) bzw. 1,80 MeV (Li^5), vgl. Abb. 225. Eine genauere Diskussion der Streuung (Phasenanalyse, [A 52-1]) zeigt, daß diese Resonanz von einem $p_{3/2}$-Zustand stammt und daß etwa 3 bis 5 MeV höher ein $p_{1/2}$-Zustand liegt, der sich in anderen Prozessen ($Li^6(nd)He^5$ und $Li^6(\gamma n)Li^5$) als flache Resonanz zeigt. Schon das Auftreten dieses p-Dubletts $p_{3/2}$-$p_{1/2}$ mit einer Aufspaltung von einigen MeV beweist das Vorhandensein einer starken Spin-Bahn-Wechselwirkung; es entspricht genau der Voraussage unseres Schalenmodells für Grundzustand und ersten angeregten Zustand des fünften Nukleons nach Abb. 224 b.

Noch deutlicher wird das durch das Polarisationsexperiment von HEUSINKVELD und FREIER [H 52-1] (vgl. Abb. 226), für das wir die folgende halbklassische Betrachtung

anstellen. Ein unpolarisierter Protonenstrahl von etwa 1,8 MeV tritt durch den Schlitz 1 in eine He^4-gefüllte Kammer. Ein bei a gestreutes Proton hat einen Bahndrehimpuls $\vec{l} = [\mathfrak{r} \times \mathfrak{p}]$ aus der Zeichenebene heraus. Da die Streuung bei 1,8 MeV erfolgt, ist sie nach Abb. 225 überwiegend $p_{3/2}$-Streuung, in der Spin $\vec{s}$ und Bahndrehimpuls $\vec{l}$ parallel stehen: $j = l + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Folglich zeigt auch $\vec{s}$ aus der Zeichenebene heraus, so daß die zweite Streuung (II) nach Durchfliegen von Schlitz 2 Streuung eines (teilweise) *polarisierten* Protonenstrahls an He^4 ist.

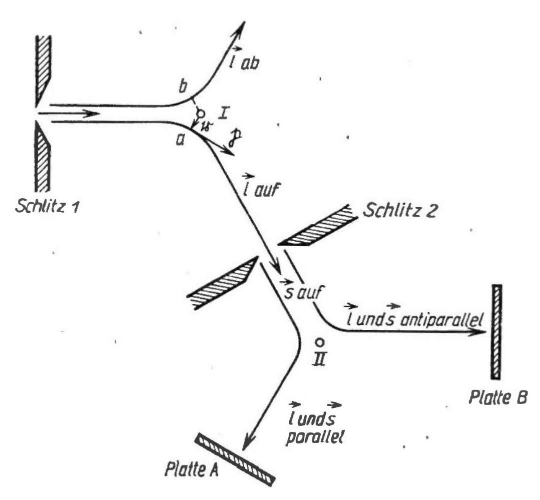


Abb. 226. Nachweis der Spin-Bahn-Wechselwirkung durch Doppelstreuung von Protonen an He^4 nach HEUSINKVELD und FREIER [H 52-1]. Der Übersichtlichkeit halber wurde die Streuung für abstoßende Kräfte gezeichnet. (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1]

Wie bei der ersten Streuung ermittelt man die Stellung von $\vec{l}$ und findet, daß auf Photoplatte A mehr Protonen mit parallelem $\vec{s}$ und $\vec{l}$ und auf B mehr mit antiparallelem $\vec{s}$ und $\vec{l}$ auftreffen, wenn wir voraussetzen, daß $\vec{s}$ bei der Streuung seine Richtung beibehält. Da die Streuung I elastisch ist, erfolgt auch Streuung II bei 1,8 MeV, d. h. überwiegend mit parallelem $\vec{s}$ und $\vec{l}$. Es müßten demnach in A viel mehr Protonen ankommen als in B, was trotz schlechter Geometrie (z. B. breite Schlitze) mit einem empirischen Verhältnis von 2 : 1 gefunden wurde. Man sieht, daß das Experiment die Übertragung des Barkla-Versuchs zum Nachweis der Polarisation von Röntgenstrahlen auf Protonenstrahlen ist.

Ähnliche Doppelstreuungen wurden bei Energien von 100 MeV und mehr an schweren Kernen durchgeführt. Man fand auch dort Polarisation, von der FERMI [F 54-1] zeigen konnte, daß sie durch eine Spin-Bahn-Wechselwirkung von gleichem Vorzeichen und gleicher Stärke wie bei Schalenmodell und Nukleon-Helium-Streuung gefunden, größenordnungsmäßig richtig beschrieben wird.

Schließlich scheint zum Verständnis der Polarisationserscheinungen bei der hochenergetischen Neutron-Proton- und Proton-Proton-Streuung (50 bis 150 MeV) bereits beim Zweinukleonensystem die Annahme einer solchen Spin-Bahn-Wechselwirkung nötig zu sein [S 57-1]. Allerdings ist das noch umstritten (1959).

Im Gegensatz zum experimentellen Nachweis ist die theoretische Erklärung der Spin-Bahn-Wechselwirkung noch unklar (siehe [E 57-1], S. 378). Man hat versucht, die Spin-Bahn-Wechselwirkung als Folge eines Zweinukleonen-Tensorpotentials [F 56-1], [K 51-1] bzw. einer Zweinukleonen-Spin-Bahn-Wechselwirkung [B 56-3], [B 55-2] zu erklären. Falls sich (s. oben) bewahrheiten sollte, daß schon in der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung eine Spin-Bahn-Wechselwirkung vorhanden ist, wäre die letztere Erklärung naheliegend.

§ 107. Diskussion des Termsystems

a) Lage der Terme

Bei genauerer Betrachtung unserer Termsysteme in Abb. 224 ergibt sich, daß die Reihenfolge der einzelnen Terme *innerhalb einer Schale* nicht vollkommen festgelegt ist, da oft mehrere Terme dicht beieinander liegen. Um das einzusehen, beachten wir, daß in die schrittweise Konstruktion unseres Termsystems der Abb. 224b an mehreren Stellen eine gewisse Willkür einging, nämlich 1. bei der gegenseitigen Anpassung der Maßstäbe von Oszillator- und Kasten-Termsystem in Abb. 221, 2. bei der schrägen Interpolation in Abb. 221, 3. bei der Festsetzung $\xi = \text{const.}$, 4. bei der Wahl des Zahlenwerts von $|\varepsilon|$ in Abb. 224a. Über Abweichungen von $\xi = \text{const}$ sprechen wir später. Die Willkür durch 1., 2. und 4. wurde in Abb. 221 und 224 so ausgenützt, daß das endgültige Termsystem (Abb. 224b) die Schalenabschlüsse möglichst deutlich zeigt. Der Leser kann sich jedoch davon überzeugen — z.B. indem er die Aufspaltung analog Abb. 224a für das reine Kasten- bzw. Oszillator-Termsystem wiederholt u.ä. (durchsichtiges Papier auflegen!) —, daß die Willkür nicht sehr groß ist, wenn unsere Grundforderung der richtigen Schalenabschlüsse erfüllt sein soll. Jede dann noch erlaubte kleine Abweichung von unserer Wahl in 1., 2. und 4. verursacht natürlich kleine Termverschiebungen und kann folglich die Reihenfolge dicht beieinander liegender Terme ändern.

Dasselbe gilt von Störungen unseres Modells, die auf jeden Fall vorhanden sind: Das Modell ist ja nur eine relativ grobe Näherung. Durch Störungen können Änderungen der Termfolge sogar während des Auffüllens eines Terms auftreten („Konkurrenz" zweier Terme). Solche Erscheinungen sind aus der Hülle wohlbekannt (z.B. die Konkurrenz des $4s$- und $3d$-Terms bei V, Cr, Mn u.ä.). Wegen der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung ist jedoch eine Änderung der Reihenfolge bei den beiden Termen eines Spin-Bahn-Dubletts ausgeschlossen; sie würde ja die Umkehrung des Vorzeichens von λ bedeuten. Da rein theoretisch die Reihenfolge dicht liegender Terme nicht genau festlegbar ist, werden wir die endgültige Termordnung innerhalb der einzelnen Schalen später empirisch bestimmen.

b) Zentralfeld

Wir wissen von Abb. 220, daß wir unsere Termsysteme etwa 6 bis 8 MeV oberhalb des höchsten besetzten Terms abschneiden müssen, um die endliche Tiefe des Potentials zu berücksichtigen. Damit wir eine ungefähre Vorstellung von den so entstehenden Potentialtiefen und den daraus resultierenden absoluten Termabständen bekommen, wurde in Abb. 227 die aus den Eigenfunktionen (105.9) berechnete Gesamtteilchendichte

$$\varrho(r) = \sum_i |u_i(\mathfrak{r})|^2$$

für die abgeschlossenen Schalen des Oszillatorpotentials gezeichnet. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung wurde weggelassen, da sie unsere Abschätzung nicht wesentlich beeinflußt. Die gewählten Werte für die Kernradien $R = s r_0$ sind in der dritten Zeile von Tabelle 63 ablesbar $\left(r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\right)$ und in Abb. 227 eingezeichnet.

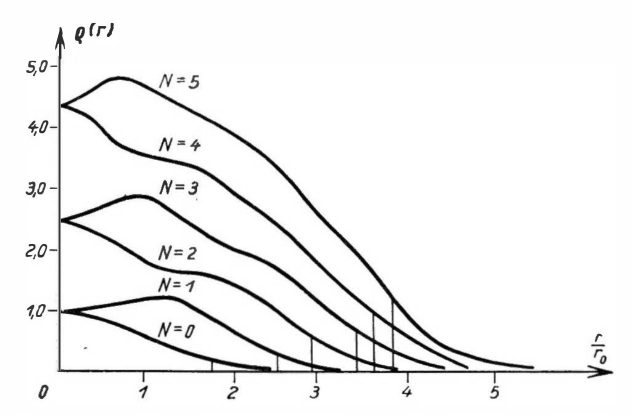


Abb. 227. Gesamtdichte der abgeschlossenen Schalen des Oszillatorpotentials. (Nach FEENBERG [F 55-1])

Tabelle 63. V_0-Werte einiger Kerne

N, Z	2	8	20	40	70	112	
A	4	16	40	80	140	224	
$s = \frac{R}{r_0}$	1,7	2,5	2,9	3,4	3,65	3,8	
$\hbar\omega$	12	10,4	7,6	6,25	5,2	4,13	MeV
V_0	$^3/_2\,\hbar\omega + 7$	$^5/_2\,\hbar\omega + 7$	$^7/_2\,\hbar\omega + 7$	$^9/_2\,\hbar\omega + 7$	$^{11}/_2\,\hbar\omega + 7$	$^{13}/_2\,\hbar\omega + 7$	MeV
	$= 25$	$= 33$	$= 33{,}5$	$= 35$	$= 35{,}5$	$= 34$	MeV

Setzt man $R = R_0 A^{1/3}$, so erhält man

$$R_0 A^{1/3} = s r_0 = s \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}$$

oder

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2M R_0^2} \frac{s^2}{A^{2/3}} = 10{,}6 \frac{s^2}{A^{2/3}} \text{ [MeV]} .$$

Bestimmt man mit diesen Werten $\hbar\omega$ die Tiefe des Oszillatorpotentials, die nötig ist, um alle besetzten Terme darin unterzubringen (die Nullpunktsenergie $\frac{3}{2}\hbar\omega$ ist nicht zu vergessen), so ergeben sich unter Hinzuzählen von 7 MeV Bindungsenergie die V_0-Werte der letzten Zeile.

Man sieht, daß nach allmählichem Anstieg bei den leichten Kernen die Potentialtiefe von den mittelschweren Kernen an fast konstant bleibt, was der Ausbildung

eines Bereichs konstanter, A-unabhängiger Dichte im Kerninnern entspricht. Von den mittelschweren Kernen an (A etwa >20) muß deshalb mit wachsendem A das Termsystem immer mehr zusammengedrängt werden, um die wachsende Zahl besetzter Terme in derselben Potentialtiefe (bei wachsendem Radius $R = R_0 \cdot A^{1/3}$) unterzubringen. Unsere Termsysteme geben also nur relative Termabstände. Diese Zusammendrängung äußert sich z. B. darin, daß wir auf S. 537 für einen schweren Kern (N oder $Z \sim 50$) eine p-Aufspaltung von etwa $\frac{1}{2}$ MeV schätzten, während sie bei He^5, Li^5 nach Abb. 225 einige MeV betrug.

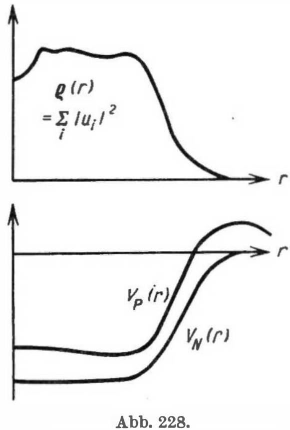


Abb. 228.
Gesamtdichte der Nukleonen für Au^{197}, wenn sich Neutronen bzw. Protonen in den unten gezeichneten abgerundeten Schalenmodellpotentialen befinden.
(Nach Ross, Mark, Lawson, Phys. Rev. **102**, 1613 (1956))

Die Abbildungen 227 und 228 gestatten nachzuprüfen, ob unser Schalenmodell wenigstens einigermaßen in sich konsistent ist: Wir haben die Potentialform (S. 527) ungefähr proportional der Dichte der Nukleonen im Kern angenommen. Die mit diesem Potential berechneten Eigenfunktionen müßten wieder dieselbe Gesamtdichte $\varrho(r) = \sum_i |u_i(\mathfrak{r})|^2$ ergeben. Tatsächlich läßt sich die Dichteverteilung des Oszillators (Abb. 227) einigermaßen durch eine Parabel annähern. Abb. 228 zeigt für ein abgerundetes Kastenpotential ähnliche Verhältnisse.

c) Spin-Bahn-Wechselwirkung

Wir hatten die Spin-Bahn-Wechselwirkung zur ersten Orientierung in der Form const $\cdot (\vec{l} \cdot \vec{s})$ angesetzt. Man muß aber bei genauerem Hinsehen eine ausgeprägte Radialabhängigkeit $\xi(r) \cdot (\vec{l} \cdot \vec{s})$ erwarten, weil die Spin-Bahn-Wechselwirkung im Kern überwiegend ein Oberflächeneffekt sein wird. Denn da sie eine Richtungsbevorzugung zeigt (Polarisationserscheinungen!), wird sie sich in einem unendlich ausgedehnten Gebiet von Kernmaterie aus Symmetriegründen wegmitteln. Die Verhältnisse eines unendlich ausgedehnten Mediums liegen annähernd im Innern eines nicht zu leichten Kerns vor, wo keine Oberflächeneffekte wirksam sind. Auch rein experimentell hat man Hinweise auf die Konzentrierung der Spin-Bahn-Wechselwirkung in der Kernoberfläche gefunden [W 55-1].

Wir müssen also genauer die Spin-Bahn-Wechselwirkung als $\lambda\, \xi(r)\, (\vec{l} \cdot \vec{s})$ ansetzen, wobei $\xi(r)$ (>0) qualitativ eine Form wie in Abb. 229 hat (beim Kastenpotential $\xi(r) \propto \delta(r - R)$).

Es liegt dann nahe — ist aber nicht zwingend —, die Spin-Bahn-Wechselwirkung in derselben Form anzusetzen wie in der Hülle, da das *automatisch* einen Verlauf wie in Abb. 229 sichert:

$$H_{\mathrm{SpB}} = \lambda \frac{1}{2M^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\vec{l} \cdot \vec{s})$$

($V(r)$ ist das Zentralfeld des Schalenmodells). Dann gibt $|\lambda|$ direkt an, wieviel mal stärker unter Berücksichtigung des Verhältnisses Elektronenmasse zu Nukleonenmasse die Spin-Bahn-Wechselwirkung des Kerns im Vergleich zur Hülle ist.

Mit dem Oszillatorpotential $V(r) = \frac{M}{2}\omega^2 r^2$ ergibt sich so der einfache Ausdruck

$$H_{\text{Sp B}} = \lambda \frac{\omega^2}{2Mc^2}(\vec{l}\cdot\vec{s}) = \lambda \frac{\hbar^2\omega^2}{4Mc^2} a_j(l).$$

Schreiben wir das wie in (106.3b) in der Form $H_{\text{Sp B}} = \varepsilon a_j(l)$, so erhält man für Kerne mit $A \sim 100$ ($|\varepsilon| \sim 0{,}2$ MeV nach S. 537, $\hbar\omega \sim 6$ MeV nach Tabelle 63)

$$|\lambda| = |\varepsilon| \frac{4Mc^2}{\hbar^2\omega^2} \sim 0{,}2 \cdot \frac{4000}{36} \sim 20$$

als Stärke der Spin-Bahn-Wechselwirkung relativ zu der der Hülle; vgl. S. 537ff.

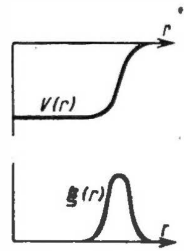


Abb. 229.
Form des Schalenmodell-Zentralfeldes und der Radialabhängigkeit $\xi(r)$ der Spin-Bahn-Wechselwirkung

§ 108. Fermigas-Modell

Im § 57 wurde das Fermigas-Modell oder Thomas-Fermi-Modell behandelt. Hier wollen wir zeigen, daß dieses Modell ein besonders einfacher Grenzfall des Schalenmodells ist. Darüber hinaus wollen wir mit diesem Modell nochmals die Tiefe V_0 des Schalenmodellpotentials abschätzen.
Man erhält das Fermigas-Modell aus dem Schalenmodell, wenn man den Kernradius $R \to \infty$ gehen läßt, also zu einer unendlich ausgedehnten Kernmaterie übergeht. Trotz der Kleinheit der Kerne hat dieser Grenzübergang einen Sinn, denn er bedeutet offenbar, daß wir die Verhältnisse im Kerninnern unter Vernachlässigung der endlichen Ausdehnung des Kerns, d. h. von Oberflächeneffekten, betrachten. Der Anwendungsbereich des Modells ist deshalb auf Probleme beschränkt, in denen die endliche Ausdehnung des Kerns keine Rolle spielt. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung fällt weg, da sie sich im unendlich ausgedehnten Medium wegmittelt.
Im Grenzfall $R \to \infty$ haben wir im ganzen Raum ein konstantes Potential $V_0 < 0$, folglich als Ortseigenfunktionen ebene Wellen:

$$u_i(k) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathfrak{k}_i \mathfrak{r}_k} \chi_i(k)\, \eta_i(k).$$

Wie üblich normieren wir die ebenen Wellen in einem Periodizitätswürfel $V = L^3$, so daß für den Wellenzahlvektor $\mathfrak{k}$ nur die Werte $\mathfrak{k}_i = \frac{2\pi}{L}\vec{n}_i$ (n_{ix}, n_{iy}, n_{iz} ganze Zahlen) in Frage kommen. Die Gesamteigenfunktion ψ unseres A-Nukleonensystems ist dann die aus den besetzten Zuständen u_i gebildete Slater-Determinante.

Da die Energie eines Teilchens im Zustand u_i durch

$$E_i = \frac{\hbar^2}{2M}\mathfrak{k}_i^2 + V_0 = \frac{\mathfrak{p}_i^2}{2M} + V_0$$

gegeben ist, sind im Grundzustand ψ_0 alle Zustände u_i bis zu einem höchsten Impuls $p_{max} = \hbar k_{max}$ besetzt („Fermi- oder Grenz-Impuls“).
Wir berechnen zunächst die kinetische Energie des Systems im Grundzustand:

$$E_{kin} = \langle T\rangle_0 = (\psi_0, T\psi_0) = -\frac{\hbar^2}{2M}(\psi_0, \sum_i \Delta_i \psi_0).$$

T ist ein „Einteilchenoperator“, da jeder seiner Summanden nur von den Koordinaten eines Teilchens abhängt. Für alle Einteilchenoperatoren $\sum_i O(i)$ rechnet man leicht nach — am einfachsten im Beispiel nur zweier besetzter Zustände —, daß ihr mit der Slater-Determinante ψ gebildeter Erwartungswert einfach die Summe aller Einteilchenerwartungswerte ist:

$$\langle \sum_i O(i)\rangle = \left(\psi, \sum_i O(i)\,\psi\right) = \sum_i (u_i(k), O(k)\,u_i(k)) \tag{108.1}$$

Demnach haben wir zu berechnen

$$(u_i(k), \Delta_k u_i(k)) = \frac{1}{V}\int_V e^{-i\mathfrak{k}_i\mathfrak{r}_k}\Delta_k e^{i\mathfrak{k}_i\mathfrak{r}_k}\,d\mathfrak{r}_k = -k_i^2\frac{1}{V}V.$$

Betrachten wir einen schweren Standardkern (vgl. S. 491), dann ergibt sich

$$E_{kin} = \frac{\hbar^2}{2M}\sum_i k_i^2 = \frac{\hbar^2}{2M}4\sum_j k_j^2,$$

wobei der Übergang von $\sum_{i=1}^{A}$ zu $4\sum_{j=1}^{\frac{A}{4}}$ berücksichtigt, daß im schweren Standardkern je 4 Zustände den gleichen Ortszustand (gleiches $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_j$) haben.
Lassen wir V schließlich gegen Unendlich gehen, so wird das $\mathfrak{k}_i$-Spektrum kontinuierlich, $\frac{1}{V}\sum_j \ldots$ wird zum Integral $\frac{1}{(2\pi)^3}\int \ldots d\mathfrak{k}$,[1]) und wir erhalten

$$E_{kin} = \frac{\hbar^2}{2M}4\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi\int_0^{k_{max}} k^2 k^2\,dk$$

$$= \langle T\rangle_0 = \frac{\hbar^2 V}{\pi^2 M}\frac{k_{max}^5}{5} = \frac{8\pi}{5}\frac{V}{M h^3}p_{max}^5.$$

---

[1]) $\frac{1}{V}\sum_j \ldots = \frac{1}{\Delta\mathfrak{k}\,V}\sum_j \ldots \Delta\mathfrak{k} \to \frac{1}{\lim\limits_{\substack{\Delta\mathfrak{k}\to 0\\ V\to\infty}}(\Delta\mathfrak{k}\,V)}\int \ldots d\mathfrak{k}$; $\Delta\mathfrak{k} = \Delta\mathfrak{k}_1\Delta\mathfrak{k}_2\Delta\mathfrak{k}_3 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$, also $\Delta\mathfrak{k}\,V = (2\pi)^3$.

Damit haben wir genau den Ausdruck für die kinetische Energie des Fermigases am absoluten Nullpunkt (Grundzustand) von S. 260 wiedergefunden $\left(N = Z = \frac{A}{2}\right)$.
Den Wert des Grenzimpulses erhalten wir folgendermaßen:

$$A = 4\sum_j 1 = 4\frac{V}{(2\pi)^3}\int 1\,d\mathfrak{k} = 4\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}k_{\max}^3 = \frac{16\pi V}{3h^3}p_{\max}^3 = 4\frac{VV_p}{h^3}.$$

Mit $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}R_0^3 A$ [1]) ergibt das den A-unabhängigen Wert

$$(R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}\,\text{cm})$$

$$p_{\max} = \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{1/3}\hbar\left(\frac{A}{V}\right)^{1/3} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3}\frac{\hbar}{R_0} = 1{,}15 \cdot 10^{-14}\,\text{g}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

(vgl. (57.3)). Setzt man ihn in E_{kin} ein, so ergibt sich (vgl. (57.6))

$$E_{\text{kin}} = \langle T\rangle_0 = \frac{3^{5/3}}{40(2\pi)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{M}A\left(\frac{A}{V}\right)^{2/3} = \frac{3}{10}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{MR_0^2}A \propto A.$$

Für die E_{kin} des obersten besetzten Zustands („Fermi-Energie") erhält man

$$E_{\max} = \frac{p_{\max}^2}{2M} = \frac{5}{3}\frac{E_{\text{kin}}}{A} = 24{,}6\,\text{MeV}.$$

Als rohe Abschätzung der Topftiefe ergibt sich daraus unter Zuzählen der Bindungsenergie des „obersten" Teilchens

$$V_0 = E_{\max} + 7\,\text{MeV} \sim 32\,\text{MeV}$$

n brauchbarer Übereinstimmung mit Tabelle 63.
Yang [Y 50-1] konnte mit dem Thomas-Fermi-Modell die Schalenabschlüsse bei den magischen Zahlen in analoger Weise erhalten wie Fermi (S. 521) für idie Hülle.

Wir wollen noch kurz andeuten, wie aus dem Fermigas-Modell die Bethe-Weizsäcker-Formel folgt. Berechnet man E_{kin} ganz analog für $N \neq Z$ (zwei unabhängige Fermigase), so ergibt sich (vgl. (57.6))

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{10}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{MR_0^2}\frac{A}{2}\left[\left(\frac{2N}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{2Z}{A}\right)^{5/3}\right]$$

$$\sim C_v \cdot A + C_a \cdot \left(\frac{N-Z}{N+Z}\right)^2 \cdot A \quad \text{für} \quad \frac{N-Z}{N+Z} \ll 1.$$

[1]) V ist das Volumen, in dem die Teilchen „eingesperrt" sind, also das (gegen unendlich gehende) Kernvolumen.

E_{kin} liefert also die Volumen- und Asymmetrie-Energie und — wenn man zu endlich ausgedehntem kugelförmigem Kern übergeht — auch die Oberflächenenergie $C_O \cdot A^{2/3}$. Fügt man dazu noch die Coulombenergie

$$\frac{3}{5}\,\frac{e^2 Z^2}{R} = C_c \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

so hat man alle wichtigen Terme der Bethe-Weizsäcker-Formel (vgl. (48.1)).

C. Vergleich mit dem Experiment

Wir haben nunmehr ein Schalenmodell des Kerns zur Verfügung, von dem wir wissen, daß es die richtigen magischen Zahlen ergibt. Wenn wir jedoch behaupten, daß dieses Schalenmodell eine in der Kernphysik brauchbare Näherung darstellt, müssen wir zeigen, daß es — so wie das Schalenmodell der Hülle — in *allen* seinen Konsequenzen die Erfahrung (näherungsweise) richtig beschreibt.
Nun liefert unser Schalenmodell

1. die *Eigenwerte*, d. h. das Termsystem mit
   a) der Lage der Terme:
      (1) in bestimmten Gruppen ≡ Schalen,
      (2) relativ innerhalb der Schalen[1]);
   b) den Quantenzahlen der Terme;
2. die *Eigenfunktionen*, und damit die Erwartungswerte aller Operatoren, die im Schalenmodell nicht diagonal sind.

Wir haben also die Eigenwerte und die Erwartungswerte bestimmter Operatoren des Schalenmodells als Vergleichsmaterial zur Verfügung.
Da unser Modell sicher eine relativ grobe Näherung darstellt (vgl. S. 528), können wir nicht erwarten, daß die Übereinstimmung mit dem Experiment sehr gut ist. Trotzdem werden wir sehen, daß sie oft überraschend weit geht, besonders soweit es den Vergleich der Quantenzahlen der Terme mit der Erfahrung betrifft.
Den Vergleich mit den *magischen Zahlen* haben wir bereits durchgeführt; er diente uns als Leitfaden für die Aufstellung des Modells. Er gab die Ordnung der Terme in Schalen und Vorzeichen und Größenordnung der Spin-Bahn-Wechselwirkung.

§ 109. Spins[2])

a) Einfache jj-Kopplung

Der Vergleich mit den empirischen Gesamtdrehimpulsen der Kerne im Grundzustand wird uns die endgültige Termordnung innerhalb der einzelnen Schalen liefern.

---

[1]) Die Lage der Terme innerhalb der Schalen ist nach S. 540 bis jetzt noch nicht vollständig festgelegt.

[2]) Besser Kernspins, eigentlich: Gesamtdrehimpulse der Kerne.

Welche Gesamtdrehimpulse sagt nun unser Modell voraus? Wir hatten diese Frage am Beispiel des Schalenmodells der Hülle (S. 522 ff.) bereits beantwortet und können die dortigen Ergebnisse fast unverändert übernehmen. Wir müssen nur beachten, daß der Kern *zwei* Teilchensorten enthält, so daß z. B. die äußeren Teilchen[1]) aus einer Neutronen- und einer Protonen-Gruppe bestehen. Bei ungeraden Kernen, mit denen wir uns in der Hauptsache beschäftigen werden, haben wir folglich eine „ungerade Gruppe" (N bei (u, g)-, P bei (g, u)-Kernen) und eine „gerade Gruppe" der äußeren Teilchen. Bei den geraden Kernen hat man zwei gerade (g, g-Kerne) oder zwei ungerade Gruppen (u, u-Kerne).

Wir fanden, daß für abgeschlossene Schalen oder Unterschalen sich $J_0 = 0$, für ein äußeres Teilchen sich $J_0 = j =$ Gesamtdrehimpuls des äußeren Teilchens ergibt. Hat man zwei oder mehr äußere Teilchen, hängt es von der jeweiligen Kopplung ab, welche J_0-Werte man erhält. Nun enthält unser Schalenmodell neben dem Zentralpotential die *starke* Spin-Bahn-Wechselwirkung. Daraus folgt nach S. 524 ff., daß wir die Gesamtdrehimpulse der äußeren Teilchen nach der jj-Kopplung zusammenzusetzen haben: Die Gesamtdrehimpulse $\mathfrak{j}_i$ der einzelnen Nukleonen des obersten Terms setzen sich zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ des Kerns zusammen.

Dann ist immer noch eine größere Zahl von Möglichkeiten vorhanden, auf die wir später eingehen werden. Zunächst wollen wir versuchen, mit einer möglichst einfachen jj-Kopplung auszukommen. Dazu erinnern wir uns der ausnahmslos geltenden empirischen Regel, daß (g, g)-Kerne im Grundzustand $J_0 = 0$ haben. Da das unabhängig davon gilt, welches gerade N und welches gerade Z vorliegt, ist die einfachste Deutung der Regel die, daß in

> (g, g)-*Kernen die Neutronen für sich und ebenso die Protonen für sich zu je zweien ihre Gesamtdrehimpulse* $\mathfrak{j}_i$ *antiparallel stellen.*

Es liegt dann nahe, bei ungeraden Kernen dieselbe Situation anzunehmen:

> *In* (g, u)- *bzw.* (u, g)-*Kernen haben die äußeren Neutronen für sich und ebenso die äußeren Protonen für sich paarweise antiparallele Drehimpulse* $\mathfrak{j}_i$, *so daß nur der Gesamtdrehimpuls des letzten ungeraden Protons bzw. Neutrons als Gesamtdrehimpuls* $\mathfrak{J}$ *des Kerns übrig bleibt.* [2])

Wir nennen diesen Spezialfall der jj-Kopplung „einfache jj-Kopplung". Das Schalenmodell mit einfacher jj-Kopplung der äußeren Teilchen nennen wir „Einteilchen-Schalenmodell" [3]) (single particle model).

---

[1]) Der Begriff „äußere Teilchen" verliert im Kern fast vollkommen seinen anschaulichen Sinn, da sich auch die Eigenfunktionen dieser Teilchen zum allergrößten Teil *im* Kern, d. h. im Potentialkasten, befinden: Die „äußeren" Teilchen bewegen sich nicht außerhalb des Rumpfes, sondern fast nur in ihm.

[2]) Die Kopplungsverhältnisse bei (u,u)-Kernen sind komplizierter, vgl. S. 559 ff.

[3]) Wir verwenden diesen Ausdruck statt des üblichen „Einteilchenmodell", um anzudeuten, daß es sich nicht um ein neues Modell, sondern um einen Spezialfall des Schalenmodells handelt.

b) Paarungsenergie

Wie schon die oben genannte empirische Regel zeigt, begünstigen die Verhältnisse im Kern die Paarung je zweier gleicher Nukleonen. Man berücksichtigt diese Tendenz bekanntlich durch Definition einer **Paarungsenergie**, die den zusätzlichen Gewinn an Bindungsenergie darstellt, der durch die Bevorzugung der Paarung bei Einbau zweier gleicher Nukleonen auftritt. So wächst z. B. die Bindungsenergie beim Einbau eines Neutrons in $^{16}_{16}S^{32}$ um 8,5 MeV (Abb. 198a), jedoch beim Einbau zweier Neutronen in $^{16}_{16}S^{32}$ nicht nur um 2 · 8,5 MeV, sondern um 20 MeV (Abb. 199). Wir haben also $P = 20 - 2 \cdot 8{,}5 = 3$ MeV Paarungsenergie.

Als Beispiel haben wir in Abb. 230 die Neutronen-Paarungsenergien bei leichten Kernen angegeben. Sie sind von der Größenordnung einiger MeV und zeigen an bestimmten Stellen markante Sprünge. Sie treten auf, wenn ein Term unseres Termsystems gefüllt ist und der nächst höhere angefangen wird; denn nach Abb. 224b sollten die Terme nacheinander so besetzt werden, wie wir es in Abb. 230 unten angegeben haben (Bildtext beachten!).

Vergleicht man danach die Paarungsenergien innerhalb einer Schale, so findet man: Die Paarungsenergie ist klein, wenn die beiden Neutronen, bei deren Einbau sie wirksam wird, einen Term mit kleinem j besetzen, dagegen groß, wenn j groß ist:

Die Paarungsenergie für zwei Nukleonen auf einem Term $\bar{n}lj$ wächst mit j.

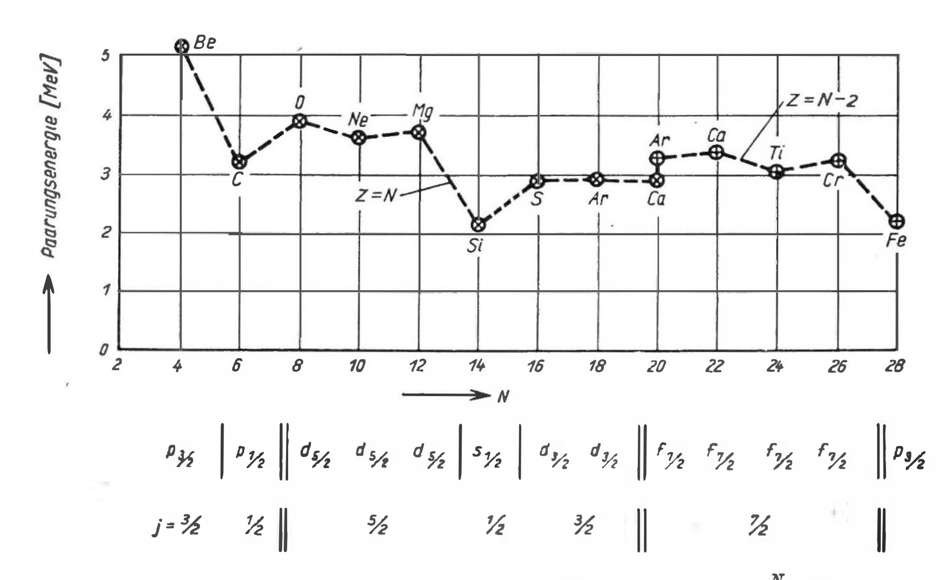


Abb. 230. Paarungsenergie für die Bindung der nächsten beiden Neutronen an den Kern $^{N}_{Z}X$ (N, Z gerade) Unten sind die Terme (und deren j-Werte) angegeben, die *von dem betreffenden Neutronenpaar* besetzt werden. Die oben eingetragenen Paarungsenergien gelten also für ein Neutronenpaar auf dem darunter angegebenen Term. (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1])

Die Rechnung (MAYER, JENSEN [M 55-1], S. 239ff., [M 50-1] zeigt, daß die Paarungsenergie näherungsweise $\propto 2j + 1$ ist, vgl. S. 559.
Die Paarungsenergie beeinflußt nun sehr wesentlich die Reihenfolge, in der nicht zu weit auseinanderliegende — miteinander konkurrierende — Terme unseres Schalenmodells besetzt werden. Wir verfolgen das am Beispiel der Protonenterme $3p_{3/2}$ und $4f_{5/2}$, die nach Abb. 224 b dicht beieinander liegen sollten. $P_{p_{3/2}}$ und $P_{f_{5/2}}$ seien die Paarungsenergien, N sei gerade. Wir wollen annehmen, daß $p_{3/2}$ der *tiefere* Term ist, so daß das 29. Proton diesen Term besetzt. Die weitere Auffüllung hängt vom Termabstand $E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}}$ und der Differenz der Paarungsenergien $P_{f_{5/2}} - P_{p_{3/2}}$ der beiden Terme ab.

$$1.\quad P_{f_{5/2}} - P_{p_{3/2}} > 2\,(E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}})\,.$$

Wenn man jetzt das 29. und 30. Proton auf $p_{3/2}$ setzt, gewinnt man den Energiebetrag $P_{p_{3/2}}$. Hebt man beide Protonen auf $f_{5/2}$, muß man $2\left(E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}}\right)$ aufwenden, gewinnt aber $P_{f_{5/2}}$; effektiv gewinnt man also $P_{f_{5/2}} - 2\left(E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}}\right) > P_{p_{3/2}}$. In diesem Fall ist es also stets energetisch günstiger, Paare von Protonen auf den höheren Term $f_{5/2}$ zu setzen (ein einzelnes Proton dagegen natürlich auf den niedrigeren). Die Auffüllung der beiden Terme erfolgt also in der Reihenfolge

$$\begin{array}{llllllllll} p^1_{3/2}, & f^2_{5/2}, & p^1_{3/2}f^2_{5/2}, & f^4_{5/2}, & p^1_{3/2}f^4_{5/2}, & f^6_{5/2}, & p^1_{3/2}f^6_{5/2}, & p^2_{3/2}f^6_{5/2}, & p^3_{3/2}f^6_{5/2}, & p^4_{3/2}f^6_{5/2}, \\ J_0 = {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0 \end{array}$$

mit daruntergeschriebenem Gesamtdrehimpuls, wie er sich bei einfacher jj-Kopplung ergibt. Obwohl also außer dem $p_{3/2}$- auch der $f_{5/2}$-Term aufgefüllt wird, tritt $J_0 = \frac{5}{2}$ nie auf, da $f_{5/2}$ nur in Paaren besetzt wird.

$$2.\quad E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}} < P_{f_{5/2}} - P_{p_{3/2}} < 2\,(E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}})\,.$$

Jetzt überwiegt der Gewinn an Paarungsenergie nicht mehr den Verlust bei Anheben zweier Protonen auf $f_{5/2}$, es wird also zunächst der $p_{3/2}$-Term voll gefüllt. Das fünfte (33.) Proton muß dann auf $f_{5/2}$. Wegen der linken Ungleichung ist es aber jetzt günstiger, außerdem noch eins der $p_{3/2}$-Protonen auf $f_{5/2}$ zu setzen: Energiegewinn $P_{f_{5/2}} - \left(E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}}\right) > P_{p_{3/2}}$. Hier wird also nach vollständiger Auffüllung von $p_{3/2}$ dieser Term wieder „aufgebrochen", solange $f_{5/2}$ noch nicht voll besetzt ist:

$$\begin{array}{llllllllll} p^1_{3/2}, & p^2_{3/2}, & p^3_{3/2}, & p^4_{3/2}, & p^3_{3/2}f^2_{5/2}, & p^4_{3/2}f^2_{5/2}, & p^3_{3/2}f^4_{5/2}, & p^4_{3/2}f^4_{5/2}, & p^3_{3/2}f^6_{5/2}, & p^4_{3/2}f^6_{5/2}, \\ J_0 = {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0, & {}^3/_2, & 0. \end{array}$$

Wieder tritt nur der Gesamtdrehimpuls ${}^3/_2$ des niedrigeren Terms auf.

$$3.\quad P_{f_{5/2}} - P_{p_{3/2}} < E_{f_{5/2}} - E_{p_{3/2}}\,.$$

In diesem Fall ist auch das Aufbrechen energetisch ungünstig, so daß beide Terme ganz normal der Reihe nach aufgefüllt werden:

$$p^1_{3/2},\ p^2_{3/2},\ p^3_{3/2},\ p^4_{3/2},\ p^4_{3/2} f^1_{5/2},\ p^4_{3/2} f^2_{5/2},\ p^4_{3/2} f^3_{5/2},\ p^4_{3/2} f^4_{5/2},\ p^4_{3/2} f^5_{5/2},\ p^4_{3/2} f^6_{5/2},$$
$$J_0 = {}^3/_2,\quad 0,\quad {}^3/_2,\quad 0,\quad {}^5/_2,\quad 0,\quad {}^5/_2,\quad 0,\quad {}^5/_2,\quad 0$$

Nur hier tritt der Gesamtdrehimpuls $\frac{5}{2}$ des höher liegenden Terms wirklich auf. Was wir am Beispiel $p_{3/2} - f_{5/2}$ gezeigt haben, gilt natürlich allgemein für zwei miteinander konkurrierende Terme mit einem bestimmten Abstand $E_1 - E_2$ und Paarungsenergien P_1 und P_2.

c) Vergleich mit den empirischen Kernspins ungerader Kerne

Zu diesem Vergleich ziehen wir nur die *ungeraden Kerne* heran. Für die (g, g)-Kerne ergibt sich durch unsere einfache jj-Kopplung automatisch das richtige $J_0 = 0$, so daß diese Kerne keine Auskunft über die Termreihenfolge liefern. Auf die wenigen (u, u)-Kerne gehen wir am Ende ein.

In Abb. 231 sind die nach unserer einfachen jj-Kopplung für die Termfolge der Abb. 224 b *zu erwartenden* Kernspins der Grundzustände als waagerechte Striche eingezeichnet. Wo mehrere Terme des Schalenmodells nahe beieinander liegen, wurden beide Spinwerte angegeben. Die *empirischen* Spinwerte des Grundzustands stabiler und unstabiler ungerader Kerne wurden als senkrechte Striche nach Anhang I, Tabelle 3 gezeichnet[1]) — die Pfeilspitzen ebenso wie die Plus- und Minuszeichen interessieren vorläufig nicht. Wir gehen nun die einzelnen Schalen durch und vergleichen:

1. Z oder N bis 8:

In der ersten Schale ($1\,s_{1/2}$) tritt nur der Spin $\frac{1}{2}$ auf. In der zweiten Schale ($2\,p_{3/2}$, $2\,p_{1/2}$) wird erst der $p_{3/2}$-Term, dann der $p_{1/2}$-Term aufgefüllt, wie es für starke Spin-Bahn-Wechselwirkung mit negativem Vorzeichen sein muß.

2. Z oder N von 9 bis 20:

Die dritte Schale ($3\,d_{5/2}$, $2\,s_{1/2}$ $3\,d_{3/2}$,) beginnt tatsächlich mit Spin $\frac{5}{2}$ (F^{17}, O^{17}). Jedoch tritt etwas unregelmäßig mit F^{19} auch schon $\frac{1}{2}$ auf: Offenbar liegt bei diesem Kern $s_{1/2}$ unter $d_{5/2}$[2]). Von den Ausnahmen Na^{23} und Ne^{21} abgesehen, ist von nun an alles regulär: Nach Auffüllung von $d_{5/2}$ und $s_{1/2}$ folgt $d_{3/2}$ genau an der richtigen Stelle.

Die beiden Ausnahmen Na^{23} und Ne^{21} fallen vollkommen aus dem bisherigen Rahmen unseres Modells mit einfacher jj-Kopplung heraus, denn sie haben Spin $\frac{3}{2}$, obwohl der $d_{5/2}$-Term noch gar nicht gefüllt ist und folglich $d_{3/2}$ noch gar

---

[1]) Unsichere Werte, in Anhang I, Tabelle 3, in Klammern, wurden weggelassen, ebenso die Spins angeregter (isomerer) Zustände.

[2]) Nach [E 55-1] und [R 55-1] ist dafür eine starke Konfigurationsmischung verantwortlich. Vgl. auch Mayer, Jensen [M 55-1], S. 82.

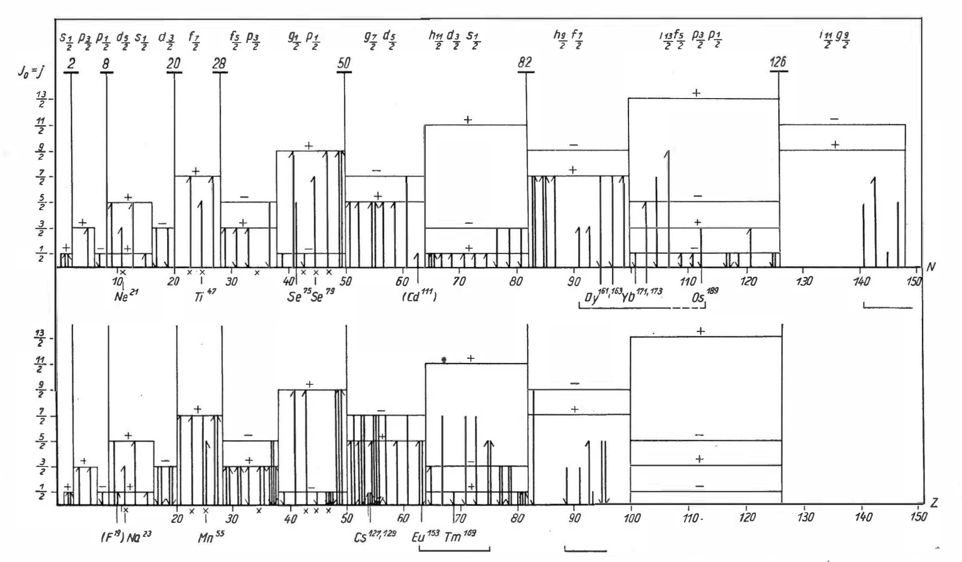


Abb. 231. Kernspin und Schmidt-Gruppe ungerader Kerne im Grundzustand. Die Höhe der waagerechten Geraden gibt die theoretischen Kernspins bei einfacher jj-Kopplung an, die Länge der Pfeile die experimentellen Kernspins. Plus- bzw. Minuszeichen bedeuten die theoretische Schmidt-Gruppe ($j = l + 1/2$ bzw. $= l - 1/2$), Pfeilspitze auf bzw. ab die aus Kernspin $J_0 = j$ und magnetischem Moment nach Abb. 234 ermittelte experimentelle Schmidt-Gruppe. Gemessene Kernspins und magnetische Momente nach ELLIOT, LANE, Handbuch der Physik 39, und SMITH, Progr. Nucl. Phys. 6, 52 (1957), vgl. auch Anhang I, Tabelle 3

nicht auftreten kann. Wir gehen auf S. 557 ff. und 648 ff. genauer auf diese Kerne ein.

3. Z oder N von 21 bis 28:

Die vierte Schale besteht nur aus dem Term $4f_{7/2}$, und von den beiden Ausnahmen Mn^{55} und Ti^{47} abgesehen, tritt tatsächlich nur Spin $\frac{7}{2}$ auf. Auf die Ausnahmen kommen wir auf S. 557 ff. und 648 ff. zurück.

4. Z oder N von 29 bis 50:

In der fünften Schale ($3p_{3/2}$, $4f_{5/2}$, $3p_{1/2}$, $5g_{9/2}$) konkurrieren zunächst die beiden Terme $f_{5/2}$, $p_{3/2}$ miteinander, so daß man unter dem Einfluß der Paarungsenergie einen der drei Fälle von S. 549 erwartet. Da bei ungeradem Z nur $\frac{3}{2}$ auftritt, außer bei 37, liegt hier offenbar überwiegend Fall 1 oder Fall 2 vor, wobei $p_{3/2}$ der tiefere Term ist. Wie nahe die beiden Terme beieinanderliegen, sieht man an Rb^{85} ($J_0 = \frac{5}{2}$), dessen erster angeregter Zustand als $p_{3/2}$ bei 150 keV gefunden wurde.
Für ungerades N sind nur wenige Spins bekannt, doch scheint die Besetzung genauso zu erfolgen; insbesondere liegt auch hier $p_{3/2}$ tiefer als $f_{5/2}$.
Ab 39 sind in dieser Schale nur noch $p_{1/2}$ und $g_{9/2}$ nicht voll besetzt, und tatsächlich wurden für $39 \leqq (N, Z) \leqq 50$ nur Spins $\frac{1}{2}$ und $\frac{9}{2}$ beobachtet — von den Ausnahmen Se^{75} und Se^{79} abgesehen, deren Spins in dieser Schale überhaupt nicht ($\frac{7}{2}$) bzw. in diesem *Teil* der Schale nicht ($\frac{5}{2}$) auftreten dürften. Se^{75} läßt sich vielleicht durch ein Aufbrechen des $f_{5/2}$-Terms (Fall 2) durch die hohe Paarungsenergie von $g_{9/2}$ deuten[1]; auf Se^{79} gehen wir auf S. 557 ff. und 648 ff. genauer ein.
Im einzelnen wird offenbar bei 39 zunächst $p_{1/2}$ gefüllt, doch wird dieser Term während des anschließenden Auffüllens von $g_{9/2}$ in einigen Fällen wieder aufgebrochen (Fall 2). Beide Terme liegen also nahe beieinander — offenbar etwas näher, als sich theoretisch (Abb. 224b) ergab, — wie sich auch bei der Behandlung der Isomerie (s. Abb. 239) direkt zeigen wird.

5. Z oder N von 51 bis 82:

In der 6. Schale ($4d_{5/2}$, $5g_{7/2}$, $3s_{1/2}$, $4d_{3/2}$, $6h_{11/2}$) liegen zunächst $g_{7/2}$ und $d_{5/2}$ dicht beieinander, und tatsächlich findet man bis 64 nur Spin $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{2}$ — von den Ausnahmen Cs^{127}, Cs^{129} und Cd^{111} abgesehen, bei denen $s_{1/2}$ vorweggenommen wird. $d_{5/2}$ und $g_{7/2}$ treten bei Cd^{111} als angeregte Zustände auf. Wir sehen deshalb diese Kerne als eine ähnliche Unregelmäßigkeit an wie F^{19}.
Für ungerades N tritt Spin $\frac{7}{2}$ fast nicht auf (Fall 1 oder 2), $d_{5/2}$ ist also der niedrigere Term. Für ungerades Z dagegen ist offenbar die Reihenfolge in den meisten Fällen umgekehrt $g_{7/2} - d_{5/2}$, da anfangs überwiegend $J_0 = \frac{7}{2}$ auftritt. Nur in den drei Fällen mit Spin $\frac{5}{2}$ — jedesmal das leichteste Isotop — ist die Termreihenfolge

[1] Zwischen dieser Deutung und anderen Vorschlägen [A 52-2] läßt sich durch Messung des magnetischen Moments entscheiden.

wie bei ungeradem N. Wir haben damit zum ersten Mal die Situation, daß in der Mehrzahl der Fälle, die Neutronen zwei Terme in anderer Reihenfolge besetzen als die Protonen.
In der zweiten Hälfte der Schale konkurrieren $h_{11/2}$, $d_{3/2}$, $s_{1/2}$. Die hohe Paarungsenergie für $j = \frac{11}{2}$ gegenüber den beiden anderen Termen bewirkt, daß $h_{11/2}$ nur in Paaren gefüllt wird, so daß Spin $\frac{11}{2}$ überhaupt nicht auftritt. Bei ungeradem N liegen die Verhältnisse sehr einfach. Wir nehmen an, daß zunächst bei 65 ein Teilchen $s_{1/2}$ besetzt und das so bleibt, während von 67 an $h_{11/2}$ in Paaren gefüllt wird. Erst ab 77 ist $s_{1/2}$ gefüllt und wird $d_{3/2}$ begonnen, obwohl $h_{11/2}$ noch nicht ganz voll ist. Die Termfolge ist also für ungerades N $s_{1/2}$, $d_{3/2}$, $h_{11/2}$.
Für ungerades Z sind die Verhältnisse komplizierter: Es treten Spins $\frac{7}{2}$ und $\frac{5}{2}$ auf, die hier gar nicht vorkommen dürften. Sie ließen sich zwar zur Not so deuten, daß $h_{11/2}$ durch seine hohe Paarungsenergie sogar die Terme $g_{7/2}$, $d_{5/2}$ der ersten Schalenhälfte wieder aufbricht. Doch werden wir sehen, daß für das Gebiet $Z = 63$ bis 75 — ebenso bei den anderen in Abb. 231 durch Klammern unter der Abszisse gekennzeichneten Gebieten — sehr große Quadrupolmomente auftreten, die unser Schalenmodell nicht erklären kann. Es handelt sich um deformierte Kerne, bei denen das Schalenmodell durch das kollektive Modell ersetzt werden muß. Wir behandeln deshalb die Spins dieser Kerne erst auf S. 646ff. Ab 77 sind die Spins wieder regulär: Es wird $d_{3/2}$ und $s_{1/2}$ aufgefüllt. Die Termfolge für ungerades Z ist demnach ($h_{11/2}$)[1]), $d_{3/2}$, $s_{1/2}$.

6. Z oder N von 83 bis 126:

Die 7. Schale ($5 f_{7/2}$, $6 h_{9/2}$, $7 i_{13/2}$, $4 p_{3/2}$, $5 f_{5/2}$, $4 p_{1/2}$,) sollte zunächst $h_{9/2}$ und $f_{7/2}$ dicht beieinander liegen haben. Tatsächlich beginnt die Schale für ungerades Z mit Spin $\frac{9}{2}$, für ungerades N mit Spin $\frac{7}{2}$. Für ungerades Z folgen dann Spins $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, die in diesem Teil der Schale nicht auftreten dürften. Es wird sich zeigen, daß diese schwersten Kerne deformiert sind.
Für ungerades N findet man zunächst eine Reihe Spins, die zum Schalenmodell passen. So werden scheinbar genau bis zur richtigen Stelle $N = 100$ die Terme $f_{7/2}$ und $h_{9/2}$ gefüllt, letzterer in Paaren. In der zweiten Hälfte tritt Spin $\frac{13}{2}$ wegen der hohen Paarungsenergie von $h_{13/2}$ nicht auf, statt dessen wechselt das ungerade Neutron unregelmäßig zwischen den Termen $f_{5/2}$, $p_{3/2}$, $p_{1/2}$, was offenbar bedeuten würde, daß alle diese Terme dicht beieinander liegen.
Jedoch treten zwischen 90 und 107 eine Reihe Schwierigkeiten auf. So findet man „verbotene" Spins $\frac{3}{2}$ (Gd^{155}, Gd^{157}), $\frac{7}{2}$ (Hf^{177}) und $\frac{9}{2}$ (Hf^{179}). Die beiden Spins $\frac{3}{2}$ ließen sich zwar analog zu F^{19}, Cd^{111} usw. verstehen, doch $\frac{7}{2}$ und $\frac{9}{2}$ kann man nicht durch Aufbrechen der ersten Schalenhälfte ($f_{7/2}$, $h_{9/2}$) erklären, da die gemessenen magnetischen Momente sich nicht mit dieser Deutung vertragen: Die Pfeilspitzen müßten in entgegengesetzter Richtung zeigen, vgl. S. 563ff.. Eine sehr ernste Schwierigkeit bietet Yb^{171}, bei dem offenbar $p_{1/2}$ besetzt wird,

---

[1]) Das Einklammern soll auf das Versagen unseres Schalenmodells in dem Gebiet hinweisen, in dem der Term $h_{11/2}$ aufgefüllt werden sollte.

obwohl $p_{3/2}$ noch nicht gefüllt sein kann. Das wäre ein Verstoß gegen die Termfolge unserer starken Spin-Bahn-Aufspaltung. Wir werden sehen, daß alle diese Schwierigkeiten und noch einige weitere bei den magnetischen Momenten in diesem Gebiet daher stammen, daß von $N = 90$ bis etwa 110 die Kerne deformiert sind, das Schalenmodell also unzutreffend ist.
Wir können deshalb nur über das *Ende* der Schale aussagen, daß dort offenbar $p_{3/2}$ und $p_{1/2}$ als letzte gefüllt werden. Die Neutronenterme haben also die Reihenfolge $f_{7/2}$, $h_{9/2}$, $(f_{5/2}$, $i_{13/2})$, $p_{3/2}$, $p_{1/2}$.

7. N größer als 126:

Die erste Hälfte der 8. Schale (7 $i_{11/2}$, 6 $g_{9/2}$, . . .) zeigt wieder eine ganze Gruppe „verbotener" Spins, die durch eine Deformation der Kerne zustande kommen.

Wir haben damit gesehen, daß unter Beachtung der experimentell und theoretisch gesicherten Eigenschaften der Paarungsenergie die Spins der Grundzustände des größten Teils der ungeraden Kerne — insgesamt etwa 100 von rund 130 — sich durch unser Schalenmodell mit einfacher jj-Kopplung erklären lassen. Das ist ein erster erstaunlicher Erfolg des Schalenmodells — noch dazu in seiner denkbar einfachsten Form —, das damit zum ersten Mal Ordnung in den Wirrwarr[1]) der empirischen Kernspins brachte. Insbesondere findet unsere Hypothese der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung darin eine unabhängige experimentelle Bestätigung, daß in allen Fällen (außer Yb^{171}) die beiden zusammengehörigen Terme eines Spin-Bahn-Dubletts nacheinander *in der vorausgesagten Reihenfolge* aufgefüllt werden; man prüfe das im einzelnen nach! Die Ausnahmen Ne^{21}, Na^{23}, Ti^{47}, Mn^{55}, Se^{79} scheinen ebenfalls dagegen zu verstoßen, doch folgt aus ihren magnetischen Momenten, daß das nicht der Fall ist, da ihre Pfeilspitzen nach oben zeigen, vgl. S. 563ff.
Die Kerne, deren J_0 nicht mit einfacher jj-Kopplung verstanden werden kann, zerfallen in zwei Gruppen. Die erste Gruppe besteht aus den fünf Kernen Ne^{21}, Na^{23}, Ti^{47}, Mn^{55}, Se^{79} und ist dadurch gekennzeichnet, daß ihr Kernspin um eine Einheit kleiner ist, als man mit einfacher jj-Kopplung erwartet: $J_0 = j - 1$. Mit ihnen werden wir uns auf S. 557ff. sowie S. 648ff. beschäftigen. Dabei wird sich folgendes ergeben: Auf S. 557ff. versuchen wir zunächst, die Spins dieser Kerne im Rahmen des Schalenmodells, aber mit einer komplizierteren jj-Kopplung zu verstehen. Das gelingt jedoch höchstens für die beiden leichtesten Kerne Ne^{21}, Na^{23}. Deshalb kommen wir beim kollektiven Modell (S. 648ff.) auf diese Gruppe zurück und werden dort eine befriedigende Antwort finden: Die fünf Kerne haben anomale Spins, weil sie sehr wahrscheinlich bleibend deformiert sind (wie es auch ihr relativ großes Quadrupolmoment nahelegt).
Die zweite Gruppe besteht aus etwa 25 Kernen in den durch Klammern gekennzeichneten Gebieten. Für sie ist das kollektive Modell zuständig, bei dem wir (S. 646ff.) auf sie genauer eingehen. Es wird sich zeigen, daß das Modell

[1]) Man denke sich in Abb. 231 die „Kästen" und Schalenabschlüsse weg!

die Spins aller dieser Kerne durch eine bleibende Deformation gut verstehen läßt. Damit erklärt das kollektive Modell die Kernspins beider Gruppen. Alle Abweichungen erscheinen als Folge einer bleibenden Deformation des Kerns.

Auf eine Konsequenz der *Paarungsenergie* soll noch besonders hingewiesen werden: Das Anwachsen der Paarungsenergie mit j mit der daraus folgenden Unterdrückung der Spins $\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$ bewirkt, daß die größten Kernspins bei *mittlerem Z* bzw. N und nicht im Gebiet der höchsten Z- und N-Werte auftreten. — Als Ergebnis unseres Vergleichs geben wir im Anhang I, Tabelle 3a, die gefundenen Konfigurationen der einzelnen Kerne und in Abb. 232 die gefundene endgültige Termordnung an.[1]) Man vergleiche beide *im einzelnen* mit dem Text der Seiten 550 bis 554! Die Abb. 232 zeigt links das Termsystem, wie wir es in Abb. 224b theoretisch gefunden hatten. Daneben sind die empirisch geordneten Neutronen bzw. Protonen-Termsysteme gezeichnet. In den Gebieten, in denen das Schalenmodell und damit unser Termsystem wegen der Deformation der Kerne nicht brauchbar ist, wurden die Terme gestrichelt. Bei nur halb gestrichelten Termen beginnt der Bereich der Deformationen, während der betreffende Term noch nicht voll gefüllt ist.

Vergleicht man das theoretische Termsystem mit dem experimentellen Neutronen-Termsystem, findet man nur geringfügige Abweichungen. Insbesondere ist die Reihenfolge der Terme (von $i_{13/2}$ abgesehen) in beiden Fällen genau gleich, und empirisch miteinander konkurrierende Terme liegen im theoretischen Termsystem fast immer nahe beieinander (Ausnahme $p_{1/2} - g_{9/2}$). Es zeigt sich damit, daß unser Modell unter Vernachlässigung der Coulombkräfte ein im wesentlichen gut brauchbares Neutronentermsystem ergibt.

Der Vergleich des empirischen Neutronen- und Protonen-Termsystems gibt uns noch einen weiteren wichtigen Aufschluß. Die Abweichungen zwischen den beiden Termsystemen oberhalb 50 lassen sich so kennzeichnen, daß bei ungeradem Z im Vergleich zu ungeradem N die Terme mit niedrigem l nach oben verschoben sind (ungerades Z: $d_{5/2}$ über $g_{7/2}$, $d_{3/2}$ über $h_{11/2}$, $f_{7/2}$ über $h_{9/2}$). Das ist gerade der Effekt, den man von der Coulomb-Abstoßung der Protonen erwartet: Die Abstoßung bewirkt eine etwas geringere Protonendichte und damit schwächeres Protonenpotential im Kernzentrum (Weinflaschenpotential), so daß Zustände mit kleinem l, deren Eigenfunktion im Zentrum relativ stark ist, schwächer gebunden werden. Das gilt besonders von s-Zuständen, und tatsächlich ist der $3\,s_{1/2}$-Term am stärksten — über zwei Terme hinweg — verschoben. Der von Feenberg und Hammack (vgl. S. 553) erwartete Effekt ist also vorhanden, aber er ist viel schwächer,[2]) als ihn diese Autoren annehmen mußten, vgl. Abb. 223.

---

[1]) Die Abb. 232 befindet sich am Ende des Buches als Beilage 1.

[2]) Durch Streuung hochenergetischer Elektronen in Kernen (vgl. S. 527) konnte die geringere Protonendichte im Kernzentrum bisher nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden.

d) Theoretische Ergänzungen und Diskussion der Abweichungen

Wir hatten für unseren Vergleich mit den empirischen Kernspins einfache jj-Kopplung angenommen und fanden das beim größten Teil der Kerne bestätigt. Man sucht deshalb nach einer theoretischen Begründung, warum gerade dieser Spezialfall der jj-Kopplung so häufig der energetisch günstigste (der Grundzustand) ist und warum in gewissen Fällen Abweichungen davon auftreten.
Um diese Begründung anzudeuten, fragen wir als erstes: Welche jj-Kopplungen sind überhaupt möglich? Damit gehen wir vom Spezialfall des Einteilchen-Schalenmodells zum allgemeineren „Mehrteilchen-Schalenmodell" (individual particle model) über, in dem im allgemeinen *alle* äußeren Teilchen nach der jj-Kopplung zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ beitragen.
Wir betrachten zunächst ν äußere Protonen *oder* Neutronen auf einem Term $\bar{n}lj$, also die Konfiguration $\ldots (l_j)^\nu$, und suchen alle Eigenfunktionen von $\mathfrak{J}^2$ und $\mathfrak{J}_z$, die sich in diesem Fall bilden lassen. Die sehr umfangreichen Rechnungen [F 52-2] führen zu den in Tabelle 64 angegebenen J-Werten, vgl. [M 55-1], Tab. V, 2 und Korrektur in [G 59-1].

Tabelle 64.

Konfiguration $(j)^\nu$		mögliche J-Werte										
$j = 3/2$ $\nu = 1$		$3/2$										
2	0	2										
$5/2$ 1			$5/2$									
2	0	2		4								
3		$\underline{3/2}$	$5/2$		$9/2$							
$7/2$ 1				$7/2$								
2	0	2		4		6						
3		$3/2$	$\underline{5/2}$	$7/2$	$9/2$	$11/2$		$15/2$				
4	0	2(2)		4(2)	5	6		8				
$9/2$ 1					$9/2$							
2	0	2		4		6		8				
3		$3/2$	$5/2$	$7/2$	$9/2$(2)	$11/2$	$13/2$	$15/2$	$17/2$		$21/2$	
4	0(2)	2(2)	3	4(3)	5	6(3)	7	8	9	10		12
5	$1/2$	$3/2$	$5/2$(2)	$\underline{7/2}$(2)	$9/2$(3)	$11/2$(2)	$13/2$(2)	$15/2$(2)	$17/2$(2)	$19/2$	$21/2$	$25/2$

In der Tabelle sind die J-Werte stets nur bis zur halben Auffüllung des Terms angegeben $\left(\nu \leqq \frac{2j+1}{2}\right)$, da bei mehr als halbgefülltem Term die Anzahl der unbesetzten Plätze („Löcher") $\nu' = (2j+1) - \nu$ die möglichen J-Werte bestimmt: Die Konfiguration $(l_j)^\nu$ hat dieselben J-Möglichkeiten wie $(l_j)^{\nu'}$. Die Zahlen in den Klammern geben an, wie viele Eigenfunktionen zu dem betreffenden J existieren.

Genaugenommen geben diese J-Werte zunächst nur den Drehimpulsbetrag der äußeren Protonen *oder* Neutronen. Nimmt man jedoch an, daß bei ungeraden Kernen die *gerade Gruppe nichts zum Drehimpuls beiträgt* — also die $\mathfrak{j}_i$ der geraden Gruppe paarweise antiparallel stehen —, stammt aller Drehimpuls nur von der ungeraden Gruppe. Die Tabelle gibt in diesem Fall mit dem J der ungeraden Gruppe zugleich das J des Gesamtkerns an.

Tabelle 64 zeigt, daß unter dieser Voraussetzung die einfache jj-Kopplung stets eine der Möglichkeiten ist: Für gerades ν existiert immer ein Zustand $J = 0$, für ungerades ν immer ein Zustand mit $J = j$. Andere Werte als $J = j$ sind für ungerade Kerne nur möglich, wenn mehr als ein Teilchen oder Loch auf dem betreffenden Term vorhanden ist. Wir haben unter Annahme der Termfolge von Abb. 232 die entsprechenden Stellen in Abb. 231 durch kleine Kreuze unter der Abszisse gekennzeichnet.[1])

Es ergibt sich, daß die fünf Ausnahmen mit $J_0 = j - 1$ (vgl. S. 554) nur an solchen angekreuzten Stellen erscheinen, wo also tatsächlich eine andere als die einfache jj-Kopplung möglich ist. In Tabelle 64 wurden die in Frage kommenden J-Werte unterstrichen. Darüber hinaus findet man bei den anderen Kernen, die an den gekreuzten Stellen in Abb. 231 stehen, aber $J_0 = j$ haben, $J = j - 1$ z. T. als angeregten Zustand (vgl. S. 580 ff.). Es liegt deshalb nahe, diese fünf Fälle als Kerne mit nichteinfacher jj-Kopplung aufzufassen (deren gerade Gruppe nicht zu J beiträgt); vgl. Abb. 233. Wir haben aus diesem Grund in Anhang I, Tabelle 3, als Konfiguration dieser Kerne $(d_{5/2})^3_{3/2}$ usw. eingetragen.

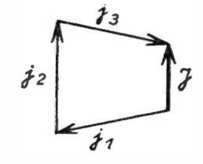


Abb. 233. Nichteinfache jj-Kopplung am Beispiel von drei Teilchen auf einem Term j, z.B. Ne^{21}, Na^{23}: $(d_{5/2})^3_{3/2}$

Trägt die *gerade Gruppe mit zum Drehimpuls bei*, dann gilt die Tabelle für die Protonen- und Neutronengruppe getrennt. Der Tabellenwert J ist also dann als Eigenwert J_P bzw. J_N des Gesamtdrehimpulses $\mathfrak{J}_P$ der Protonen bzw. $\mathfrak{J}_N$ der Neutronen aufzufassen. $\mathfrak{J}_P$ und $\mathfrak{J}_N$ setzen sich zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_P + \mathfrak{J}_N$ zusammen, und man erhält Zustände mit den J-Werten

$$|J_P - J_N| \leqq J \leqq J_P + J_N .$$

Das Endergebnis ist also im allgemeinen eine sehr große Zahl von Möglichkeiten, von denen glücklicherweise meist nur die einfachste auftritt.

Eine vollständige Erfassung aller dieser möglichen Zustände ist bisher nur bei den leichten bis mittelschweren Kernen $A < 50$ gelungen [E 52-1], [E 57-1], bei denen die Ladungsunabhängigkeit nur wenig durch Coulomb-Effekte gestört ist [R 53-1], so daß man die Eigenfunktionen zusätzlich als Eigenfunktionen von $\vec{T}^2$ und T_3 sucht. Auch das genügt bei mehr als zwei Nukleonen noch nicht und macht die Einführung weiterer Quantenzahlen („Senioritätsquantenzahl", „reduzierter Isobarenspin") nötig. Für Kerne oberhalb $A = 50$ siehe [E 57-1], S. 290.

Kennt man alle möglichen Kopplungen, erhebt sich die zweite Frage: Welche von ihnen liefert die niedrigste Energie, also den Grundzustand?

---

[1]) Nur für $N, Z \leqq 50$, weil oberhalb 50 die Verhältnisse kompliziert werden.

In *einfachen Fällen* läßt sich die Frage unter Voraussetzung der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte allein durch unsere Forderung von S. 476 beantworten, daß im Grundzustand $T = |T_3|$ sein muß. So hat Li^7 ($T_3 = +\frac{1}{2}$, $J_0 = \frac{3}{2}$) außer der abgeschlossenen $1s_{1/2}$-Schale die Konfiguration $P: p^1_{3/2}$, $N: p^2_{3/2}$. Ein Proton und zwei Neutronen auf einem Term mit $j = \frac{3}{2}$ können auf zwei Arten $J = \frac{3}{2}$ ergeben: Entweder die beiden Neutronen kompensieren ihre Gesamtdrehimpulse $\mathfrak{j}_i$, so daß $J = J_P = j_P = \frac{3}{2}$ wird, oder beide Neutronen setzen sich zu $J_N = 2$ zusammen, und $\mathfrak{J}_N$ und $\mathfrak{J}_P = \mathfrak{j}_P$ geben zusammen $J = \frac{3}{2}$. Beide Zustände sind noch keine Eigenfunktionen zu $\vec{T}^2$.

Da wir ein Dreinukleonenproblem[1]) haben, gibt es nach Anhang I, Tabelle 1, für $T_3 = +\frac{1}{2}$ zwei Zustände mit bestimmtem T: $T = \frac{3}{2}$ und $T = \frac{1}{2}$. Beide Zustände müssen also gewisse Linearkombinationen der beiden oben genannten Zustände mit $J = \frac{3}{2}$ sein. Die Linearkombination mit $T = \frac{1}{2}$ ($= |T_3|$) ist nach S. 476 der Grundzustand; ihre explizite Berechnung findet man z. B. in Mayer, Jensen [M 55-1], S. 247.

Im *allgemeinen* läßt sich die Frage nach dem Grundzustand durch eine *Störungsrechnung* beantworten, indem man wie in der Hülle (S. 523ff.) vom Schalenmodell = nullter Näherung zur ersten Näherung übergeht. Die Störung oder „Restwechselwirkung" (vgl. (105.1) und (106.1)) ist

$$H' = H - H^0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}\sum V(i,k) - \sum_i \left(V(r_i) + \lambda\xi(r_i)(\vec{l}_i \cdot \vec{s}_i)\right). \quad (109.1)$$

Unter der Wirkung von H' spalten die entarteten Terme nullter Näherung auf, die zu verschiedenen J- (und T-)Werten gehören, und man kann die Termfolge feststellen. Dabei braucht man in H' (109.1) nur die Terme zu berücksichtigen, bei denen beide Teilchen i und k äußere Teilchen sind, denn es läßt sich zeigen ([C 35-1], S. 192), daß nur sie zur Aufspaltung beitragen.

Die Störung H' enthält wesentlich die Kernkräfte $V(i,k)$ zwischen je zwei Nukleonen. Diese sind, wie wir wissen, nicht sehr genau bekannt, man wird deshalb zunächst versuchen, möglichst nur die sicher bekannten Eigenschaften, wie kurze Reichweite, Stärke, Ladungsunabhängigkeit u. ä., zu verwenden. Wenn man die kurze Reichweite dadurch idealisiert, daß man ein δ-funktionsartiges Potential $V(i,k) = V_0\delta(r_{ik})$ ansetzt und nur den Teil der Störung betrachtet, der von den Kernkräften $V(i,k)$ (zwischen den äußeren Teilchen, s. oben) stammt, erhält man (vgl. Mayer, Jensen [M 55-1], S. 239) für ν Protonen oder Neutronen auf einem Term l_j die in Tabelle 65 angegebenen Gesamtdrehimpulse und Energiestörungen $E^{(\nu)} = \Delta E_0$ im Grundzustand.

Tabelle 65.

ν	ΔE_0	J_0
gerade	$-\frac{\nu}{2}(2j+1)I_{\bar{n}l}$	0
ungerade	$-\frac{\nu-1}{2}(2j+1)I_{\bar{n}l}$	j

[1]) Die abgeschlossenen Schalen tragen nichts bei.

ΔE_0 ist danach proportional zur Anzahl der Paare $\left(\frac{v}{2}\text{ bzw. }\frac{v-1}{2}\right)$ auf dem Term l_j, folglich ist $-(2j+1)\,I_{\bar{n}l}$ die Paarungsenergie dieses Terms. Die Zahl

$$I_{\bar{n}l} = \frac{V_0}{8\pi}\int\limits_0^{R_0} R^4_{\bar{n}l}(r)\, r^2\, dr$$

hängt nur schwach von $\bar{n}$ und l ab (sie nimmt langsam ab mit wachsendem $\bar{n}$ oder l). Insgesamt erhalten wir so die beiden Annahmen, durch die wir den größten Teil der Kernspins verstehen konnten, allein als Folge der kurzen Reichweite der Kernkräfte:

Für Kräfte kurzer Reichweite liegt im Grundzustand einfache jj-Kopplung vor, und die Paarungsenergie ist $\propto 2j+1$, d. h. wächst mit j.

Diese Rechnungen wurden durch Kurath [K 50-1] sowie Flowers und Edmonds [F 52-2], [F 52-3] auf Kräfte kurzer *endlicher* Reichweite erweitert. Man erwartete dabei, daß man durch Berücksichtigung der endlichen Reichweite zu einem Verständnis der fünf Kerne mit $J_0 = j - 1$ kommen könnte. Doch ergibt sich so nur für Ne^{21}, Na^{23} der beobachtete Kernspin, während für Ti^{47}, Mn^{55}, Se^{79} $J_0 = j$ bleibt (vgl. Mayer, Jensen [M 55-1], S. 240). Die meist — auch in unserer Tabelle (Anhang I, Tabelle 3) — für die Spins $J_0 = j - 1$ angegebene Erklärung durch nichteinfache jj-Kopplung $(l_j)^v{}_{J=j-1}$ ist also sehr fraglich. Eine andere Erklärungsmöglichkeit für diese Kernspins werden wir beim Kollektiven Modell (S. 648ff.) kennen lernen. —

Eine abschließende Bemerkung betrifft die jj-Kopplung allgemein, von der wir wegen der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung im Kern ausgingen. Aus Abb. 232 sieht man, daß in den untersten Schalen N, $Z \leqq 20$ die Spin-Bahn-Aufspaltung noch relativ gering ist. Man erwartet deshalb, daß bei den leichten Kernen noch nicht der Grenzfall der reinen jj-Kopplung vorliegt, sondern ein Mittelding zwischen jj-Kopplung und LS-Kopplung, die sog. intermediäre Kopplung (intermediate); denn ohne jede Spin-Bahn-Wechselwirkung hätte man LS-Kopplung (vgl. S. 524).

Genauere Rechnungen von Inglis [I 53-1]) und Kurath [K 56-1] zeigen, daß mit intermediärer Kopplung die Spektren der leichten Kerne — mindestens teilweise — im einzelnen gedeutet werden können. Damit erreicht das Schalenmodell bei den leichten Kernen fast dieselbe Genauigkeit, die man von der Hülle her gewohnt ist.

e) (u, u)-Kerne

Wir hatten bis jetzt die (u, u)-Kerne ausgelassen, da bei ihnen die Verhältnisse von vornherein komplizierter liegen: Selbst mit einfacher jj-Kopplung hat man hier den Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{j}_P$ des letzten Protons und $\mathfrak{j}_N$ des letzten Neutrons, die sich in verschiedener Weise zu $\mathfrak{J}$ zusammensetzen können.

Das empirische Material zeigt, daß man im allgemeinen in (u, u)-Kernen für die Protonen und für die Neutronen dieselben Termsysteme und ebenfalls einfache

jj-Kopplung zugrunde legen kann wie in ungeraden Kernen. Die so erhaltenen Konfigurationen sind im Anhang I, Tabelle 3b, anschließend an die ungeraden Kerne aufgeführt.

Für die Kopplung des so festgelegten j_P und j_N fand man folgende „Nordheim-Regeln“:

1. Für $j_P = l_P + \frac{1}{2}$, $j_N = l_N + \frac{1}{2}$
   und für $j_P = l_P - \frac{1}{2}$, $j_N = l_N - \frac{1}{2}$
   ist $J_0 > |j_P - j_N|$.
2. Für $j_P = l_P + \frac{1}{2}$, $j_N = l_N - \frac{1}{2}$
   und für $j_P = l_P - \frac{1}{2}$, $j_N = l_N + \frac{1}{2}$
   ist $J_0 = |j_P - j_N|$.

Man suche in der angegebenen Tabelle die Ausnahmen!

§ 110. Magnetische Dipolmomente

a) Berechnung der magnetischen Momente

Die magnetischen Momente μ, die unser Modell bei *einfacher j j-Kopplung* voraussagt, lassen sich leicht berechnen. Wenn zwei Protonen oder zwei Neutronen ihre Gesamtdrehimpulse j_i antiparallel stellen, kompensieren sich auch ihre magnetischen Momente. (g, g)-Kerne haben deshalb nicht nur $J_0 = 0$, sondern auch $\mu = 0$. Auch in ungeraden Kernen kompensieren sich die magnetischen Momente paarweise:

Bei einfacher jj-Kopplung bleibt in ungeraden Kernen nur das magnetische Moment des ungepaarten Nukleons übrig, in (g, g)*-Kernen kompensieren sich alle magnetischen Momente zu* 0.

Bei ungeraden Kernen haben wir damit effektiv ein Einteilchenproblem: Es ist das magnetische Moment eines Teilchens im Zustand $j = l \pm \frac{1}{2}$ zu berechnen.[1]) Dazu beachten wir, daß das magnetische Moment eines Teilchens aus zwei Anteilen besteht, dem Beitrag des *Bahnumlaufs* $\vec{\mu}_l$, der für das Neutron verschwindet und für das Proton $\frac{e}{2Mc}\vec{\mathfrak{l}} = \frac{\mu_K}{\hbar}\vec{l}$ beträgt, und dem *magnetischen Eigenmoment* $\vec{\mu}_s$ des Teilchens (= Beitrag des Spins), der für das Neutron $-1{,}91\,\frac{\mu_K}{\hbar}\cdot 2\vec{s} = \mu_N\frac{\mu_K}{\hbar}\cdot 2\vec{s}$ und für das Proton $+2{,}79\,\frac{\mu_K}{\hbar}\cdot 2\vec{s} = \mu_P\frac{\mu_K}{\hbar}\cdot 2\vec{s}$ beträgt.[2]) Der Ope-

[1]) Geht man von der Slater-Determinante des Gesamtkerns aus, erhält man wegen (108.1) genau dieses Ergebnis.

[2]) Wären Neutron und Proton „Dirac-Teilchen“, d. h. gehorchten sie derselben Dirac-Gleichung, der das Elektron (in sehr guter Näherung) genügt, so wäre $\mu_N = 0$, $\mu_P = 1$. Die Differenz zwischen den gemessenen Werten und diesen Dirac-Werten bezeichnet man als anomales magnetisches Moment: $\mu_{N\,\mathrm{anom}} = -1{,}91$; $\mu_{P\,\mathrm{anom}} = +1{,}79$.

rator des magnetischen Moments eines Nukleons ist also, wenn wir Spins in Einheiten $\hbar$ und magnetische Momente in Kernmagnetonen μ_K messen,

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s = g_l \vec{l} + g_s \vec{s},$$

$$g_l = \begin{cases} g_{lP} = 1, \\ g_{lN} = 0; \end{cases} \qquad g_s = \begin{cases} g_{sP} = 2\,\mu_P = 5{,}58\,p, \\ g_{sN} = 2\,\mu_N = -\,3{,}82\,n. \end{cases}$$

Mit Isospin-Formalismus läßt sich das schreiben als

$$\vec{\mu} = (g_{lN}\,\tau_N + g_{lP}\,\tau_P)\,\vec{l} + (g_{sN}\,\tau_N + g_{sP}\,\tau_P)\,\vec{s},$$

sofern wir die Projektionsoperatoren einführen:

$$\tau_N = \tfrac{1}{2}\,(1 + \tau_3), \qquad \tau_P = \tfrac{1}{2}\,(1 - \tau_3).$$

Experimentell mißt man die Komponente des magnetischen Moments in einer bestimmten Richtung, die wir als z-Richtung nehmen. Der Operator μ_z ist dann

$$\begin{aligned} \mu_z &= g_l l_z + g_s s_z = g_l (l_z + s_z) + (g_s - g_l)\, s_z, \\ \mu_z &= g_l j_z + (g_s - g_l)\, s_z; \end{aligned} \tag{110.1}$$

das magnetische Dipolmoment ist für ungerade Kerne bei einfacher jj-Kopplung der Erwartungswert des Operators μ_z (110.1) des ungepaarten Nukleons. Allgemein ist es der Erwartungswert des Operators

$$\mu_z = \sum_i (g_l\, l_{iz} + g_s\, s_{iz}).$$

Der Operator (110.1) ist nicht vertauschbar mit $(\mathfrak{J}^2 =)\,\mathfrak{j}^2$ (nachrechnen!), wir müssen also für ungerade Kerne die Erwartungswerte von (110.1) in den Zuständen $(J_0 =)\; j = l \pm \frac{1}{2}$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens explizit berechnen. Dabei interessieren nur die Erwartungswerte bei Einstellung des magnetischen Moments und damit des mit ihm verknüpften Gesamtdrehimpulses „parallel" zum Magnetfeld, d. h. in Richtung des maximalen $j_z (m_j = j)$:

$$\mu = \langle \mu_z \rangle^{m_j = j}_{j = l \pm 1/2} \equiv \langle \mu_z \rangle^{j}_{j} = g_l\, j + \tfrac{1}{2}\,(g_s - g_l)\,\langle \sigma_z \rangle^{j}_{j}.$$

Es bleibt also nur $\langle \sigma_z \rangle^j_j$ mit den Eigenfunktionen eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens zu berechnen. Dabei müssen wir Eigenfunktionen der (vertauschbaren) Operatoren

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\,\Delta + V(r) + \lambda\,\xi(r)\,(\vec{s}\cdot\vec{l})$$

(vgl. (106.1)), $\mathfrak{j}^2$ und $\mathfrak{j}_z$ verwenden. Die Konstruktion dieser Eigenfunktionen ist von der Hülle her bekannt (BLOCHINZEW [B53-1], SCHIFF [S49-1], [M55-1], S. 231); man erhält

$$\psi^{m_j}_{\bar{n}lj} = \begin{cases} \psi^{m+1/2}_{\bar{n}l\,l+1/2} = R_{\bar{n}l}(r)\left[\sqrt{\dfrac{l+m+1}{2l+1}}\; Y^m_l\,\alpha + \sqrt{\dfrac{l-m}{2l+1}}\; Y^{m+1}_l\,\beta\right], \\[2ex] \psi^{m+1/2}_{\bar{n}l\,l-1/2} = R_{\bar{n}l}(r)\left[\sqrt{\dfrac{l-m}{2l+1}}\; Y^m_l\,\alpha - \sqrt{\dfrac{l+m+1}{2l+1}}\; Y^{m+1}_l\,\beta\right], \end{cases} \tag{110.2}$$

worin
$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathfrak{P}_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi},$$
$$\mathfrak{P}_l^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-m)!}{2(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)$$
die auf 1 normierten Kugelflächenfunktionen sind:
$$\int Y_l^{m*}\,Y_{l'}^{m'}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'}$$
(vgl. S. 593). Man rechnet leicht nach, daß mit diesen Funktionen gilt
$$\langle\sigma_z\rangle_j^j = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{j}{j+1} \end{cases} \qquad j = \begin{cases} l+\dfrac{1}{2}, \\ l-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
Damit erhalten wir die sog. Schmidt-Werte des magnetischen Moments
$$\begin{aligned} \mu &= \begin{cases} g_l j + \dfrac{1}{2}(g_s - g_l), \\ g_l j - \dfrac{1}{2}(g_s - g_l)\,\dfrac{j}{j+1}, \end{cases} \qquad j = \begin{cases} l+\dfrac{1}{2}, \\ l-\dfrac{1}{2}, \end{cases} \\ \mu &= g_j j, \quad g_j = \begin{cases} g_l + \dfrac{1}{2j}(g_s - g_l), \\ g_l - \dfrac{1}{2(j+1)}(g_s - g_l), \end{cases} \qquad j = \begin{cases} l+\dfrac{1}{2}, \\ l-\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \tag{110.3}$$

Tabelle 66. Schmidt-Werte

	$j = l + \frac{1}{2}$	$j = l - \frac{1}{2}$
Z ungerade	$j - \frac{1}{2} + \mu_P$	$j - \left(\mu_P - \frac{1}{2}\right)\frac{j}{j+1}$
N ungerade	μ_N	$-\mu_N \frac{j}{j+1}$

die in Abb. 234 als sog. Schmidt-Kurven eingetragen sind.

b) Vergleich mit den empirischen magnetischen Momenten ungerader Kerne

Da μ nur ein Erwartungswert, kein Eigenwert ist, sind merkliche Abweichungen von den theoretischen Werten zu erwarten, denn es gehen in μ wesentlich die Eigenfunktionen unseres Modells ein, und diese sind sicher nicht sehr gut, da die Eigenfunktionen stets wesentlich empfindlicher als die Eigenwerte von den gemachten (relativ groben) Näherungen unseres Modells abhängen.

Die gemessenen μ-Werte sind in Abb. 234 als Punkte eingetragen. Es zeigt sich erstens, daß — wie zu erwarten — nur in den wenigsten Fällen die magnetischen Momente den Schmidt-Werten nahekommen, die allermeisten liegen zwischen

den Kurven. Zweitens aber ordnen sich die meisten empirischen Kernmomente in Streifen an, die ungefähr parallel zu den theoretischen Kurven verlaufen; es sieht so aus, als ob diese Kurven durch nahezu Parallelverschiebung in die gestrichelte Lage gebracht worden seien (vgl. Abb. 234 links oben).

Die Verschiebung der empirischen Streifen gegenüber den zugehörigen Schmidt-Kurven legt folgende Überlegung nahe: Die tatsächlichen Grundzustände der meisten ungeraden Kerne weichen offenbar in einer noch zu klärenden Weise von dem Zustand unseres Schalenmodells mit einfacher jj-Kopplung ab. Wir wollen diese Abweichung zunächst versuchsweise vernachlässigen, d.h. von der Verschiebung der Streifen gegenüber „ihrer" Schmidt-Kurve absehen.

Zwei empirische Tatsachen deuten darauf hin, daß tatsächlich das magnetische Moment im wesentlichen vom letzten ungeraden Teilchen stammt, unsere Vernachlässigung also gerechtfertigt ist: Das magnetische Moment ändert sich nur wenig, wenn (a) die gerade, (b) die ungerade Gruppe um zwei Nukleonen vergrößert wird (ohne daß dabei ein Term voll gefüllt wird), z. B.

(a) ${}^{30}_{27}Co^{57}$ $\mu = 4{,}65$, ${}^{32}_{27}Co^{59}$ $\mu = 4{,}65$,
(b) ${}^{53}_{42}Mo^{95}$ $\mu = -0{,}93$, ${}^{55}_{42}Mo^{97}$ $\mu = -0{,}95$ usw.[1])

(a) zeigt die Abhängigkeit des magnetischen Moments nur von der ungeraden Gruppe, (b) bedeutet, daß es *nur vom letzten Teilchen der ungeraden Gruppe* wesentlich abhängt.

Wir rechnen also jetzt die Kerne in jedem empirischen Streifen als zur entsprechenden Schmidt-Kurve oder „Schmidt-Gruppe $l + \frac{1}{2}$ bzw. $l - \frac{1}{2}$" gehörig. Die so aus dem *empirischen* μ und J_0 nach Abb. 234 gefundene Schmidt-Gruppe der einzelnen Kerne ist in Abb. 231 durch die Pfeilspitzen festgehalten[2]): Pfeil nach oben heißt Schmidt-Gruppe $l + \frac{1}{2}$ (Bahndrehimpuls und Spin parallel), Pfeil nach unten $l - \frac{1}{2}$ (antiparallel). Die von unserem Modell mit einfacher jj-Kopplung *vorausgesagte* Schmidt-Gruppe ist durch Plus- bzw. Minuszeichen für $l + \frac{1}{2}$ bzw. $l - \frac{1}{2}$ über den „Kästen" angegeben.

Der Vergleich zwischen Pfeilrichtung und Vorzeichen, der eine erste Kontrolle unseres endgültig geordneten Termsystems darstellt, zeigt — soweit die magnetischen Momente gemessen sind —, daß unser Modell für alle außer sechs Kernen im Gebiet der deformierten Kerne (Eu^{153}, Tm^{169}, Dy^{161}, Dy^{163}, Yb^{173}, Os^{189}) die richtige Schmidt-Gruppe liefert. Diese erstaunliche Übereinstimmung, die kein Zufall sein kann, gibt uns nachträglich die Berechtigung, die Abweichungen von den Schmidt-Werten in nullter Näherung zu vernachlässigen.

Die Abweichungen müssen offenbar so beschaffen sein, daß sie die Schmidt-Gruppe eines Kerns nicht ändern. Die Übereinstimmung ist um so bemerkenswerter, als unser Modell mit einfacher jj-Kopplung (Einteilchenschalenmodell) *eindeutig* jedem Kern seine Schmidt-Gruppe zuschreibt, wenn j bekannt ist.

[1]) Man suche sich in Abb. 234 oder Anhang I, Tabelle 2 oder 3a, analoge Fälle.

[2]) Die Kerne As^{75} Tb^{159}, W^{183}, Os^{187}, Fe^{57}, Ni^{61} liegen in der Mitte zwischen den beiden Streifen; für sie läßt sich also empirisch keine bestimmte Schmidt-Gruppe angeben, weshalb wir bei ihnen zwei Pfeilspitzen angegeben haben.

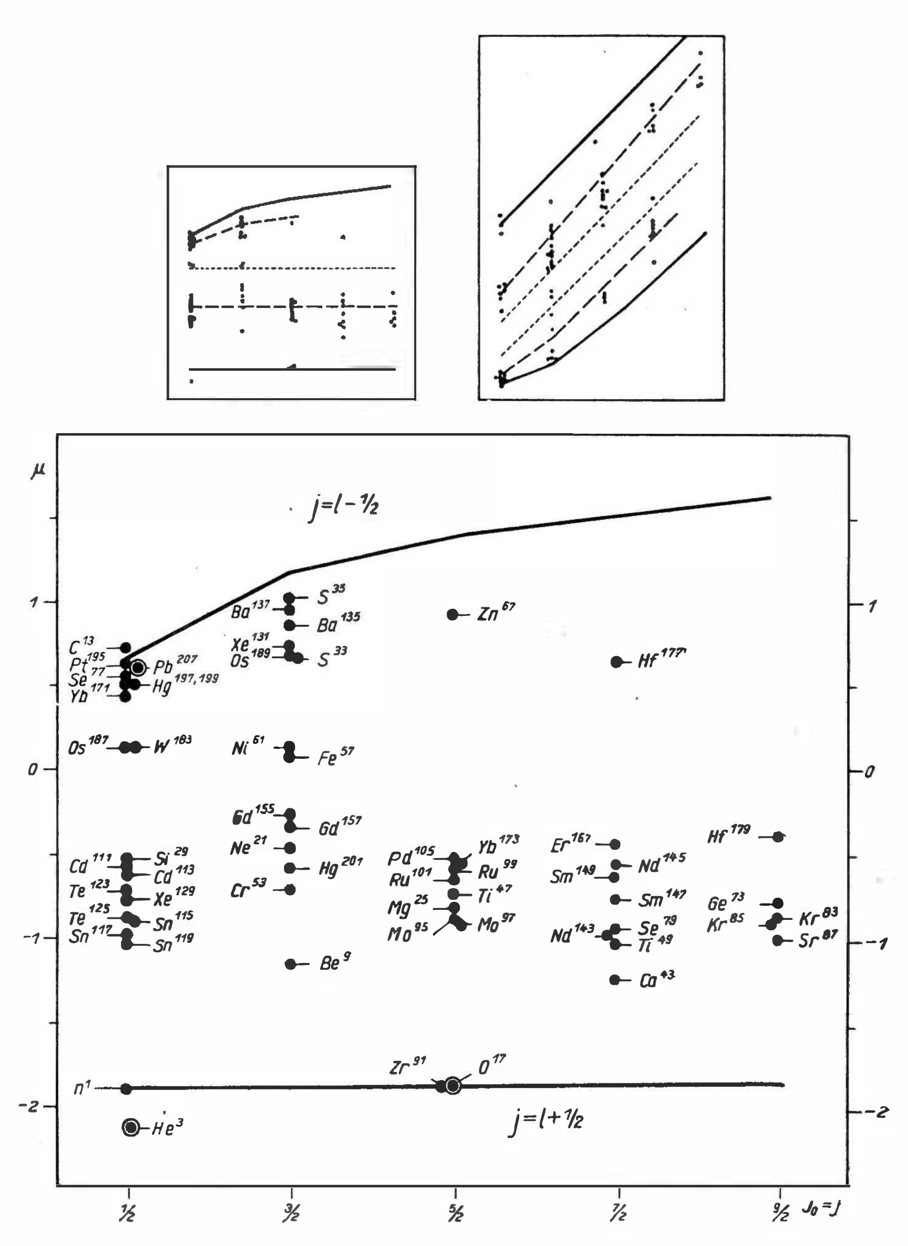
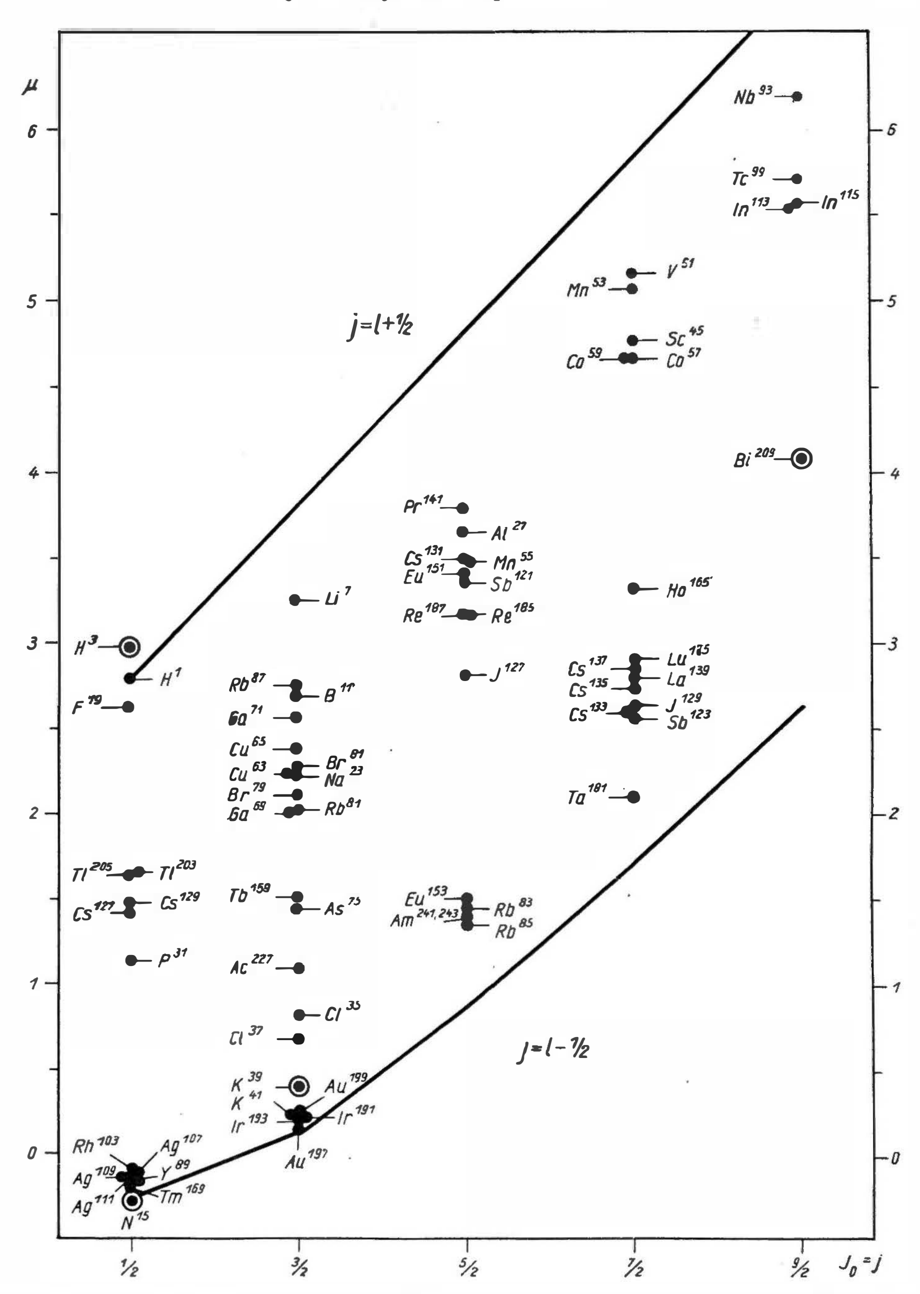


Abb. 234. Magnetisches Moment ungerader Kerne: links (u, g)-Kerne, rechts (g, u)-Kerne. Schmidt-Kurven sind Hilfsfiguren links oben enthalten verkleinert die Schmidt-Kurven (ausgezogen), die ungefähren experimentellen LANE, Handbuch der Physik **39**, und SMITH, Progr. Nucl. Phys. **6**, 52 (1957), vgl. auch Anhang I. Tabelle 2 oder 3a.



als ausgezogene Geraden eingezeichnet. (Doppeltmagisch ± 1)-Kerne sind durch besonderen Ring gekennzeichnet. Die Kurven (gestrichelt) und die Dirac-Kurven (punktiert). Gemessene magnetische Momente und Kernspins nach ELLIOT, Korrektur: Cr^{53} mit $\mu = -0{,}47$ ist falsch eingezeichnet!

Wir können aus diesem Vergleich noch mehr entnehmen. Dadurch, daß wir mit Hilfe des experimentellen Spins und magnetischen Moments jeden Kern einer bestimmten Schmidt-Gruppe zuordnen, legen wir empirisch die Quantenzahl l seines Grundzustandes (unter Voraussetzung einfacher jj-Kopplung) fest; denn aus der Schmidt-Gruppe eines Kerns folgt, ob $l = j - \frac{1}{2}$ oder $j + \frac{1}{2}$ ist, und daraus ergibt sich eindeutig l, weil j bekannt ist. Da nun die Parität eines Zustands mit Bahndrehimpuls l nach S. 487 (genauer S. 579), $(-1)^l$ ist, haben wir mit l auch die Parität des Grundzustandes bestimmt:

Aus der Schmidt-Gruppe und dem Spin eines Kerns folgt eindeutig Bahndrehimpuls und Parität des Grundzustands, wenn einfache jj-Kopplung vorausgesetzt wird.

Es fällt auf, daß sogar die Kerne (außerhalb des Gebiets der Deformationen), deren *Spins* unnormal waren, hier keine Ausnahmen sind: F^{19}, $Cs^{127, 129}$ und Cd^{111} haben richtige Schmidt-Gruppe.

c) Diskussion der Abweichungen

Die sechs Kerne mit so starken Abweichungen der magnetischen Momente, daß sie in die „falsche" Schmidt-Gruppe geraten, liegen in den Gebieten, in denen wir bereits zahlreiche „falsche" Spins fanden und von denen wir noch zeigen werden, daß dort die Kerne deformiert sind.

Für die schwächeren, aber immerhin recht merklichen Abweichungen der meisten übrigen magnetischen Momente von den Schmidt-Werten liegt es nahe, anzunehmen, daß hierfür Abweichungen der wirklichen Eigenfunktionen von den verwendeten Schalenmodelleigenfunktionen mit einfacher jj-Kopplung vorliegen, da diese Eigenfunktionen in den *Erwartungswert* $\mu = \langle \mu_z \rangle$ wesentlich mit eingehen. In diese Richtung deutet einmal die aus Abb. 234 ersichtliche Tatsache, daß die „doppeltmagisch $\pm$ 1"-Kerne (H^3, N^{15}, K^{39}, Bi^{209}, He^3, O^{17}, Pb^{207}), für die diese Abweichung besonders klein sein sollte, da bei ihnen der Idealfall eines einzigen Teilchens (Lochs) außerhalb abgeschlossener Schalen vorliegt, tatsächlich mit Ausnahme von Bi^{209} nahe an den Schmidt-Kurven liegen. Zweitens findet man experimentell, daß die Abweichung $\Delta\mu$ von der Schmidt-Kurve für zwei Kerne annähernd gleich ist, von denen der eine dieselbe ungerade Neutronenzahl hat wie der andere die Protonenzahl, z. B. ${}^{15}_{14}Si^{29}$ $\Delta\mu = 1{,}4$, ${}^{16}_{15}P^{31}$ $\Delta\mu = 1{,}6$ usw. Die Abweichung $\Delta\mu$ scheint also nur durch die ungerade Gruppe bestimmt zu sein, die sich demnach nicht genau im Zustand der einfachen jj-Kopplung befindet.

Wir können hier auf genauere Einzelheiten nicht eingehen und verweisen auf die vorzügliche zusammenfassende Darstellung von Blin-Stoyle [B 56-4]. Dort wird gezeigt, daß die Abweichungen von den Schalenmodelleigenfunktionen der einfachen jj-Kopplung von allgemeineren Kopplungen (vgl. S. 559), von Konfigurationsmischung (vgl. S. 525 ff. und [H 52-1]) oder von Abweichungen des Kerns von der Kugelgestalt (vgl. S. 613) herstammen können.

Bei zwei weiteren Möglichkeiten, Abweichungen von den Schmidt-Werten zu erhalten, nimmt man statt einer Änderung der Eigenfunktion eine Änderung des *Operators* des magnetischen Moments an, dessen Erwartungswert μ ist, indem man zusätzliche Summanden zum bisherigen Operator hinzufügt. Einmal führt die starke Spin-Bahn-Wechselwirkung zu einem zusätzlichen magnetischen Moment, das aber zu klein ist [J 52-2], um die beobachteten Abweichungen zu erklären.

Die zweite Möglichkeit ist folgende: Die Quantenfeldtheorie zeigt, daß nicht nur zwischen zwei Nukleonen virtuelle Mesonen ausgetauscht werden, wenn zwischen ihnen ein Mesonenfeld wirkt (vgl. S. 499), sondern daß schon ein einzelnes Nukleon von einer Hülle virtueller Mesonen umgeben ist, da es sein eigenes Mesonenfeld mit sich trägt. Weiter findet man, daß die *geladenen* virtuellen Mesonen dieser Hülle einen Beitrag zum magnetischen Moment des Nukleons leisten, das sog. „anomale magnetische Moment“ (vgl. Fußnote 2, S. 560). Bei der relativ hohen Dichte und starken Wechselwirkung der Nukleonen im Kern könnte dort diese Hülle und damit μ_{anom} gegenüber der eines freien Nukleons verändert sein.

Betrachtet man zunächst den Extremfall, daß das anomale magnetische Moment im Kern vollständig gelöscht ist, das Nukleon also genau ein geladenes oder ungeladenes Dirac-Teilchen ist (Hülle „abgestreift“), erhält man mit $\mu_P = 1$, $\mu_N = 0$ nach Tabelle 66 die sog. „Dirac-Kurven“, die in Abb. 234 links oben punktiert eingezeichnet sind.

Die meisten experimentellen Werte liegen zwischen Schmidt- und Dirac-Kurven und würden also eine teilweise Löschung des anomalen magnetischen Moments bedeuten. Die quantitative Formulierung dieses Gedankens führt auf das Auftreten zusätzlicher magnetischer „Austauschmomente“ („interaction“-Momente) im Kern (Sachs [S 53-1], S. 253). Eine Reihe von Gründen [B 56-4] deutet darauf hin, daß die Austauschmomente nur für einen kleinen Bruchteil der einzelnen Schmidt-Abweichungen verantwortlich sein können. Sie sind aber anscheinend die einzige Erklärungsmöglichkeit für die Lage der beiden Kerne H^3 und He^3 *außerhalb* der Schmidt-Kurven (vgl. Sachs [S 53-1], S. 250.

Wegen der vielen Möglichkeiten, die magnetischen Momente zu korrigieren, die dazu noch meist ähnliche Wirkung haben, sind die magnetischen Momente *für sich allein* nicht geeignet, zu unterscheiden, welche Korrektur die richtige ist.

§ 111. Elektrische Quadrupolmomente

a) Klassische Definition der Quadrupolmomente

In der klassischen Elektrodynamik definiert man die elektrischen Momente dadurch, daß man das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung $e\varrho(\mathfrak{r})$ im Aufpunkt $\mathfrak{r} = (0, 0, z)$

$$V(\mathfrak{r}) = e \int \frac{\varrho(\mathfrak{r}')}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} d\mathfrak{r}' \tag{111.1}$$

mittels

$$\frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta') \qquad (r' < r)$$

entwickelt:

$$V(\mathfrak{r}) = \frac{e}{r}\int \varrho(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}' + \frac{e}{r^2}\int \varrho(\mathfrak{r}')\,r'\cos\vartheta'\,d\mathfrak{r}' + \frac{e}{2}\frac{1}{r^3}\int \varrho(\mathfrak{r}')\,r'^2(3\cos^2\theta' - 1)\,d\mathfrak{r}' + \cdots$$

$$\equiv \frac{q}{r} + \frac{m_z}{r^2} + \frac{e}{2}\frac{Q_{zz}}{r^3} + \cdots$$

$$\equiv \frac{q}{r} + \frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{r})}{r^3} + \frac{e}{2}\frac{(\mathfrak{r}\cdot\mathsf{Q}\mathfrak{r})}{r^5} + \cdots, \text{[1]}$$

$$q = e\int \varrho(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}' = \text{Ladung („Monopolmomentskalar“)},$$

$$\mathfrak{m} = e\int \varrho(\mathfrak{r}')\,\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}' = \text{Dipolmomentvektor},$$

$$Q_{ik} = \int \varrho(\mathfrak{r}')\,(3x_i'x_k' - r'^2\delta_{ik})\,d\mathfrak{r}' = \text{Quadrupolmomenttensor}.$$

Unsere (ausgedehnte) Ladungsverteilung $\varrho(\mathfrak{r})$ ist also äquivalent einer Gesamtheit von Punktladung q + Punktdipol $\mathfrak{m}$ + Punktquadrupol Q_{ik} + usw. am Ursprung. Die elektrostatische Energie einer zweiten Ladungsverteilung $\bar{\varrho}(\mathfrak{r})$, im Feld $V(\mathfrak{r})$ der ersten wird damit

$$E_{\text{el}} = e\int \bar{\varrho}(\mathfrak{r}')\,V(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}'$$

$$= q\int \frac{e\bar{\varrho}(\mathfrak{r}')}{r'}\,d\mathfrak{r}' + \sum_k \mathfrak{m}_k \int \frac{e\bar{\varrho}(\mathfrak{r}')\,x_k'}{r'^3}\,d\mathfrak{r}' + \frac{e}{2}\sum_{ik} Q_{ik}\int \frac{e\bar{\varrho}(\mathfrak{r}')\,x_i'\,x_k'}{r'^5}\,d\mathfrak{r}' + \cdots.$$

Man rechnet leicht nach, daß sich das durch $\bar{V}(\mathfrak{r}) = e\int \frac{\bar{\varrho}(\mathfrak{r}')}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\,d\mathfrak{r}'$ in der Form ausdrücken läßt

$$E_{\text{el}} = q\bar{V}(0) + \sum_k \mathfrak{m}_k \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathfrak{r})}{\partial x_k}\right)_{\mathfrak{r}=0} + \frac{e}{6}\sum_{ik} Q_{ik}\left(\frac{\partial^2 \bar{V}(\mathfrak{r})}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)_{\mathfrak{r}=0} + \cdots$$

$$= q\bar{V}_0 - (\mathfrak{m}\bar{\mathfrak{E}}_0) - \frac{e}{6}\sum_{ik} Q_{ik}\frac{\partial \bar{\mathfrak{E}}_{0k}}{\partial x_i} + \cdots. \tag{111.2}$$

Als *Quadrupolmoment* wird üblicherweise

$$Q = Q_{zz} = \int \varrho(\mathfrak{r})\,(3\cos^2\theta - 1)\,r^2\,d\mathfrak{r} \tag{111.3}$$

bezeichnet. Diese Komponente von Q_{ik} ist die einzige unabhängige, wenn eine um die z-Achse axialsymmetrische Ladungsverteilung ($Q_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz}$)[2]) wie in den meisten Anwendungen vorliegt. *Q ist ein Maß für die Abweichung der Ladungsverteilung $\varrho(\mathfrak{r})$ von der Kugelsymmetrie*, denn man rechnet leicht nach, daß es für $\varrho(\mathfrak{r}) = \varrho(r)$ *exakt* verschwindet. Ebenso überzeugt man sich leicht, daß für eine längs der z-Achse verlängerte Ladungsverteilung („Zigarre“) Q positiv, für eine entsprechend abgeplattete („Diskus“) Q negativ ist.

---

[1]) $(\mathfrak{r}\cdot\mathsf{Q}\mathfrak{r}) = \sum_{ik} x_i\,Q_{ik}\,x_k; \quad \mathfrak{r} = (0, 0, z)$.

[2]) Axialsymmetrie um die z-Achse bedeutet $Q_{xx} = Q_{yy}$, $Q_{ik} = 0$ für $i \neq k$. Aus Spur $\mathsf{Q} \equiv \sum_{ik} Q_{ii} = 0$ (nachrechnen!) folgt dann $Q_{xx} = -\frac{1}{2}Q_{zz}$.

b) Quantenmechanische Berechnung des Quadrupolmoments

Zur korrespondenzmäßigen Übertragung der Definition des Quadrupolmoments in die Quantenmechanik beachten wir, daß für ein System von A Teilchen sich die Wahrscheinlichkeitsdichte ϱ_i des i-ten Teilchens aus $|\psi(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_A)|^2$ durch Mittelung über die Koordinaten aller *übrigen* Teilchen ergibt:

$$\varrho_i(\mathfrak{r}_i) = \int |\psi(\mathfrak{r}_1 \cdots \mathfrak{r}_A)|^2 \, d\mathfrak{r}_1 \cdots d\mathfrak{r}_{i-1} \, d\mathfrak{r}_{i+1} \cdots d\mathfrak{r}_A.$$

Die Ladungsdichte des Gesamtsystems ist dann die Summe der $e\varrho_i(\mathfrak{r})$ aller *Protonen*:

$$e\varrho(\mathfrak{r}) = e\sum_{i=1}^{Z} \varrho_i(\mathfrak{r}).$$

Setzt man dieses $\varrho(\mathfrak{r})$ in (111.3) ein, so erhält man

$$Q = \sum_{i=1}^{Z} \int (3z_i^2 - r_i^2) |\psi|^2 \, d\mathfrak{r}_1 \cdots d\mathfrak{r}_A:$$

Das elektrische Quadrupolmoment ist der Erwartungswert des Operators[1])

$$Q = \sum_{i=1}^{Z} (3z_i^2 - r_i^2) = \sum_{i=1}^{Z} (3\cos^2\theta_i - 1) r_i^2$$
$$= \sum_{i=1}^{A} (3z_i^2 - r_i^2)\, \tau_P^{(i)}.$$

Da der Operator Q wie der des magnetischen Moments nicht mit $\mathfrak{J}^2$ vertauschbar ist, muß sein Erwartungswert explizit berechnet werden.

Das Quadrupolmoment steht als Maß für die Abweichung der Ladungsverteilung von der Kugelsymmetrie nicht in so direktem Zusammenhang mit der Drehimpulsrichtung des vorliegenden Zustands wie das magnetische Moment. Es ist deshalb nicht so einfach vektormodellmäßig zu sehen wie bei letzterem, und soll durch Rechnung bewiesen werden, daß das Quadrupolmoment einer abgeschlossenen Schale oder Unterschale verschwindet.

Für eine abgeschlossene Schale (Unterschale) ist die Eigenfunktion eine *einzige* Slater-Determinante aus den A besetzten Zuständen:

$$\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P \varepsilon_P \, P u_1(1) \ldots u_A(A),$$

weil es zu dieser Konfiguration nur eine Besetzung gibt. Mit dieser Eigenfunktion ergibt sich leicht als Erwartungswert des Einteilchenoperators Q nach (108.1) die Summe aller Einzelteilchenerwartungswerte:

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_{i=1}^{Z} (u_i(1), (3\cos^2\theta_1 - 1)\, r_1^2 u_i(1)). \tag{111.4}$$

[1]) Wir verwenden für den Operator und seinen Erwartungswert denselben Buchstaben Q.

Wir berechnen deshalb zunächst das Quadrupolmoment eines einzelnen Protons im Zustand $u_i = \psi^{m_j}_{\bar{n}lj}$ (vgl. (110.2)). Mit der Beziehung[1])

$$\int Y_l^{m*} \cos^2\theta \, Y_l^m \, d\Omega = \frac{1}{2l+3}\left[\frac{2(l-m)(l+m)}{2l-1} + 1\right]$$

erhält man so das Quadrupolmoment eines Protons im Zustand $\bar{n}\,l j m_j$:

$$Q^{m_j} \equiv Q^{m_j}_{\bar{n}lj} = \int \psi^{m_j *}_{\bar{n}lj}(3\cos^2\theta - 1)\, r^2 \psi^{m_j}_{\bar{n}lj}\, d\mathfrak{r},$$

$$Q^{m_j} = \frac{j(j+1) - 3m_j^2}{2j(j+1)} \langle r^2\rangle_{\bar{n}l}, \tag{111.5}$$

wobei

$$\langle r^2\rangle_{\bar{n}l} = \int r^2 R^2_{\bar{n}l}(r)\, r^2\, dr$$

ist. Hat man nur ein einziges Proton im Zustand $\bar{n}lj$, erhält man nach (111.5) für sein Quadrupolmoment im gleichen Zustand maximaler z-Komponente des Drehimpulses, für den wir das magnetische Moment berechneten ($m_j = j$, d. h., $\psi^{m_j}_{\bar{n}lj} = \psi_{\bar{n}lj}$):

$$Q^j = Q^j_{\bar{n}l_j} = -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2\rangle_{\bar{n}l}. \tag{111.6}$$

Das Quadrupolmoment eines einzigen Protons im Zustand $\psi^j_{\bar{n}lj}$ ist also negativ, seine Eigenfunktion abgeplattet.

Für unsere abgeschlossene Schale ist nach (111.4) die Summe aller $Q^{m_j}_{\bar{n}lj}$ über alle von Protonen besetzten Zustände $\bar{n}l j m_j$ zu bilden. Dazu greifen wir alle Summanden heraus, die zu einem bestimmten, nach Voraussetzung voll mit Protonen besetzten Term $\bar{n}lj$ gehören:

$$Q_{\substack{\text{Term}\\ \bar{n}lj}} = \sum_{m_j=-j}^{+j} Q^{m_j} = 2\sum_{m_j=1/2}^{+j} Q^{m_j};$$

letzteres gilt, da nach (111.5) $Q^{m_j} = Q^{-m_j}$ ist. Mit (111.5) wird

$$Q_{\substack{\text{Term}\\ \bar{n}lj}} = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{m_j=1/2}^{j} 1 - \frac{3}{j(j+1)}\sum_{m_j=1/2}^{j} m_j^2\right)\langle r^2\rangle_{\bar{n}l},$$

und da

$$\sum_{m_j=1/2}^{j} 1 = \tfrac{1}{2}(2j+1), \quad \sum_{m_j=1/2}^{j} m_j^2 = \tfrac{1}{6}j(j+1)(2j+1),$$

ergibt sich $Q_{\substack{\text{Term}\\ \bar{n}lj}} \equiv 0$:

Ein voll besetzter Term und folglich eine abgeschlossene Schale (Unterschale), d. h. der Rumpf, hat verschwindendes Quadrupolmoment, also kugelsymmetrische Ladungsverteilung.

Für ein äußeres Proton auf einem Term $\bar{n}\,lj$ existieren mehrere Slater-Determinanten (Besetzungen), doch ist jede von ihnen Eigenfunktion zum gleichen Eigenwert $J = j$ von $\mathfrak{J}^2$ und hat einen der möglichen Werte $M_J = m_j$ (vgl. S. 523). Zur Berechnung des Quadrupolmoments haben wir den Erwartungswert mit der

[1]) Beweis mittels

$$\cos\theta\cdot Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}\, Y^m_{l+1} + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\, Y^m_{l-1}.$$

Slater-Determinante zu bilden, die $J = M_J$, also $J = j = m_j$ hat.[1]) Die Rechnung läuft dann genauso ab wie eben, nur bleibt jetzt in der Summe (111.4) der Summand des letzten Protons übrig. Für ein äußeres Proton ergibt sich also das Quadrupolmoment so, als ob nur dieses Proton allein und in einem Zustand $m_j = j$ vorhanden wäre (111.6):

$$Q_{\text{abgeschl. Schale} \pm 1\,\text{Proton}} = \pm Q^j = \mp \frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle_{\bar{n}l}. \tag{111.7}$$

Dasselbe Quadrupolmoment ergibt sich folglich mit umgekehrtem Vorzeichen, wenn ein Proton in einer abgeschlossenen Schale (Unterschale) fehlt (was wir in (111.7) bereits berücksichtigt haben), denn es fehlt dann an einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung gerade der Teil, der vorhin darüber hinaus vorhanden war; nimmt man aber von einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung z. B. eine diskusförmige weg, bleibt eine zigarrenförmige übrig.

Es ist bemerkenswert, daß nach (111.7) $Q = 0$ wird, wenn das äußere Proton $j = \frac{1}{2}$ hat, also auf einem $s_{1/2}$- oder $p_{1/2}$-Term sitzt. Dies ist die Folge eines allgemeinen, modellunabhängigen Satzes, daß ein System mit Gesamtdrehimpuls $J < 1$ kein Quadrupolmoment haben kann.[2]) Aus diesem Grunde ist auch $Q = 0$, wenn mehrere äußere Protonen auf einem Term $j = \frac{1}{2}$ mit einfacher jj-Kopplung sitzen.

Hat man ν äußere Protonen mit einfacher jj-Kopplung auf einem Term $j > \frac{1}{2}$, ergibt die etwas umfangreichere Rechnung (die Eigenfunktion besteht jetzt aus mehreren Slater-Determinanten; vgl. SACHS [S 53-1], S. 359, MAYER, JENSEN [M 55-1], S. 244):

$$Q_{\nu\ \text{äuß. Prot.}} = \begin{cases} 0 & \nu \text{ gerade,} \\ \dfrac{2j-2\nu+1}{2j-1} Q^j & \nu \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{111.8}$$

Diese Werte sind für ungerades ν in Abb. 235 durch Punkte dargestellt.

Das Auffüllen eines Terms beginnt also bei einem Proton mit der abgeplatteten Verteilung $Q = Q^j < 0$ (111.6), (111.7), die allein von diesem Proton stammt. Bei drei Protonen ergibt sich eine kleinere Abplattung usw., schließlich Kugelsymmetrie, wenn der Term halb gefüllt ist. Von da an erhält man eine verlängerte Verteilung, die mit zunehmender (ungerader) Protonenzahl wächst und schließlich übereinstimmend mit (111.7) bei einem Loch ($\nu = 2j$) den Maximalwert $Q = -Q^j > 0$ erreicht. Zwischen den ungeraden Protonenzahlen hat man bei geradem ν immer wieder Kugelsymmetrie.

Da Neutronen nicht zum elektrischen Quadrupolmoment beitragen können, ist

---

[1]) Bei der Messung von Quadrupolmomenten (wie auch von magnetischen Momenten, vgl. S. 561) ist die experimentelle Situation stets so, daß sich das System in einem Zustand mit maximaler Drehimpulskomponente in Magnetfeldrichtung (z) befindet, vgl. [K 56-2].

[2]) Man kann zeigen, daß elektrische und magnetische 2^L-Polmomente in Zuständen verschwinden, deren $J < \frac{L}{2}$ ist. Deshalb haben (g, g)-Kerne ($J_0 = 0$) kein Quadrupolmoment (und kein magnetisches Moment) im Grundzustand.

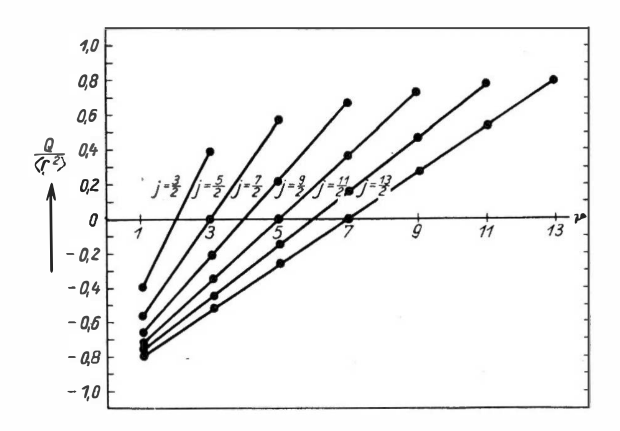


Abb. 235. Abhängigkeit des Quadrupolmoments eines (g, u)-Kerns von der Anzahl ν der äußeren Protonen auf einem Term j. Es gelten nur die ungeraden Werte von ν; bei geraden ν verschwindet Q. (Nach SACHS [S. 53-1])

in unserem Modell das Quadrupolmoment allein durch die Zahl der äußeren *Protonen* bestimmt. (u, g)-Kerne sollten also im Gegensatz zu (g, u)-Kernen kein Quadrupolmoment haben. Das stimmt allerdings nicht ganz genau, denn wir müssen berücksichtigen, daß die äußeren Neutronen eines solchen Kerns und der übrige Rumpf sich um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Der Rumpf trägt Ladung, und sein Zentrum bewegt sich in einem Abstand $\sim \frac{R_0}{A}$ vom Schwerpunkt, wenn sich ein äußeres Neutron ungefähr im Abstand R_0 vom Schwerpunkt bewegt.

Demnach bekommen wir für einen ungeraden Kern mit einem äußeren Neutron ein Quadrupolmoment, das gegenüber dem eines Kerns mit einem äußeren Proton wegen der Ladung des Rumpfs um einen Faktor Z vergrößert, wegen der Verkleinerung der Abstände vom Schwerpunkt auf $\frac{R_0}{A}$ um einen Faktor $\frac{1}{A^2}$ verkleinert, insgesamt also um $\frac{Z}{A^2}$ verkleinert ist. Analoges gilt für eine beliebige ungerade Zahl äußerer Neutronen. Wir erhalten also nach unserem Modell zwar nicht exakt verschwindende, aber sehr kleine Quadrupolmomente.

c) Vergleich mit den empirischen Quadrupolmomenten ungerader Kerne

Der Operator Q ist wie μ_z nicht mit $\mathfrak{J}^2$ vertauschbar, in seine Erwartungswerte gehen also die Eigenfunktionen unseres Modells wesentlich mit ein. Es kommt dazu, daß Q als Maß für die Abweichung der Ladungsverteilung des betreffenden Zustands von der Kugelsymmetrie besonders empfindlich von der Gestalt der Eigenfunktion abhängen wird. Wir erwarten deshalb von vornherein mindestens ebenso starke Abweichungen zwischen Theorie und Experiment wie bei den magnetischen Momenten.

Ein weiterer zusätzlicher Unsicherheitsfaktor ist, daß die empirischen Quadrupolmomente im allgemeinen höchstens auf zwei Stellen genau angegeben werden können (vgl. Anhang I, Tabelle 2 oder 3). Das liegt daran, daß man experimentell

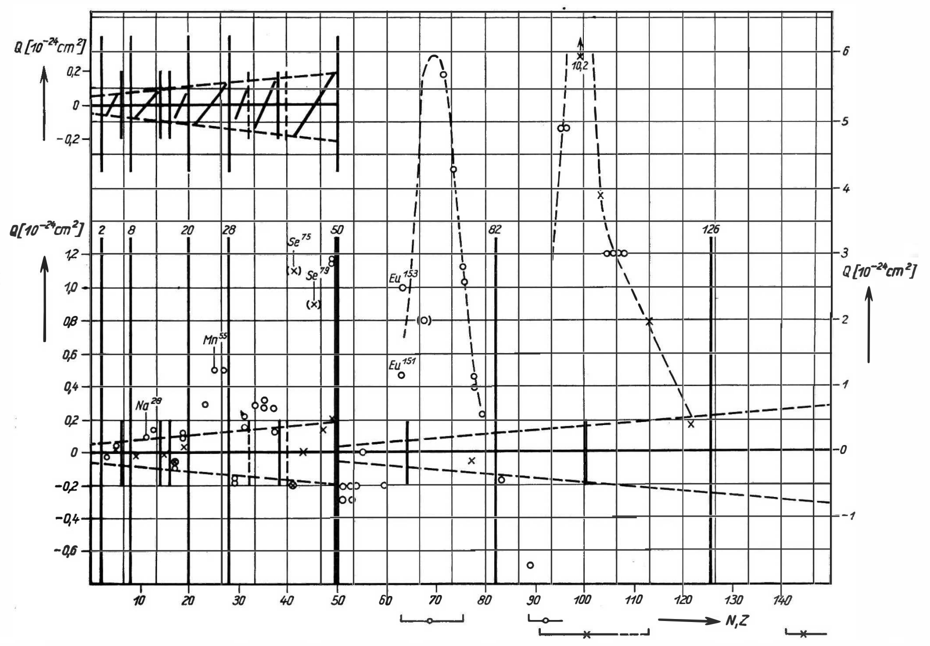


Abb. 236. Quadrupolmoment Q ungerader Kerne: × = N ungerade, o = Z ungerade. Skalenwechsel der Ordinate an der Stelle $N, Z = 50$ beachten! Die gestrichelten Geraden sind die ungefähre theoretische Grenze der Quadrupolmomente nach dem Schalenmodell. Links oben genaue theoretische Werte von Q mit einfacher jj-Kopplung nach Abb. 235 für die Termfolge der Abb. 232 (nur bis $N, Z = 50$ gezeichnet); dabei wurde $\langle r^2 \rangle = R^2 = R_0^2 A^{2/3}$ gesetzt und für jeden Term ein mittleres A verwendet. (Gemessene Quadrupolmomente nach ELLIOT, LANE, Handbuch der Physik 39, und SMITH, Progr. Nucl. Phys. 6, 52 (1957). Vgl. auch Anh. I, Tab. 2 oder 3a.) Korrektur: $_{59}Pr^{141}$ ist falsch eingezeichnet: $Q = -0{,}05$ b!

nur die Wechselwirkungsenergie $-eQ\,\frac{\partial \mathfrak{E}_{0z}}{\partial z}$ (111.2) oder eine ihr entsprechende Frequenz messen kann (Verschiebung von Spektrallinien der Hyperfeinstruktur durch diese Wechselwirkung) und daß die Änderung $\frac{\partial \mathfrak{E}_{0z}}{\partial z}$ der elektrischen Feldstärke am Kernort von der Ladungsverteilung der Elektronenhülle, d. h. von dem nicht sehr genau bekannten Verlauf der Hülleneigenfunktionen in Kernnähe, abhängt.

In Abb. 236 haben wir Q für die ungeraden Kerne eingetragen, deren Quadrupolmoment in Anhang I, Tabelle 2 oder 3a, angegeben ist. Die außer den Schalenabschlüssen eingezeichneten senkrechten Striche geben die Unterschalen nach Abb. 232 an. Wo zwei Terme miteinander konkurrieren, wurde die Trennung zwischen beiden nur gestrichelt eingezeichnet oder ganz weggelassen.

Betrachten wir zunächst die Kerne mit ungeradem $Z < 50$. Für $j = \frac{1}{2}$ ($1s_{1/2}$, $2p_{1/2}$, $2s_{1/2}$, $3p_{1/2}$) wurde kein Quadrupolmoment beobachtet. Weiter ist der in Abb. 235 vorausgesagte und in Abb. 236 links oben nochmals gezeichnete Wechsel von negativen zu positiven Q bei Auffüllung einiger Terme ($2p_{3/2}$, $3d_{3/2}$, $3p_{3/2}$, $5g_{9/2}$) deutlich, bei einigen weiteren ($3d_{5/2}$, $4f_{7/2}$ (?)) noch einigermaßen zu erkennen, besonders wenn man — Späteres vorwegnehmend — die Kerne mit ungeradem N noch hinzunimmt. Zahlenmäßig liegen die meisten Werte im Innern oder wenigstens in der Nähe des „erlaubten" Streifens, den wir in Abb. 236 unten und oben gestrichelt gezeichnet haben. Die gestrichelten Linien wurden so gezogen, daß sie die ungefähre Grenze der theoretischen Q-Werte angeben, wie man an der oberen Zeichnung deutlich sieht. Falls unser Modell einigermaßen brauchbar sein soll, darf also dieser Streifen nicht wesentlich überschritten werden, was für $Z, (N) < 50$ beim größten Teil der Kerne erfüllt ist.

Für die höheren Schalen ($Z, (N) > 50$) jedoch wachsen die empirischen Q-Werte zwischen den Schalenabschlüssen bis zu einer Größenordnung und mehr über den erlaubten Streifen hinaus.[1]) Nur in der Nähe der Schalenabschlüsse werden die Q wieder „normal". Hier handelt es sich offenbar um ein definitives Versagen unseres Modells über größere Bereiche. Zum Vergleich haben wir unter der Abszisse die Klammern aus Abb. 231 eingetragen, die die Gebiete kennzeichnen, in denen sich fast alle Abweichungen der Spins und der magnetischen Momente konzentrieren. Man sieht, daß sie mit den Gebieten extrem großer Quadrupolmomente zusammenfallen.

d) Diskussion der Abweichungen

In diesen Gebieten versagt also das Schalenmodell mit einfacher jj-Kopplung an allen bisher besprochenen Eigenschaften der Grundzustände ungerader Kerne. Insbesondere die großen Quadrupolmomente zeigen, daß dies nicht nur ein Versagen der einfachen jj-Kopplung sein kann, denn auch mit anderen Kopplungen

---

[1]) Man beachte den Maßstabwechsel bei $Z, N = 50$ in Abb. 236! Auch für $Z, N < 50$ sind bei einigen Kernen ($_{25}Mn^{55}$, $_{27}Co^{59}$, $^{41}_{34}Se^{75}$, $^{45}_{34}Se^{79}$, $_{49}In^{113, 115}$) abnorm große Quadrupolmomente vorhanden.

der wenigen äußeren Protonen oder durch Konfigurationsmischungen (s. unten) kann man niemals um eine *Größenordnung* größere Quadrupolmomente bekommen. Es handelt sich demnach um ein Versagen des Schalenmodells überhaupt.
Dieses Versagen war der Hauptanlaß zur Konzipierung des kollektiven Modells, das den Fehler beseitigt, indem es eine nichtkugelsymmetrische Form des Rumpfes annimmt und so alle Protonen des Kerns zum Quadrupolmoment beitragen läßt. Wir werden deshalb bei der Besprechung des kollektiven Modells auf diese Abweichungen genauer eingehen.
Eine zweite definitive Abweichung ist die, daß die ungeraden Kerne mit ungeradem N Quadrupolmomente von durchaus *gleicher* Größenordnung wie die mit ungeradem Z haben. Die naheliegendste Deutung dafür ist die, daß das Quadrupolmoment nicht nur durch die äußeren Protonen, sondern durch alle äußeren Nukleonen bestimmt ist. Das führt uns wieder auf die allgemeineren Kopplungen aller äußeren Nukleonen, über die auf S. 557 ff. bereits gesprochen wurde. Tatsächlich erhält man so [F 52-4] Quadrupolmomente von derselben Größenordnung wie für Kerne mit ungeradem Z.
Außer allgemeineren Kopplungen können auch bei den Quadrupolmomenten wieder Konfigurationsmischungen merkliche Abweichungen hervorrufen [P 55-1], [H 55-1]. Doch können weder sie, noch allgemeinere Kopplungen die sehr großen Quadrupolmomente zwischen den höheren Schalenabschlüssen liefern.
Eine dritte auffallende Abweichung ist die starke Bevorzugung *positiver* Quadrupolmomente in den Fällen, die wesentlich aus dem erlaubten Streifen herausfallen, während nach unserem Modell beide Vorzeichen gleichberechtigt bei jeder Termauffüllung erscheinen. Wir kommen darauf beim kollektiven Modell zurück.

§ 112. Angeregte Einzelteilchenzustände, γ-Zerfall (und β-Zerfall)

Nachdem wir bis jetzt Eigenschaften der Grundzustände von (stabilen und unstabilen) Kernen betrachtet haben, kommen wir jetzt zu den angeregten Zuständen solcher Kerne.
Emission von Photonen tritt beim Kern wie bei der Hülle auf, wenn ein auf irgendeine Weise entstandener *angeregter* Zustand unter Aussendung von elektromagnetischer Strahlung in einen tieferen Zustand übergeht.[1]) Der γ-„Zerfall" von Kernen liefert deshalb wichtige Aussagen über angeregte Zustände von Kernen.

a) Isomere Zustände

Von den durch γ-Emission zerfallenden angeregten Zuständen sind die *„isomeren" Zustände* besonders wichtig, die eine *so hohe Lebensdauer haben, daß sie experi-*

[1]) Einen angeregten Zustand, der durch γ-Strahlung in einen tieferen übergeht, erhält man in der Kernphysik meist, indem man zunächst durch eine Kernreaktion einen hochangeregten Kern erzeugt, der nach Aussendung von Nukleonen oder α-Teilchen und/oder Elektronen den Rest seiner Anregungsenergie in Form von γ-Strahlung abgibt.

mentell meßbar wird. Sie kann etwa 10^{-9} sec bis zu Tagen betragen. Solche hohen Lebensdauern kann man beim Kern im Gegensatz zur Hülle wirklich beobachten, weil der Kern durch die umgebende Elektronenhülle gegen Beeinflussungen von außen geschützt ist, die zu einer Energieabgabe ohne Strahlung führen könnten. Die Hülle dagegen hat keinen solchen Schutz, so daß dort keine sehr langlebigen Zustände beobachtet werden. — Strahlungsübergänge von einem isomeren zu einem tieferen Zustand nennt man *isomere Übergänge*. Die dabei ausgesandten Energien (die Termabstände) sind meist von der Größenordnung 10 bis 100 keV (weiche γ-Strahlung).

Man weiß seit langem (Weizsäcker [W 36-2]), daß ein angeregter Zustand dann hohe Lebensdauer hat, wenn sein Gesamtdrehimpuls J sich von den Gesamtdrehimpulsen der tiefer liegenden Zustände um mehrere Einheiten — für isomere Zustände mindestens 3 — unterscheidet. Wie in der Theorie des γ-Zerfalls (z. B. [B 59-1], Kap. XII) gezeigt wird, liegt das daran, daß zwischen zwei Zuständen mit Gesamtdrehimpuls J_1 und J_2 die Übergangswahrscheinlichkeit nach einer einfachen Abschätzung

$$W(L) = \frac{Z^2 e^2}{\hbar \lambda} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{2L} \tag{112.1}$$

ist, wo R den Kernradius, $\lambda = 2\pi\lambda$ die ausgestrahlte Wellenlänge und $L = |J_1 - J_2|$ bezeichnen.[1]) Das heißt also, daß z. B. für einen Kern $A = 80$ ($R \sim 6 \cdot 10^{-13}$ cm) und eine γ-Strahlung von 200 keV ($\lambda = \frac{hc}{\hbar\omega} \sim 10^{-9}$ cm) bei Erhöhung der Differenz L um eine Einheit die Übergangswahrscheinlichkeit um einen Faktor $\left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \sim 10^{-6}$ (!) kleiner wird.

Nach S. 532 sagt unser Schalenmodell als angeregte Zustände die Terme voraus, die innerhalb der nächsten 6 bis 8 MeV über dem obersten (teilweise oder ganz) besetzten Term unseres Schalenmodells (Abb. 232) liegen: Wird ein Nukleon des obersten besetzten Terms auf einen dieser höheren Terme gehoben, kann es unter Aussendung von Strahlung wieder „zurückspringen". Um insbesondere *isomere* angeregte Zustände zu bekommen, müssen wir also in Abb. 232 nachsehen, wann im nächsten Bereich (bis zu einigen 100 keV) über dem obersten besetzten Term $\bar{n}lj$ unbesetzte Terme liegen, deren Gesamtdrehimpuls sich von j um mindestens drei Einheiten unterscheidet, wobei wir wieder einfache jj-Kopplung angenommen haben.

Geht man daraufhin unser Termsystem in Abb. 232 durch, so findet man unterhalb 28 überhaupt kein $\Delta j \geqq 3$. Oberhalb 28 aber liegen jedesmal dort Terme mit großen Gesamtdrehimpuls-Differenzen nahe übereinander, wo durch die starke Spin-Bahn-Wechselwirkung der „Eindringling" von oben in die jeweilige Schale hineinkommt: $g_{9/2}$ neben $p_{1/2}$, $h_{11/2}$ neben $s_{1/2}$ und $d_{3/2}$, $i_{13/2}$ neben $p_{1/2}$, $p_{3/2}$ und $f_{5/2}$. Sobald ein oder mehrere Nukleonen auf dem untersten der genannten Terme sitzen, sollten also isomere Zustände zu beobachten sein, d. h. für Z oder N von 39 bis 49, von 65 bis 81 und von 101 bis 125.

---

[1]) Im Falle $J_1 - J_2 = 0$ ist $L = |J_1 - J_2| + 1 = 1$ (vgl. S. 578).

b) Vergleich mit den empirischen isomeren Übergängen ungerader Kerne

In Abb. 237 sind nach [F 55-1] die beobachteten isomeren Übergänge ungerader Kerne als senkrechte Striche eingezeichnet, deren Länge und Strichelung vorläufig nicht interessiert. Man sieht, daß die Isomere nur in „Inseln" vor den Schalenabschlüssen auftreten, und diese Inseln fallen genau in die eben theoretisch vorhergesagten Bereiche, von den Kernen Mo^{93} ($N = 51$), Pd^{109}, Cd^{111} ($N = 63$) und Dy^{165} ($N = 99$) abgesehen. Allein diese erstaunliche Übereinstimmung ist ein neuer Beleg für die Brauchbarkeit unseres Schalenmodells, insbesondere wieder ein indirekter Nachweis der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung, die (s. oben) für das Auftreten großer Spindifferenzen innerhalb der Schalen verantwortlich ist.

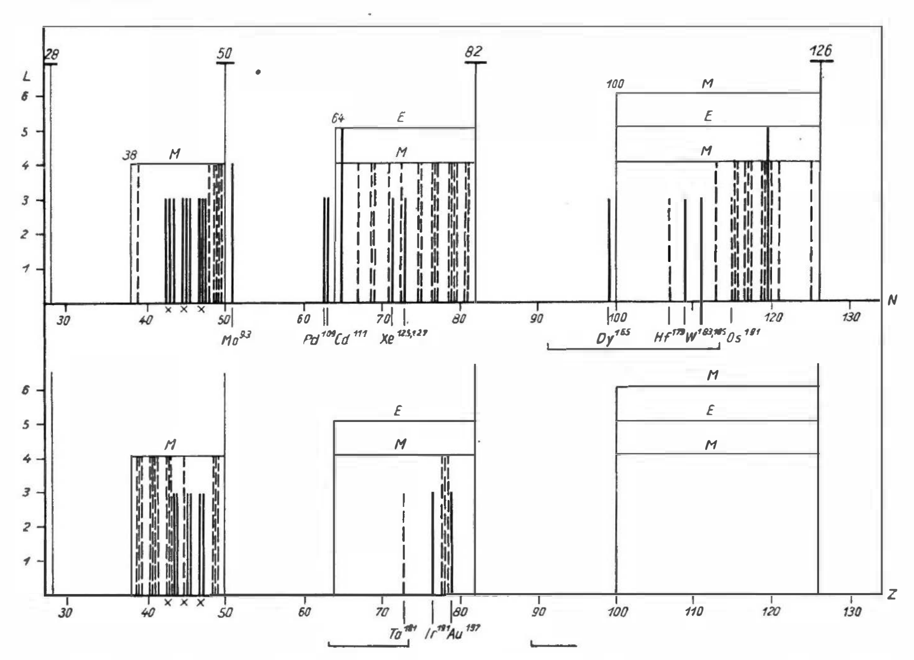


Abb. 237. Isomere Übergänge ungerader Kerne: ——— elektrische (E), – – – – magnetische (M) Übergänge. Die Höhe der waagerechten Geraden gibt die theoretischen L-Werte mit einfacher jj-Kopplung an, die Länge der senkrechten Striche die experimentellen L-Werte. Die Buchstaben E bzw. M deuten den theoretischen Übergangstyp an, die Art der Strichelung der senkrechten Striche (s. o.) den experimentell ermittelten Übergangstyp. Gemessene Übergänge nach FEENBERG [F 55-1] und ALBURGER, Handbuch der Physik 42

c) Typen von γ-Übergängen (γ-Strahlungen)

Die Übereinstimmung geht aber weiter bis in die Einzelheiten. Um das einzusehen, müssen wir auf einige weitere Ergebnisse der Theorie des γ-Zerfalls (z. B. [B 59-1]) eingehen. Dort wird gezeigt, daß man alle möglichen elektromagnetischen Strahlungen in zwei Gruppen, die „elektrischen" (E) und die

„magnetischen" (M), einteilen kann. Die einzelnen E- bzw. M-Strahlungen unterscheiden sich voneinander erstens durch ihren Gesamtdrehimpuls L. Man bezeichnet deshalb die einzelnen Strahlungen als EL-Strahlung (elektrische Dipol-, Quadrupol-Strahlung usw., elektrische 2^L-Pol-Strahlung) bzw. als ML-Strahlung (magnetische Dipol-, Quadrupol-Strahlung usw., magnetische 2^L-Pol-Strahlung).[1])

Der Wert von L ergibt sich aus der Erhaltung des Drehimpulses: Ist der Kernspin vor der Ausstrahlung $\mathfrak{J}_1$, danach $\mathfrak{J}_2$, der Gesamtdrehimpuls der Strahlung $\mathfrak{L}$, so gilt

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{L},$$

in Quantenzahlen

$$|\Delta J| = |J_1 - J_2| \leqq L \leqq J_1 + J_2 .$$

Für gegebenes J_1, J_2 sind also alle Strahlungen mit $L = |\Delta J|, |\Delta J| + 1, \ldots, J_1 + J_2$ möglich. Wegen (112.1) wird davon praktisch nur die Strahlung mit dem niedrigsten L mit merklicher Intensität beobachtet, also $L = |J_1 - J_2|$, vgl. S. 576. ($J_1 = J_2$ ist ein Ausnahmefall: Hier ist $L = |\Delta J| + 1 = 1$ das niedrigstmögliche L, da elektromagnetische Strahlung mit $L = 0$ nicht existiert, denn nach Quantisierung besteht das Feld aus Photonen mit Spin 1.)

Zweitens unterscheiden sich die einzelnen Strahlungen durch ihre Parität: Elektrische Strahlungen haben die Parität $\Pi_{EL} = (-1)^L$, magnetische die Parität $\Pi_{ML} = (-1)^{L+1}$. Da bei elektromagnetischen Wechselwirkungen die Parität des Gesamtsystems (Kern + Strahlung) erhalten bleibt, muß sich die Parität des Kerns ändern, wenn eine Strahlung negativer Parität (E 1, 3, 5, ..., M 2, 4, ...) ausgesandt wird, dagegen muß sie konstant bleiben, wenn positive Parität (E 2, 4, ..., M 1, 3, ...) ausgestrahlt wird. Man erhält so die in Tabelle 67 enthaltenen Auswahlregeln.

Welche Strahlungstypen sagt unser Modell mit einfacher $j\,j$-Kopplung für die isomeren Übergänge ungerader Kerne voraus? ΔJ ist durch das Δj der Terme gegeben, zwischen denen der Übergang erfolgt: $\Delta J = \Delta j$. Auch die Parität

Tabelle 67. Auswahlregeln

Typ	$\|\Delta J\|$	Paritäts-wechsel	Typ	$\|\Delta J\|$	Paritäts-wechsel
E 1	0,1	ja	M 1	0,1	nein
E 2	2	nein	M 2	2	ja
E 3	3	ja	M 3	3	nein
E 4	4	nein	M 4	4	ja
E 5	5	ja	M 5	5	nein
E 6	6	nein	M 6	6	ja

[1]) „Elektrische" bzw. „magnetische" Strahlung deshalb, weil sie die elektromagnetische Strahlung eines oszillierenden elektrischen bzw. magnetischen Multipols ist.

des Anfangs- und Endkerns ist leicht zu bestimmen. In unserem Modell hat jeder besetzte Zustand $u_i = R_{\bar{n}_i l_i} Y_{l_i}^{m l_i} \chi^{m_{s_i}} \eta^{t_{s_i}}$ die Parität $\pi_i = (-1)^{l_i}$, da sich in u_i bei Anwendung der Paritätsoperation P_i ($\mathfrak{r}_i \to -\mathfrak{r}_i$) nur der Winkelanteil um den Faktor $(-1)^{l_i}$ ändert (vgl. S. 487).[1] Die Gesamtparität des Kerns ist das Produkt der Paritäten der einzelnen besetzten Zustände, da die Gesamteigenfunktion (Slater-Determinante) sich bei Anwendung von $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_A$ mit

$$(-1)^{l_1} \cdot (-1)^{l_2} \ldots (-1)^{l_A}$$

multipliziert. Folglich trägt jeder *voll* besetzte Term $\bar{n} l j$ nur einen Faktor $(-1)^{\mu \cdot l} = +1$ bei, da er eine gerade Teilchenanzahl $\mu = 2j + 1$ enthält. Die Gesamtparität eines Kerns ist demnach gleich dem Produkt der Paritäten nur der äußeren Teilchen, damit aber für ungerade Kerne *gleich der Parität des letzten (ungeraden) Nukleons*: $\Pi = \pi = (-1)^l$.

Von Z oder $N = 39$ bis 49 erfolgt nach unserem Modell (Abb. 232) der Übergang zwischen $g_{9/2}$ und $p_{1/2}$, d. h. mit $L = |\Delta J| = |\Delta j| = 4$ und Paritätswechsel, da g- und p-Terme entgegengesetzte Parität haben. Nach Tabelle 67 ergeben sich also M 4-Übergänge. Ebenso erhält man von 65 bis 81 für $h_{11/2} - s_{1/2}$: E5 und für $h_{11/2} - d_{3/2}$: M4, von 101 bis 125 für $i_{13/2} - p_{1/2}$: M6, für $i_{13/2} - p_{3/2}$: E5 und für $i_{13/2} - f_{5/2}$: M4. Es sollte also insbesondere vor *jedem* der drei Schalenabschlüsse M4-Strahlung auftreten. Diese vorausgesagten Strahlungstypen haben wir in Abb. 237 in leicht verständlicher Form (ähnlich wie in Abb. 231 die Spins) als „Kästen" mit darübergeschriebenem E oder M eingezeichnet.

d) Vergleich mit den empirischen Strahlungstypen ungerader Kerne

In Abb. 237 haben wir durch Art und Länge der senkrechten Striche den beobachteten Typ der Strahlung bei isomeren Übergängen ungerader Kerne eingetragen. Man sieht, daß — wie erwartet — überwiegend und in allen Inseln M4 auftritt. Daneben findet man in der zweiten und dritten Insel wie vorausgesagt E5; M6 wurde noch nicht beobachtet. Außerdem findet man aber besonders in der ersten Insel an den Stellen 43, 45, 47 zahlreiche E3-Strahlungen, die nach unserem Modell mit einfacher jj-Kopplung überhaupt nicht auftreten sollten. Eine Abweichung sind schließlich drei Fälle von M3- und eine E4-Strahlung, die ebenfalls nicht auftreten sollten.

Es fällt auf, daß (außer dem E4 und den drei M3) alle beobachteten isomeren Übergänge solche *mit* Paritätswechsel sind. Das folgt direkt aus unserem Modell: Die isomeren Übergänge erfolgen stets innerhalb einer Schale zwischen dem „Eindringling" und einem anderen Term; nach S. 537 hat aber der Eindringling stets entgegengesetzte Parität wie alle anderen Terme seiner Schale. Aus diesem Grund sind auch z. B. E4-Übergänge nach unserem Modell nicht

[1]) Der Kürze halber haben wir hier die u_i für den Fall ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung betrachtet. Im Fall mit Spin-Bahn-Wechselwirkung enthält u_i additiv zwei Kugelflächenfunktionen (vgl. (110.2)) mit gleichem Index l_i, so daß unsere Überlegung gültig bleibt.

Abb. 238. γ-Übergänge der Te-Isotope. Die $d_{3/2}$-Terme wurden der Übersicht halber gleich hoch gezeichnet. (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1])

möglich[1]) und werden tatsächlich — von der Ausnahme Mo^{93} abgesehen[2]) — nicht beobachtet.

Schließlich sehen wir am Beispiel der Te-Isotope in Abb. 238, wie sich systematisch mit der Zunahme der ungeraden Neutronenzahl die Terme verschieben. Insbesondere zeigt die Figur deutlich die Existenz des sonst nicht direkt nachweisbaren $h_{11/2}$-Terms.

e) Diskussion der Abweichungen

Da die E3-Übergänge der ersten Insel (vgl. Tabelle 68) genau bei den Z- bzw. N-Werten 43, 45, 47 auftreten, bei denen (vgl. Abb. 231 und Tabelle 64) außer einfacher jj-Kopplung $(g_{9/2})^{3,5,7}_{9/2}$ auch nichteinfache j-j-Kopplung auftreten kann, erwarten wir hier dasselbe. Nehmen wir als Naheliegendstes an, daß in allen E3-Fällen bei 43, 45, 47 die Kopplung $(g_{9/2})^{3,5,7}_{7/2}$ vorhanden ist und demnach der Übergang zwischen $(g_{9/2})^{\nu}_{7/2}$ und $p_{1/2}$ erfolgt, haben wir $\Delta J = 3$ und Paritätswechsel, denn trotz der abweichenden Kopplung sitzen die Nukleonen auf einem g-Term mit gerader Parität. Mit obiger Kopplung zu $J = j - 1$ erhalten wir also gerade E3-Übergänge, und daß diese genau nur an den nach Tabelle 64 möglichen — in Abb. 237 wieder durch kleine Kreuze unter der Abszisse gekennzeichneten — Stellen auftreten, ist eine Stütze dieser Interpretation.[3]) Abb. 239 zeigt

---

[1]) Auch nicht unter „Aufbrechen" von tiefer liegenden Termen derselben Schale.

[2]) Bei Mo^{93} handelt es sich um einen Übergang zwischen hochangeregten Niveaus (> 2 MeV).

[3]) Man beachte aber die Schwierigkeit, daß nach S. 559 die Kopplung $(g_{9/2})^{\nu}_{7/2}$ theoretisch nicht den Grundzustand bilden kann, obwohl experimentell $7/2^+$ außer bei Se^{79} auch bei Ge^{77}, Kr^{81}, Rh^{105} der Grundzustand ist. Bei den übrigen Kernen mit E3-Übergängen ist $7/2^+$ ein angeregter Zustand (vgl. Abb. 239).

Tabelle 68.

		Erste Insel		Sonstige			
		Anf.-Zust.	End-Zust.			Anf.-Zust.	End-Zust.
$^{43}Ge^{75}$	E 3	$^7/_2{}^+$	$p_{1/2}$	$^{51}Mo^{93}$	E 4	$(^{23}/_2{}^+)$	$(^{15}/_2{}^+)$
$^{43}Se^{77}$	E 3	$^7/_2{}^+$	$p_{1/2}$	$^{63}Pd^{109}$	E 3	$(h_{11/2})$	$(d_{5/2})$
$^{43}Kr^{79}$	E 3	$(^7/_2{}^+)$	$p_{1/2}$	$^{63}Cd^{111}$	E 3	$h_{11/2}$	$d_{5/2}$
$^{45}Ge^{77}$	E 3	$p_{1/2}$	$^7/_2{}^+$	$^{71}Xe^{125}$	E 3	$(h_{11/2})$	$(d_{5/2})$
$^{45}Se^{79}$	E 3	$p_{1/2}$	$^7/_2{}^+$	$^{73}Xe^{127}$	E 3	$h_{11/2}$	$d_{5/2}$
$^{45}Kr^{81}$	E 3	$(p_{1/2})$	$(^7/_2{}^+)$	[$^{99}Dy^{165}$	E 3	$s_{1/2}$ od. $i_{13/2}$	$f_{7/2}$]
$^{47}Se^{81}$	E 3	$^7/_2{}^+$	$p_{1/2}$	$^{107}Hf^{179}$	M 3	$(h_{9/2})$	$(p_{3/2})$
$^{47}Kr^{83}$	E 3	$p_{1/2}$	$^7/_2{}^+$	$^{109}W^{183}$	E 3	$^7/_2{}^+$	$p_{1/2}$
$^{47}Sr^{85}$	E 3	$p_{1/2}$	$^7/_2{}^+$	$^{111}W^{185}$	E 3	$(^7/_2{}^+)$	$(p_{1/2})$
$_{43}Tc^{97}$	E 3	$p_{1/2}$	$^7/_2{}^+$	$^{115}Os^{191}$	M 3	$i_{13/2}$	$^7/_2{}^+$
$_{43}Tc^{99}$	E 3	$p_{1/2}$	$^7/_2{}^+$	[$_{73}Ta^{181}$	M 3	$(s_{1/2})$	$g_{7/2}$]
$_{45}Rh^{103}$	E 3	$^7/_2{}^+$	$p_{1/2}$	$_{77}Ir^{191}$	E 3	$h_{11/2}$	$d_{5/2}$
$_{45}Rh^{105}$	E 3	$p_{1/2}$	$^7/_2{}^+$	$_{79}Au^{197}$	E 3	$h_{11/2}$	$d_{5/2}$
$_{47}Ag^{107}$	E 3	$^7/_2{}^+$	$p_{1/2}$				
$_{47}Ag^{109}$	E 3	$^7/_2{}^+$	$p_{1/2}$				

am Termsystem von Kr^{83}, wie hier der $(g_{9/2})^7{}_{7/2}$-Zustand, zu dem der isomere Übergang führt, dicht über dem $(g_{9/2})^7{}_{9/2}$-Grundzustand mit einfacher jj-Kopplung liegt. Aus Tabelle 68 sieht man, daß sich auch fast alle restlichen Abweichungen, insbesondere die „verfrühten" Isomere $N = 63{,}99$, zwanglos unter Heranziehung der tieferen Terme in den Schalen deuten lassen, von denen wir ja schon wissen, daß sie durch die Paarungsenergie „aufgebrochen" werden können (vgl. S. 549, S. 552ff.). Nur Mo^{93}, W^{183}, W^{185} und Os^{191} lassen sich nicht ohne weiteres einordnen. Bei den Kernen in eckigen Klammern ist die in der Tabelle 68 angegebene Interpretation des Anfangs- und Endzustands wahrscheinlich unzutreffend, da diese Kerne in den (in Abb. 237 durch die üblichen Klammern unter der Abszisse gekennzeichneten) Gebieten deformierter Kerne liegen, in denen unser Modell versagt.

Schließen wir diese Gebiete aus, so bleiben wenige Unregelmäßigkeiten (Pd^{109}, Cd^{111}, Xe^{125}, Xe^{127}, Ir^{191}, Au^{197}) und nur zwei unverständliche (Mo^{93}, Os^{191}) Ausnahmen übrig. Insgesamt erhalten wir also eine recht gute Übereinstimmung von Theorie und

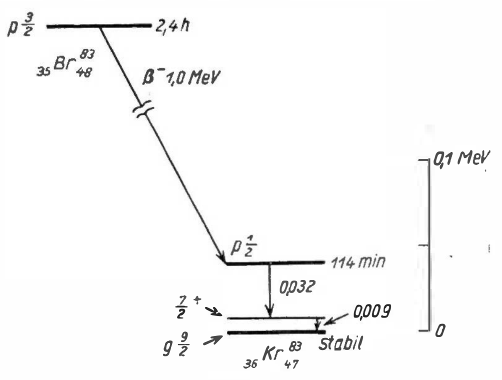


Abb. 239.
γ-Übergänge bei Kr^{83}. (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1])

Experiment, die wiederum eine Kontrolle der *Quantenzahlen* unseres Schalenmodells darstellt, denn nur sie haben wir zur Voraussage von ΔJ und des Paritätswechsels verwendet. Auch hier zeigt sich jedoch, daß die *Eigenfunktionen* unseres Modells recht merklich von der Wirklichkeit abweichen, wenn wir z. B. die sog. reduzierten Lebensdauern $f_\gamma t_\gamma$ betrachten, die die Erwartungswerte gewisser nichtdiagonaler Operatoren, also die Eigenfunktionen selbst, wesentlich enthalten. In Abb. 240 sind die $\log f_\gamma t_\gamma$-Werte elektrischer Übergänge über N aufgetragen (magnetische Übergänge siehe SIEGBAHN [S 55-1], S. 467, [G 55-1], [E 57-1]). Die experimentellen Punkte weichen stark von den theoretischen Geraden, den sog. Weisskopf-Einheiten, ab — meist um mehrere Größenordnungen. Diese Weißkopf-Einheiten erhält man aus dem Schalenmodell mit einfacher

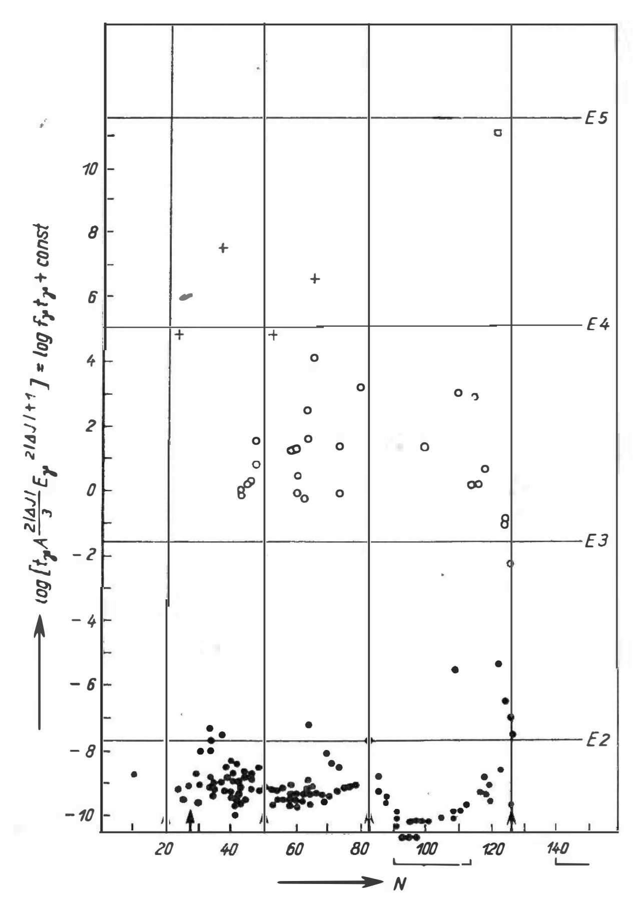


Abb. 240. $\log f_\gamma t_\gamma$-Werte von EL-Übergängen: ● E2, ○ E3, + E4, □ E5. Die waagerechten Geraden geben die theoretischen Werte bei einfacher jj-Kopplung („Weisskopf-Einheiten") an. $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, $R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm. (Nach GOLDHABER, SUNYAR [G 55-2] und WAY u. a., Ann. Rev. of Nucl. Sci. 6, 129 (1956))

jj-Kopplung, wenn man noch einige grobe Näherungen macht, vgl. [B 59-1], Kap. XII, 6. Während die Werte der E3- und E4-Übergänge keinerlei Regelmäßigkeiten zeigen außer der, meist größer als der theoretische Wert zu sein, sind die Werte der E2-Übergänge um ein bis zwei Größenordnungen *kleiner* als die theoretischen. Außerdem sind sie im Gebiet der deformierten Kerne (Klammern unter der Abszisse!) regelmäßig angeordnet. Auf diese Erscheinungen kommen wir beim Kollektiven Modell zurück.

f) β-Zerfall

Während die Eigenschaften der Grundzustände stabiler Kerne (Spins, magnetische Momente, Quadrupolmomente) *direkt* gemessen werden können, ist das bei instabilen Kernen meist nicht möglich. Der β-Zerfall gibt *indirekte* Auskunft über die Spins und Paritäten der Grundzustände instabiler Kerne. Darauf wird später (§ 144) eingegangen. Eine sehr ausführliche Behandlung findet sich in [F 55-1].

§ 113. Stripping-Reaktionen

Die Stripping-Reaktionen und ihre Umkehrung, die pick-up-Reaktionen, sind nach S. 192ff. Kernreaktionen zwischen einem Deuteron und einem Targetkern, die ohne Bildung eines Compoundzustands verlaufen. Speziell die Stripping-Reaktionen stellt man sich so vor, daß durch die große Ausdehnung des anfliegenden Deuterons (vgl. § 84) nur eins seiner beiden Nukleonen mit der Oberfläche des Targetkerns in Wechselwirkung tritt, das andere dagegen in so großem Abstand von ihm bleibt (mittlerer Abstand der Nukleonen im Deuteron $3 \cdot 10^{-13}$ cm), daß es den Targetkern „nicht spürt". Die starke Anziehung, die so nur auf den einen Bindungspartner im Deuteron wirkt, zerreißt die schwache Deuteronbindung, so daß das angezogene Nukleon vom Targetkern eingefangen wird, das andere Nukleon dagegen frei weiterfliegt. — Ausführlich werden die Stripping-Reaktionen in der Monographie von Butler [B 57-3] behandelt.

a) Winkelverteilung

Nach unserem Schalenmodell sollte das eingefangene Nukleon auf einem der unbesetzten Plätze im Termsystem des Targetkerns „eingebaut" werden, d. h. in einem Zustand mit bestimmtem l und j. Z. B. sollte in der Reaktion Cl^{35} (d, p) Cl^{36} das Neutron als 19tes auf den $d_{3/2}$-Term kommen (vgl. Abb. 232), wenn der Endkern im Grundzustand zurückbleibt, und auf einen der nächsthöheren Terme, wenn die Reaktion zu einem angeregten Zustand des Endkerns führt. Wir beschränken uns hier auf die Reaktionen, die zum Grundzustand des Endkerns führen.

Durch eine einfache halbklassische Betrachtung kann man nun zeigen, daß das wegfliegende Nukleon eine ausgeprägte Winkelverteilung haben muß, wenn

das andere Nukleon in einem Zustand mit bestimmten Bahndrehimpuls l eingefangen wird. Dazu betrachten wir zunächst die Impulsverhältnisse bei der Zerreißung des Deuterons (Abb. 241). Wenn wir uns das Zerreißen des Deuterons momentan erfolgend vorstellen, fliegt das eine Nukleon mit dem Impuls $\mathfrak{p}_2$ weg, den es im Augenblick des Zerreißens hatte. $\mathfrak{p}_2$ setzt sich zusammen aus dem halben Impuls $\mathfrak{p}$ des ankommenden Deuterons und einem Beitrag $\mathfrak{p}'$ von der inneren Bewegung im Deuteron:

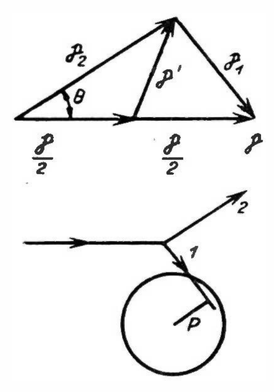


Abb. 241. Impulsverhältnisse bei Stripping-Reaktionen

$$\mathfrak{p}_2 = \frac{\mathfrak{p}}{2} + \mathfrak{p}'.$$

Wegen der Impulserhaltung des Gesamtsystems bekommt dann das andere Nukleon den Impuls $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_2$, womit wir annehmen, daß während des Zerreißens (praktisch) kein Impuls auf den Kern übertragen wird. Wir haben also

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p^2 + p_2^2 - 2pp_2 \cos\theta \\ &= (p - p_2)^2 + 4pp_2 \sin^2\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Beim Einfang hat das Nukleon den Bahndrehimpuls $L = p_1 P$, wobei der Stoßparameter $P \leqq R$ ist. L muß bei Einfang in einem Zustand l gleich $\hbar l$ oder besser $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ sein:

$$p_1 = \sqrt{(p - p_2)^2 + 4pp_2 \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\hbar}{P}\sqrt{l(l+1)}. \qquad (113.1)$$

Darin ist p fest vorgegeben und $p_2 = \left|\frac{\mathfrak{p}}{2} + \mathfrak{p}'\right|$ durch die Impulsverteilung im Deuterongrundzustand gegeben, genauer, auf einen bestimmten Bereich eingeschränkt: $\frac{p}{2} - p' \lesssim p_2 \lesssim \frac{p}{2} + p'$ mit $p' \lesssim \sqrt{ME_D}$.[1]) Man erkennt so, daß in (113.1) für ein bestimmtes l nur bestimmte Winkel θ (genauer: Winkelbereiche) möglich sind.

Die relativ einfache quantenmechanische Rechnung Butlers [B 51-1] ergibt tatsächlich eine ausgesprochene Bündelung der wegfliegenden Nukleonen, wobei die bevorzugten Winkel stark von dem Bahndrehimpuls l des eingefangenen Nukleons und natürlich von der kinetischen Energie des Deuterons abhängen, wie das Beispiel der Abb. 242 zeigt. Die gemessene Winkelverteilung gestattet also zu entscheiden,[2]) mit welchem l und damit welcher Parität das eingefangene

---

[1]) E_D = 2,226 MeV = Bindungsenergie des Deuterons. Mit $p' = \Delta p$ wird (vgl. (84.5))

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{p'} \geqq \frac{\hbar}{\sqrt{ME_D}} \sim 5 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}.$$

[2]) Verfeinerung der Butlerschen Rechnungen [B 56-5] hat zu einer beträchtlichen Komplizierung geführt, auf die wir hier nicht eingehen können.

Nukleon eingebaut wurde. Kennt man die Parität des Anfangskerns, bestimmt das gemessene l also auch die Parität des Endkerns:

l gerade kein Paritätswechsel,

l ungerade Paritätswechsel.

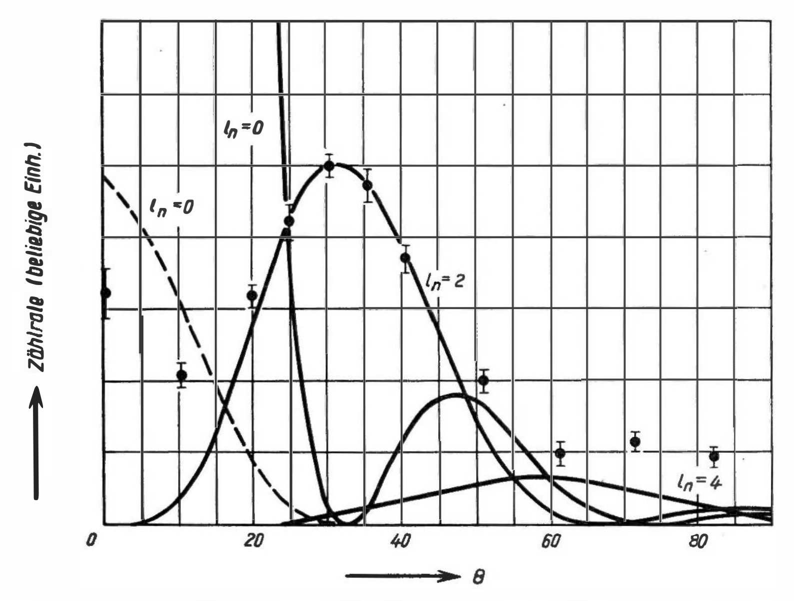


Abb. 242. Winkelverteilung der Protonen bei der Reaktion Cl^{35} (*d, p*) Cl^{36} im Massenmittelpunktsystem; Energie des Deuterons 6,9 MeV. Theoretische Kurven nach BUTLER [B 51-1]. Die gestrichelte Kurve ist die um einen Skalenfaktor 20 erniedrigte Kurve $l = 0$. (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1])

b) Vergleich mit dem Experiment

Für unser Beispiel Cl^{35} (*d, p*) Cl^{36} wurde die gemessene Winkelverteilung in Abb. 242 eingezeichnet. Man sieht, daß das Neutron in einem *d*-Zustand eingefangen wird, wie es für das 19. Neutron ($d_{3/2}$) sein muß. Auf analoge Weise konnten für die meisten leichten Kerne die l-Werte der eingefangenen Nukleonen bestimmt werden.

Die so gemessenen l-Werte (entnommen aus [B 57-1], S. 133, und [M 55-1], S. 99) vergleichen wir in Abb. 243 in ähnlicher Form mit den theoretischen der einfachen jj-Kopplung, wie wir es in Abb. 231 für die Spinwerte taten. Zusätzlich wurde durch Pfeilrichtung (experimentell) und Vorzeichen (theoretisch) die Parität des eingefangenen Nukleons angegeben, obwohl das eigentlich unnötig ist, da diese Parität aus l eindeutig folgt. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung vorzüglich.

Das gemessene l gestattet darüber hinaus, aus dem Drehimpulserhaltungssatz auf das j des eingefangenen Nukleons zu schließen. Da nur das eingefangene Nukleon in Wechselwirkung

mit dem Kern tritt, muß für das System Kern + eingefangenes Nukleon der Gesamtdrehimpuls erhalten bleiben:

$$\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 = \vec{l} + \vec{s} = \mathfrak{j} \quad \text{oder} \quad \vec{l} = \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 - \vec{s};$$

$\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ sind die „Spins" von Anfangs- und Endkern und $\vec{l}$ und $\vec{s}$ Bahndrehimpuls und Spin des eingefangenen Teilchens im Endkern. Die letzte Gleichung besagt für die zugehörigen Quantenzahlen

$$|J_1 - J_2| - \tfrac{1}{2} \leqq l \leqq J_1 + J_2 + \tfrac{1}{2}, \tag{113.2}$$

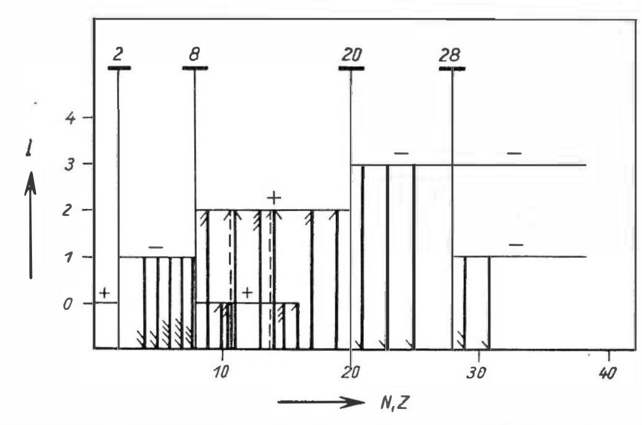


Abb. 243. Bahndrehimpuls l des bei Stripping-Reaktionen eingefangenen Nukleons. Die waagerechten Geraden geben die theoretischen l-Werte der Schalenmodells an, die Länge der Pfeile die experimentellen l-Werte. Plus- bzw. Minuszeichen bedeuten die theoretische Parität, Pfeilspitze auf bzw. ab die experimentelle Parität +1 bzw. −1 Gemessene l-Werte. (Nach MAYER, JENSEN [M 55-1] und BURCHAM, Handbuch der Physik 40)

woraus sich bei meist bekanntem J_1 und gemessenem l der mögliche Wertebereich für J_2 ermitteln läßt. Bei ungeraden Kernen läßt sich dann unter Voraussetzung einfacher jj-Kopplung von J_2 auf j schließen. In unserem Beispiel ist $J_1 = \frac{3}{2}$, $l = 2: J_2 = 0, 1, 2, 3, 4$ (gemessen 2). Im Beispiel O^{16} (d, p) O^{17} ist $J_1 = 0$, $l = 2: J_2 = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, also $j = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ (gemessen $\frac{5}{2}$, Schalenmodell $d_{5/2}$). —

Unser Beispiel Cl^{35} (d, p) Cl^{36} ist noch in anderer Hinsicht bemerkenswert. Für die Grundzustände wurde gemessen $J_1 = \frac{3}{2}$, $J_2 = 2$, beide gerade Parität. Also ist nach (113.2) $l = 0, 1, 2, 3, 4,$ und da kein Paritätswechsel erfolgt, $l = 0, 2, 4$ möglich. Damit bietet sich hier eine besonders strenge Prüfungsmöglichkeit des Schalenmodells, denn es läßt hier nur $l = 2$ zu $(d_{3/2})$, alle anderen Terme der Schale sind bei $N = 18$ bereits besetzt. Da Zustände mit kleinerem l im allgemeinen einen größeren Wirkungsquerschnitt haben als solche mit größerem l (vgl. Abb. 242), müßte sich ein — nach den Erhaltungssätzen möglicher — Zustand mit $l = 0$ experimentell deutlich bemerkbar machen, wenn er vorhanden ist.

Tatsächlich zeigt der kleine Anstieg der experimentellen Kurve bei 0° (Abb. 242), daß ein kleiner Anteil $l = 0$ im wirklichen Zustand des eingefangenen Neutrons vorhanden ist. Doch ist dieser Anteil sehr gering, gemessen an der theoretischen Kurve $l = 0$; man kann daraus abschätzen, daß der Einfangszustand höchstens 3% s-Zustand neben dem Hauptanteil d-Zustand enthält.

Tabelle 69. Zum Schalenmodell

	Anzahl der äußeren Teilchen:		Unregelmäßigkeiten		Ausnahmen
	0 1	ν ger. ν ung. } mit einf. jj-Koppl.	(m. einf. jj-Koppl. erklärbar)	Abweichg. von einf. jj-Koppl.	Abweichungen vom Schalenmodell
Spins	$J_0 = \begin{cases} 0 \\ j \end{cases}$	$J_0 = \begin{cases} 0 \\ j \end{cases}$	Se^{75}?, Cd^{111} F^{19}, $Cs^{127,129}$	$J_0 = j - 1$: Ne^{21}, Ti^{47}?, Se^{79}? Na^{23}, Mn^{55}?	1. $J_0 = j - 1$: (Ne^{21}), Ti^{47}, Se^{79}, (Na^{23}), Mn^{55} 2. deformierte Kerne: $Gd^{155,157}$, Yb^{171}, $Hf^{177,179}$; $U^{233,235}$, $Pu^{239,241}$ Ho^{165}, Lu^{175}, Ta^{181}, $Re^{185,187}$; Ac^{227}, Pa^{231}, $Np^{237,239}$, $Am^{241,243}$
Magnetische Mom.	$\mu = \begin{cases} 0 \\ g_j \cdot j \end{cases}$	$\mu = \begin{cases} 0 \\ g_j \cdot j \end{cases}$		Abweichung von Schmidt-Kurven: fast alle Kerne	falsche Schmidt-Gruppe bei deformierten Kernen: $Dy^{161,163}$, Yb^{173}, Os^{189} Eu^{153}, Tm^{169}
Quadrupolmomente	0,1 Prot.: $Q = \begin{cases} 0 \\ Q^j \end{cases}$ 0,1 Neutr.: $Q = \begin{cases} 0 \\ \frac{Z}{A^2} Q^j \end{cases}$	ν Prot.: $Q = \begin{cases} 0 \\ \frac{2j - 2\nu + 1}{2j - 1} Q^j \end{cases}$ ν Neutr.: $Q = \begin{cases} 0 \\ \frac{Z}{A^2} \frac{2j - 2\nu + 1}{2j - 1} Q^j \end{cases}$		(u,g)-Kerne von gleicher Größenordnung wie (g,u)-Kerne ($N \leqq 50$)	1. sehr große Quadrupolmomente (deform. Kerne): $N, Z \leqq 50$: ($Se^{75,79}$), Mn^{55}, Co^{59}, $In^{113,115}$ $N, Z > 50$: $Nd^{143,145}$, Er^{167}, Yb^{173}, $Hf^{177,179}$, Os^{189}; $Sb^{121,123}$, $J^{127,129,131}$, La^{139}, $Eu^{151,153}$, Ho^{165}, Lu^{175}, Ta^{181} $Re^{185,187}$, $Ir^{191,193}$, Au^{197}; Ac^{227}, $Am^{241,243}$ 2. sehr große Quadrupolmomente überwiegend positiv
γ-Übergänge	$\Delta J = \Delta j$ $\Delta \Pi = \Delta \pi$	$\Delta J = \Delta j$ $\Delta \Pi = \Delta \pi$	Pd^{109}, Cd^{111}, $Xe^{125,127}$ Ir^{191}, Au^{197}	E3-Übergänge zwischen $\frac{7}{2}^+$ ($J = j - 1$) und $p_{1/2}$: $Ge^{75,77}$, $Se^{77,79,81}$ $Kr^{79,81,83}$, Sr^{85} $Tc^{97,99}$, $Rh^{103,105}$ $Ag^{107,109}$	1. E3-, M3-, E4-Übergänge: Mo^{93}, Os^{191} deformierte Kerne: Dy^{165}, Hf^{179}, $W^{183,185}$, Ta^{181} (2. E3-Übergänge zwischen $\frac{7}{2}^+$ ($J = j - 1$) und $p_{1/2}$?) 3. E2-Übergänge: reduzierte Lebensdauern *zu klein*

§ 114. Zusammenfassung zum Schalenmodell

Überblicken wir abschließend den Vergleich des Schalenmodells mit den experimentellen Daten, so zeigt sich, daß das Modell in Anbetracht seiner Einfachheit erstaunlich leistungsfähig ist. Es ergibt bereits in seiner einfachsten Form (einfache jj-Kopplung) die richtigen Quantenzahlen der Grundzustände und niedrigen angeregten Zustände ungerader Kerne. Bringt man Korrekturen an (Konfigurationsmischung, allgemeinere Kopplungen u. ä.), bekommt man häufig auch die Erwartungswerte in brauchbarer Näherung. Bei einer Anzahl leichter Kerne ist es sogar gelungen [I 53-1], [K 50-1], das Termsystem im einzelnen theoretisch weitgehend zu erhalten und damit fast die Genauigkeit des Schalenmodells der Hülle zu erreichen.
Die wichtigsten Aussagen des Modells sind zusammen mit den Unregelmäßigkeiten, den Ausnahmen und ihrer Deutung in Tabelle 69 zusammengestellt. Die letzte Spalte zeigt, daß das Modell nur dort versagt, wo Deformationen der Kerne vorliegen, d. h. zwischen den höheren Schalenabschlüssen und sehr wahrscheinlich auch bei den Kernen mit $J_0 = j - 1$, wie wir noch sehen werden.

2. KOLLEKTIVES MODELL

A. Quadrupolmomente

Wir sahen auf S. 574ff., daß das Schalenmodell bei den schweren Kernen zwischen den Schalenabschlüssen viel zu kleine Quadrupolmomente voraussagt: Die beobachteten Werte waren bis zu einer Größenordnung größer. Es versagt nach S. 553ff. und S. 563 in diesen Gebieten auch häufig bei den Kernspins und magnetischen Momenten.
Nun wissen wir, daß nach dem Schalenmodell das gesamte Quadrupolmoment nur von den äußeren Teilchen (speziell den äußeren Protonen) stammt; der Rumpf trägt nichts bei, er ist kugelsymmetrisch. Da bei den schweren Kernen zwischen den Schalenabschlüssen um eine *Größenordnung* höhere Quadrupolmomente beobachtet werden, wie sie durch die wenigen äußeren Teilchen niemals erzeugt werden können, schloß Rainwater [R 51-1], daß dort offenbar

der Rumpf selbst zum Quadrupolmoment beiträgt, also nicht kugelsymmetrisch ist.

Man kann sich das etwa so vorstellen, daß die äußeren Teilchen durch die Wechselwirkung (überwiegend Anziehung) mit den Teilchen des Rumpfes letztere „etwas mit sich ziehen", d. h. den Rumpf etwas in der Richtung deformieren, wie die Teilchendichte der äußeren Teilchen geformt ist.[1])

[1]) Man kann sich auch vorstellen, daß die „äußeren" Teilchen (vgl. Fußnote 1, S. 547) von innen her auf die Kernoberfläche einen „Zentrifugaldruck" ausüben.

Haben wir z. B. nur ein äußeres Teilchen, besetzt es nach S. 561 auf seinem Term $\bar{n}lj$ einen Zustand mit maximaler z-Komponente des Drehimpulses $m_j = j$ oder, wenn wir der Einfachheit halber vom Spin der Nukleonen absehen, $m_l = l$. Das bedeutet halbklassisch einen Bahnumlauf in einer Ebene senkrecht zur z-Achse, quantenmechanisch eine Eigenfunktion $\propto Y_l^l$ mit der in Abb. 244 links oben gezeichneten Gestalt der Wahrscheinlichkeitsdichte $\propto (\mathfrak{P}_l^l)^2$. Nach unserer Vorstellung würde das äußere Teilchen in diesem Zustand die darunter gestrichelt gezeichnete Abplattung des Rumpfes hervorrufen. Bei weiterer Auffüllung des Terms werden die Zustände $|m_l| = l - 1, \ldots, 0$ besetzt, deren Gestalt ($\propto (\mathfrak{P}_l^{l-1})^2, \ldots, (\mathfrak{P}_l^0)^2$) nach Abb. 244 die Abplattung abschwächt und schließlich zu verlängertem Kern (Rumpf) führt.

Abb. 244

Obere Zeile: Gestalt der Eigenfunktion (qualitativ) in den verschiedenen d-Zuständen mit $m_l = \pm 2, \pm 1, 0$. Es wurden die auf 1 normierten Kugelfunktionen $\mathfrak{P}_l^m$ verwendet, vgl. S. 593. Untere Zeile: Gestalt des Rumpfes (schematisch), wenn er von den äußeren Teilchen deformiert wird, bei allmählicher Auffüllung a-b-c des d-Terms der äußeren Teilchen

Wir stellen uns also vor, daß die äußeren Teilchen durch ihre Wechselwirkung mit denen des Rumpfes ein zusätzliches Quadrupolmoment des Rumpfes „induzieren". Dieses induzierte Quadrupolmoment kann viel größer sein als das der äußeren Teilchen, da an ihm alle Protonen des Rumpfes beteiligt sind.

B. Theorie

§ 115. Einleitung: Orientierende Betrachtungen

Wir wollen zunächst durch eine einfache *Störungsrechnung* zeigen, daß tatsächlich die Wechselwirkung zwischen Rumpf und äußeren Teilchen zu einer Deformation des Rumpfes führen kann. Dabei vernachlässigen wir den Spin der Nukleonen, denken uns den Rumpf der Einfachheit halber mit scharfer Oberfläche und nehmen eine schwache rotationssymmetrische ellipsoidähnliche Verformung an, für die der Abstand $R(\vartheta)$ der Oberfläche vom Schwerpunkt gegeben ist durch

$$R(\vartheta) = R\left(1 + \frac{2\varepsilon}{3} P_2(\cos\vartheta)\right) = R\left(1 + \frac{\varepsilon}{3}(3\cos^2\vartheta - 1)\right). \qquad (115.1)$$

Die Zahl ε ist ein Maß für die Abweichung unseres Quasiellipsoids von der Kugel mit Radius R: Bestimmt man die Länge der Hauptachsen $a = R(0)$, $b = R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, wird

$$\varepsilon = \frac{a-b}{R} = \frac{\Delta R}{R}.$$

Wir setzen geringe Deformation voraus: $|\varepsilon| \ll 1$.
Die Wechselwirkung des Rumpfs mit den äußeren Teilchen beschreiben wir in einfachster Weise so, daß wir wie beim Schalenmodell im Inneren des Rumpfes ein konstantes negatives Potential $-V_0$ mit scharfem Rand ansetzen,

$$V(r,\theta) = \begin{cases} -V_0 & r < R(\theta), \\ 0 & r > R(\theta), \end{cases}$$

das nur jetzt nicht mehr kugelsymmetrisch ist, sondern die Form des Quasiellipsoids hat. Wir sehen nun den kugelsymmetrischen Rumpf mit Radius R als nullte Näherung und die Änderung des Potentials durch die Deformation als Störung an. Das Störpotential $V'(r,\theta)$ ist dann also $-V_0$, wo der Rumpf über die Kugel hinausragt, $+V_0$ im umgekehrten Fall, sonst überall Null (s. Abb. 245).

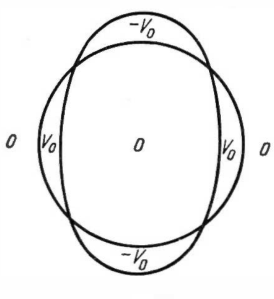


Abb. 245. Wert des Störpotentials

Beschränken wir uns auf den einfachsten Fall eines einzigen äußeren Teilchens, dann hat es in nullter Näherung die Eigenfunktion $\psi^0 = f_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$, und die Störungsenergie beträgt

$$\Delta E_T = \int \psi^{0*} V'(r,\theta)\, \psi^0\, d\tau.$$

Setzen wir darin wegen $|R - R(\theta)| \ll R$ den Radialteil der Eigenfunktion $f(r) \sim f(R)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta E_T &\sim -V_0 |f(R)|^2 \int |Y_l^m(\theta\varphi)|^2 \int_R^{R(\theta)} r^2\, dr\, d\Omega \\ &= -V_0 |f|^2 \int |Y_l^m|^2 \frac{1}{3}(R^3(\theta) - R^3)\, d\Omega \\ &\sim -\varepsilon \frac{R^3}{3} V_0 |f|^2 \int |Y_l^m|^2 (3\cos^2\theta - 1)\, d\Omega \\ &= -\varepsilon \frac{R^3}{3} V_0 |f(R)|^2 \frac{Q_T}{\langle r^2 \rangle} \end{aligned}$$

$$\Delta E_T = -\varepsilon U \frac{Q_T}{\langle r^2\rangle}, \quad U = \frac{R^3}{3} V_0 |f(R)|^2,$$

wenn wir Terme in ε^2 und höher vernachlässigen. Q_T ist dabei das Quadrupolmoment des einen äußeren Teilchens, wie es sich nach dem Schalenmodell ergibt (111.8).

Eine Deformation des Rumpfes ist also verknüpft mit der Energiestörung ΔE_T des äußeren Teilchens. Außerdem erfolgt eine Änderung der Energie der Oberflächenspannung des Rumpfs, die $\propto \varepsilon^2$ ist, wie wir auf S. 597 sehen werden: $\Delta E_{\text{Ob}} = \frac{S}{2}\varepsilon^2$ $(S > 0)$.[1]) Insgesamt ergibt sich bei Deformation die Energieänderung

$$\Delta E = \Delta E_T + \Delta E_{\text{Ob}} = -U\frac{Q_T}{\langle r^2\rangle}\varepsilon + \frac{S}{2}\varepsilon^2.$$

Durch die Wechselwirkung des äußeren Teilchens mit dem Rumpf tritt darin der in ε lineare Term ΔE_T auf, durch den sich ein Energieminimum *bei endlicher Deformation* ergibt: Der Wert von ε, bei dem ΔE ein Minimum annimmt, ist

$$\varepsilon_{\text{min}} = \frac{U}{S}\frac{Q_T}{\langle r^2\rangle}\,; \quad \Delta E_{\text{min}} = -\frac{1}{2}\frac{U^2}{S}\frac{Q_T^2}{\langle r^2\rangle^2} = -\frac{S}{2}\varepsilon_{\text{min}}^2. \tag{115.2}$$

Wir sehen also:

Durch die Wechselwirkung zwischen äußeren Teilchen und Rumpf ist ein deformierter Kern ($\varepsilon = \varepsilon_{\text{min}}$) *energetisch günstiger als ein kugelsymmetrischer Kern* ($\varepsilon = 0$).

Man kann zeigen, daß das auch im Falle mehrerer äußerer Teilchen gilt, denn die Beschränkung auf ein äußeres Teilchen war für obige Überlegung offenbar nicht wesentlich.

Das zur Gleichgewichtsdeformation ε_{min} gehörige Quadrupolmoment des Rumpfes läßt sich leicht berechnen, wenn wir den Rumpf als homogen geladenes (Quasi-) Ellipsoid der Ladungsdichte

$$e\varrho_e = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

ansehen:

$$Q_0 = \varrho_e\int r^2(3\cos^2\theta - 1)\,d\mathfrak{r} = 2\varrho_e\iint\int_0^{R(\theta)} r^2\, r^2\, dr\, P_2^0(\cos\theta)\, d\Omega.$$

Mit (115.1) ergibt die r-Integration für kleine ε $(P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\Theta - 1))$

$$\int_0^{R(\theta)} r^4\,dr = \frac{1}{5}R^5(\theta) \sim \frac{1}{5}R^5\left(1 + 5\frac{2\varepsilon}{3}P_2^0\right),$$

und man erhält

$$Q_0 = 2\varrho_e R^5\frac{2\varepsilon}{3}\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{5}$$

$$Q_0 = \frac{4}{5}ZR^2\varepsilon = \frac{4}{5}ZR^2\frac{\Delta R}{R}, \tag{115.3a}$$

---

[1]) In diesem Term muß man sich auch alle anderen Terme in ε^2, die wir in unserer Rechnung vernachlässigt haben, eingerechnet denken, was am Vorzeichen von S nichts ändert [P 52-1].

im Gleichgewichtszustand also

$$Q_0 = \frac{4}{5} Z R^2 \frac{U}{S} \frac{Q_T}{\langle r^2 \rangle} . \tag{115.3b}$$

Aus (115.2) bzw. (115.3b) sehen wir, daß die Deformation bzw. das Quadrupolmoment um so größer wird, je kleiner die Oberflächenspannung S, d. h. je „weicher" der Kern ist. Sie wächst auch mit der Stärke der Wechselwirkung $V_0 \propto U$ zwischen Rumpf und äußeren Teilchen. Q_0 ist proportional zum Quadrupolmoment des äußeren Teilchens Q_T mit positivem Proportionalitätsfaktor, so daß der Rumpf stets qualitativ die Form der Eigenfunktion des äußeren Teilchens hat, wie wir es erwarteten (S. 589, Abb. 244a).

§ 116. Oberflächenschwingungen eines Kerns

Nach diesen Vorüberlegungen kommen wir zur eigentlichen Theorie des Kollektiven Modells, auch oft genannt „unified model", wie es vor allem von A. Bohr und Mottelson in den grundlegenden Arbeiten [B52-1], [B53-1] und anderen entwickelt wurde. (Zusammenfassende Literatur: Villars [V 57-1], Handbuchartikel von Moszkowski [M 57-1].) Sein wesentlicher Zug besteht darin, daß es die Wechselwirkung zwischen Rumpf und äußeren Teilchen genauer untersucht, indem es die Deformationen nicht nur statisch behandelt, wie wir es eben taten, sondern auch und vor allem die *dynamischen* Eigenschaften des deformierbaren Rumpfes und ihre Rückwirkung auf die äußeren Teilchen berücksichtigt.

Um die Deformationseigenschaften des Rumpfes zu erfassen, liegt es nahe, *versuchsweise* den Rumpf als Flüssigkeitstropfen zu behandeln, da wir wissen, daß sich die Beschreibung des Kerns als Flüssigkeitströpfchen z. B. bei den Bindungsenergien der Kerne (Bethe-Weizsäcker-Formel, vgl. S. 30 ff.) und bei der Kernspaltung (§ 48) bewährt hat. Wir entwickeln damit ein Modell, das ein Mittelding zwischen Tröpfchen- und Schalenmodell ist; denn die Einteilung in Rumpf und äußere Teilchen und die Bewegung der äußeren Teilchen in dem vom Rumpf gebildeten Potential entstammt dem Schalenmodell, die Bewegungen des Rumpfes dagegen werden nach dem Tröpfchenmodell behandelt. Wir wollen dieses Modell als „*hydrodynamische Näherung*" des Kollektiven Modells bezeichnen; man könnte es auch „Kollektives Tröpfchenmodell" nennen.

a) Klassische Behandlung der Oberflächenschwingungen

Wir betrachten als einfachsten Fall einen Kern mit abgeschlossener Schale oder Unterschale, der also keine äußeren Teilchen besitzt, sozusagen „nur aus Rumpf" besteht. Damit haben wir in hydrodynamischer Näherung die Bewegungen eines Flüssigkeitströpfchens allein zu behandeln, d. h., wir beschäftigen uns in diesem Spezialfall mit dem reinen Tröpfchenmodell.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Tröpfchen eine scharf definierte Oberfläche hat, die wir in Verallgemeinerung von (115.1) durch

$$R(\theta, \varphi) = R(1 + \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi)) \equiv R(1 + \zeta) \tag{116.1}$$

beschreiben. Die $Y_l^m(\theta, \varphi)$ seien die *normierten* Kugelflächenfunktionen, die sich durch die normierten (zugeordneten) Kugelfunktionen $\mathfrak{P}_l^m(\cos\theta)$ ausdrücken als

$$Y^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{P}_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \qquad m = -l, \ldots, +l,$$

$$m \geq 0: \quad \mathfrak{P}_l^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta) \text{ (vgl. S. 487)},$$

$$m < 0: \quad \mathfrak{P}_l{}^m = (-1)^m \mathfrak{P}_l^{-m},$$

$$\int Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

$$\int \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^m \sin\theta\, d\theta = \delta_{ll'}.$$

Man rechnet leicht nach, daß die Koeffizienten α_{lm} – die im allgemeinen komplex sind – die Bedingung

$$\alpha_{l,m}^* = (-1)^m \alpha_{l,-m}$$

erfüllen müssen, damit $R(\theta, \varphi)$ reell ist. Die Summation $\sum_{lm}$ in (116.1) geht für festes l über $m = -l, \ldots, +l$. Der Bereich der l-Werte hat eine obere Grenze, die wir später festlegen werden. Bei den niedrigen Werten von l lassen wir die Summanden mit $l = 1$ weg, da sie (näherungsweise) nur eine reine Translation des Tröpfchens geben.[1]) (Man zeichne sich das auf!)

Dagegen dürfen wir den niedrigsten Summanden $l = 0$ nicht weglassen, da wir Inkompressibilität (Volumenkonstanz) unseres Tröpfchens annehmen wollen:

$$V = \int d\tau = \iint \int_0^{R(\theta,\varphi)} r^2\, dr\, d\Omega = \frac{1}{3} \iint R^3(\theta, \varphi)\, d\Omega$$

muß gleich $\frac{4\pi}{3} R^3$ sein. Setzen wir nämlich wieder kleine Deformationen voraus,

$$\zeta \ll 1,$$

und entwickeln nach Potenzen von ζ, so ergibt sich bis zur zweiten Ordnung

$$\begin{aligned} V &= \frac{R^3}{3} \int (1 + 3\zeta + 3\zeta^2)\, d\Omega \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 + R^3 \sum_{lm} \alpha_{lm} \int Y_l^m d\Omega + R^3 \sum_{lm} \sum_{l'm'} \alpha_{lm}^* \alpha_{l'm'} \int Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} d\Omega \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 + R^3 \alpha_{00} \sqrt{4\pi} + R^3 \sum_{lm} |\alpha_{lm}|^2, \end{aligned}$$

[1]) Diese Terme führen auf sog. Dipolschwingungen, die für die Erklärung der Riesenresonanz des Kernphotoeffekts wichtig sind [S 50-1]. Diese Riesenresonanz ist eine weitere wichtige Anwendung des kollektiven Modells, auf die wir hier nicht eingehen können.

also

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{lm} |\alpha_{lm}|^2 \neq 0 . \qquad (116.2)$$

Das Innere unseres Tröpfchens sei mit einer reibungsfreien, inkompressiblen und wirbelfreien Flüssigkeit erfüllt, so daß

$$\text{also} \quad \mathfrak{v} = \operatorname{grad} \Phi(\mathfrak{r}), \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{v}(\mathfrak{r}) = 0, \qquad (116.3a)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}(\mathfrak{r}) = 0 \qquad (116.3b)$$

gilt, wo $\mathfrak{v}(\mathfrak{r})$ die Geschwindigkeit der Strömung unserer Flüssigkeit ist und $\Phi(\mathfrak{r})$ das *Geschwindigkeitspotential.* Wegen der Inkompressibilität (116.3b) und der Wirbelfreiheit (116.3a) muß Φ eine Potentialfunktion sein:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = 0;$$

also ist

$$\Phi(\mathfrak{r}) = \sum_{lm} \beta_{lm} r^l Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{lm} \beta_{lm} r^l \mathfrak{P}_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}. \qquad (116.4)$$

Die Koeffizienten $\beta_{lm} = (-1)^m \beta^*_{l,-m}$ hängen durch die Randbedingung

$$\frac{\partial R(\theta\varphi)}{\partial t} = \mathfrak{v}_r(R(\theta\varphi)) = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{R(\theta\varphi)}$$

mit den $\alpha_{lm} = \alpha_{lm}(t)$ zusammen, denn diese Bedingung bedeutet zunächst

$$R \sum_{lm} \dot{\alpha}_{lm} Y_l^m = \sum_{lm} \beta_{lm} \cdot l(R(\theta\varphi))^{l-1} Y_l^m. \qquad (116.5)$$

Darin sehen wir erstens die $\dot{\alpha}_{lm}$ als klein von erster Ordnung an, womit wir uns auf langsame Oberflächenbewegung beschränken. Zweitens behandeln wir auch die β_{lm} als Größen 1. Ordnung, so daß Φ und damit $\mathfrak{v}$ in 0. Ordnung verschwinden: Keine Strömung bei Kugelgestalt ($\alpha_{lm} = 0$), d.h., alle Strömung im Tröpfchen soll nur von den Deformationen herstammen, es gibt keine „Eigenströmung".

Unter diesen Annahmen ist (116.5) in 1. Ordnung erfüllt, wenn wir setzen

$$\beta_{lm} = \frac{1}{l R^{l-2}} \dot{\alpha}_{lm} .$$

Wir wollen nun die Gesamtenergie unseres Tröpfchens unter der Annahme einer konstanten Dichte ϱ der Flüssigkeit und unter Vernachlässigung von Coulomb-Effekten *bis zur 2. Ordnung* berechnen. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{\varrho}{2} \int \mathfrak{v}^2(\mathfrak{r})\, d\mathfrak{r} = \frac{\varrho}{2} \int |\operatorname{grad} \Phi|^2 d\mathfrak{r}$$

$$= \frac{\varrho}{2} \int \left[\left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|^2 \right] d\mathfrak{r} .$$

Das ergibt mit (116.4)

$$T = \frac{\varrho}{4\pi} \sum_{ll'} \sum_{mm'} \beta_{lm} \beta^*_{l'm'} \int r^{l+l'-2} \Big[l\, l'\, \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^{m'} + \frac{\partial \mathfrak{P}_l^m}{\partial\theta} \frac{\partial \mathfrak{P}_{l'}^{m'}}{\partial\theta} + \frac{m m'}{\sin^2\theta} \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^{m'} \Big] e^{i(m-m')\varphi}\, d\tau$$

$$= \frac{\varrho}{4\pi} \sum_{ll'} \sum_{mm'} \beta_{lm} \beta^*_{l'm'} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Big[l l' \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^{m'} + \frac{\partial \mathfrak{P}_l^m}{\partial\theta} \frac{\partial \mathfrak{P}_{l'}^{m'}}{\partial\theta} + \frac{m m'}{\sin^2\theta} \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^{m'} \Big] e^{i(m-m')\varphi} \int_0^{R(\theta\varphi)} r^{l+l'}\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Das ist von 2. Ordnung, wenn wir $R(\theta,\varphi) \sim R$ setzen, so daß die r-Integration $\frac{R^{l+l'+1}}{l+l'+1}$ und die φ-Integration $m = m'$ ergibt. Die Ableitungen nach θ und den Summanden mit $\sin^{-2}\theta = 1 + \mathrm{ctg}^2\theta$ formt man mit Hilfe der folgenden Beziehungen um:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_l^m}{\partial\theta} = -a_{lm} \mathfrak{P}_l^{m+1} + m \,\mathrm{ctg}\,\theta \cdot \mathfrak{P}_l^m = + b_{lm} \mathfrak{P}_l^{m-1} - m\,\mathrm{ctg}\,\theta \cdot \mathfrak{P}_l^m, \tag{116.6a}$$

$$m\,\mathrm{ctg}\,\theta \cdot \mathfrak{P}_l^m = \frac{1}{2} (a_{lm} \mathfrak{P}_l^{m+1} + b_{lm} \mathfrak{P}_l^{m-1}). \tag{116.6b}$$

$$a_{lm} = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}, \quad b_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}, \qquad \frac{1}{2}(a_{lm}^2 + b_{lm}^2) = l^2 + l - m^2.$$

So ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_l^m}{\partial\theta} \frac{\partial \mathfrak{P}_{l'}^m}{\partial\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^m = m^2 \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^m + \frac{1}{2} (a_{lm} a_{l'm} \mathfrak{P}_l^{m+1} \mathfrak{P}_{l'}^{m+1} + b_{lm} b_{l'm} \mathfrak{P}^{m-2} \mathfrak{P}_{l'}^{m-1}) \tag{116.7}$$

und damit unter Benutzung der Orthogonalitätseigenschaft der $\mathfrak{P}_l^m$

$$T = \frac{\varrho}{2} \sum_{lm} |\beta_{lm}|^2 \frac{R^{2l+1}}{2l+1} \Big[m^2 + l^2 + \frac{1}{2}(a_{lm}^2 + b_{lm}^2) \Big]$$

$$= \frac{\varrho}{2} \sum_{lm} |\beta_{lm}|^2 R^{2l+1} \cdot l = \frac{\varrho}{2} \sum_{lm} |\dot{\alpha}_{lm}|^2 l^{-1} R^5,$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{lm} B_l |\dot{\alpha}_{lm}|^2, \qquad B_l = l^{-1} \varrho R^5 = l^{-1} \frac{3AM}{4\pi} R^2.$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie der Oberflächenspannung bestimmen wir den Flächenzuwachs ΔF, den ein Flächenelement

$$df_0 = da_0\, db_0 = R\, d\theta \cdot R \sin\theta\, d\varphi$$

der Kugel $R(\theta\varphi) = R$ erfährt, wenn die Kugel zum Ellipsoid deformiert wird.

Nach Abb. 246 können wir den Übergang des Flächenelements df_0 der Kugel in das Element df des Ellipsoids in zwei Stufen einteilen, indem wir zunächst eine Parallelverschiebung des Kugelflächenelements $df_0 = da_0\, db_0$ um $R\zeta = R(\theta\varphi) - R$ vornehmen, was zu

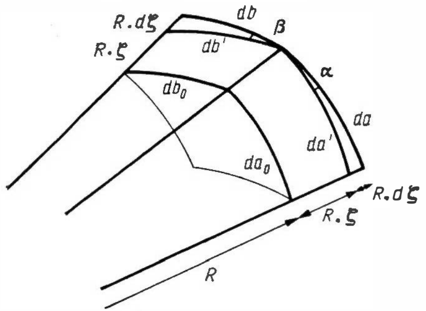


Abb. 246. Änderung eines Flächenelements der Kernoberfläche bei Deformation des Kerns

$$df' = da'\, db' = R(\theta\varphi)\, d\theta \cdot R(\theta\varphi) \sin\theta\, d\varphi$$

führt. Das gibt den Flächenzuwachs

$$\begin{aligned} \Delta_1 F &= da'\, db' - da_0\, db_0 \\ &= (R^2(\theta\varphi) - R^2)\, d\Omega \\ &= R^2 [(1+\zeta)^2 - 1]\, d\Omega \\ &= R^2 (2\zeta + \zeta^2)\, d\Omega. \end{aligned}$$

Danach wird die Schrägstellung des Flächenelements df des Ellipsoids gegenüber df' berücksichtigt, die nach Abb. 246 ergibt ($\alpha, \beta \ll 1$):

$$\begin{aligned} da &= \frac{da'}{\cos\alpha} = \frac{R(\theta\varphi)\, d\theta}{\cos\alpha} \sim \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) R(\theta\varphi)\, d\theta, \\ db &= \frac{db'}{\cos\beta} = \frac{R(\theta\varphi) \sin\theta\, d\varphi}{\cos\beta} \sim \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) R(\theta\varphi) \sin\theta\, d\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \operatorname{tg}\alpha = \frac{R\, d\zeta}{da'} = \frac{R}{R(\theta\varphi)} \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}, \qquad (d\zeta = d\zeta\,|_{\varphi = \text{const}}), \\ \beta &\sim \operatorname{tg}\beta = \frac{R\, d\zeta}{db'} = \frac{R}{R(\theta\varphi)\sin\theta} \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}, \qquad (d\zeta = d\zeta\,|_{\theta = \text{const}}), \end{aligned}$$

der Flächenzuwachs also

$$\begin{aligned} \Delta_2 F &= da\, db - da'\, db' \\ &= \left[\left(1 + \frac{R^2}{2R^2(\theta\varphi)} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2\right) \left(1 + \frac{R^2}{2R^2(\theta\varphi)\sin^2\theta} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2\right) - 1\right] R^2(\theta\varphi)\, d\Omega. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die potentielle Energie der Oberflächenspannung

$$\begin{aligned} U &= \gamma \int \Delta F \equiv \gamma \int (\Delta_1 F + \Delta_2 F) \\ &\sim \frac{\gamma}{2} R^2 \int \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2 + 2\zeta^2 + 4\zeta\right] d\Omega. \end{aligned}$$

Setzt man darin

$$\zeta = \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_l^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{lm} \alpha_{lm} \mathfrak{P}^m e^{im\varphi} = \zeta^*$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{\gamma}{2} R^2 \sum_{ll'} \sum_m \alpha_{lm}^* \alpha_{l'm} \int \left[\frac{\partial \mathfrak{P}_l^m}{\partial\theta} \frac{\partial \mathfrak{P}_{l'}^m}{\partial\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^m + 2 \mathfrak{P}_l^m \mathfrak{P}_{l'}^m\right] \sin\theta\, d\theta \\ & + \frac{\gamma}{2} R^2 \cdot 4 \sum_{lm} \alpha_{lm} \int Y_l^m\, d\Omega \end{aligned}$$

und mit (116.7) und (116.2) schließlich

$$U = \frac{\gamma}{2} R^2 \sum_{lm} |\alpha_{lm}|^2 \left[m^2 + \frac{1}{2}(a_{lm}^2 + b_{lm}^2) + 2 - 4 \right] = \frac{\gamma}{2} R^2 \sum_{lm} |\alpha_{lm}|^2 (l-1)(l+2),$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{lm} C_l |\alpha_{lm}|^2, \quad C_l = (l-1)(l+2)\gamma R^2.$$

Die Konstante γ der Oberflächenspannung läßt sich halbempirisch aus der Oberflächenenergie der Bethe-Weizsäcker-Formel bestimmen zu ([R 48-1], S. 24)

$$\gamma = \frac{15{,}4}{4\pi R_0^2} [\text{MeVcm}^{-2}] \qquad (R = R_0 A^{1/3}).$$

Mit diesem Wert von γ ist es natürlich nicht möglich, Feinheiten wie etwa Schaleneffekte zu berücksichtigen. — Haben wir die quasiellipsoidförmige Deformation (115.1), d. h. $\alpha_{20} \neq 0$, alle anderen $\alpha_{lm} = 0$,[1]) findet man durch Vergleich von (116.1) mit (115.1), daß $\alpha_{20} \propto \varepsilon$, also $U = \frac{S}{2} \varepsilon^2$ mit *positivem* $S = C_2$ ist.

Die Gesamtenergie unter Vernachlässigung der (potentiellen) Coulomb-Energie[2]) ist demnach

$$E = \frac{1}{2} \sum_{lm} (B_l |\dot{\alpha}_{lm}|^2 + C_l |\alpha_{lm}|^2) = \sum_{lm} \frac{B_l}{2} \left(|\dot{\alpha}_{lm}|^2 + \frac{C_l}{B_l} |\alpha_{lm}|^2 \right),$$
$$B_l = \frac{1}{l} \frac{3AM}{4\pi} R^2, \quad C_l = (l-1)(l+2)\gamma R^2. \tag{116.8}$$

Ihre Summanden haben die Gestalt der Energie linearer harmonischer Oszillatoren mit den „Koordinaten" $\alpha_{lm}(t)$, den „Geschwindigkeiten" $\dot{\alpha}_{lm}$, den „Massen" B_l und den Frequenzen

$$\omega_l = \sqrt{\frac{C_l}{B_l}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\varrho R^3} l(l-1)(l+2)}.$$

Unser Tröpfchen ist also ein schwingungsfähiges Gebilde, und die harmonisch schwingenden Größen sind die Koeffizienten $\alpha_{lm}(t)$ unserer Entwicklung (116.1) nach Kugelflächenfunktionen. Man bestimme die Bewegungsgleichungen der $\alpha_{lm}(t)$ aus (116.8) (bzw. (116.9)).

Der Ausdruck für ω_l zeigt, daß $\omega_0 = \omega_1 = 0$, also α_{00} und alle α_{1m} konstant sind: $\dot{\alpha}_{00} = \dot{\alpha}_{1m} = 0$. Folglich treten $B_0 (= \infty)$ und B_1 in (116.8) nicht auf. $l = 0$ und $l = 1$ tragen also gar nicht zur Bewegung bei, so daß wir die Summanden mit $l = 1$ in (116.1) ohne weiteres weglassen konnten (dagegen nicht den Summanden $l = 0$, s. oben). – Daß „Koordinaten" und „Geschwindigkeiten" unserer Oszillatoren komplex sind, stört nicht wesentlich; denn zerlegen wir sie in Real-

[1]) $\alpha_{00} = 0$ bedeutet nach (116.2), daß in (115.1) das Volumen nicht genau konstant gehalten wird.

[2]) Bei Berücksichtigung der Coulomb-Energie ergibt sich

$$C_l = (l-1)(l+2)\gamma R^2 - \frac{3}{2\pi} \frac{l-1}{2l+1} \frac{Z^2 e^2}{R}.$$

und Imaginärteil, behält E seine Form: Jeder komplexe Oszillator l, m ist äquivalent zwei reellen Oszillatoren l, m.

Die schwingenden Größen α_{lm} geben an, wie stark die einzelnen Kugelflächenfunktionen Y_l^m an der Deformation der Tröpfchenoberfläche beteiligt sind. In Abb. 247 haben wir aufgezeichnet, welche Deformationsformen die niedrigsten Y_l^m darstellen. Die α_{lm} sind nach (116.1) die „Amplituden" dieser Einzeldeformationen, aus denen sich die Gesamtdeformation aufbaut, und diese Amplituden führen harmonische Schwingungen aus. Folglich zeigen die Figuren der Abb. 247 zugleich die Gestalt der einzelnen Schwingungstypen, aus denen sich die Gesamtschwingung des Tröpfchens zusammensetzt, die im allgemeinen eine recht komplizierte Form haben kann.

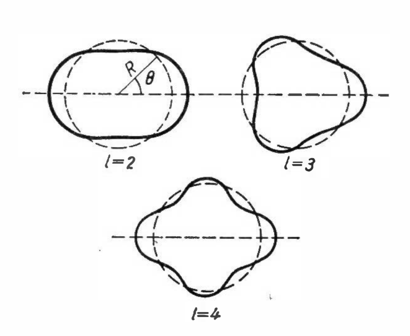


Abb. 247. Deformations- und Schwingungsformen der Kernoberfläche für die niedrigsten Ordnungen (Kugelflächenfunktionen) $l=2, 3, 4$. (Nach HILL, WHEELER, Phys. Rev. **89**, S. 1120)

Unser Tröpfchen führt demnach Oberflächenschwingungen (Vibrationen) unter Erhaltung des Volumens (Inkompressibilität!) aus, also Bewegungen, an denen alle Teilchen im Kollektiv teilnehmen; die Koordinaten $\alpha_{lm}(t)$ dieser kollektiven Schwingungen werden deshalb auch als „kollektive Koordinaten" des Kerns bezeichnet.

Da mit wachsendem l die Zahl der Schwingungsknoten wächst, wird die „Wellenlänge" der Schwingungen immer kleiner. Wenn sie die Größenordnung der Nukleonenabstände erreicht, verliert die Vorstellung einer stetigen Oberfläche ihren Sinn; dort muß also die Summe $\sum_{lm}$ abgebrochen werden.

b) Quantenmechanische Behandlung der Oberflächenschwingungen

Natürlich müssen wir die kollektiven Freiheitsgrade unseres Tröpfchens, die wir bisher klassisch behandelt haben, der Quantenmechanik unterwerfen. Das ist nicht schwierig, da wir nach (116.8) ein System unabhängiger linearer harmonischer Oszillatoren vor uns haben, d. h. jeder Oszillator — jede Einzel-Oberflächenschwingung lm — als quantenmechanischer linearer harmonischer Oszillator aufgefaßt werden kann. Wir schreiben also unter Einführung der „kanonisch konjugierten Impulse"

$$\pi_{lm} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_{lm}} = B_l \dot{\alpha}^*_{lm} = (-1)^m \pi^*_{l,-m}$$

die Hamilton-Funktion

$$E = E_{\text{Vib}} = H(\pi_{lm}, \alpha_{lm}) = \sum_{lm} \left(\frac{1}{2B_l} |\pi_{lm}|^2 + \frac{C_l}{2} |\alpha_{lm}|^2 \right) \tag{116.9}$$

und fassen die kanonisch konjugierten Größen π_{lm} und α_{lm} als Operatoren auf, die der Vertauschungsrelation genügen

$$[\pi_{lm}, \alpha_{l'm'}] = i\hbar \delta_{ll'} \delta_{mm'} \cdot 1. \tag{116.10}$$

Alle anderen Kommutatoren verschwinden.
Das Eigenwertproblem der Energie kann nun mit wellen- oder matrizenmechanischen Methoden in bekannter Weise gelöst werden; man erhält für die Gesamtheit aller Oszillatoren

$$E = E_{\text{Vib}} = E_{n_2, n_3, \ldots} = \sum_{l m} \hbar \omega_l \left(n_{l m} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{l} \hbar \omega_l \left(n_l + \frac{2l+1}{2} \right), \tag{116.11a}$$

$$n_{l m} = 0, 1, 2, \ldots, \quad n_l = \sum_m n_{l m} = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\omega_l = \sqrt{\frac{C_l}{B_l}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\varrho R^3} l (l-1)(l+2)}. \tag{116.11b}$$

Es ergeben sich also wie in der Molekülphysik Schwingungsspektren mit äquidistanten Termen für jedes l.

Der Drehimpuls unseres Tröpfchens ist

$$\mathfrak{R} = \int \varrho [\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}] \, d\tau = \varrho \int [\mathfrak{r} \times \operatorname{grad} \Phi] \, d\tau. \tag{116.12}$$

Man kann zeigen [B 52-1], daß für unser schwingendes Tröpfchen $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{J}^2$ die Eigenwerte $J(J+1)$ hat, und zwar für Quadrupolschwingungen ($l = 2$; ω_2 ist die kleinste Frequenz):

$n_2 = 0$	$J = 0^+$
1	2^+
2	$0^+, 2^+, 4^+$
3	$0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+.$
...	...

Die Vorzeichen geben die Parität an. $J = 2$ für $n_2 = 1$ bedeutet, daß *ein* Schwingungsquant („Phonon“) einer Quadrupolschwingung den Drehimpuls („Spin“) 2 hat; analog hat man für 2^l-Polschwingungen „Phononen vom Spin l“.

§ 117. Wechselwirkung zwischen Rumpf und äußeren Teilchen

Für Kerne mit äußeren Teilchen wissen wir bereits aus unseren einleitenden Betrachtungen, daß zwischen Rumpf und äußeren Teilchen eine Wechselwirkung erfolgt, die mit einer Deformation des Rumpfes verknüpft ist. Doch betraf diese Überlegung zunächst nur statische Deformationen des Kerns. Wie die Wechselwirkung allgemein zustande kommt, läßt sich folgendermaßen vektormodellmäßig einsehen: Der Drehimpuls $\mathfrak{R}$ des Rumpfes und der Drehimpuls $\mathfrak{j}$ eines äußeren Teilchens [1]) setzen sich in jedem Augenblick zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ des Kerns zusammen. Wenn der Rumpf nicht kugelsymmetrisch ist, bleibt der Bahndrehimpuls $\vec{l}$ des äußeren Teilchens nicht mehr exakt erhalten, da es sich nicht mehr in einem Zentralfeld bewegt. Also ist auch $\mathfrak{j} = \vec{l} + \vec{s}$ nicht mehr exakt konstant; [2]) da aber $\mathfrak{J} = \mathfrak{R} + \mathfrak{j}$ immer exakt konstant bleibt, erfolgt Drehimpuls-

[1]) Die Überlegung läßt sich sofort auf den Fall mehrerer äußerer Teilchen übertragen. Wie?
[2]) Trotzdem ist natürlich bei kleinen Deformationen $\mathfrak{j}$ noch *näherungsweise* konstant.

austausch und damit auch Energietausch, also Wechselwirkung zwischen Rumpf und äußerem Teilchen. Die Überlegung gilt natürlich auch umgekehrt: Wechselwirkung → Deformation.

Wir wollen diese Wechselwirkung genauer betrachten — wir werden sie oft zum Unterschied von anderen „Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung" nennen. Dazu denken wir uns die Deformation des Rumpfs so durchgeführt, daß jede Kugelfläche $r = \text{const}$ im zunächst kugelsymmetrisch gedachten Rumpf unter Mitnahme der Dichte $\varrho(\mathfrak{r})$ und damit der Potentialstärke V parallel zur Oberfläche deformiert wird. Hatten wir also vor der Deformation an der Stelle $\mathfrak{r} = (r, \theta, \varphi)$ eine bestimmte Stärke $V = V(r)$ des Potentials, dann wirkt dieselbe Potentialstärke nach der Deformation an der ein wenig verschobenen Stelle $\mathfrak{r}' = (r', \theta', \varphi')$. Man sieht sofort, daß man bei kleinen Deformationen näherungsweise eine rein radiale Verschiebung hat, d.h.

$$r' \sim r(1 + \zeta) = r(1 + \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_l^m), \quad \theta' \sim \theta, \quad \varphi' \sim \varphi .$$

Bezeichnen wir das Potential nach der Deformation mit V', dann bedeutet „Mitnahme" der Potentialstärke von r nach r':

$$V'(r') = V(r) .$$

Die gesuchte Wechselwirkungsenergie an einer bestimmten Stelle r ist die durch die Deformation bewirkte Änderung des Potentials *an dieser Stelle:*

$$H_W = V'(r) - V(r) .$$

Die Funktion $V'(r)$ kennen wir zwar nicht direkt, aber wir können sie an der Stelle r' in eine Taylorreihe entwickeln und wegen der Voraussetzung kleiner Deformationen abbrechen:

$$V'(r) \sim V'(r') + (r - r') \left.\frac{dV'(r)}{dr}\right|_{r'} = V(r) + (r - r') \left.\frac{dV'(r)}{dr}\right|_{r'},$$

$$H_W = (r - r') \left.\frac{dV'(r)}{dr}\right|_{r'} = -\zeta r \left.\frac{dV'(r)}{dr}\right|_{r'} .$$

Nehmen wir als $V'(r)$ ein Kastenpotential der Tiefe V_0 mit Potentialsprung an der Oberfläche $R(\theta, \varphi)$, so ist

$$\left.\frac{dV'(r)}{dr}\right|_{r'} = + V_0 \delta(r - R(\theta\varphi))|_{r'} = + V_0 \delta(r' - R(\theta\varphi)) .$$

Wenn wir uns schließlich in H_W auf Größen erster Ordnung in ζ beschränken, können wir setzen $r' - R(\theta\varphi) = (r - R)(1 + \zeta) \sim r - R$ und damit

$$H_W \sim -\zeta r \cdot V_0 \delta(r - R) = -V_0 R \delta(r - R) \cdot \zeta ,$$

$$H_W(r, \theta, \varphi; \alpha_{lm}) = -V_0 R \delta(r - R) \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) .$$

H_W hängt also — wie es sein muß — von den Koordinaten des äußeren Teilchens, r, θ, φ, und den kollektiven Koordinaten α_{lm} des Rumpfes ab. H_W ist in unserer Näherung ($\zeta \ll 1$) proportional zur Verschiebung der Oberfläche an der Stelle R, θ, φ: $H_W \propto R \sum \alpha_{lm} Y_l^m = R(\theta\varphi) - R$. Der Proportionalitätsfaktor ist negativ, also $H_W \gtrless 0$ für $R(\theta\varphi) \lessgtr R$, vgl. Abb. 245. Da die Radialabhängigkeit δ-funktionsartig ist, erfolgt Wechselwirkung = Energieaustausch nur an der Oberfläche des Rumpfes (genauer: an der Kugeloberfläche $r = R$ wegen unserer Näherung $r' - R(\theta\varphi) \sim r - R$).

Sind mehrere äußere Teilchen vorhanden, haben wir natürlich

$$H_W(r_i, \theta_i, \varphi_i; \alpha_{lm}) = -V_0 R \sum_i \delta(r_i - R) \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta_i \varphi_i).$$

Der Hamilton-Operator des Gesamtkerns = Rumpf + äußere Teilchen ist demnach

$$\begin{aligned} H &= H_{Ob} + H_W + H_T, \\ H_{Ob} &= \sum_{lm} \left(\frac{1}{2B_l} |\pi_{lm}|^2 + \frac{C_l}{2} |\alpha_{lm}|^2 \right), \\ H_W &= -V_0 R \sum_i \sum_{lm} \delta(r_i - R)\, \alpha_{lm} Y_l^m(\theta_i \varphi_i), \\ H_T &= \sum_i H_i = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_i + V(r_i) + \lambda \xi(r_i) (\vec{s}_i \vec{l}_i) \right). \end{aligned} \tag{117.1}$$

Er enthält neben H_{Ob}, dem Hamilton-Operator der Oberflächenbewegungen des Rumpfes, den Hamilton-Operator H_T für die Bewegung der äußeren Teilchen im Zentralfeld $V(r)$ mit Spin-Bahn-Wechselwirkung, d. h. den Schalenmodell-Hamilton-Operator der äußeren Teilchen ($\sum_i$ geht nur über die äußeren Teilchen). Damit zeigt sich, daß

unser kollektives Modell mit hydrodynamischer Näherung eine Verallgemeinerung und Erweiterung des Schalenmodells ist.[1])

Das wesentliche Neue ist, daß die Oberflächenbewegungen des Rumpfes und die Bewegung der äußeren Teilchen durch den dritten Term H_W *miteinander wechselwirken.* Im allgemeinen kann das zu sehr komplizierten Verhältnissen führen; wir betrachten deshalb einfache Grenzfälle: die Fälle schwacher und starker Wechselwirkung zwischen Rumpf und äußeren Teilchen.

§ 118. Schwache Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung

Haben wir nur wenige äußere Teilchen (oder Löcher), d. h. befinden wir uns in der Nähe eines Schalen-(Unterschalen-)Abschlusses, dann wird H_W klein sein, man kann es in nullter Näherung vernachlässigen. In dieser Näherung erfolgen

---

[1]) Gleichzeitig ist es aber auch eine Einschränkung und Abänderung des Schalenmodells, da nur die *äußeren* Teilchen als Einzelteilchen in einem Potential behandelt werden, die Teilchen des Rumpfes dagegen als „Flüssigkeit".

also *die Bewegungen der Rumpfoberfläche und der äußeren Teilchen unabhängig voneinander*, d. h., die äußeren Teilchen bewegen sich genau so wie nach dem Schalenmodell, und der Rumpf führt freie Oberflächenschwingungen nach § 116 aus. Die Eigenfunktion des Gesamtkerns ist also in nullter Näherung separiert in Einzelteilchen- und kollektive Koordinaten:

$$H^0 = H_{Ob}(\alpha_{lm}) + H_T(\mathfrak{r}_i)\,, \qquad \Psi^0 = \psi_T(\mathfrak{r}_i)\,\psi_{Schw}(\alpha_{lm})\,;$$

hierbei ist $\psi_T(\mathfrak{r}_i)$ die Schalenmodell-Eigenfunktion der äußeren Teilchen. Die Wirkung der Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung kann dann durch Störungsrechnung berücksichtigt werden (Bohr, Mottelson [B 53-1], S. 17).

Qualitativ ist der Kern mit wenigen äußeren Teilchen oder schwacher Wechselwirkung derselbe wie nach dem Schalenmodell, nur führt er zusätzlich kollektive Oberflächenschwingungen aus. Diese Oberflächenschwingungen müssen langsam — „adiabatisch" — gegenüber der Teilchenbewegung erfolgen, so daß die äußeren Teilchen korrespondenzmäßig gesehen viele „Umläufe" während einer Oberflächenschwingung machen. Dadurch kann ihre Eigenfunktion sich der momentanen Form des Rumpfes und damit des Potentials $V(r)$ anpassen: Die äußeren Teilchen bewegen sich praktisch in einem festen Potential, die Oberfläche „spürt" die äußeren Teilchen nur im Mittel.

Energiemäßig bedeutet das, daß die mit der Oberflächenbewegung verknüpften Energien klein gegen die der Teilchenbewegung, also

die Termabstände der Oberflächenschwingungen klein gegen die der Einzelteilchenzustände sein müssen,

damit unsere Näherung brauchbar ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, sprechen wir von „adiabatischer Näherung". Wir haben damit das Kopplungsschema der schwachen Wechselwirkung (Abb. 248): Der Drehimpuls $\mathfrak{R}$ des Rumpfes und der Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}_T$ der äußeren Teilchen präzedieren langsam um die Resultierende $\mathfrak{J} = \mathfrak{R} + \mathfrak{J}_T$.



Abb. 248.
Vektormodell bei schwacher Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung (kugelförmiger Ruhegestalt des Kerns): Gesamtdrehimpuls der Teilchen $\mathfrak{J}_T$ und Drehimpuls des Rumpfes $\mathfrak{R}$ setzen sich zum Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J}$ des Kerns zusammen und präzedieren um ihn

§ 119. Starke Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung

Lassen wir die Zahl der äußeren Teilchen und damit die Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung wachsen, dann nehmen auch die Schwingungsamplituden, d. h. die momentanen Deformationen, zu. Dadurch weicht das Feld $V(r, \theta, \varphi)$, das auf die äußeren Teilchen wirkt, mehr und mehr von einem Zentralfeld ab. Das hat zur Folge, daß (S. 600) der Drehimpulsaustausch zwischen Rumpf und äußeren Teilchen

immer stärker wird: Oberflächenschwingungen des Rumpfes und Bewegung der äußeren Teilchen erfolgen immer weniger unabhängig voneinander.
Welche Stärke der Wechselwirkung schließlich in der Mitte zwischen Schalen-(Unterschalen-)Abschlüssen erreicht wird, läßt sich ohne genauere Rechnung nicht sagen. Nun wissen wir aber, daß empirisch zwischen den Schalenabschlüssen sehr große Quadrupolmomente, also Kerne mit bleibender Rumpfdeformation, beobachtet werden. Das heißt offenbar, daß zwischen den Schalenabschlüssen die Deformationen so stark werden können, daß eine bleibende Deformation energetisch günstiger wird als die bisherige kugelsymmetrische Ruhegestalt der Oberfläche. Wir nennen diesen Fall den Fall der „starken Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung". Letztere ist dabei so stark, daß ein Teil von ihr in nullter Näherung berücksichtigt werden muß, der die bleibende Deformation verursacht (vgl. Bohr [B 52-1], S. 29).
Die bleibende Deformation wird sich immer durch ein Ellipsoid annähern lassen, in vielen Fällen durch ein Rotationsellipsoid, worauf wir uns hier beschränken. Wie wir auf S. 615ff. sehen werden, können wir auch bei den bleibend deformierten Kernen noch einigermaßen kleine Deformation voraussetzen, d. h. $\varepsilon \ll 1$.
Bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung bewegen sich also die äußeren Teilchen in einem bleibend rotationselliptisch (axialsymmetrisch) deformierten Potential. Einfache Verhältnisse liegen dabei dann vor, wenn analog zum kugelsymmetrischen Fall schwacher Wechselwirkung sich die äußeren Teilchen in diesem deformierten Potential schnell gegenüber der kollektiven Bewegung der (bleibend deformierten) Oberfläche bewegen oder

wenn die Termabstände der Oberflächenbewegung klein gegen die der Einteilchenzustände sind,

da dann die adiabatische Näherung anwendbar ist.

In einem bleibend rotationselliptisch deformierten Potential $V(r, \theta, \varphi)$ sind nicht mehr die einzelnen Drehimpulsquadrate $\vec{l}_i^2$ und $\mathfrak{j}_i^2$ der äußeren Teilchen, sondern nur noch die Komponenten von $\vec{l}_i$ und $\mathfrak{j}_i$ in Richtung der Hauptachse (Symmetrieachse) z' des Ellipsoids exakt konstant. Folglich ist nicht mehr $\mathfrak{J}_T^2$, sondern nur noch seine Komponente $\mathfrak{J}_{T_{z'}} \equiv \Omega$ eine Bewegungskonstante. So ergeben sich ganz neue Kopplungsverhältnisse (Abb. 249): $\mathfrak{J}_T$ präzediert um die Symmetrieachse z' mit fester z'-Komponente Ω. Diese Präzession stammt von der schnellen Bewegung der äußeren Teilchen im deformierten Rumpf und erfolgt deshalb rasch

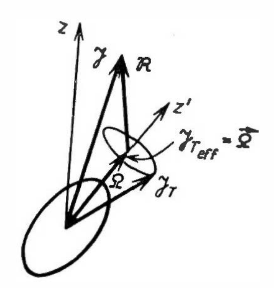


Abb. 249.
Vektormodell bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung (bleibend rotationssymmetrisch deformierter Ruhegestalt des Kerns): $\mathfrak{J}_T$ präzediert rasch um die Symmetrieachse z', so daß effektiv nur seine Komponente Ω in z'-Richtung wirksam wird (Mittelung über die Teilchenbewegung: adiabatische Näherung). Der so definierte Vektor $\vec{\Omega} = \mathfrak{J}_{T_{\text{eff}}}$ setzt sich mit $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{J}$ zusammen, beide präzedieren um $\mathfrak{J}$ (nicht gezeichnet). Die Komponente von $\mathfrak{J}$ in z'-Richtung (nicht gezeichnet) wird üblicherweise K genannt.

so daß effektiv — über die Teilchenbewegung gemittelt — nur $\mathfrak{J}_{T_{\text{eff}}} \equiv \vec{\Omega}$ als Vektor der Länge Ω in z'-Richtung übrig bleibt. $\vec{\Omega}$ und $\mathfrak{R}$ setzen sich dann zu $\mathfrak{J}$ zusammen:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{R} + \vec{\Omega} \equiv \mathfrak{R} + \mathfrak{J}_{T_{\text{eff}}}.$$

Diese Kopplungsverhältnisse sind genau dieselben wie bei einem linearen Molekül: Die äußeren Teilchen spielen die Rolle der Hüllenelektronen, der Rumpf die der beiden Atomkerne. Wie dort die Bewegung der Elektronen schnell gegenüber der der Atomkerne ist, so daß sich die Elektroneneigenfunktionen letzterer anpassen können, folgt hier die Eigenfunktion der äußeren Teilchen den langsamen kollektiven Bewegungen des Rumpfes (Potentials). Und wie dort die Atomkerne Schwingungen gegeneinander (Vibrationen) und Rotationen umeinander ausführen, so kann hier die Rumpfoberfläche um die deformierte Gleichgewichtsform Schwingungen und als ganzes Rotationen ausführen.

§ 120. Rotation eines axialsymmetrisch deformierten Kerns

Wir wollen hier nur die *Rotationen* noch etwas genauer studieren. Dazu betrachten wir zunächst einen (g, g)-*Kern*, der also eine gerade Anzahl von äußeren Teilchen hat. Wir müssen als erstes untersuchen, welches $\mathfrak{J}_{T_{\text{eff}}} \equiv \vec{\Omega}$ diese äußeren Teilchen ergeben. Nun weiß man, daß (g,g)-Kerne im Grundzustand $J_0 = 0$ haben. Da im Grundzustand als energetisch tiefstem Zustand keine Schwingungen und Rotationen erfolgen, ist $\mathfrak{R} = 0$: keine Oberflächenbewegung[1]); also gilt $\mathfrak{J} = \vec{\Omega}$, folglich $\Omega = 0$. Man muß sich demnach vorstellen, daß die ein-

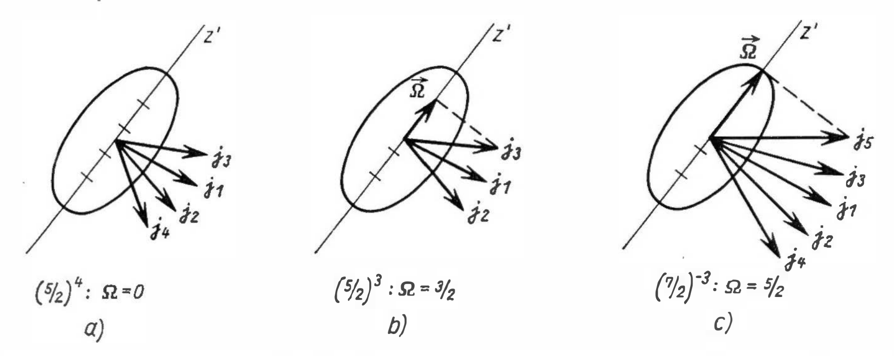


Abb. 250. Einstellung der Gesamtdrehimpulse $\mathfrak{j}_i$ der einzelnen äußeren Teilchen bei bleibend rotationssymmetrisch deformiertem Rumpf. Jedes $\mathfrak{j}_i$ präzediert rasch um die Symmetrieachse z' (nicht gezeichnet), so daß sich effektiv — im Mittel — der Drehimpuls der äußeren Teilchen $\vec{\Omega}$ in z'-Richtung ergibt.
a) vier Teilchen mit (näherungsweise) $j = {}^5/_2$ ergeben $\Omega = 0$,
b) drei ebensolche Teilchen ergeben $\Omega = {}^3/_2 = j - 1$,
c) fünf Teilchen mit (näherungsweise) $j = {}^7/_2$ ergeben $\Omega = {}^5/_2 = j - 1$.
Die Figuren gelten nur für positive Deformationen (Begründungen auf S. 648ff.)

[1]) Genauer: nur Nullpunktsbewegung der Oberfläche.

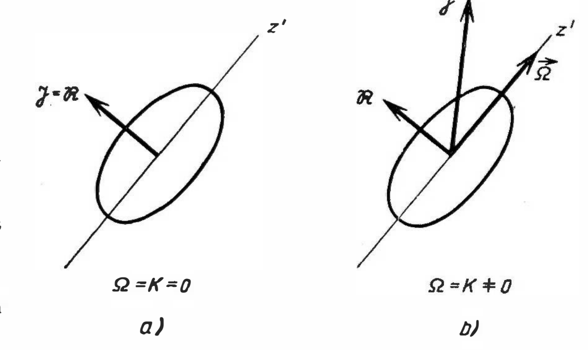


Abb. 251. Zusammensetzung von $\mathfrak{R}$ und $\vec{\Omega}$ zu $\mathfrak{J}$ bei einem bleibend rotationssymmetrisch deformierten Rumpf (Präzession von $\mathfrak{R}$ und $\vec{\Omega}$ um $\mathfrak{J}$ nicht gezeichnet),
a) (g, g)-Kern ($\Omega = 0$),
b) ungerader Kern ($\Omega \neq 0$);
K bedeutet die Komponente von $\mathfrak{J}$ in z'-Richtung

zelnen $\mathfrak{j}_i$ sich wie in Abb. 250a mit paarweise entgegengesetzten z'-Komponenten einstellen. (Später werden wir das genauer begründen.)
Führen wir jetzt dem Kern Energie so zu, daß nur seine kollektiven Rotationsfreiheitsgrade angeregt werden, z. B. durch Coulomb-Anregung, dann wird also $\mathfrak{R} \neq 0$. Und zwar muß $\mathfrak{R}$ senkrecht zur Symmetrieachse stehen, denn für einen ***rotationssymmetrischen*** Rumpf ist eine kollektive Rotation – bzw. eine Komponente dieser Rotation – um die Symmetrieachse unmöglich, weil dabei keine Rumpfnukleonen von der Oberfläche mitgerissen werden können (genauere Begründung auf S. 607ff.). Damit haben wir die Verhältnisse der Abb. 251a: Der Kern hat einen Drehimpuls $\mathfrak{J} = \mathfrak{R} \perp z'$ und vollführt also eine reine Rotation um die Achse $\mathfrak{J}$.

a) Klassische Behandlung der Rotation

Um uns eine anschauliche Vorstellung von einer solchen kollektiven Rotation zu machen, orientieren wir uns wie bei den Oberflächenschwingungen des kugelsymmetrischen Tröpfchens an der hydrodynamischen Näherung, indem wir den Rumpf als Tröpfchen einer reibungsfreien wirbelfreien inkompressiblen Flüssigkeit betrachten. Dann gilt ($\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$) zunächst

$$\operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \operatorname{grad} \varrho = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,. \tag{120.1 a}$$

Weiter sei das Tröpfchen rotationselliptisch (axialsymmetrisch) geformt (Symmetrieachse z') und die Dichteverteilung im Inneren parallel zur Oberfläche geschichtet:

$$\varrho = \varrho(\lambda), \qquad \lambda = \frac{x'^2 + y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2}\,, \qquad \text{Oberfläche: } \lambda = 1$$

Konstante Dichte ($\varrho = \text{const}$ für $\lambda \leqq 1$) ist darin als Spezialfall enthalten.

Wir machen die Annahme, daß das Tröpfchen unter Erhaltung der Oberflächengestalt und der Dichteverteilung[1]*) gleichförmig um die $x = x'$-Achse rotiert.* Dann läßt sich ein Drehwinkel $\bar{\varphi}_x = \omega_x t$ (+ const) als Winkel zwischen der körperfesten z'- und der raumfesten z-Achse definieren, und es gilt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \omega_x \frac{\partial \varrho}{\partial \bar{\varphi}_x}.$$

$\frac{\delta \varrho}{\delta \bar{\varphi}_x} \propto \frac{\delta \varrho}{\delta t}$ gibt die Änderung von $\varrho(\mathfrak{r}, t)$ bei variablem $\bar{\varphi}_x \propto t$ und festem $\mathfrak{r} = (r, x, \varphi_x)$ an[2]). Man überlegt sich leicht an Hand einer Zeichnung, daß wegen unserer Annahme dieser Differentialquotient, abgesehen vom Vorzeichen, identisch ist mit $\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi_x}$, der Änderung von $\varrho(r, x, \varphi_x, t)$ bei variablem φ_x und festem $r, x, t \propto \bar{\varphi}_x$. Wir haben also

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \omega_x \frac{\partial \varrho}{\partial \bar{\varphi}_x} = -\omega_x \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi_x}. \qquad (120.1\text{b})$$

Betrachten wir unseren rotationselliptischen Tropfen in einem Augenblick, in dem seine Symmetrieachse x' mit der z-Achse zusammenfällt, können wir

$$\varrho = \varrho(\lambda), \quad \lambda = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad (120.2)$$

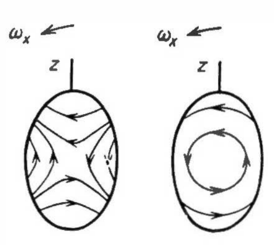
schreiben. Mit $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \Phi$ wird dann (120.1a), (120.1b)

$$(\mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} \lambda) \frac{d\varrho}{d\lambda} = \omega_x \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_x} \frac{d\varrho}{d\lambda},$$

$$(\operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \lambda) = \omega_x \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_x} = \omega_x \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}\right) \lambda.$$

Man rechnet leicht nach, daß mit (120.2) diese Gleichung und die Potentialgleichung $\Delta \Phi = 0$ durch das Geschwindigkeitspotential gelöst werden:

$$\Phi = \omega_x \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} y z \equiv \omega_x \cdot \delta \cdot y z. \qquad (120.3)$$



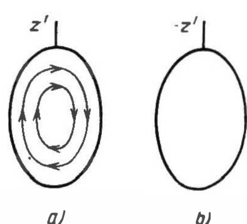


Abb. 252. a) Strömungslinien in einem rotationselliptisch geformten Tröpfchen bei Rotation um eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse; b) dasselbe bei Rotation eines ebenso geformten *starren* Körpers um dieselbe Achse. Die obere Zeile zeigt die Strömungslinien vom raumfesten, die untere Zeile vom körperfesten (mitrotierenden) Koordinatensystem aus gesehen. (Nach [B 54-1])

Dieses $\Phi(\mathfrak{r})$ liefert das Strömungsfeld $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \Phi$ der Abb. 252a, oben im raumfesten Koordinatensystem x, y, z, unten vom mitrotierenden Hauptachsensystem x', y', z' aus gesehen (nachrechnen: $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} - [\vec{\omega} \times \mathfrak{r}]$). Daneben wurden in

[1]) Das läßt sich realisieren, wenn wir das Tröpfchen in eine Art Eierschale einschließen. (Die Rotation mit *freier* Oberfläche ergibt bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten fast dieselbe Strömung.)

[2]) Wir verwenden Zylinderkoordinaten r, x, φ_x mit der x-Achse als Zylinderachse.

Abb. 252b die Verhältnisse bei *starrer* Rotation des ganzen Rumpfes gezeichnet. Man sieht am Strömungsbild, daß die Rotation unseres Tröpfchens im raumfesten System im Umlauf einer Art Oberflächenwelle besteht, deren Maximum durch die Strömung der Flüssigkeit immer weiter nach derselben Seite verschoben wird, indem es dauernd an einer Stelle ab- und daneben neu aufgebaut wird. Im mitrotierenden System sieht man einen Umlauf der Flüssigkeit auf zur Oberfläche *parallelen* elliptischen Bahnen im Gegensinn der Rotation, wie es sein muß, damit Oberflächengestalt und Dichteverteilung bei der Rotation erhalten bleiben.

Da hier alle Bewegung der Flüssigkeit zur Rotation beiträgt, ist die gesamte kinetische Energie Rotationsenergie:

$$E_{\text{Rot}} = \tfrac{1}{2}\int \varrho \mathfrak{v}^2 \, d\tau = \tfrac{1}{2}\int \varrho (\operatorname{grad} \Phi)^2 \, d\tau$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \omega_x^2 \delta^2 \cdot \int \varrho (y^2 + z^2)\, d\tau$$

$$E_{\text{Rot}} = \tfrac{1}{2}\, \omega_x^2 I_x \,, \tag{120.4 a}$$

$$I_x = \delta^2 \cdot I_{0x} = \delta^2 \cdot \int \varrho (y^2 + z^2)\, d\tau \,, \tag{120.4 b}$$

wo I_x das Trägheitsmoment des deformierten Tröpfchens bei unserer Rotation ist und I_{0x} das Trägheitsmoment, das sich ergeben würde, wenn das Tröpfchen als starrer Körper (Abb. 252b) rotieren würde.

Bezeichnenderweise ist I_x nicht gleich I_{0x}, sondern gleich $\delta^2 I_{0x}$, hängt also wesentlich vom Deformationsmaß δ ab, das für kleine Deformationen $a - c \ll R$ mit dem früheren ε übereinstimmt:

$$\delta = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \sim \frac{(a+c)(a-c)}{2R^2} \sim \frac{a-c}{R} = \varepsilon \,.$$

Für kleine Deformationen ($\delta \sim \varepsilon \leqq 0{,}2$) ist also das Trägheitsmoment des rotierenden Tröpfchens um Größenordnungen kleiner als das der starren Rotation – eine Folge der Tatsache, daß nur *die Teile* der Flüssigkeit an der Rotation teilnehmen, die die umlaufende Oberflächenwelle bilden oder, anders ausgedrückt, von ihr mitgerissen werden.

Diese Tatsache hat noch eine andere wichtige Folge: Da unser Tröpfchen als Rotationsellipsoid vorausgesetzt war, kann es keine kollektive Rotation um die Symmetrieachse ($z' = z$) geben; denn einer solchen Rotation entspricht keine umlaufende Oberflächenwelle, weil die Oberfläche bei einer solchen Rotation invariant bleibt. Dies findet seinen Ausdruck darin, daß I_z verschwindet: Für ein dreiachsiges Ellipsoid wird bei Rotation um die z-Achse

$$\Phi = \omega_z \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\, xy \equiv \omega_z \cdot \delta' \cdot xy \,,$$

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2}\, \omega_z^2 I_z \,, \qquad I_z = \delta'^2 \cdot I_{0z} = \delta'^2 \cdot \int \varrho (x^2 + y^2)\, d\tau \,,$$

also $I_z \equiv 0$ bei Übergang zu unserem Rotationsellipsoid $a = b$, $\delta' = 0$, obwohl $I_{0z} \neq 0$ bleibt.

Für ein Rotationsellipsoid mit der Oberfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

erhält man als Trägheitsgrößen[1]) für starre Rotation durch elementare Integrationen ($\varrho = \text{const}$)

$$I_{0kl} = \int \varrho x_k x_l d\mathfrak{r} = \varrho \int x_k x_l d\mathfrak{r},$$

$$I_{0xx} = I_{0yy} = \frac{1}{5} \varrho V a^2, \qquad V = \frac{4\pi}{3} a^2 c,$$

$$I_{0zz} = \frac{1}{5} \varrho V c^2, \tag{120.5}$$

$$I_{0kl} = 0, \quad k \neq l,$$

und folglich

$$\delta = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{I_{0yy} - I_{0zz}}{I_{0yy} + I_{0zz}} = \frac{I_{0yy} - I_{0zz}}{I_{0x}}. \tag{120.6}$$

Als Abschätzung ergibt sich daraus für I_{0x}

$$I_{0x} = I_{0yy} + I_{0zz} = \frac{1}{5} \varrho V (a^2 + c^2) \sim \frac{2}{5} \varrho V R^2 = \frac{2}{5} AMR^2, \tag{120.7}$$

das Trägheitsmoment einer starren Kugel vom Radius R.
Wie bei den Schwingungen des kugelsymmetrischen Tröpfchens können wir auch hier den Drehimpuls unseres rotierenden Tröpfchens berechnen:

$$\mathfrak{R} = \int \varrho [\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}]\, d\mathfrak{r} = \int \varrho [\mathfrak{r} \times \operatorname{grad} \Phi]\, d\mathfrak{r}.$$

Man findet mit (120.3), (120.5) und (120.6)

$$\mathfrak{R}_y = \mathfrak{R}_z = 0,$$
$$\mathfrak{R}_x = \omega_x \cdot \delta \cdot \int \varrho (y^2 - z^2)\, d\mathfrak{r} = \omega_x \cdot \delta \cdot (I_{0yy} - I_{0zz})$$
$$= \omega_x \delta^2 I_{0x} = \omega_x I_x$$

und damit

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \omega_x^2 I_x = \frac{1}{2 I_x} \mathfrak{R}_x^2.$$

Das ist genau der klassische Energieausdruck eines Rotators mit Drehachse in x-Richtung. Für Drehung um eine beliebige Achse hat man entsprechend

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{R}_x^2}{I_x} + \frac{\mathfrak{R}_y^2}{I_y} + \frac{\mathfrak{R}_z^2}{I_z} \right),$$

was sich wegen $I_z = 0$, $I_x = I_y$, $\mathfrak{R}_z = \omega_z I_z = 0$ wie folgt schreiben läßt:

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{1}{2I} \mathfrak{R}^2, \tag{120.8}$$

$$I = I_x = I_y, \qquad \omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2, \qquad \mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}_x^2 + \mathfrak{R}_y^2.$$

So, wie wir im Fall verschwindender und schwacher Wechselwirkung fanden, daß das Tröpfchen einer Gesamtheit von klassischen Oszillatoren äquivalent

[1]) Alle in unserer Rechnung verwendeten Trägheitsmomente und -größen sind natürlich auf das körperfeste Hauptachsensystem x', y', z' bezogen, das aber nach Voraussetzung im betrachteten Moment mit dem raumfesten System zusammenfällt.

ist, erscheint es hier als klassischer Rotator. Genauer müssen wir es als (kräftefreien) *symmetrischen Kreisel* bezeichnen, dessen drei Freiheitsgrade zweckmäßig durch die Eulerschen Winkel zu beschreiben wären. Wegen $I_z = 0$ entfällt jedoch der Freiheitsgrad der Rotation um die Symmetrieachse, das System hat nur noch zwei Freiheitsgrade, die die Lage der Symmetrieachse im Raum angeben, z. B. Polarwinkel θ und Azimut φ in bezug auf eine raumfeste Polarachse. Unser symmetrischer Kreisel mit $I_z = 0$ muß also als starrer Rotator aufgefaßt werden.

b) Quantenmechanische Behandlung der Rotation

Damit ist der Übergang zur Quantenmechanik auch hier sehr einfach: Wir fassen im Energieausdruck (120.8) die klassischen Größen, insbesondere den Drehimpuls $\mathfrak{R} = \mathfrak{J}$, als Operatoren auf, die zu einem quantenmechanischen starren Rotator gehören:

$$H_{\mathrm{Rot}}\,\psi = E\,\psi,$$

$$H_{\mathrm{Rot}} = \frac{1}{2I}\,\mathfrak{R}^2 = \frac{-\hbar^2}{2I}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] = \frac{1}{2I}\,\mathfrak{J}^2; \qquad (120.9\mathrm{a})$$

wir erhalten

$$E = E_{\mathrm{Rot}} = E_J = \frac{\hbar^2}{2I}\,J\,(J+1), \quad J = 0, 2, 4, \ldots, \qquad (120.9\mathrm{b})$$

$$\psi = \psi_{\mathrm{Rot}} = \psi_J^M = Y_J^M(\theta, \varphi).$$

(g, g)-Kerne mit bleibender Deformation sollten demnach ein typisches Rotationsspektrum zeigen.

Daß dabei für J nur gerade Zahlen erlaubt sind, folgt aus einer besonderen Symmetrieeigenschaft unseres Systems: Die Form der Oberfläche und damit der Zustand des Tröpfchens ist invariant gegenüber einer Drehung um eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse um 180°: $\theta' = \pi - \theta$, $\varphi' = \pi + \varphi$; dies erfüllen aber nur die Zustände ψ_J^M mit geradem J: $Y_J^M(\theta', \varphi') = (-1)^J\,Y_J^M(\theta, \varphi)$.[1]) – Haben wir einen *ungeraden Kern*, wird die genaue quantenmechanische Theorie wesentlich komplizierter (vgl. [M57-1], S. 481ff.). Wir beschränken uns deshalb auf vektormodellmäßige Betrachtungen. Nach Abb. 250b ergibt sich jetzt ein endliches $\vec{\Omega}$ durch das ungepaarte Teilchen und folglich nach Abb. 251 b

$$\mathfrak{J}^2 = (\mathfrak{R} + \vec{\Omega})^2 = \mathfrak{R}^2 + \vec{\Omega}^2 \qquad (\mathfrak{R} \perp \vec{\Omega}),$$

die Rotationsenergie ist also Eigenwert des Operators

$$H_{\mathrm{Rot}} = \frac{1}{2I}\,\mathfrak{R}^2 = \frac{1}{2I}\,(\mathfrak{J}^2 - \vec{\Omega}^2): \qquad [H_{\mathrm{Rot}}, \vec{\Omega}^2] = [H_{\mathrm{Rot}}, \mathfrak{J}^2] = 0,$$

also

$$E = E_{\mathrm{Rot}} = E_J = \frac{\hbar^2}{2I}\,[J\,(J+1) - \Omega\,(\Omega+1)].$$

---

[1]) Ausführlicher in [M 57-1], S. 481 ff.

Im Grundzustand des Kerns ($\mathfrak{R} = 0$) ist $\mathfrak{J} = \vec{\Omega}$, demnach ist in diesem Fall Ω gleich der Gesamtdrehimpulsquantenzahl im Grundzustand: $\Omega = \Omega_0 = J_0$. Solange wir vom Grundzustand aus nur Rotationsfreiheitsgrade anregen, behält Ω diesen Wert, und wir erhalten

$$E = E_{\text{Rot}} = E_J = \frac{\hbar^2}{2I}[J(J+1) - J_0(J_0+1)], \qquad (120.10)$$

$$J = J_0, \quad J_0+1, \ldots, \qquad J_0 \mp \tfrac{1}{2}.$$[1]

Die Gesamteigenfunktion des Kerns wird damit im betrachteten Fall reiner Rotation des Rumpfes in nullter Näherung

$$\Psi^0 = \psi_T(\mathfrak{r}_j)\,\psi_{\text{Rot}}(\theta, \varphi)$$

Im allgemeinen können dazu noch Oberflächenschwingungen („β-Schwingungen" erhalten die Rotationssymmetrie, „γ-Schwingungen" verursachen Abweichungen von der Rotationssymmetrie) um die deformierte Ruhegestalt der Oberfläche treten, die bei kleiner Amplitude wieder harmonisch sind (vgl. Bohr [B 52-1], S. 31ff.). Man hat dann genau analog zum lineare Molekül nebeneinander Teilchenbewegung, Vibration (Oberflächenschwingung) und Rotation,

$$\Psi^0 = \psi_T\,\psi_{\text{Vib}}\,\psi_{\text{Rot}},$$

deren Termsysteme sich wie dort einander überlagern. Die Bedingung für die Gültigkeit dieser adiabatischen Näherung ist hier, daß die Teilchenbewegung rasch gegen die kollektive Schwingung und diese wieder rasch gegen die kollektive Rotation erfolgt, daß also die entsprechenden Größenverhältnisse zwischen den zugehörigen Termabständen bestehen.

C. Vergleich mit dem Experiment

Wir haben die Theorie des Kollektiven Modells entwickelt, indem wir versuchsweise den Rumpf als Tröpfchen einer inkompressiblen, reibungs- und wirbelfreien Flüssigkeit (mit konstanter Dichte und scharfer Oberfläche) behandelten. Nun kann man nicht erwarten, daß die „Nukleonensubstanz" des Rumpfes tatsächlich ungefähr die Eigenschaften einer solchen Flüssigkeit besitzt; denn wir sahen, daß das Schalenmodell für viele Kerneigenschaften eine gut brauchbare Näherung darstellt, nach dem sich die Nukleonen im Kern tatsächlich nahezu

---

[1]) Im Fall $J_0 = \frac{1}{2}$ treten besondere Verhältnisse auf, die einen Zusatzterm

$$(-1)^{J-j+1}\frac{\hbar^2}{2I}(j+\tfrac{1}{2})(J+\tfrac{1}{2})$$

erzeugen. j bezieht sich auf das ungerade Teilchen mit $\Omega_i = \frac{1}{2}$ (vgl. Bohr, Mottelson [B 53-1], S. 96).

unabhängig bewegen. Folglich haben sie eine mittlere freie Weglänge l von der Größenordnung des Kernradius R, während bei einem Flüssigkeitströpfchen $l \ll R$ vorliegt. Man müßte den Rumpf also eher mit einem „Knudsen-Gas-Tröpfchen" oder vielleicht noch besser mit einem Flüssigkeitströpfchen in *suprafluidem Zustand* vergleichen.

Wir können deshalb keine quantitative Übereinstimmung mit der Erfahrung erwarten. Doch die qualitativen Voraussagen — große Quadrupolmomente bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung, Existenz von Schwingungs- und Rotationszuständen, die Unmöglichkeit kollektiver Rotation um die Symmetrieachse eines axialsymmetrischen Rumpfes u. ä. — sollten trotzdem zutreffen, da schließlich jede nicht starre Substanz mit einigermaßen definierter Oberfläche die genannten Eigenschaften haben muß.

§ 121. Spins

Beim Schalenmodell hatten wir gesehen, daß es die Kernspins J_0 der Grundzustände weitgehend richtig voraussagte. Schwierigkeiten gab es im wesentlichen bei den fünf stabilen (und einigen β-unstabilen) Kernen mit $J_0 = j - 1$, bei denen kein Grund gefunden werden konnte, *warum* eine — an sich mögliche — Abweichung von der einfachen jj-Kopplung auftritt, und weiter zwischen den höheren Schalenabschlüssen im Gebiet der bleibend deformierten Kerne, wo viele Abweichungen auftraten. Abgesehen von diesen Fällen müßte also unser Kollektives Modell dieselben Spins voraussagen wie das Schalenmodell.

Nun wissen wir, daß bei schwacher Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung sich an den Schalenmodellverhältnissen nichts wesentliches ändert, da nur Oberflächenschwingungen des Rumpfes hinzukommen, die im Grundzustand — von den Nullpunktsschwingungen abgesehen — nicht wirksam sind. Wir brauchen deshalb im allgemeinen nur den Fall starker Wechselwirkung genauer zu betrachten.

Haben wir *ein* äußeres Teilchen, wäre auch bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung $J_0 = j$, weil vom Rumpf im Grundzustand kein Drehimpulsbeitrag kommen kann; außerdem interessiert dieser Fall sowieso nicht, da (vgl. S. 602) bei einem äußeren Teilchen stets nur schwache Wechselwirkung zwischen diesem und dem Rumpf auftritt.

Bei mehr als einem äußeren Teilchen tritt jedoch etwas Neues auf, obwohl im Grundzustand $\mathfrak{R} = 0$ ist: Alle äußeren Teilchen stehen in Wechselwirkung mit dem Rumpf und infolgedessen indirekt über dessen Oberfläche in Wechselwirkung (= Energieaustausch) *miteinander*. Dadurch tritt neben der direkten Wechselwirkung zweier äußerer Teilchen durch die Kernkräfte effektiv noch die indirekte Wechselwirkung der beiden über die Oberfläche auf. Bei schwacher Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung ist natürlich auch die indirekte Wechselwirkung schwach, bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung aber

wird sie stark und kann möglicherweise mit der direkten Kernkraftwechselwirkung konkurrieren.

Für eine gerade Anzahl äußerer Teilchen wissen wir von S. 547, 559, daß ihre direkte Wechselwirkung zu $J_0 = 0$ führt, weil ihre $\mathfrak{j}_i$ sich paarweise antiparallel stellen, von S. 604, Abb. 250a, daß die starke Wechselwirkung mit dem Rumpf – und damit die indirekte Wechselwirkung miteinander – ebenfalls $J_0 = 0$ ergibt ($\mathfrak{R}_0 = 0$), da die z'-Komponenten der einzelnen $\mathfrak{j}_i$ paarweise entgegengesetzt gleich sind. Damit ergibt sich auch nach dem Kollektiven Modell für alle (g,g)-Kerne $J_0 = 0$, wie beobachtet und wie wir es in Abb. 250a eingerichtet hatten. (Später werden wir das genauer begründen.) Bei ungeraden Kernen liegt es deshalb nahe, anzunehmen, daß die gerade Gruppe wie beim Schalenmodell (vgl. S. 547, 556) nicht zum Gesamtdrehimpuls beiträgt, so daß bei diesen Kernen auch hier nur die ungerade Gruppe betrachtet zu werden braucht.

Die ungerade Gruppe eines ungeraden Kerns ergibt nach S. 547, 559 unter der Wirkung der direkten Wechselwirkung ein J_0 gleich dem j des letzten ungeraden Teilchens: $J_0 = j$. Die starke Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung und damit die indirekte Wechselwirkung gibt nach S. 604, Abb. 250b, für drei Teilchen mit $j = \frac{5}{2}$ und nach Abb. 250c für drei Löcher mit $j = \frac{7}{2}$ $J_0 = \Omega = j - 1$, für fünf Teilchen oder fünf Löcher mit $j = \frac{9}{2}$ $J_0 = \Omega = j - 2$. (Das wird später begründet werden.)

Damit bietet sich hier zumindest bei vier der fünf beobachteten Fälle eine Erklärungsmöglichkeit für das Auftreten von $J_0 = j - 1$ an: Ne^{21} und Na^{23} haben drei Teilchen mit $j = \frac{5}{2}$, Mn^{55} und Ti^{47} drei Löcher mit $j = \frac{7}{2}$ in der ungeraden Gruppe. Wenn diese Erklärung zuträfe, sollte demnach bei diesen Kernen bereits eine so starke Deformation vorliegen, daß die indirekte Wechselwirkung die direkte überwiegt und erstere damit das Kopplungsschema bestimmt. Tatsächlich hat Na^{23}, das nach Abb. 235 $Q = 0$ haben sollte, nach Abb. 236 ein recht merkliches Quadrupolmoment, ist also jedenfalls wesentlich stärker deformiert, als nach dem Schalenmodell zu erwarten. Ebenso gilt das von Mn^{55}, das nach dem Schalenmodell $Q = 0{,}2\,\langle r^2\rangle \sim 0{,}06$ barn haben sollte, mit 0,5 barn aber schon merklich außerhalb der Schalenmodellgrenzen liegt (1 barn $= 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$).

Auch das Quadrupolmoment von Se^{79} (fünf Teilchen $j = \frac{9}{2}$) liegt bedeutend außerhalb der Schalenmodellgrenzen, obwohl nach Abb. 235 $Q = 0$ sein sollte. Da der gemessene Kernspin $J_0 = \frac{7}{2}$ zwischen dem Wert der direkten ($J_0 = j = \frac{9}{2}$) und dem der indirekten Wechselwirkung ($J_0 = j - 2 = \frac{5}{2}$) liegt, handelt es sich vielleicht um einen Fall intermediärer Wechselwirkung.[1])

Wir haben damit gesehen, daß im Gebiet der leichten und mittelschweren Kerne – von den genannten fünf Kernen abgesehen – offenbar der Fall schwacher Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung vorliegt, d. h. das Schalenmodell brauchbar bleibt. Auf die Abweichungen im Gebiet der schweren Kerne – wo das Kollektive Modell erst voll zum Tragen kommt, wie wir sehen werden – kommen wir im nächsten Kapitel (S. 648ff.) zu sprechen.

---

[1]) SULKANE und WATARI [S 58-1] vermuten, daß für N, $Z = 43, 45, 47$ kollektive Oktupolschwingungen eine Rolle spielen.

§ 122. Magnetische Momente

Nach unserem Modell liefert der Rumpf einen Drehimpulsbeitrag $\mathfrak{R}$ und folglich, da der Rumpf geladen ist, einen zu $\mathfrak{R}$ proportionalen Beitrag $\vec{\mu}_R = g_R \mathfrak{R}$ zum magnetischen Moment. Da nur die Protonen des Rumpfes zu $\vec{\mu}_R$ beitragen, hat g_R ungefähr den Wert

$$g_R \sim \frac{Z}{A}.$$

Berechnet man das magnetische Moment als Erwartungswert, findet man — wie zu erwarten — für schwache Wechselwirkung dasselbe magnetische Moment wie nach dem Schalenmodell: $\mu_R = 0$. Für starke Wechselwirkung erhält man meist Verschiebungen von μ in das Gebiet zwischen den Schmidt-Kurven [B 53-1]. Es ist interessant, daß sich ähnliche Verschiebungen beim Schalenmodell durch Konfigurationsmischung ergeben (vgl. S. 566 und [B 56-4]), so daß in vielen Fällen eine Deformation des Rumpfes die Abweichung von den Schmidt-Grenzen ebensogut erklären kann wie eine Konfigurationsmischung. Bis zu einem gewissen Grad sind also Deformationen des Rumpfs und Konfigurationsmischungen äquivalent — beides sind ja Möglichkeiten, Abweichungen vom Schalenmodell zu beschreiben.

Obwohl also viele Abweichungen von den Schmidt-Grenzen durch Rumpfdeformationen erklärt werden könnten, wird man doch nur dort diese Annahme machen, wo sie auch durch andere experimentelle Tatsachen gestützt wird. Wie wir schon sahen (Spins) und noch sehen werden (Quadrupolmomente, Rotationszustände), ist das höchstens bei wenigen leichten bis mittelschweren Kernen der Fall ($N, Z \leqq 50$), weshalb man dort im allgemeinen versuchen wird, Konfigurationsmischungen für die Schmidt-Abweichungen verantwortlich zu machen. Nur bei den Kernen mit hohem Quadrupolmoment, besonders im Gebiet der schweren Kerne, wird man die Rumpfdeformationen heranziehen (vgl. [B 56-4]).

§ 123. Quadrupolmomente

Wie beim magnetischen Moment kommt auch beim Quadrupolmoment zum Beitrag der äußeren Teilchen ein Beitrag vom Rumpf:

$$Q = Q_T + Q_R. \tag{123.1}$$

Wir hatten bereits in (115.3a) das Quadrupolmoment eines homogen geladenen deformierten Rumpfes zu

$$Q_0 = \frac{4}{5} Z R^2 \varepsilon = \frac{4}{5} Z R^2 \frac{\Delta R}{R} \tag{123.2}$$

berechnet. Das ist jedoch noch nicht das Quadrupolmoment, wie man es mißt (z. B. spektroskopisch), da bei seiner Berechnung der Rumpf stillschweigend als ruhend angenommen wurde. In Wahrheit ist der Rumpf bewegt, z. B. in einem Rotationszustand. Q_0 ist dann offenbar der Wert, den man im *mitbewegten* Koordinatensystem x', y', z' messen würde, nicht der im raumfesten oder Laborsystem x, y, z. Man nennt deshalb Q_0 „inneres Quadrupolmoment", seine genaue Definition ist

$$Q_0 = \int \varrho_e(\mathfrak{r}') (3z'^2 - r'^2)\, d\mathfrak{r}'.$$

Das direkt meßbare Quadrupolmoment ist dagegen im raumfesten Koordinatensystem definiert:

$$Q_R = \int \varrho_e(\mathfrak{r}) (3z^2 - r^2)\, d\mathfrak{r}.$$

Man kann zeigen [B 53-1], daß der Unterschied zu Q_0 in einem Projektionsfaktor P besteht,

$$Q_R = P Q_0,$$

der von der Stärke der Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung und vom Zustand des Kerns abhängt. Bei schwacher Wechselwirkung ist

$$P = 1, \qquad Q_R = Q_0 \quad (Q_0 \text{ klein}). \tag{123.3}$$

Bei starker Wechselwirkung ist

$$P = \frac{3\Omega^2 - J(J+1)}{(J+1)(2J+3)},$$

wenn ein Rotationszustand J vorliegt. Im Grundzustand $J = \Omega = J_0$ hat man also

$$Q_R = \frac{J_0}{J_0+1} \frac{2J_0 - 1}{2J_0+3} Q_0 \equiv P_{J_0} Q_0. \tag{123.4}$$

Daraus liest man $Q_R = 0$ für $J_0 = 0, \frac{1}{2}$ ab,[1]) auch dann, wenn das innere Quadrupolmoment Q_0 nicht verschwindet, der Rumpf also tatsächlich nicht kugelsymmetrisch ist. In diesem Fall hat offenbar der deformierte Rumpf keine bestimmte Lage im Raum, so daß man bei der Messung (im raumfesten Koordinatensystem) über alle Richtungen mittelt und folglich die deformierte Ladungsverteilung effektiv zu einer kugelsymmetrischen ausgemittelt wird. Bei Kernen mit $J_0 = 0, \frac{1}{2}$, insbesondere (g,g)-Kernen ($J_0 = 0$), ist also eine Deformation nicht direkt als Quadrupolmoment nachweisbar (s. aber S. 624).

Von diesen Fällen abgesehen, haben wir jetzt die Möglichkeit, aus den empirischen Quadrupolmomenten mittels (123.1), (123.2) und (123.3) oder (123.4) die Deformation ε des Rumpfes zu bestimmen. Wir wählen dazu die in Tabelle 70 angegebenen drei typischen Kerne ($R = 1{,}23 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ [cm]).

---

[1]) vgl. Fußnote 1 auf S. 571.

Tabelle 70

	Grund-zustand	Q_{exp}	Q_T [1])	Q_R	P	$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R_0}$
$^{18}_{17}\mathrm{Cl}^{35}$	$d^{-1}_{3/2}$	$-0{,}03$	$-0{,}08$	~ 0	1	~ 0
$^{28}_{23}\mathrm{V}^{51}$	$f^{3}_{7/2}$	$+0{,}3$	$-0{,}06$	$+0{,}36$	$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ \frac{7}{15} \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l} 0{,}11 \\ 0{,}23 \end{array}\right.$
$^{104}_{71}\mathrm{Lu}^{175}$	$J_0 = \frac{7}{2}$	$+5{,}7$	vernachl.	$+5{,}7$	$\frac{7}{15}$	0,43

Cl^{35} gehört zu den leichteren Kernen, bei denen das Schalenmodell gut zutrifft: Der experimentelle Q-Wert stimmt mit dem Schalenmodell-Wert praktisch überein und ergibt deshalb eine sehr kleine Deformation ε. Das Quadrupolmoment von V^{51} liegt bereits merklich außerhalb der Schalenmodellgrenzen (Abb. 236). Hier liegt deshalb vermutlich schon starke oder wenigstens mittelstarke Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung vor, wie auch die recht merkliche Deformation ε zeigt, die wir für schwache ($P = 1$) und starke Wechselwirkung ($P = P_{7/2} = \frac{7}{15}$) erhalten.

Lu^{175} schließlich ist einer der schweren Kerne mit sehr großem Quadrupolmoment, für ihn können wir deshalb den Beitrag der äußeren Teilchen vernachlässigen – der Schalenmodell-Wert hat hier sicher keinen Sinn. Die Deformation ist mit $\varepsilon \sim 0{,}4$ schon beträchtlich, doch kann man hoffen, daß unsere Theorie, die auch im Fall starker Wechselwirkung kleine (aber bleibende) Deformation $\varepsilon \ll 1$ voraussetzte, zur Not noch einigermaßen zutrifft. Glücklicherweise haben fast alle anderen bleibend deformierten Kerne (außer z. B. Er^{167}: $Q = 10{,}2$, $\varepsilon \gtrsim \frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 253) [2]); Np^{237}: $Q \sim 6$) Quadrupolmomente $Q < 4$, die merklich unter dem von Lu^{175} liegen. In Abb. 253 sind die unter Vernachlässigung des Beitrags der äußeren Teilchen nach demselben Verfahren wie in der Tabelle 70 aus den gemessenen Quadrupolmomenten bestimmten Deformationen aufgezeichnet worden.

Wir haben bis jetzt den Wert (123.2) für Q_0 verwendet, wie er sich (S. 591) für ein homogen geladenes (Quasi-) Ellipsoid mit *vorgegebener* Deformation ε ergibt. In unserem Kollektiven Modell ist jedoch die Deformation nicht vorgegeben, sondern durch die Stärke der Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung (117.1) bestimmt. Berechnet man in hydrodynamischer Näherung die Gleichgewichtsdeformation

[1]) $\langle r^2 \rangle = R^2$ gesetzt.

[2]) Diese extrem große Deformation ergibt sich aus anderen Daten des Kerns Er^{167} nicht und ist deshalb wahrscheinlich nicht reell.

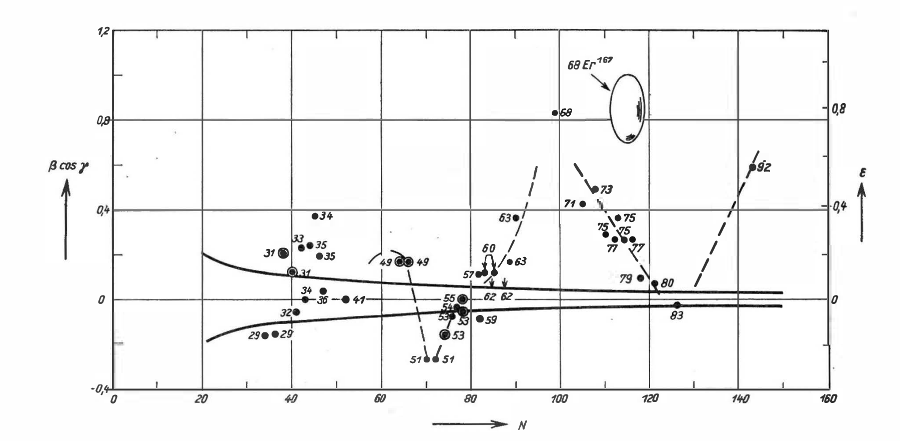


Abb. 253.
Aus dem Quadrupolmoment abgeleitete Deformation β ($R = 1{,}23 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ [cm]): Für verlängertes Rotationsellipsoid ($Q > 0$) ist $\cos\gamma = +1$, für abgeplattetes ($Q < 0$) ist $\cos\gamma = -1$ zu setzen. Die Ziffern an den Punkten geben Z an. Die meisten Punkte sind unsicher um einen Fehler von zehn bis zweihundert Prozent, nur die eingekreisten Punkte sind bis auf einige Prozent genau. Die ausgezogenen Kurven geben den „erlaubten Bereich" nach dem Schalenmodell an; vgl. Abb. 236. Die Gestalt des Kerns Er^{167} mit dem extrem großen $Q = 10 \cdot 10^{-24}\,cm^2$ wurde gezeichnet, vgl. aber Fußnote 1 auf S. 616. (Nach [F 55-2])

und das dazugehörige Q_0 (BOHR, MOTTELSON [B 53-1], S. 55) im Grundzustand, so ergibt sich für einen Kern mit einem äußeren Teilchen $(R_{nl}(r) Y_l^m)$

$$Q_0 = -\frac{3}{4\pi} \frac{2J_0 - 1}{2(J_0 + 1)} \frac{U}{C_2} Z R^2, \tag{123.5}$$

wo $U = V_0 R^3 R_{nl}^2(R) \sim 40$ MeV und C_2 die Oberflächenkonstante für $l = 2$ nach (116.8) ist. Bei dieser Rechnung wurde angenommen, daß in der Deformation des Rumpfes nur die Y_2^m vorkommen. — Der Ausdruck (123.5) enthält also im Gegensatz zu (123.2) die hydrodynamische Näherung.

Für ungerade Kerne mit einem äußeren Teilchen in der ungeraden Gruppe ergeben sich mit $U = 40$ MeV, C_2 aus (116.8) und $R = 1{,}44 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ [cm] für $Q = Q_R + Q_T$ die Werte der Tabelle 71.

Tabelle 71

Kern	Konfiguration		J_0	P[1])	Q_{hydr}	Q_{exp}
	P	N				
${}^{17}_{16}S^{33}$	—	$d_{3/2}$	3/2	0,7	— 0,22	— 0,064
${}^{19}_{16}S^{35}$	—	$(d_{3/2})^{-1}$	3/2	0,7	+ 0,22	+ 0,045
${}^{18}_{17}Cl^{35}$	$d_{3/2}$	$(d_{3/2})^2$	3/2	0,7	— 0,26	— 0,079
${}^{20}_{17}Cl^{37}$	$d_{3/2}$	—	3/2	0,7	— 0,26	— 0,062
${}^{41}_{32}Ge^{73}$	$(p_{3/2}, f_{5/2})^4$	$g_{9/2}$	9/2	0,9	— 1,2	— 0,21
${}^{64}_{49}In^{113}$	$(g_{9/2})^{-1}$	$(d_{5/2}, g_{7/2}, h_{11/2})^{14}$	9/2	0,9	+ 2,4	+ 1,14
${}^{66}_{49}In^{115}$	$(g_{9/2})^{-1}$	(„)^{16}	9/2	0,9	+ 2,4	+ 1,16
${}^{70}_{51}Sb^{121}$	$d_{5/2}$	(„)^{20}	5/2	0,7	— 1,5	— 0,5
${}^{72}_{51}Sb^{123}$	$g_{7/2}$	(„)^{22}	7/2	0,8	— 2,1	— 0,7
${}^{126}_{83}Bi^{209}$	$h_{9/2}$	—	9/2	0,8	— 5,6	— 0,4

Man erhält nach Tabelle 71 für solche Kerne in hydrodynamischer Näherung meist die Quadrupolmomente um einen Faktor 2 bis 5, oft fast um eine Größenordnung zu groß. Dasselbe gilt damit von Q_0 (123.5) und der daraus mittels (123.2) berechenbaren Deformation ε. Das bestätigt unsere Vermutung, daß die hydrodynamische Näherung nur qualitativ brauchbar ist, d. h. die Nukleonensubstanz sich merklich anders verhält als eine inkompressible, wirbel- und reibungsfreie Flüssigkeit.

---

[1]) P wurde nach einem Interpolationsverfahren zwischen schwacher und starker Wechselwirkung bestimmt (BOHR, MOTTELSON [B 53-1], S. 57).

§ 124. Angeregte kollektive (Rotations- und Schwingungs-) Zustände

a) Rotationszustände axialsymmetrischer Kerne

Kerne, deren Rumpf bleibend (axialsymmetrisch) deformiert ist, sollten nach S. 609 kollektive Rotation ausführen, d. h. ein Rotationsspektrum haben, das bei (g, g)-Kernen und ungeraden Kernen die Form hat ((120.9b), (120.10))

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I}\left[J(J+1) - J_0(J_0+1)\right], \qquad J_0 \neq \frac{1}{2}\,,^{1)} \tag{124.1}$$

$$J = \begin{cases} 0, 2, 4, \ldots & \text{(g, g)-Kerne,} \\ J_0, J_0+1, J_0+2, \ldots & \text{ungerade Kerne;} \end{cases}$$

in Abb. 254 haben wir das aufgezeichnet. Wir erwarten solche Spektren in den Gebieten zwischen den höheren Schalenabschlüssen, wo die großen Quadrupolmomente direkt eine bleibende Deformation anzeigen.

Für das besonders einfache Rotationsspektrum der (g, g)-Kerne sollten sich danach die aufeinander folgenden Energiewerte E_J verhalten wie

$$\frac{E_4}{E_2} = \frac{10}{3}, \quad \frac{E_6}{E_2} = 7, \quad \frac{E_8}{E_2} = 12, \ \ldots \tag{124.2}$$

Abb. 254. Theoretische Rotationsspektren von Kernen mit dem angegebenen J_0-Wert. Die Zahlen rechts an jedem Term geben J, die linken Zahlen E in Einheiten $\hbar^2/2I$. Alle Terme eines Rotations-Spektrums haben die gleiche Parität, wie der Grundzustand, für $J_0 = 0$ also Parität $+1$

In Abb. 255 wurden die experimentell gefundenen Verhältnisse der niedrigsten Anregungsenergien von (g, g)-Kernen eingezeichnet. Es zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung: *Die niedrigsten angeregten Zustände der (g, g)-Kerne im Gebiet der bleibenden Deformationen sind offenbar Rotationszustände.* Merkliche Abweichungen von den theoretischen Werten (124.2) treten bei Annäherung an den doppelten Schalenabschluß $208 = 82 + 126$ auf. Das ist zu erwarten, denn in der Nähe der Schalenabschlüsse hat man schwache Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung (vgl. S. 602) und folglich keine Rotationszustände.

Ein besonders gut ausgeprägtes Rotationsspektrum zeigt der Kern Hf^{180} (Abb. 256a), einer der wenigen Fälle, in denen vier Rotationszustände über dem Grund-

---

1) Vgl. Fußnote auf S. 610.

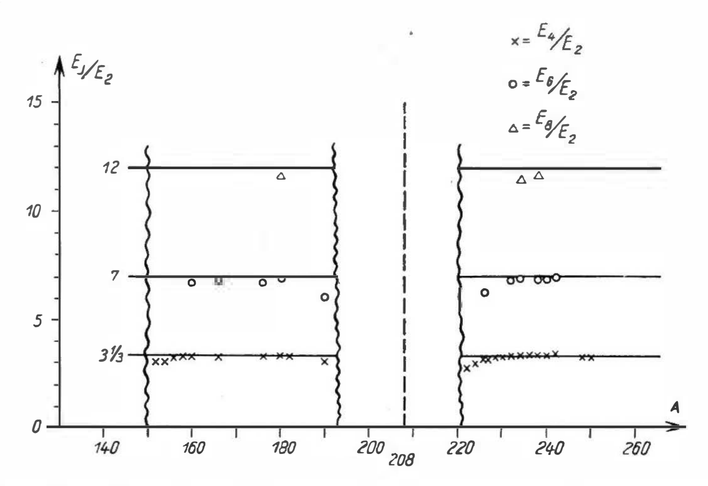


Abb. 255. Empirische Verhältnisse $E_J : E_2$ zwischen den Rotationszuständen E_J von (g, g)-Kernen ($J_0 = 0$) und ihrem ersten angeregten Zustand E_2 in den Gebieten starker Deformation. Waagerechte Striche: Theoretische Werte nach (124.2). (Nach A. BOHR, Physica 22, 959 (1956))

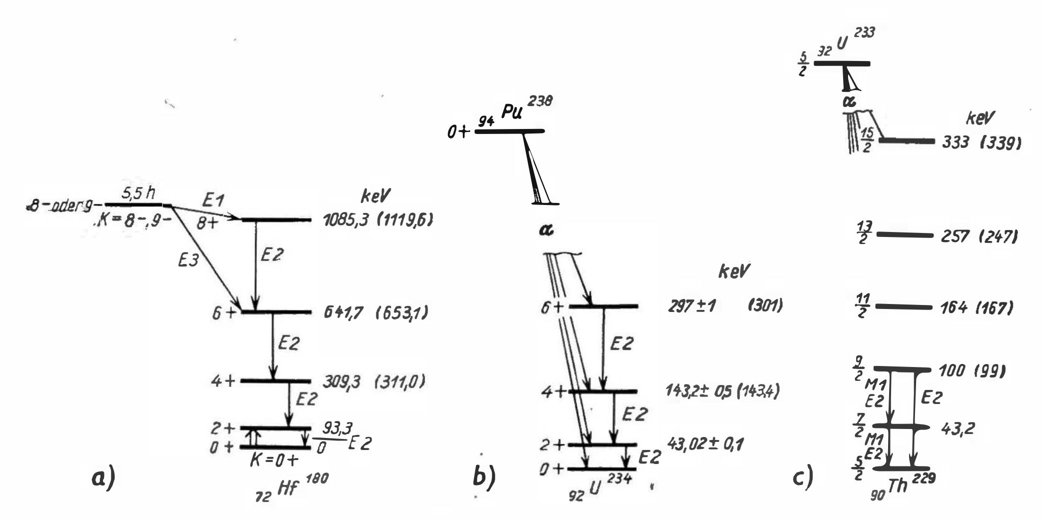


Abb. 256. Beispiele gemessener Rotationsspektren, a), b) für (g, g)-Kerne, c) für einen ungeraden Kern. Linke Zahlen: J (und Parität); rechte Zahlen: Energien in keV; eingeklammerte Zahlen: vgl. Text. Zwischen den Termen wurden die beobachteten γ-Übergänge eingezeichnet, bei Hf^{180} als Doppelpfeil ein Übergang durch Coulomb-Anregung. Der Weg zur Erreichung der Niveaus durch γ-Übergänge von einem höher liegenden Niveau aus (a) bzw. durch α-Zerfall (b, c) wurde angedeutet. (Nach [M 57-1] a), [B 54-1] (b), und VILLARS, Ann. Rev. Nucl. Sci. 7, 185 (1957), und DZHELEPOV, PEKER, Zerfallsschemata radioaktiver Kerne, Moskau 1957 (russ.) (c))

zustand gefunden werden konnten. Zwischen den Zuständen der (g, g)-Kerne Hf^{180} und U^{234} (Abb. 256b) erfolgen nur $E2$-Übergänge, wie es zwischen Zuständen gleicher (positiver) Parität (vgl. Abb. 254 und (120.9b)) mit Spindifferenz 2

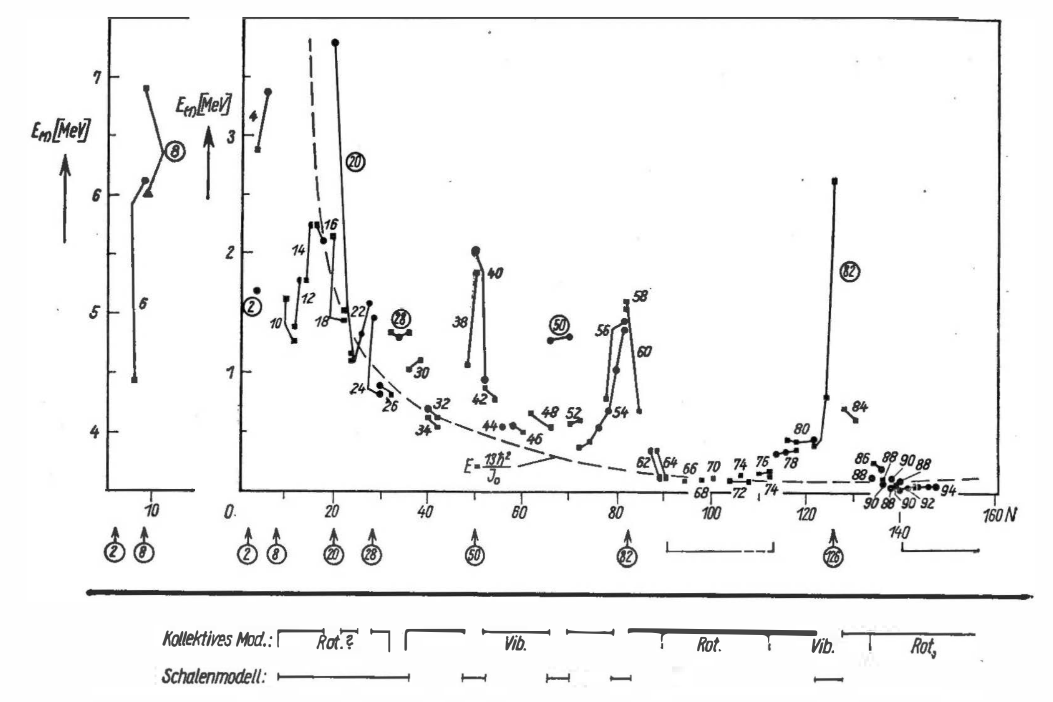


Abb. 257. Energien der ersten angeregten Zustände von (g, g)-Kernen. Kerne mit gleichem Z sind verbunden, die Zahlen geben Z an. Spins und Paritäten der ersten angeregten Zustände: ▲ 0^+, ■ 2^+, ● unbekannt. Die Kurve $E = 13\,\hbar^2/J_0$ wurde als (ungefähre) Trennungslinie zwischen Rotations- und Schwingungszuständen nach [A 56-1] Fig. V3, eingezeichnet; vgl. Text. Die magischen Zahlen und die Klammern, die schon in Abb. 231, 236, 237 und 240 die Gebiete bleibender Deformationen andeuteten, wurden gezeichnet. Unten wurden die ungefähren Geltungsbereiche der verschiedenen Modellformen angegeben. (Nach [M 55-1])

sein muß. Die Zahlen rechts neben den Termen geben die gemessenen Energiewerte in keV, die rund eingeklammerten erhält man, wenn man I am ersten angeregten Zustand (2^+) justiert und damit die höheren E_J-Werte nach (124.1) berechnet. Abb. 256c zeigt das entsprechende für den ungeraden Kern Th^{229} ($J_0 = \frac{5}{2}$); hier treten Spindifferenzen 1 auf, die Paritäten aller Zustände sind gleich.

In welchem Maße die starke Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung die Verhältnisse zwischen den Schalenabschlüssen der schwereren Kerne bestimmt, geht besonders deutlich aus Abb. 257 hervor, die die ersten angeregten Zustände von (g, g)-Kernen zeigt: In den Gebieten $90 \leqq N \leqq 112$ und $N > 134$ hat der erste angeregte Zustand (E_2) in allen (g, g)-Kernen einen fast konstanten Wert; nach Abb. 255 gilt dasselbe folglich für die zweiten, dritten und vierten Anregungszustände. Bezeichnend ist weiter, daß – soweit bekannt – in diesen Gebieten der erste angeregte Zustand stets ein 2^+-Zustand ist (vgl. Abb. 254). Bei Annäherung an Schalenabschlüsse erhöht sich die Anregungsenergie sehr rasch, was den Übergang zu geringen Deformationen und damit schwacher Wechselwirkung anzeigt.

Darüber hinaus zeigen die ersten angeregten Zustände nach Abb. 257 deutlicher als andere Kerneigenschaften die Auszeichnung aller magischen N und Z ab 8: Alle magischen (g, g)-Kerne haben besonders hoch liegende erste angeregte Zustände, lassen sich also besonders schwer anregen.

Wir haben bis jetzt nur die Energie*verhältnisse* der Rotationsspektren nachgeprüft. Sie bestätigen, daß die Eigenwerte proportional $J(J+1)$ sind, und beweisen damit nicht nur die Existenz von Kernen mit bleibender Deformation, sondern darüber hinaus die Richtigkeit der Annahme einer axialsymmetrischen Deformation; denn ein dreiachsiges Ellipsoid ($I_x \neq I_y$, $I_z \neq 0$) führt auf ein ganz anderes, komplizierteres Rotationsspektrum (vgl. S. 630ff).

Beim Vergleich von (124.1) mit den *Absolutwerten* der Terme können wir zunächst unter Einsetzen der gemessenen Energien für E_J empirische Trägheitsmomente I_{exp} ermitteln (J_0 als bekannt vorausgesetzt), die in Abb. 258 eingezeichnet sind. Sie zeigen qualitativ einen ähnlichen Verlauf wie die Quadrupolmomente zwischen den Schalenabschlüssen. Darüber hinaus können wir mit

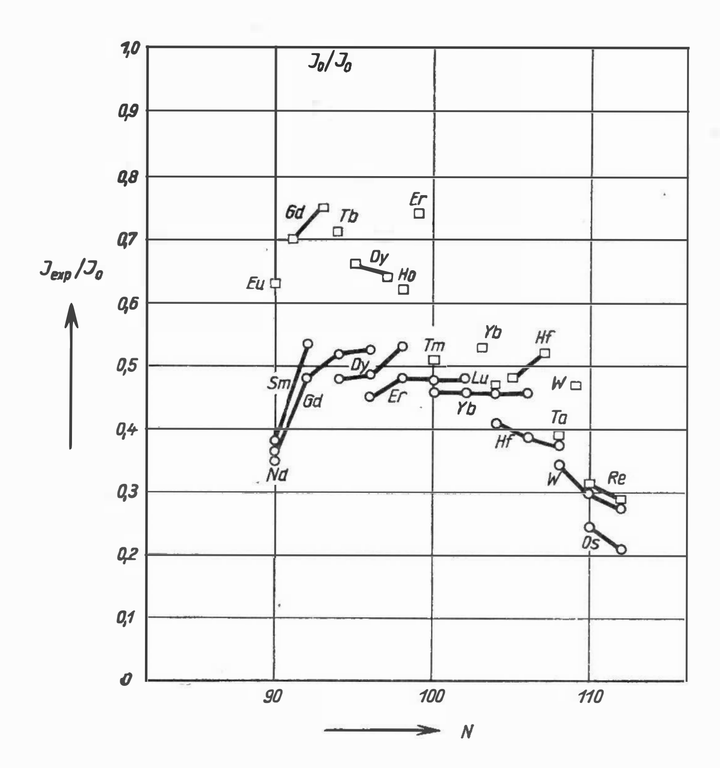


Abb. 258. Trägheitsmomente I_{exp} deformierter Kerne in Einheiten von $I_0 = {}^2/_5 \cdot A M R^2$ (120.7); ○ gerade Kerne, □ ungerade Kerne. Zur Bestimmung von I_{exp} vgl. Text. (Nach Moszkowski, Phys. Rev. 103, 1328 (1956))

Hilfe dieser Werte I_{exp} auf zwei Wegen die Formel (120.4b) der *hydrodynamischen Näherung* für das Trägheitsmoment nachprüfen (vgl. (120.7), (116.8)):

$$\begin{aligned} I &= \delta^2 \cdot I_0, \\ &= I \sim \delta^2 \cdot \frac{2}{5} A M R^2 = \delta^2 \cdot \frac{8\pi}{3} \frac{2}{5} B_2 \sim \varepsilon^2 \cdot \frac{16\pi}{15} B_2 = 3 B_2 \beta^2, \\ \delta &\sim \varepsilon, \quad \beta = \sqrt{\frac{16\pi}{45}}\, \varepsilon = 1{,}06\,\varepsilon. \text{ [1]} \end{aligned} \tag{124.3}$$

Einmal können wir I_{exp} in $I = \delta^2 I_0$ einsetzen, daraus ($I_0 = \frac{2}{5} A M R^2$) die zugehörige Deformation $\delta \sim \varepsilon$ bestimmen und diese mit Werten $\delta_{\text{exp}} \sim \varepsilon_{\text{exp}}$ der Deformation vergleichen, die aus anderen experimentellen Daten bestimmt wurden: aus den Quadrupolmomenten (vgl. S. 615ff.) oder E2-Übergängen (s. weiter unten). Darauf gehen wir weiter unten ein. Oder wir zeichnen in Abb. 259 den Verlauf der Funktion $I(\delta^2)$ bzw. $I(\beta^2)$, wie er sich nach (124.3) hydrodynamisch ergibt, und vergleichen ihn mit dem experimentellen Verlauf, indem wir die Werte I_{exp} über den aus dem gemessenen inneren Quadrupolmoment (E2-Übergänge: S. 623ff.; Quadrupolmomente: S. 615ff.) ermittelten Deformationen $\beta_{\text{exp}} \propto \varepsilon_{\text{exp}}$ auftragen. Beide Wege, die Beziehung $I = \delta^2 I_0$ nachzuprüfen, sind nur dann eine echte Probe der hydrodynamischen Näherung, wenn bei der Bestimmung der Größen I_{exp} und $\delta_{\text{exp}} \sim \varepsilon_{\text{exp}} \propto \beta_{\text{exp}}$, mit denen wir unsere hydrodynamische Beziehung vergleichen wollen, nirgends die hydrodynamische Näherung eingeht. Diese Bedingung ist erfüllt; denn:

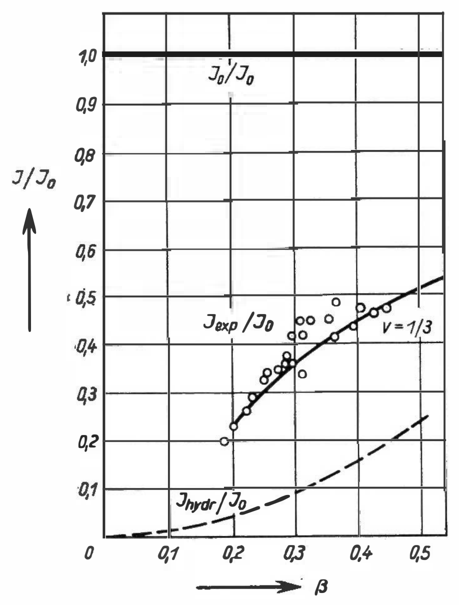


Abb. 259. Experimentelle Trägheitsmomente deformierter Kerne I_{exp} in Einheiten von I_0(120.7) als Funktion der Deformation β_{exp}. Zum Vergleich wurde das Trägheitsmoment der hydrodynamischen Näherung (gestrichelt) und das bei starrer Rotation (punktiert) eingezeichnet. Wegen der ausgezogenen Kurve ($v = 1/3$) vgl. S. 643. (Nach [B 55-3])

1. Das aus (124.1) berechnete I_{exp} enthält die hydrodynamische Näherung nicht, obwohl wir sie zur Ableitung dieser Formel benützt hatten. Denn jeder quantenmechanische Rotator mit $I_{z'} = 0$ hat ein Energiespektrum $\propto J(J+1)$; die Verhältnisse im Innern des Rotators

[1] Unter Einführung von β schreibt sich

$$R(\theta) = R\left(1 + \frac{2\varepsilon}{3} P_2^0\right) = R\left(1 + \beta \cdot \sqrt{\frac{5}{4\pi}} P_2^0\right) = R(1 + \beta Y_2^0);$$

vgl. (115.1) und S. 630.

gehen lediglich in den Proportionalitätsfaktor $\frac{\hbar^2}{2I}$, d. h. in I ein. Gerade diesen Proportionalitätsfaktor bestimmen wir hier aber rein empirisch.

2. Bestimmt man ε_{exp} aus dem gemessenen Quadrupolmoment, verwendet man die Beziehungen $Q \sim Q_R = P_{J_0} Q_0$, $Q_0 = \frac{4}{5} Z R^2 \varepsilon$. Die letztere gibt nach S. 591 das Quadrupolmoment eines homogen geladenen Ellipsoids, enthält also keine Annahmen über das Flüssigkeitsverhalten im Rumpf. Ebenso kann man zeigen, daß bei der Berechnung des Projektionsfaktors P_{J_0} nur benützt wird, daß eine Rotation des Rumpfes erfolgt, nicht aber, was dabei im Rumpf vor sich geht: P_{J_0} ist eine rein kinematische Größe.

3. Bestimmt man die Deformation ε_{exp} aus E2-Übergängen zwischen Rotationszuständen (s. unten), werden wieder nur die Beziehung $Q_0 = \frac{4}{5} Z R^2 \varepsilon$ und kinematische Größen der Rotation verwendet.

Man sieht in Abbildung 259, daß die hydrodynamische Näherung nach den Quadrupolmomenten auch die Trägheitsmomente quantitativ falsch liefert: Die Werte sind um einen Faktor 2 bis 5 zu klein. Die empirischen Trägheitsmomente liegen also zwischen denen der starren und der hydrodynamischen Rotation, aber näher an den hydrodynamischen Werten. Wir werden darauf noch zurückkommen. —

Wir sahen in Abb. 256, daß zwischen den Rotationszuständen E2-Übergänge erfolgen. Aus deren Lebensdauer t bzw. Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich eine dritte unabhängige Möglichkeit, die Deformation oder — was nach (123.2) dem immer gleichwertig ist — das innere Quadrupolmoment von Kernen zu messen (1. Möglichkeit: aus Quadrupolmoment, S. 615ff.; 2. Möglichkeit: aus den Energien der Rotationszustände, S. 622)[1]), da die Übergangswahrscheinlichkeit pro sec eines γ-Zerfalls zwischen zwei Zuständen mit Abstand ΔE

$$\frac{1}{t} = T(\text{E}2) = \frac{4\pi}{75}\,\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\Delta E}{\hbar c}\right)^5 B(\text{E}\,2)$$

beträgt (vgl. Blatt, Weisskopf [B 59-1], Formel XII, (3,21) und darin die „reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit" $B(\text{E}2)$ proportional Q_0^2 ist. So hat man z. B. für einen Rotationsübergang $J + 2 \rightarrow J$ in einem (g, g)-Kern

$$B(\text{E}\,2) = B(\text{E}2;\ J + 2 + J) = \frac{15}{32\pi}\, e^2 Q_0^2\, \frac{(J+1)(J+2)}{(2J+3)(2J+5)};$$

ähnliche Ausdrücke (Bohr [B 54-1], S. 34f.) ergeben sich für die E2-Übergänge zwischen Rotationszuständen ungerader Kerne.

Wie wir bereits in Abb. 240 sahen, zeigen die reduzierten Lebensdauern ft der E2-Übergänge von (g,g)-Kernen einen ähnlichen regelmäßigen Gang im

---

[1]) Über weitere Möglichkeiten zur Bestimmung von Q_0 aus HFS, Isotopieverschiebung, hochenergetischer Elektron-Streuung, μ-Einfang und Kernphotoeffekt berichtet zusammenfassend Temmer, Revs. Mod. Ph. **30**, 498 (1958). Siehe auch den Handbuchartikel [H 57-1].

Gebiet der deformierten Kerne zwischen $N = 82$ und 126, wie wir das für die Energiewerte der ersten angeregten Zustände im gleichen Gebiet in Abb. 257 fanden. Das zeigt, daß alle diese E2-Übergänge unter fast gleichen Bedingungen erfolgen, und das ist bei Rotationsübergängen von (g, g)-Kernen der Fall: $E_2 - E_0 \sim$ const, alle Übergänge sind vom Typ $2^+ \rightarrow 0^+$ nach Abb. 257. Die reduzierten Lebensdauern sind nach Abb. 240 in diesem Gebiet um etwa zwei Größenordnungen kleiner, d. h. die Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechend größer als nach dem Schalenmodell zu erwarten – ein Zeichen, daß an dieser Ausstrahlung viele Protonen beteiligt sein müssen, wie man es bei Übergängen zwischen kollektiven Rotationszuständen hat.

Die Coulomb-Anregung (vgl. § 41), d. h. die Anregung von Zuständen eines Kerns durch das Coulomb-Feld eines vorbeifliegenden, nicht eindringenden, geladenen Teilchens der Ladung $Z_1 e$, ist die Umkehrung eines γ-Übergangs und wurde in Abb. 256 als Doppelpfeil mit eingezeichnet. Der Wirkungsquerschnitt für Coulomb-Anregung von Rotationszuständen hängt deshalb von B(E2) ab und ermöglicht also ebenfalls die Messung der Deformation oder des inneren Quadrupolmoments (4. unabhängige Möglichkeit). Nach [A 56-1] ist der Wirkungsquerschnitt für Coulomb-Anregung

$$\sigma = \frac{1}{Z^2 e^2} \left(\frac{M v}{\hbar}\right)^2 B(\mathrm{E2})\, f_{\mathrm{E2}}\ (\xi),$$

wo B(E2) die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit des entsprechenden γ-Übergangs ist, v die Relativgeschwindigkeit des vorbeifliegenden Teilchens und $f_{\mathrm{E2}}(\xi)$ eine bestimmte Funktion des dimensionslosen Parameters

$$\xi = \frac{Z_1 Z e^2}{\hbar v} \frac{\Delta E}{2E}$$

(ΔE = Anregungsenergie, Z = Kernladung, Z_1 = Ladung des Teilchens).

Wir wollen auch hier (aus γ-Übergängen und Coulomb-Anregung zwischen Rotationszuständen) empirische Werte für $\varepsilon \propto \beta$ (bzw. $Q_0 \propto \varepsilon^2$) bestimmen. Die für (g, g)Kerne erhaltenen Werte β sind in Abb. 260 quadriert als β_B eingezeichnet und werden verglichen mit den Deformationen β_Q, die aus den Quadrupolmomenten ungerader Kerne (S. 615ff.), und mit den Deformationen β_I, die aus den Trägheitsmomenten von (g,g)-Kernen (S. 622) bestimmt wurden. Es zeigt sich, daß die $\beta_Q{}^2$- und $\beta_B{}^2$-Werte von ähnlicher Größe sind. Die $\beta_I{}^2$-Werte dagegen sind – man beachte den Skalenwechsel – ungefähr fünfmal größer als die $\beta_B{}^2$, die β_I folglich reichlich doppelt so groß wie die β_B. Diese großen β_I-Werte sind nur ein anderer Ausdruck für die schon in Abb. 259 gefundene Tatsache, daß die hydrodynamische Näherung quantitativ nicht brauchbar ist. Denn dort sahen wir, daß die hydrodynamische Näherung wesentlich kleinere Trägheitsmomente für eine bestimmte Deformation β liefert als beobachtet. Umgekehrt erkennt man aus Abb. 259, daß man reichlich doppelt so große Deformationen β, also etwa fünfmal größere β^2 braucht, um mit der hydrodynamischen Näherung (124.3) Trägheitsmomente der beobachteten Größenordnung zu erhalten.

Die β_B und β_Q enthalten nach S. 622 ff. im Gegensatz zu β_I die hydrodynamische Näherung nicht, sondern nur Voraussetzungen (homogene Ladungsverteilung, kinematische Annahmen), die sicher ungefähr zutreffen. Wir können die β_B und β_Q deshalb als die „wahren" Deformationen ansehen.

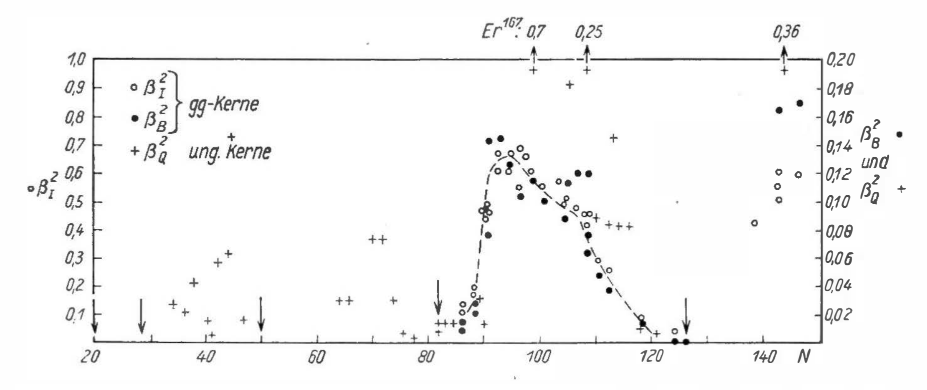


Abb. 260. Vergleich der aus verschiedenen experimentellen Daten bestimmten (quadrierten) Deformationen: ● β_B aus der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit B (E2) von γ-Übergängen oder von Coulomb-Anregung zwischen Rotationszuständen von (g, g)-Kernen $+\beta$ aus dem Quadrupolmoment ungerader Kerne nach Abb. 253 und ○ β_I aus dem Trägheitsmoment (Anregungsenergien) von Rotationszuständen von (g, g)-Kernen. Man beachte die verschiedenen Skalen für β_B^2, β_Q^2 bzw. β_I^2!
(Nach HEYDENBURG, TEMMER, Ann. Rev. Nucl. Sci. 6, 77 (1956) und Abb. 253)

Abschließend ist es interessant, festzuhalten, daß wir auf den letzten Seiten Möglichkeiten gefunden haben, das *innere* Quadrupolmoment deformierter Kerne auch im Fall $J_0 = 0$ ((g, g)-Kerne zu messen, obwohl für $J_0 = 0$ das Quadrupolmoment im Grundzustand verschwindet. Das ist möglich, weil man unter Heranziehung von angeregten Zuständen (deren Energien bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten) indirekt auf Q_0 schließen kann.

b) Schwingungs-(Vibrations-)Zustände kugelsymmetrischer Kerne oder Rotationszustände dreiachsiger Kerne?

Während sich im Gebiet der bleibend deformierten Kerne mit erfreulicher Deutlichkeit die Existenz von Rotationszuständen axialsymmetrischer Kerne zeigte, ist die Situation außerhalb dieser Gebiete – besonders in dem weiten Bereich von den leichten Kernen bis $N = 88$ – noch nicht völlig geklärt. Es existieren zwei Vorschläge, die wir nacheinander besprechen. Vorher aber wollen wir festhalten, daß es sich unabhängig von der Deutung im einzelnen auch hier wieder um *kollektive* Anregungszustände handelt. Das zeigen die E2-Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen diesen Zuständen, die im Gebiet $N \leqq 88$ nach Abb. 240 die Schalenmodellwerte um mindestens eine Größenordnung *über*treffen und so ihren kollektiven Ursprung anzeigen.

Deutungsversuch mit Vibrationszuständen kugelsymmetrischer Kerne (Bohr, Mottelson u. a).

Nach S. 599 sollte der Rumpf im Fall schwacher Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung keine bleibende Deformation haben, sondern nur kollektive harmonische Oberflächenschwingungen um die kugelförmige Ruhegestalt ausführen mit dem Spektrum

$$E_{n_2, n_3, \ldots} = \sum_l \hbar \omega_l \left(n_l + \frac{2l+1}{2}\right), \quad n_l = 0, 1, \ldots, \quad \omega_l = \sqrt{\frac{C_l}{B_l}}. \tag{124.4}$$

Für $l = 2$ (Quadrupolschwingungen: $n_2 = 0, 1, 2, \ldots$; $n_k = 0$, $k \neq 2$) ergibt sich für einen Kern mit Grundzustand $J_0 = 0$ das Spektrum der Abb. 261 mit den angeschriebenen Drehimpulsen und Paritäten (vgl. S. 599). Solche Quadrupolschwingungen müßten die niedrigsten Terme ergeben, da ω_2 nach Abb. 262, in der die in hydrodynamischer Näherung berechneten Frequenzen $\omega_l = \left(\frac{C_l}{B_l}\right)^{1/2}$ (116.11 b)[1]) aufgetragen sind, die kleinste Schwingungsfrequenz ist. Für $l = 2$ sollten also die aufeinanderfolgenden Termwerte E_{n_2} in den Verhältnissen

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{E_3}{E_1} = \frac{3}{1}, \quad \ldots \tag{124.5}$$

stehen. Abb. 263 zeigt die gemessenen Verhältnisse $\frac{E_{2)}}{E_{1)}}$ des zweiten zum ersten angeregten Zustand von (g,g)-Kernen ($J_0 = 0$). Für $N \leqq 88$ ist dieses Verhältnis, von wenigen Ausnahmen abgesehen, tatsächlich etwa 2, im Mittel 2,2. Bei den Ausnahmen handelt es sich fast immer um magische Kerne oder solche, die (Sr^{88}, 3^-)

Abb. 261.
Theoretisches Quadrupolschwingungsspektrum ($l = 2$) eines Kerns mit $J_0 = 0$ (z. B. (g, g)-Kern).
Die Zahlen rechts an jedem Term geben J (und Parität), die linken Zahlen E_{n_2} in Einheiten $\hbar\omega_2$. Die Äquidistanz der Terme und ihre Entartung gelten nur für streng harmonische Schwingungen, ändern sich also durch Terme höherer Ordnung in der Schwingungsenergie, die in (116.8) vernachlässigt wurden

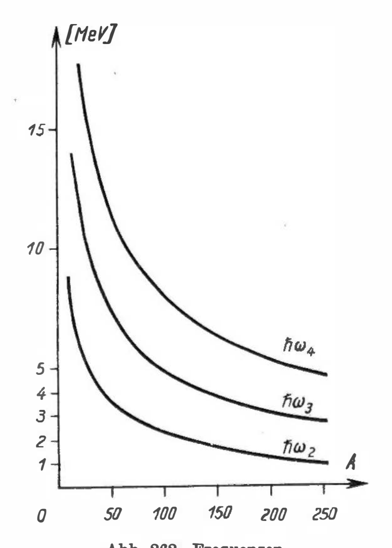


Abb. 262. Frequenzen der Oberflächenschwingungen $l = 2, 3, 4$ in hydrodynamischer Näherung (116.11b). $R = 1{,}44 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ [cm]. (Nach [B 53-1])

[1]) Oberflächenspannung γ nach S. 597 halbempirisch festgelegt.

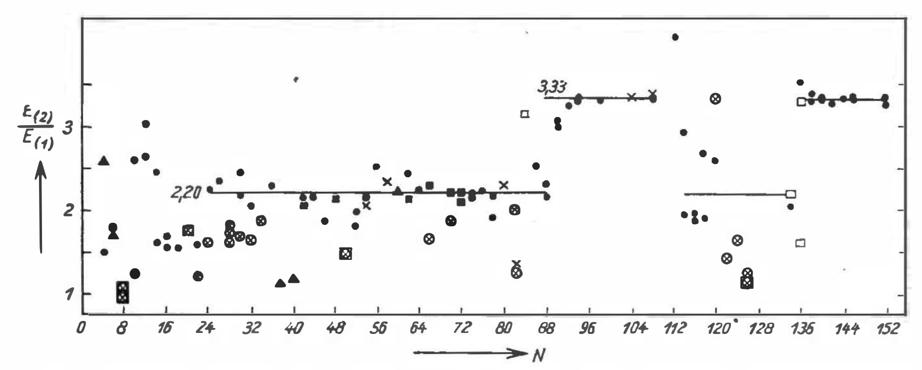


Abb. 263. Energieverhältnisse $E_{(2)} : E_{(1)}$ des zweiten ($E_{(2)}$) zum ersten ($E_{(1)}$) angeregten Zustand von (g, g)-Kernen ($J_0 = 0$). Spins und Paritäten der zweiten angeregten Zustände: ▲ 0^+, ■ 2^+, × 4^+, □ ungerade Parität, ● unbekannt; ⊗ magischer Kern. (Nach WAY u.a., Ann. Rev. Nucl. Sci. **6**, 129 (1956) und [M 57-1], Fig. 34)

wegen falschen Spins und/oder falscher Parität sicher nicht zu einem Quadrupolschwingungsspektrum gehören. Obwohl die Werte stärker streuen als im analogen Fall der Rotationsspektren (Abb. 255), liegt es nahe, diese Terme als Terme eines Schwingungsspektrums aufzufassen. Die Abweichungen vom Termverhältnis 2 können von einer gewissen Anharmonizität, von einer Abweichung von der adiabatischen Näherung u. a. stammen (vgl. [W 56-2]).

Eine weitere Stütze für unsere Deutung liefern die Spins und Paritäten der Zustände. Für $E_{(1)}$ findet man im Gebiet $N = 35$ bis 88 nach Abb. 257 mit sehr wenigen Ausnahmen 2^+, wie es nach Abb. 261 sein muß. Für $E_{(2)}$ sind sie in Abb. 263 eingetragen und – soweit bekannt – ausnahmslos 0^+, 2^+, 4^+, ebenfalls in Übereinstimmung mit Abb. 261.

Zwischen $N = 88$ und 90 erleidet $\frac{E_{(2)}}{E_{(1)}}$ einen Sprung von ~ 2 auf 3 und steigt danach noch ein wenig an auf den Wert 3,3 der Rotationsspektren. Zwischen 88

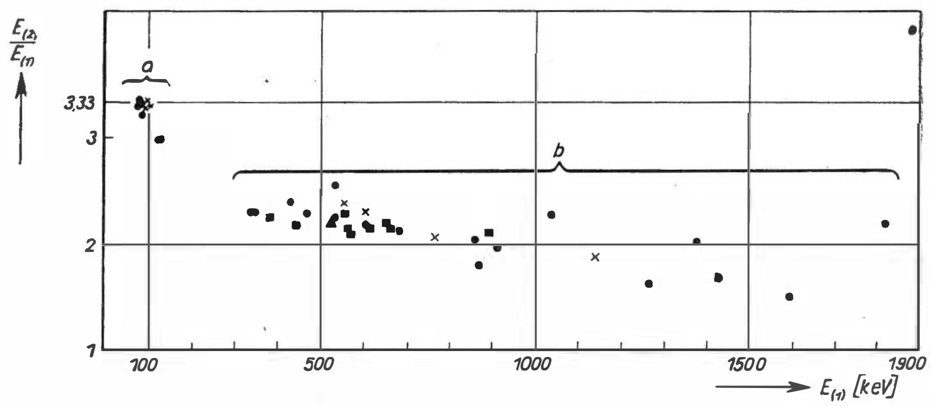
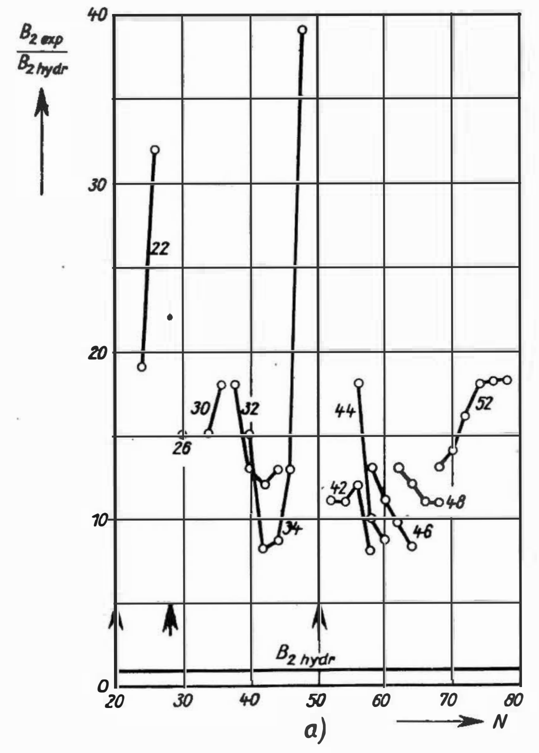


Abb. 264. Energieverhältnisse $E_{(2)} : E_{(1)}$ von (g, g)-Kernen (vgl. Abb. 263) als Funktion von $E_{(1)}$. Spins und Paritäten wie in Abb. 263. Gruppe a besteht aus den Kernen mit Rotationszuständen, Gruppe b überwiegend aus den Kernen mit Vibrationszuständen, wie der Vergleich mit Abb. 263 zeigt. (Nach [M 57-1])



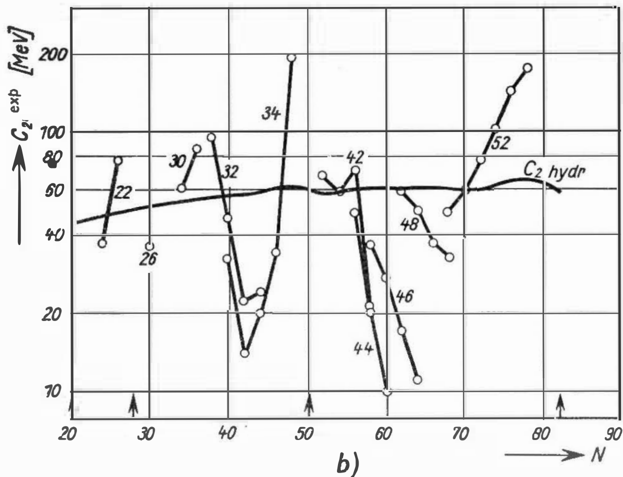


Abb. 265. Experimentelle Werte a) der Massenparameter ($B_{2\,\mathrm{exp}}$, gemessen in Einheiten von $B_{2\,\mathrm{hydr}} = \frac{3\,A\,M}{8\,\pi\,R_0^2}$ (116,8)) und b) der Deformationsparameter ($C_{2\mathrm{exp}}$) von (g, g)-Kernen mit Vibrationsspektrum. Die hydrodynamischen B_2- und C_2-Werte (116.8) wurden zum Vergleich eingezeichnet. (Nach TEMMER, HEYDENBURG, Phys. Rev. **104**, 967 (1956))

und 90 erfolgt also offenbar sprunghaft der Übergang von (nach unserer jetzigen Deutung) kugelsymmetrischen zu bleibend deformierten Kernen, die von da an bis kurz vor $N = 126$ (Abb. 255) die Form des Spektrums als Rotationsspektrum bestimmen. Die starke Änderung der Kernform an dieser Stelle äußert sich nach Abb. 236 auch direkt in den Quadrupolmomenten der ungeraden Kerne $_{63}\mathrm{Eu}^{151}$ ($N = 88$) und $_{63}\mathrm{Eu}^{153}$ ($N = 90$): Der zweite hat doppelt so großes Quadrupolmoment wie der erste. Auf die Frage, warum dieser Sprung gerade zwischen 88 und 90 erfolgt, kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

Nach den relativen Termwerten betrachten wir die absoluten Werte, die wir für $E_{(1)}$ direkt und für $E_{(2)}$ indirekt aus Abb. 264 ablesen können. Man sieht, daß der erste angeregte Zustand $E_{(1)}$ der betrachteten Spektren mit überwiegend 0,3 bis 0,7 MeV (Gruppe b) wesentlich höher liegt, als der der Rotationsspektren mit 0,1 MeV (Gruppe a). Andererseits liegt er aber noch bedeutend unter dem Wert $\hbar\omega_2$ der hydrodynamischen Näherung für Schwingungsspektren, der

nach Abb. 262 für den betrachteten Bereich ($N = 35$ bis 90 entspricht etwa $A = 70$ bis 150) zwei bis drei MeV betragen sollte. Auch hier zeigt sich demnach das Versagen der hydrodynamischen Näherung in quantitativer Hinsicht, falls unser jetziger Deutungsversuch zutrifft.

Bleiben wir noch bei dieser Deutung, dann wird man erwarten, daß in $\omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}$ vor allem der hydrodynamische Wert von B_2 falsch ist, denn diese Größe ist nach (124.3) eng mit den Trägheitsmomenten der *Rotations*spektren verknüpft, die sich dort in hydrodynamischer Näherung wesentlich zu klein ergaben (Abb. 259). Das bestätigt sich, wenn man aus den empirischen Termabständen mit (124.4) das Verhältnis $\left(\frac{C_2}{B_2}\right)_{\text{exp}}$ und aus der gemessenen reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit für einen Übergang $J = 0 \rightarrow J = 2$ (Coulomb-Anregung; [A 56-1])

$$B(\mathrm{E}\,2; 0 \rightarrow 2) = 5\left(\frac{3}{4\pi}\, Z e R^2\right)^2 \frac{\hbar}{2\sqrt{B_2 C_2}}$$

das Produkt $(B_2 \cdot C_2)_{\text{exp}}$ bestimmt. Man erhält so empirische Werte $B_{2\,\text{exp}}$ und $C_{2\,\text{exp}}$, die in Abb. 265 aufgezeichnet sind. Es zeigt sich, daß tatsächlich die hydrodynamischen B_2-Werte im Mittel etwa 10 bis 15 mal kleiner, die hydrodynamischen C_2-Werte etwa 2 mal größer sind (folglich die hydrodynamischen Termabstände $\hbar\omega_2$ rund 5 mal größer, s. oben) als die empirischen Werte. Man beachte die ausgeprägten Schaleneffekte!

Ähnlich wie die bisher betrachteten kugelsymmetrischen (g, g)-Kerne, müßten auch kugelsymmetrische ungerade Kerne Vibrationsspektren zeigen. Die Verhältnisse werden jedoch dadurch kompliziert, daß hier auch niedrigliegende Anregungsstufen des ungepaarten Nukleons auftreten können, wie z. B. bei den Isomeren (S. 580 ff.), und dadurch gegenseitige Störungen der beiden Anregungsarten.

Auch bleibend deformierte Kerne sollten Vibrationen um die deformierte (rotationssymmetrische) Ruhegestalt zeigen.

Abb. 266.
Rotationsschwingungsspektren eines bleibend deformierten Kerns a) theoretisch (schematisch), b) experimentell. Mittlere Rotationsbande geht vom Grundzustand, rechte vom ersten angeregten β-Vibrationszustand (ein β-Schwingungsquant: $n_\beta = 1$), linke vom ersten angeregten γ-Vibrationszustand (ein γ-Schwingungsquant: $n_\gamma = 1$) aus. K ist die Komponente von $\mathfrak{J}$ in z'-Richtung. Der 1^--Term (605 keV) von Pu^{238} gehört nicht zum Rotationsschwingungsspektrum (Einteilchenanregung?). (Nach A. Bohr, Physica 22, 959 (1956) (a) und [M 57-1] (b))

Man unterscheidet zwei Typen (Bohr, Mottelson [B 53-1], S. 97): β-Schwingungen nennt man die, bei denen unter Erhaltung der Rotationssymmetrie nur der Deformationsgrad ($\beta \propto \varepsilon$) um einen Ruhewert schwingt. γ-Schwingungen dagegen bedeuten kleine Abweichungen von der Rotationssymmetrie.
Da bleibend deformierte Kerne, wie wir wissen, Rotationsspektren besitzen, sollte sich bei ihnen wie bei den Molekülen über jedem Schwingungszustand ein Rotationsspektrum aufbauen. Bei einigen Kernen konnte das gefunden werden, wie z. B. Abb. 266 am Beispiel Pu^{238} zeigt.

Deutungsversuch mit Rotationszuständen nichtaxialsymmetrischer Kerne (Dawydow, Filippow)

In den letzten Jahren wurde vor allem durch Dawydow, Filippow und Mitarbeiter die Rotation *dreiachsiger* Kerne (*un*symmetrischer Kreisel) genauer untersucht. Dabei zeigte sich, daß möglicherweise solche kollektive Rotationszustände besonders für das Gebiet $N \leq 88$ wichtig sein könnten. Obwohl diese Untersuchungen noch nicht abgeschlossen sind, sollen sie hier kurz besprochen werden. Wegen genauerer Einzelheiten verweisen wir auf die Fachliteratur [D 58-1], [P 59-1] und auf die zusammenfassende Arbeit [D 59,1]. Einen dreiachsigen quasiellipsoidförmigen Kern beschreibt man zweckmäßig durch den Deformationsparameter β und einen Winkel γ, der ein Maß für die Abweichung von der Axialsymmetrie ist:

$$R(\theta\varphi) = R\left(1 + \sum_{m=-2}^{+2} \alpha_m Y_2^m(\theta\varphi)\right),$$

$$\alpha_0 = \beta\cos\gamma, \qquad \alpha_1 = \alpha_{-1} = 0,$$

$$\alpha_2 = \alpha_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma.$$

$\gamma = 0°$ (180°) bedeutet Axialsymmetrie um die z-Achse, $\gamma = 60°$ (240°) dasselbe um die y-Achse (nachprüfen!), und für γ-Werte zwischen 0° (180°) und 60° (240°) erhält man dreiachsige Übergangsformen mit maximaler Nichtaxialität bei $\gamma = 30°$ (210°). Wählt man wie üblich $\beta > 0$, so hat man bei $\gamma = 0°$ und 60° Verlängerung, bei $\gamma = 180°$ und 240° Abplattung des (Quasi-)Rotationsellipsoids.

Die Eigenwerte der Rotationszustände solcher Kerne hängen jetzt außer von β auch von γ ab, wie die Kurven in Abb. 267 zeigen. Man sieht, daß für kleine γ ($\gamma < 10°$) das Spektrum sich kaum vom axialsymmetrischen $\propto J(J+1)$ unterscheidet. Für $\gamma > 12°$ verschieben sich zwar die ausgezogenen Terme weiterhin nur wenig, doch treten neue (gestrichelte) Terme auf, die mit wachsendem γ rasch absinken. Insbesondere zeigt sich, daß für stark nichtaxiale Kerne ($\gamma \sim 25°$ bis 30°) die ersten beiden angeregten Zustände ein Termverhältnis

$$\frac{E_2(2)}{E_1(2)} \sim 2$$

haben. Das für $N \lesssim 88$ beobachtete Termverhältnis ~ 2 (Abb. 263) kann also auch durch *Rotationszustände* nichtaxialsymmetrischer Kerne gedeutet werden.

In Abb. 267 wurden in leicht verständlicher Weise die empirischen Termsysteme einiger (g, g)-Kerne eingezeichnet, wobei außer den relativen Termabständen auch die Quantenzahlen J der Terme beachtet wurden, soweit sie bekannt sind.

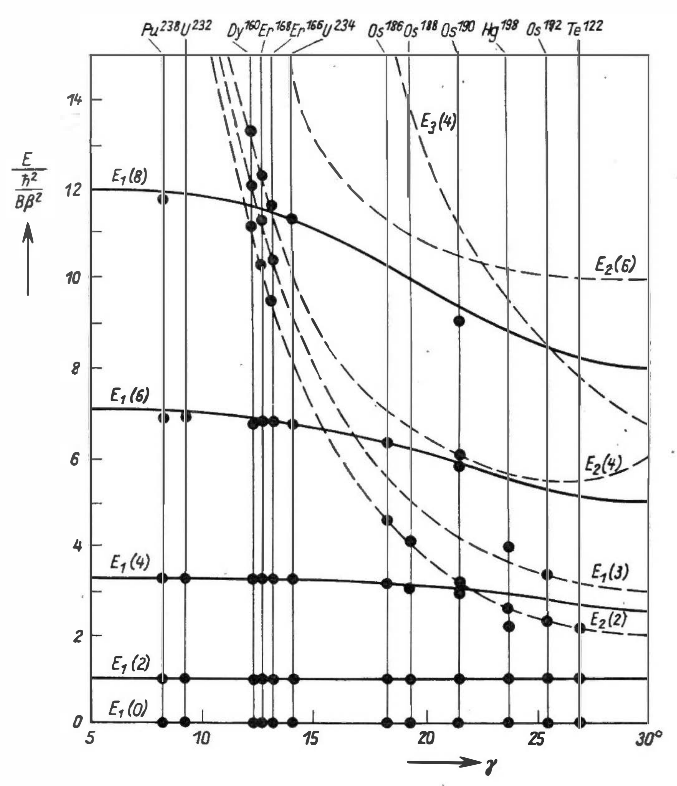


Abb. 267. Rotationsspektrum eines dreiachsigen Kerns (unsymmetrischen Kreisels). Das Termsystem für $\gamma = 30°$ bis $60°$ erhält man durch Spiegelung der Abbildung an der Geraden $\gamma = 30°$. $B = B_2 = {}^1/_2 \varrho R^5$ (vgl. (117.8)). Die Punkte geben die empirische Lage der Terme der eingezeichneten Kerne an. $E_\nu(2)$ bedeutet E_ν ($J = 2$). (Nach [D 59-1])

Diese Kerne lassen sich in drei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe ($\gamma < 10°$) enthält die fast axialsymmetrischen Kerne. Tatsächlich liegen ${}_{94}Pu^{238}$, ${}_{92}U^{232}$ mitten im axialsymmetrischen Rotationsgebiet (vgl. Abb. 257). Die zweite Gruppe ($12° < \gamma < 15°$) ist nach der jetzigen Deutung dadurch gekennzeichnet, daß die neu hinzugekommenen Terme noch hoch liegen, so daß wenigstens für die niedrigeren Terme das Spektrum noch gut mit dem axialsymmetrischen übereinstimmt: Geringe Nichtaxialität. Die Kerne ${}_{66}Dy^{160}$, ${}_{68}Er^{166}$, ${}_{68}Er^{168}$, ${}_{92}U^{234}$ liegen nach Abb. 257 mitten im axialsymmetrischen Rotationsgebiet, was also auch nach unserer jetzigen Deutung näherungsweise richtig ist. Der Unterschied zur früheren Deutung wird hier erst bei den höher angeregten Zuständen merklich, die bei axialsymmetrischer Ruhegestalt als γ-Schwingungen, jetzt aber als Rotations-

zustände gedeutet werden. (Die genauere Theorie zeigt, daß für $\gamma < 15°$ diese beiden Deutungen näherungsweise äquivalent sind.)

Die dritte Gruppe ($\gamma > 15°$) zeigt die gestrichelten Terme schon bei niedrigen Energien, die Nichtaxialität ist nach unserer jetzigen Deutung stark. Es ist bezeichnend, daß alle diese Kerne nicht im Gebiet der axialsymmetrischen Rotation oder höchstens an dessen Rand liegen (vgl. Abb. 257): Die vier $_{76}$Os-Kerne

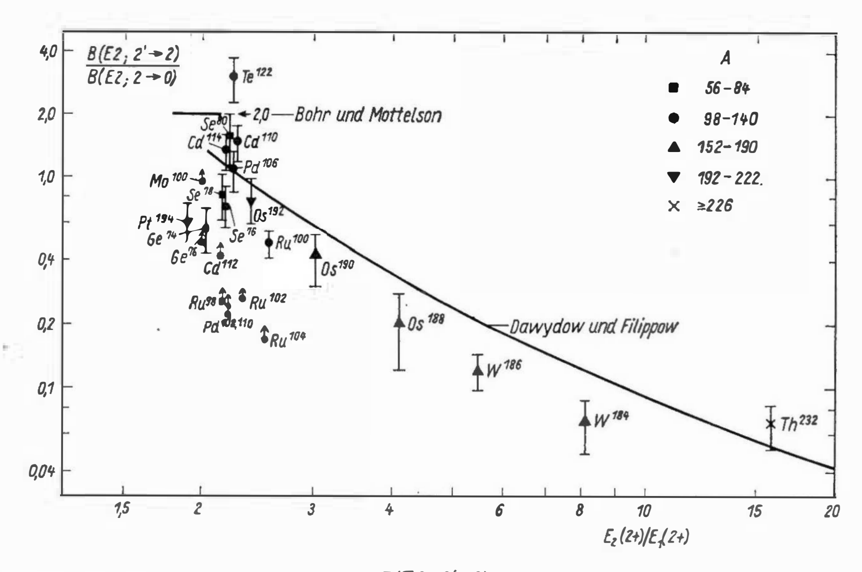


Abb. 268. Vergleich der experimentellen Werte $\frac{B(E2;\ 2' \to 2)}{B(E2;\ 2 \to 0)}$ für (g, g)-Kerne mit den theoretischen Voraussagen. $2' \to 2$ bedeutet Übergang $E_2(2) \to E_1(2)$. (Nach [P 59-1])

und Hg^{198} liegen im Übergangsgebiet zum Schalenabschluß bei $_{82}$Pb^{208}, und $_{52}$Te^{122} wurde als Prototyp eines Kernes aus dem Gebiet $N \leq 88$ eingezeichnet.

Bei vielen Kernen in Abb. 267 fehlen empirisch ein oder mehrere Terme, die nach unserer Deutung theoretisch zu erwarten sind.[1]) Man muß deshalb weitere experimentelle Daten heranziehen, wobei besonders die Übergangswahrscheinlichkeiten elektromagnetischer Übergänge gut geeignet sind. Die Verhältnisse zweier reduzierter Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich sowohl nach Bohr, Mottelson als auch nach Dawydow, Filippow als Funktionen der Termverhältnisse darstellen. Abb. 268 zeigt das für das Beispiel der Übergänge $2'^+ \to 2^+$ und $2^+ \to 0^+$. Während man mit dem Vibrationsmodell nur die „Insel" der Kerne in der Nähe von $\frac{E_2}{E_1} \sim 2$ verstehen kann, erklärt das dreiachsige Rotationsmodell dieselben

---

[1]) Das könnte die Folge irgendwelcher Auswahlregeln u. ä. sein.

Kerne und dazu die Gruppe der Kerne mit höherem $\frac{E_2}{E_1}$.[1]) Umfangreiches Material über die Übergangswahrscheinlichkeiten und ihre Verhältnisse findet man in den Arbeiten [P 59-1].

c) Zusammenfassung

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir die vom kollektiven Modell vorausgesagten Zustände als niedrige Anregungszustände von mittelschweren bis schweren Kernen gefunden, besonders für (g, g)-Kerne. Betrachten wir noch einmal überblicksmäßig diesen Bereich in Abb. 257, so haben wir bei den schwersten Kernen (Aktiniden) das Gebiet niedrig liegender Rotationszustände axialsymmetrisch deformierter Kerne mit fast konstanter Energie $E_{(1)} \sim 50$ keV. Nach Unterbrechung durch den doppelten Schalenabschluß $Z = 82$, $N = 126$ setzt sich dieses Gebiet fort (Lanthaniden, $E_{(1)} \sim 100$ keV) bis herab zu $N = 90$.

Ab $N = 88$ folgt das Gebiet, in dem die Deutung der kollektiven Anregungen noch nicht völlig klar ist, unterbrochen durch die relativ dicht liegenden Schalenabschlüsse $N = 82$, $Z = 50$, $N = 50$, mit allmählich von 0,5 MeV auf ungefähr 1 MeV ansteigenden ersten angeregten Zuständen. Auch im Übergangsgebiet zwischen dem doppelten Schalenabschluß $Z = 82$, $N = 126$ und den axialsymmetrischen Rotationszuständen gibt es eine Reihe von Kernen mit Vibrationsschwingungen bei kugelsymmetrischer oder Rotationszuständen bei dreiachsiger Ruhegestalt (vgl. Abb. 269).

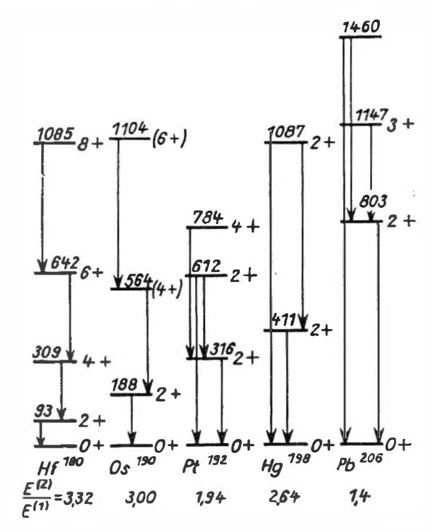


Abb 269. Typische Spektren von (g, g)-Kernen vom Rotationsgebiet bis in die Nähe des (doppelten) Schalenabschlusses Pb^{208} und darunter das jeweilige Verhältnis $E_{(2)} : E_1$ des zweiten zum ersten angeregten Zustand. Energien der Terme in keV. (Nach MOTTELSON, Revs. Mod. Phys. **29**, 186 (1957))

Die Trennung zwischen dem (axialsymmetrischen) Rotationsbereich und dem noch ungeklärten Gebiet bildet ungefähr die eingezeichnete Kurve $E = E_{\text{krit}} \sim \frac{13\hbar^2}{I_0} \propto \frac{1}{A}$, die man als kritische Grenze aus einer Abschätzung erhält ([M 57-1], S. 531), wenn man die Vibrationsdeutung verwendet. Man sieht, daß auch eine Anzahl leichter

---

[1]) Eine neuere Arbeit von TAMURA und UDAGAWA [T 60-1] ergibt, daß es doch möglich ist, mit dem Vibrationsmodell auch die Verhältnisse der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten für höheres $\frac{E_2}{E_1}$ zu verstehen. Die Arbeit zeigt besonders deutlich, daß die Deutung der kollektiven Zustände im betrachteten Gebiet noch weitgehend offen ist.

Kerne unter diese Grenze fallen. Tatsächlich hat man bei mehreren Kernen (F^{19}, Mg^{24}, Al^{25}) (axialsymmetrische) Rotationsspektren nachweisen können [G 56-1], [L 56-1], [S 56-1], [P 57-1], [R 57-1], wenn auch nicht immer so klar wie bei den schweren Kernen; denn die Anregungsenergien sind in diesem Gebiet schon beträchtlich ($E_{(1)} \sim 2$ MeV), so daß merkliche Abweichungen von der adiabatischen Näherung auftreten.

Besonders schön erkennt man aus den Termsystemen der Abb. 269, wie sich beim Übergang vom Rotations- zum Vibrations- bzw. dreiachsigen Rotationsgebiet die Spektren wandeln. Hf^{180} zeigt ein typisches Rotationsspektrum mit Termverhältnis $\frac{10}{3}$. Os^{190} hat dagegen ein bereits gedehnteres Termsystem (kleineres Trägheitsmoment) mit geringen Abweichungen vom Rotationstyp (Termverhältnis 3): Deformation und Trägheitsmoment werden kleiner. Von Pt^{192} mit einem Termverhältnis 1,94 an ist das Spektrum recht unregelmäßig und läßt sich den Termabständen nach sowohl als näherungsweise harmonisches Vibrationsspektrum als auch als dreiachsiges Rotationsspektrum (vgl. Abb. 267) auffassen. Über Hg^{198} und Pb^{206} wachsen die Termabstände immer weiter an, bis bei Pb^{208} der erste angeregte Zustand als fast reiner Einteilchenzustand eine Höhe von 2,62 MeV erreicht.

Das Auftreten gut definierter axialsymmetrischer Rotationsspektren ist der Beleg dafür, daß die adiabatische Näherung des kollektiven Modells in diesem Bereich einigermaßen zutrifft: Die niedrigsten Einzelteilchenzustände müssen wesentlich größere Abstände haben als die Terme dieser Spektren. Das ist besonders bei (g, g)-Kernen von vornherein zu erwarten, da dort bei Anregung eines Teilchens die Paarungsenergie zusätzlich aufgebracht werden muß, der erste angeregte Einzelteilchenzustand also besonders hoch liegen wird. Unterhalb $N = 88$ dagegen liegen die ersten angeregten Zustände wesentlich höher, so daß dort die adiabatische Näherung sehr viel schlechter sein wird.

Das angenäherte Zutreffen der adiabatischen Näherung in einem so weiten Bereich ist d e n Verhältnissen im Kerninnern zu verdanken (vgl. nächster Abschnitt), die dafür sorgen, daß die hydrodynamische Näherung quantitativ n i c h t brauchbar ist. Denn wäre letztere ungefähr richtig, hätten wir nach S. 623 im (axialsymmetrischen) Rotationsgebiet um ein mehrfaches kleinere Trägheitsmomente und damit höhere Terme (und bei Vibrationsdeutung unterhalb $N = 88$ mehrfach höhere Frequenzen ω_2 (vgl. S. 628)).

Zusammenfassend kann man sagen, daß es durch das kollektive Modell zum ersten Mal gelungen ist, in dem weiten Bereich der mittelschweren bis schweren Kerne außer in allernächster Nähe der Schalenabschlüsse – wo das reine Schalenmodell zuständig ist – die niedrigen Anregungszustände der Kerne (besonders (g, g)) zu deuten. Darüber hinaus ist es wahrscheinlich sogar für die Spektren eines Teils der leichten Kerne von Nutzen.

Das kollektive Modell bewährt sich also qualitativ. Quantitativ dagegen sahen wir, daß es wesentlich zu große Quadrupolmomente und zu kleine Trägheitsmomente ergibt. Wir hatten eine Reihe Hinweise gefunden, daß daran die hydrodynamische Näherung, die Behandlung des Rumpfes als Tröpfchen einer

inkompressiblen, wirbel- und reibungsfreien Flüssigkeit, schuld ist. Der Rumpf verhält sich also tatsächlich nicht wie ein solches Tröpfchen, wenn er auch qualitativ ähnliche Deformationseigenschaften hat.[1])
Wie erklären sich dann Erfolge des Tröpfchenmodells, z. B. bei der Bethe-Weizsäcker-Formel (S. 30ff.) und bei der Spaltung (S. 229)? In allen diesen Fällen wird das eigentliche Flüssigkeitsverhalten tatsächlich gar nicht benutzt, sondern nur, daß die Kernmaterie erstens ein „Inneres" und eine „Oberfläche" hat und daß zweitens diese Oberfläche sich deformieren kann. Letzteres erfordert aber nur, daß die Teilchen der Kernmaterie gegeneinander *frei beweglich* sind, so daß außer einer Flüssigkeit auch ein Gas (jedoch kein Festkörper) als einfaches Modell in Frage kommt. Deshalb kann man z. B. die Bethe-Weizsäcker-Formel — bei deren Aufstellung man sich gern der Tröpfchenvorstellung bedient (S. 30ff.) — auch aus dem Fermigas-Modell ableiten, wie wir auf S. 261 und S. 545 sahen. Man kann also sagen, daß das sog. Tröpfchenmodell nur dort brauchbar ist, wo von der eigentlichen „Tröpfchen"-Annahme nur die freie Beweglichkeit benützt wird. Der Name Tröpfchenmodell ist also im Grunde genommen zu eng.

Der eigentliche Grund dafür, daß unser Modell mit hydrodynamischer Näherung trotz des quantitativen Versagens qualitativ brauchbar ist, liegt schließlich darin, daß die Ausdrücke (124.1) bzw. (124.4) für das Rotations- bzw. Schwingungsspektrum ihrer *Form* nach nicht auf die hydrodynamische Näherung beschränkt sind. In der Tat wird jedes deformierbare System mit definierter Oberfläche bei bleibender axialsymmetrischer Deformation ein Rotationsspektrum $\propto J(J+1)$ zeigen und bei kugelsymmetrischer Ruhegestalt Oberflächenschwingungen haben, die bei kleiner Amplitude ein nahezu harmonisches (äquidistantes) Spektrum ergeben.
In (124.1) bzw. (124.4) und natürlich ebenso in die zugehörigen Hamilton-Operatoren (120.9a) bzw. (116.9) geht die hydrodynamische Näherung demnach *nur in die Parameter* I bzw. $\omega_l\,(B_l, C_l)$ ein, indem sie dafür die Ausdrücke (120.4b) bzw. (116.8), (116.11b) ergibt:

> *In verschiedenen Näherungen für die Struktur des Rumpfes sind nur die Werte von I bzw. ω_l verschieden; die Form des Hamilton-Operators und des Energiespektrums ist unabhängig von diesen Näherungen.*

Deshalb ist es sinnvoll, „empirische" Werte für I bzw. B_2, C_2 usw. zu bestimmen, wie wir es auf S. 621 bzw. S. 629 taten; der Vergleich mit ihnen ergibt Auskunft über die Güte der betreffenden Näherung.

---

[1]) Trotzdem bleibt natürlich die Vorstellung einer solchen Flüssigkeit für viele (qualitative) Zwecke äußerst nützlich, wie z. B. bei der Ähnlichkeitsbetrachtung zur Spaltung (S. 226ff.) oder in § 116 und § 120.

§ 125. Isotopieverschiebung

Wir konnten bisher vor allem aus dem Quadrupolmoment und aus dem Spektrum Aussagen über die Gestalt des Kerns gewinnen. Eine weitere Möglichkeit dazu bietet nach BRIX und KOPFERMANN [B49-1] der sogenannte *Isotopieverschiebungseffekt.*

Die s-Terme der Hülle und damit die Frequenzen der Strahlungen, die bei einem Übergang von oder zu einem s-Term ausgesendet werden, sind bei *schweren*

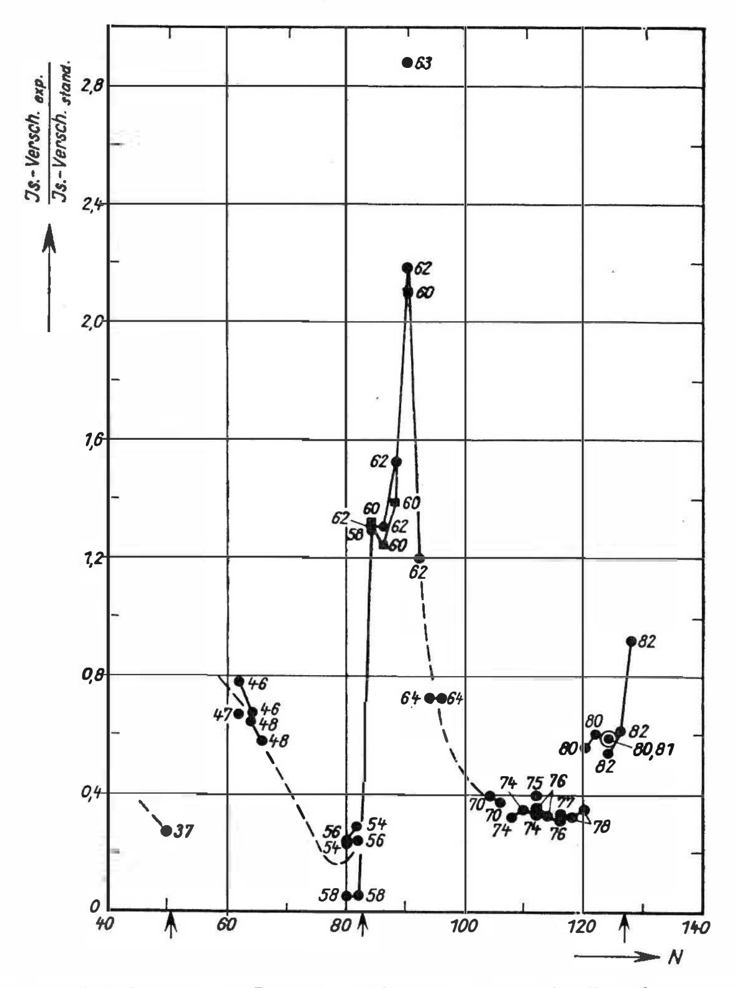


Abb. 270. Verhältnis der gemessenen Isotopieverschiebung zweier Isotope desselben Elements zur „Standard"-Isotopieverschiebung (homogen geladener, kugelsymmetrischer Kern, $R = 1{,}2 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ [cm]). Die Meßpunkte wurden beim höheren N-Wert jedes Isotopenpaares eingezeichnet. Die Zahlen geben Z an. (Nach [F 55-2])

Elementen durch die endliche Ausdehnung des Kerns etwas gegenüber der Lage bei punktförmigem Kern verschoben, weil die Ausdehnung eine Abweichung vom Coulomb-Feld in der nächsten Umgebung des Kerns verursacht. Diese Verschiebung ist bei den einzelnen Isotopen eines Elements etwas verschieden, da deren Kernradien nicht genau gleich sind. Man berechnet die Differenz der Verschiebungen, d. h. die Isotopieverschiebung,[1]) für je zwei Isotope desselben Elements, indem man kugelsymmetrische Kerne zugrunde legt. Die gemessenen Differenzen haben die Größenordnung der berechneten, weichen aber nach Abb. 270 merklich von ihnen ab.

Man findet einmal einen steilen Anstieg bei Überschreiten der magischen Zahlen $N = 82$ und 126, der eine relativ starke Änderung der Ausdehnung des (hier sicher kugelförmigen) Kerns anzeigt: Wenn mit dem Einbau zweier Neutronen eine neue Schale angefangen wird, wächst der Kernradius stärker als normalerweise bei Einbau zweier Neutronen. Die Eigenfunktionen dieser beiden Neutronen sind also weiter ausgedehnt als normal, was einer schwächeren Bindung entspricht.

Außerdem – und im jetzigen Zusammenhang wichtiger – zeigt sich eine ebenso markante Abweichung bei $N = 88/90$ (Isotopenpaare $N = 88/90$ von $_{60}$Nd, $_{62}$Sm und $_{63}$Eu), also gerade an der Stelle, an der nach S. 627ff. sich die Kernform stark ändert. Aus Abb. 236 wissen wir, daß das Europium-Isotop $^{90}_{63}\mathrm{Eu}^{153}$ ein doppelt so großes Quadrupolmoment hat wie $^{88}_{63}\mathrm{Eu}^{151}$ und daß beide Kerne wegen der Größe der Quadrupolmomente bleibend deformiert sind. Die große gemessene Isotopieverschiebung von Eu hängt offenbar mit dieser starken Zunahme des Quadrupolmoments von einem Isotop zum anderen zusammen. Denn da es sich um die Coulomb-Wechselwirkung zwischen dem Kern und einem s-Elektron handelt, müssen wir über alle Lagen des deformierten Kerns mitteln, und das ergibt effektiv eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung vom Durchmesser der großen Achse des Ellipsoids, die vom Rand aus allmählich ansteigt, bis die kleine Halbachse erreicht ist und dann konstant bleibt. Eine starke Zunahme der Deformation von einem Isotop zum anderen ruft folglich auch eine starke Zunahme des Radius der effektiven Ladungsverteilung des Kernes und damit eine starke Änderung der Isotopieverschiebung hervor. Der ebenso große Effekt bei Nd und Sm an derselben Stelle 88/90 bedeutet offenbar, daß bei diesen (g, g)-Kernen eine ähnliche Zunahme der Deformation vorliegt, die sich hier natürlich nicht am Quadrupolmoment zeigen kann, da für (g, g)-Kerne $Q = 0$ ist.

Die Anomalie der Isotopieverschiebung zwischen den Schalenabschlüssen ist demnach ein Maß für die Änderung der Deformation (β^2) bei Änderung der Nukleonenzahl A unter Festhalten von Z. Man kann deshalb aus Abb. 270 nach einem bestimmten Verfahren ([F 55-2], S. 58, [H 57-1], S. 227) die Größe $\frac{d\beta^2}{dA}$ ermitteln, und erhält die runden Punkte der Abb. 271.

---

[1]) Bei leichten Elementen kommt eine ähnliche Verschiebung durch die Mitbewegung des Kerns zustande, d. h. durch seine endliche Masse. Auch sie ist für verschiedene Isotope verschieden und ergibt deshalb eine Isotopieverschiebung.

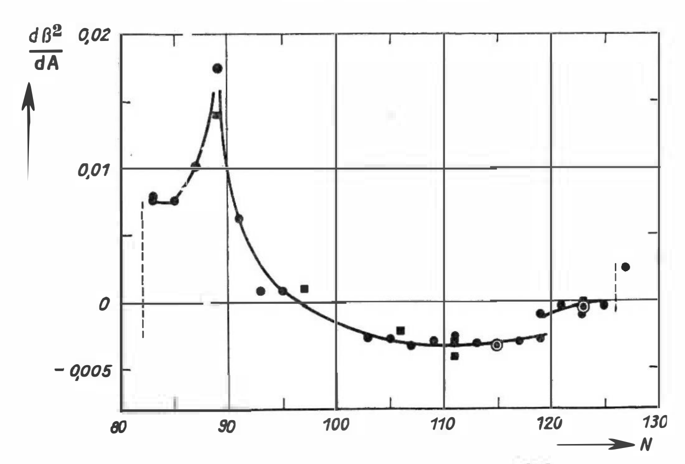


Abb. 271. Änderung der (quadrierten) Deformation mit der Massenzahl $\frac{d\beta^2}{dA}$. ● aus dem Isotopieverschiebungseffekt, ■ aus der Änderung der aus B(E2) bestimmten Deformation β_B^2 (vgl. Abb. 260) mit wachsendem N bei festem Z. (Nach [F 55-2])

Dieselbe Größe ergibt sich auch durch Differenzieren der Funktion $\beta^2(A)$ in Abb. 260, wo diese für mehrere Isotope desselben Elements bekannt ist. Das Ergebnis wurde ebenfalls in Abb. 271 eingetragen. Die Übereinstimmung ist vorzüglich; sie zeigt deutlich die annähernde Konstanz der Deformation zwischen $N = 95$ und 125 (man vergleiche mit Abb. 257 und Abb. 240) und ihre rapide Änderung bei $N = 88$. Auf deren Deutung kommen wir noch zurück.

D. Anschluß an das Schalenmodell (Fortsetzung der Theorie)

Wir haben im vorigen Abschnitt den qualitativen Erfolg, aber auch das quantitative Versagen des Kollektiven Modells mit hydrodynamischer Näherung gesehen. Demnach scheint die Grundvorstellung richtig zu sein, daß der Rumpf Deformationseigenschaften besitzt und in Wechselwirkung mit den äußeren Teilchen steht, denn daraus allein folgen bereits alle wesentlichen qualitativen Eigenschaften wie die Möglichkeit großer Quadrupolmomente und von Rotationszuständen bleibend deformierter Kerne, das Auftreten von Oberflächenschwingungen usw. Jedoch die Vorstellung, daß diese Deformationseigenschaften gerade die eines Tröpfchens einer inkompressiblen, wirbel- und reibungsfreien Flüssigkeit seien, ist offenbar zu einfach. Wir wissen bereits (S. 611), daß ein wesentlicher Unterschied zwischen einer solchen Flüssigkeit und der „Nukleonensubstanz" des Kerns in der großen mittleren freien Weglänge der Nukleonen liegt.

Betrachtet man in dieser Hinsicht den bisherigen Aufbau der Theorie des Kollektiven Modells genauer, dann findet man eine gewisse Inkonsequenz. Sie besteht darin, daß die Aufteilung des Kerns in Rumpf und Teilchen im Grunde

stillschweigend die unabhängige Bewegung aller Nukleonen voraussetzt; denn der Rumpf wird von den Teilchen in abgeschlossenen Schalen (Unterschalen) gebildet, die Schalen sind aber durch das Schalenmodell definiert, nach dem sich alle Nukleonen unabhängig voneinander bewegen. Einerseits setzt also die Definition eines Rumpfes die unabhängige Bewegung aller Nukleonen voraus, auch der des Rumpfes selbst, andererseits behandeln wir ihn in hydrodynamischer Näherung als Flüssigkeitströpfchen, in dem es keine unabhängige Bewegung seiner Teilchen gibt (vgl. Fußnote 1 auf S. 601).

Eine bessere Theorie muß demnach die Deformierbarkeit des Rumpfes beibehalten, ihn aber als System von unabhängig sich bewegenden Nukleonen behandeln.

Wir werden das im folgenden tun und dabei sehen, daß wir gleichzeitig zu einem tieferen Verständnis des kollektiven Modells kommen. Wir wollen das so entstehende Modell kollektives Modell „mit Einzelteilchennäherung" nennen im Gegensatz zu dem mit hydrodynamischer Näherung.
Alle Nukleonen sollen sich also wie beim Schalenmodell unabhängig voneinander in einem Potential bewegen. Um die Deformierbarkeit des Kerns zu berücksichtigen, dürfen wir aber dieses Potential nicht wie beim Schalenmodell kugelsymmetrisch ansetzen, denn das setzt eine kugelsymmetrische Dichteverteilung der Nukleonen voraus. Wir müssen deshalb die Bewegung der Nukleonen in einem nichtkugelsymmetrischen Potential betrachten.

§ 126. Oszillatormodell

Um zunächst die Erscheinungen in möglichst einfacher Form studieren zu können, die durch eine Deformation des Potentials zustandekommen, nehmen wir das Potential eines *an*isotropen (dreidimensionalen) harmonischen Oszillators („Oszillatormodell").

a) Termsystem

Wir haben also ein parabelförmiges Potential, das in verschiedenen Raumrichtungen verschieden stark ansteigt:

$$V(\mathfrak{r}) = V(x, y, z) = \frac{M}{2}(\omega_x{}^2 x^2 + \omega_y{}^2 y^2 + \omega_z{}^2 z^2).$$

Dabei beschränken wir uns auf axialsymmetrische Verhältnisse ($\omega_x = \omega_y$) und führen einen Deformationsparameter λ bzw. α ein durch

$$\begin{aligned} \omega_x{}^2 = \omega_y{}^2 = \omega_0{}^2 \lambda &= \omega_0{}^2 e^{\alpha}, \\ \omega_z{}^2 = \omega_0{}^2 \frac{1}{\lambda^2} &= \omega_0{}^2 e^{-2\alpha}, \end{aligned} \qquad \alpha = \ln \lambda .$$

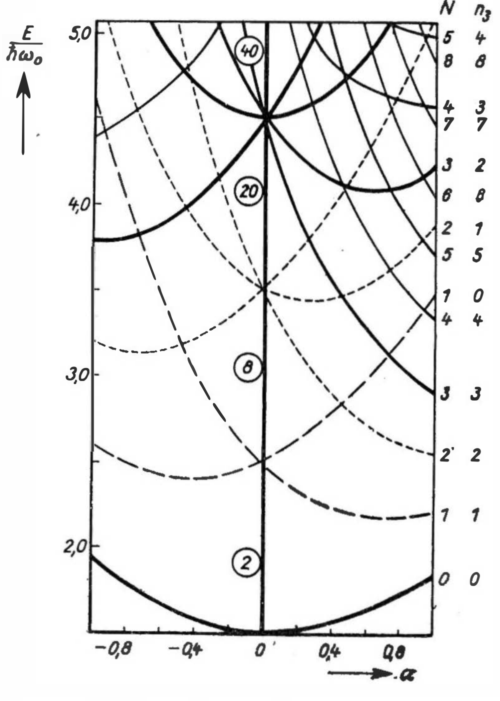


Abb. 272. Terme eines axialsymmetrisch-anisotropen harmonischen Oszillators als Funktion der Deformationsgröße α nach (126.1). Für jeden Term sind seine Quantenzahlen N, n_3 angegeben, außerdem die Schalenabschlüsse im Fall der Isotropie $\alpha = 0$. (Nach [M 57-1])

Damit erreichen wir, daß das von einer Äquipotentialfläche umschlossene Volumen bei Änderung der Deformation konstant bleibt, denn die Halbachsen des Ellipsoids

$$\frac{2}{M\omega_0^2} V(\mathfrak{r}) = \lambda (x^2 + y^2) + \frac{z^2}{\lambda^2} = \text{const}$$

sind proportional zu $\lambda^{-1/2}$, $\lambda^{-1/2}$ und λ, so daß ihr Produkt unabhängig von λ wird. Die Volumenkonstanz ist äquivalent der früheren Inkompressibilität. Eine der Wirbelfreiheit entsprechende Eigenschaft führen wir dagegen nicht ein.[1]) Dieses Problem läßt sich in kartesischen Koordinaten separieren und zerfällt in drei lineare harmonische Oszillatoren der Frequenzen ω_x, ω_y, ω_z. Wir erhalten also als Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$E_1 = \hbar\omega_x\left(n_1 + \frac{1}{2}\right), \qquad E_2 = \hbar\omega_y\left(n_2 + \frac{1}{2}\right), \qquad E_3 = \hbar\omega_z\left(n_3 + \frac{1}{2}\right),$$

$$\psi_1(x) = e^{-\frac{\mu_x}{2}x^2} H_{n_1}(\sqrt{\mu_x}\,x), \quad \psi_2(y) = e^{-\frac{\mu_y}{2}y^2} H_{n_2}(\sqrt{\mu_y}\,y), \quad \psi_3(z) = e^{-\frac{\mu_z}{2}z^2} H_{n_3}(\sqrt{\mu_z}\,z),$$

$$\psi = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z); \qquad \mu_i = \frac{M\omega_i}{\hbar}, \qquad N = n_1 + n_2 + n_3,$$

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 + E_3 = E_{n_1 n_2 n_3} &= \hbar\omega_0\left[(n_1 + n_2 + 1)\,\lambda^{1/2} + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\lambda^{-1}\right] \\ = E_{N n_3} \quad &= \hbar\omega_0\left[(N - n_3 + 1)\,\lambda^{1/2} + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\lambda^{-1}\right]. \end{aligned} \qquad (126.1)$$

Abb. 272 zeigt, wie sich das Energiespektrum (126.1) in Abhängigkeit von $\alpha = \ln\lambda$ ändert. Man sieht, daß die Deformation die Entartung des isotropen harmonischen Oszillators ($\alpha = 0$, $\lambda = 1$) aufhebt – nicht nur die zufällige, sondern auch die natürliche Entartung, da wir kein Zentralfeld mehr haben – und zu vielen Überkreuzungen von Termen N, n_3 führt. Für endliche Deformation ergibt sich dadurch ein recht kompliziertes Spektrum ohne ausgeprägte Schalenstruktur.

[1]) „Reibungsfreiheit“ wird natürlich auch hier angenommen.

b) Deformationen

Da aus (126.1) bzw. Abb. 272 die Abhängigkeit jedes einzelnen Terms von α (bzw. λ) bekannt ist, läßt sich durch Aufsummieren der Energien aller einzelnen besetzten Terme die Abhängigkeit der Gesamtenergie des Systems von α bestimmen. Das Ergebnis ist in Abb. 273a für 20 Teilchen eingetragen und liefert einen steilen Anstieg der Energie mit der Deformation. Das Minimum der Kurve liegt bei $\alpha = 0$, so daß in diesem Fall abgeschlossener Schale $N = 20$ das System kugelsymmetrische Gestalt annimmt. Für 24, 30 und 36 Teilchen ergeben sich dagegen endliche Gleichgewichtsdeformationen: Zwischen den Schalenabschlüssen ($N = 20$ und 40) ist eine endliche Deformation energetisch günstiger als die Kugelgestalt.

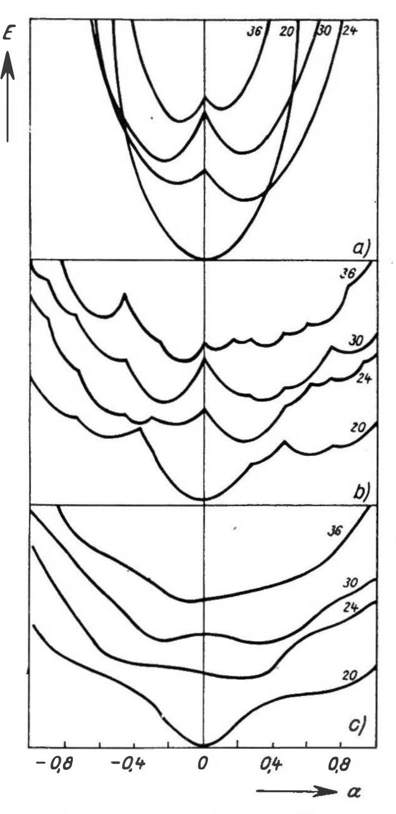


Abb. 273. Gesamtenergie des Oszillators von Abb. 272 in Abhängigkeit von α bei Besetzung mit 20, 24, 30, 36 Teilchen; a) ohne Umbesetzungen, b) mit Umbesetzungen, c) mit Umbesetzungen und geglättet. (Nach [M 57-1], Fig. 25)

Wir haben bis jetzt nicht die Überkreuzungen der Einzelterme beachtet. Bewegten sich die Teilchen in unserem System exakt nur in dem anisotropen Oszillatorpotential, d.h., gäbe es keinerlei Störungen, dann würde sich unser System bei Deformation genau wie in Abb. 273a verhalten. In der Natur sind aber Störungen der unabhängigen Bewegung der Nukleonen in verschiedener Form vorhanden (Restwechselwirkungen zwischen Teilchen, Abweichungen von der Parabelform des Potentials usw., überhaupt jede Abweichung vom angesetzten Potential). Sie sorgen dafür, daß zwischen zwei sich kreuzenden Termen eine Umbesetzung erfolgt, wenn bei einer bestimmten Deformation α der höhere von beiden besetzt, der tiefere nicht besetzt ist, so daß beiderseits der Kreuzung das Teilchen den jeweils niedrigeren Term besetzt. Es ist klar, daß solche Umbesetzungen stets nur auftreten können, wenn sich der *oberste* besetzte Term mit einem von oben hereinkreuzenden und folglich *un*besetzten Term trifft. Das Ergebnis sehen wir in Abb. 273b, in der man jedem Knick der Kurven eine bestimmte Kreuzung mit dem jeweiligen obersten besetzten Term in Abb. 272 zuordnen kann. Es zeigt sich, daß die Umbesetzungen eine wesentliche Abflachung der Kurven in Abb. 273b gegenüber Abb. 273a bewirken: Die Abweichungen

von der unabhängigen Bewegung der Teilchen machen die Kerne durch Umbesetzungen „weicher“, weil der Energieaufwand zur Erreichung einer bestimmten Deformation α geringer ist als in Abb. 273a.
Am wenigsten wirkt sich das im Fall einer abgeschlossenen Schale aus; denn da hier wegen des großen Abstands zur nächsten Schale erst bei relativ großen Deformationen die ersten Überkreuzungen mit unbesetzten Termen erfolgen (vgl. Abb. 272), bleibt in der Umgebung der Gleichgewichtsdeformation $\alpha = 0$ der Anstieg der Kurve unverändert. Ist dagegen eine Schale teilweise gefüllt, erfolgen nahe bei den (endlichen) Gleichgewichtsdeformationen eine ganze Reihe Überkreuzungen, da hier mitten in der Schale bei endlicher Deformation eine ganze Anzahl leerer Terme von oben hereinkreuzen. Die Kerne zwischen Schalenabschlüssen werden also besonders weich, d. h., die Oberflächenspannung γ und damit C_2 wird klein. Es kann sogar vorkommen (30 Teilchen, halbgefüllte Schale), daß durch die Umbesetzungen eine noch größere Gleichgewichtsdeformation möglich wird als ohne diese.
Natürlich verursachen die Störungen nicht nur die Umbesetzungen, sondern glätten auch die entstehenden Unstetigkeiten, so daß sich etwa eine Deformationsabhängigkeit der Gesamtenergie nach Abb. 273c ergibt. Sie zeigt deutlich die V-Form bei abgeschlossener Schale, dagegen zunehmende U-Form bei teilweise gefüllter Schale (24, 30 Teilchen) mit allmählicher Wiederannäherung an die V-Form (36 Teilchen), wenn man sich dem nächsten Schalenabschluß (40 Teilchen) nähert.
Insgesamt entnehmen wir also unserem einfachen Oszillatormodell:

Ein System unabhängiger Teilchen in einem deformierbaren Potential hat im Gleichgewichtszustand bei abgeschlossener Schale Kugelsymmetrie, bevorzugt aber bei teilweise gefüllter Schale eine endliche Deformation.

Störungen des Systems erhöhen durch Umbesetzungen bei teilweise gefüllter Schale die Weichheit in der Nähe der Gleichgewichtsdeformation. Dieser Effekt ist besonders stark in der Mitte zwischen Schalenabschlüssen.

Damit haben wir das Auftreten bleibender Deformationen zwischen Schalenabschlüssen wiedergefunden. Darüber hinaus erhielten wir unter Berücksichtigung der Störungen eine Aussage über die Abhängigkeit der Weichheit des Kerns von den Besetzungsverhältnissen, während in hydrodynamischer Näherung natürlich keinerlei Schaleneffekte auftreten konnten: Wir mußten dort die Oberflächenspannung halbempirisch ohne Berücksichtigung von Schaleneffekten festlegen (S. 597). Jetzt fanden wir Minima der Weichheit des Kerns an den Schalenabschlüssen, d. h. Maxima der Deformationsgröße C_2, wie man sie nach Abb. 265b beobachtet, da C_2 nach (116.8) ein Maß für die „Härte“ der Kernoberfläche ist.
Im folgenden werden wir auch an den Trägheitsmomenten sehen, wie entscheidend die Berücksichtigung der Abweichungen von der unabhängigen Bewegung der Teilchen trotz ihrer Kleinheit („Störungen“) das kollektive Verhalten des Kerns bestimmt.

c) Trägheitsmomente

In Abb. 259 ergab sich, daß die aus den Rotationsspektren experimentell bestimmten Trägheitsmomente zwischen denen einer starren Rotation des Kerns und denen der Rotation in hydrodynamischer Näherung liegen, aber wesentlich näher an letzteren. Welche Trägheitsmomente erhalten wir jetzt für eine Rotation unseres anisotropen Oszillators um eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse? Die Rechnung ergibt [B 55-3] für nicht abgeschlossene Schalen überraschenderweise das Trägheitsmoment eines starren Körpers, also scheinbar ein noch falscheres Trägheitsmoment als in hydrodynamischer Näherung.

Wir wollen uns hier ohne Rechnung klarmachen, warum sich das *starre* Trägheitsmoment ergeben muß. In adiabatischer Näherung, deren Gültigkeit wir stets voraussetzen, erfolgt in einem Rotationszustand die unabhängige Bewegung der Teilchen in dem Oszillatorpotential schnell gegenüber der Rotation dieses Potentials. In erster Näherung wird deshalb die Bewegung der Nukleonen von der langsamen Rotation des Ganzen nicht beeinflußt werden, d. h., Coriolis- und Zentrifugalkräfte können vernachlässigt werden. In dieser Näherung bewegen sich also die Teilchen im mitrotierenden Koordinatensystem genau so, als ob der Kern ruhte, sie reagieren nicht auf die Rotation. Das ist aber effektiv dasselbe, als ob der Kern starr rotiert, denn jede nichtstarre Rotation kommt dadurch zustande, daß das rotierende System seinen inneren Zustand unter Einfluß der Rotation ändert. Geschieht das nicht, hat man effektiv dieselben Verhältnisse wie bei einem starren Körper.

Für *rein* unabhängige Bewegung der Teilchen ergeben sich also viel zu große Trägheitsmomente. Bohr und Mottelson [B 55-3] konnten zeigen, daß diese Werte sehr stark reduziert werden, wenn man die Restwechselwirkung zwischen den äußeren Teilchen berücksichtigt. Sie berechneten als Beispiel das Trägheitsmoment für einen anisotropen harmonischen Oszillator mit zwei äußeren, miteinander wechselwirkenden Nukleonen, beide in einem p-Zustand. Das Trägheitsmoment hängt dann natürlich außer von der Deformation β auch noch vom Verhältnis v der Stärke der Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen zur Stärke des Oszillatorpotentials ab.[1])

Das Ergebnis sehen wir in Abb. 274: Mit zunehmender Stärke der Wechselwirkung zwischen den Teilchen sinkt das Trägheitsmoment vom starren Wert ($v = 0$) rasch ab und erreicht bei $v \sim 0{,}3$ etwa die experimentellen Werte (vgl. Abb. 259). Bei weiter wachsender Restwechselwirkung, damit immer stärkerer Verletzung der unabhängigen Bewegung der Teilchen, nähert sich das Trägheitsmoment dem der hydrodynamischen Näherung; d. h., wenn die Wechselwirkung zwischen den Teilchen so stark wird, daß keine unabhängige Bewegung der Teilchen mehr möglich ist ($v = 1$), haben wir Flüssigkeitsverhalten: mittlere freie Weglänge $l \ll R$. –

[1]) Genauer ist v das Verhältnis der Aufspaltungen, die Teilchenwechselwirkung und Oszillatorpotential erzeugen.

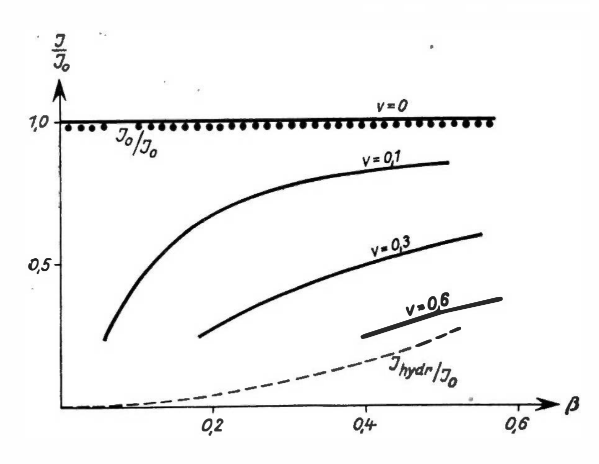


Abb. 274. Trägheitsmoment deformierter Kerne in Einheiten von I_0 (120.7) als Funktion der Deformation β nach dem im Text besprochenen „Zwei-Nukleonen-Modell" bei verschiedenen Werten des Verhältnisses v. Zum Vergleich wurde das Trägheitsmoment der hydrodynamischen Näherung (gestrichelt) und das bei starrer Rotation (punktiert) eingezeichnet. Man vergleiche mit Abb. 259. (Nach [B 55-3])

Damit sind also nicht nur die Deformationsgrößen C_2 (S. 642), sondern auch die Trägheitsmomente und folglich nach (124.3) die Trägheitsgrößen B_2 im wesentlichen durch die Abweichungen von der unabhängigen Bewegung der Teilchen im Kern bestimmt: I und damit B_2 ist größer als nach der hydrodynamischen Näherung, wie es nach S. 629 sein muß. Umgekehrt geben diese Größen Auskunft über die Stärke dieser Abweichung, wie hier das Verhältnis $v \sim 0{,}3$. Mit diesem Wert von v haben wir ein größenordnungsmäßiges Maß für die Abweichung gewonnen:

Die Abweichung von der unabhängigen Bewegung der Nukleonen im Kern ist einerseits so stark, daß sie merkliche Effekte verursacht (Trägheitsmoment, Oberflächenspannung) und dadurch die Eigenschaften des Kerns wesentlich mitbestimmt; andererseits ist sie noch so schwach, daß die unabhängige Bewegung eine brauchbare Ausgangsnäherung darstellt (vgl. auch S. 586).

Die Rechnungen von Bohr und Mottelson [B 55-3], die wir nur andeuten konnten, verwenden eine Formel für das Trägheitsmoment I, die den Ersatz für die hydrodynamische Formel $I = \delta^2 I_0$ darstellt. Sie ergibt sich aus dem „Kurbel-Modell" von Inglis [I 54-1].
Eine Weiterführung hat das Problem der Trägheitsmomente und der Deformationen nach einer Idee von Bohr, Mottelson und Pines durch Arbeiten von Belyaev und Migdal [B 59-3] erfahren. Sie wenden die Methodik der in den letzten Jahren entstandenen Theorie der Suprafluidität und -leitung an (vgl. S. 611), um die „Paarungstendenz" der Nukleonen im Kern besser als durch Störungstheorie (S. 559) zu berücksichtigen. Sie erhalten so u. a. eine Korrektur der Inglisschen Formel, die gut mit den experimentellen Werten verträglich ist [G 60-1].

§ 127. Realistisches deformierbares Schalenmodell

Man wird nun versuchen, das einfache Oszillatormodell der Wirklichkeit so anzunähern, daß man zu quantitativ brauchbaren Aussagen kommen kann. Dazu muß erstens die parabolische Abhängigkeit des Potentials von den Koordinaten

durch eine mehr kastenartige (Abb. 220) ersetzt, zweitens die Spin-Bahn-Wechselwirkung berücksichtigt werden. Das ist von einer Reihe von Autoren [G 51-1] auf verschiedenen Wegen getan worden. Wir wollen hier die wesentlichsten Züge der Arbeit von NILSSON [N 55-1] darstellen. NILSSON fügt zum Hamilton-Operator des anisotropen harmonischen Oszillators

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + \frac{M}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2),$$

$$\omega_x = \omega_y = \omega_0 \sqrt{\lambda}, \quad \omega_z = \frac{\omega_0}{\lambda},$$

zwei Terme hinzu:

$$H = H^0 + C(\vec{l}\cdot\vec{s}) + D\vec{l}^2.$$

Außer der Spin-Bahn-Wechselwirkung haben wir einen Term $D\vec{l}^2$, der die Interpolation zwischen Oszillator- und Kastenpotential „simuliert"; denn das Kastenpotential bindet durch die Ausbuchtung am Rand die Zustände mit hohem Bahndrehimpuls stärker als das des Oszillators (vgl. Abb. 221), und dasselbe geschieht durch einen Term $D\vec{l}^2$ mit negativem D.[1]) Die Konstanten C (< 0, vgl. S. 535) und D werden so gewählt, daß sich im kugelsymmetrischen Fall $\lambda = 1$ ein Spektrum ergibt, das dem empirischen Befund entspricht. Abb. 275 zeigt dieses und sein Entstehen aus dem Termsystem des Oszillators. Man vergleiche mit Abb. 232.

Für den so festgelegten Hamilton-Operator wurde maschinell das Spektrum berechnet, das im Anhang I, Tabelle 4 (am Ende des Bandes) vollständig und in Abb. 276a, b ausschnittsweise gezeichnet wurde.[2])

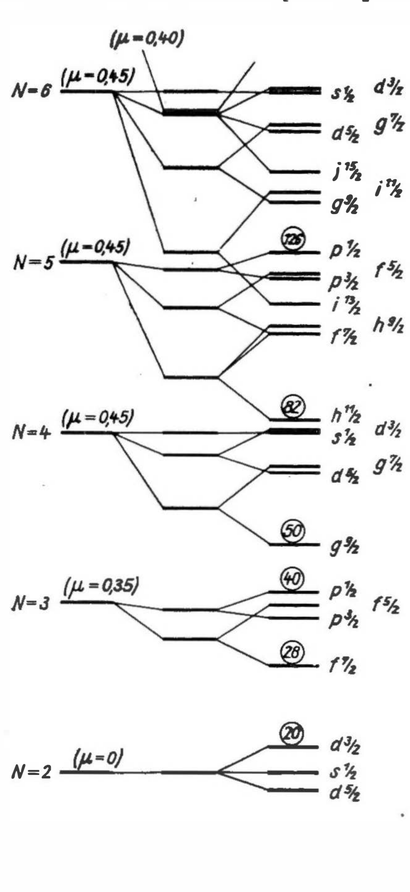


Abb. 275. NILSSONS Termsystem im kugelsymmetrischen Fall ($\delta = 0$) für Neutronen und sein Entstehen aus dem des isotropen harmonischen Oszillators; $\mu = 2\frac{D}{C}$. Man vergleiche mit Abb. 232. (Nach [N 55-1])

[1]) Nach [L 60-1] trägt eine (aus der Brückner-Theorie folgende) Nichtlokalität des mittleren Potentials im Kern ebenfalls zu diesem Term bei.

[2]) Herrn Prof. A. BOHR und Herrn Dr. NILSSON sei an dieser Stelle für die Überlassung der Abbildungen gedankt.

Als Deformationsmaß wurde δ durch

$$\omega_x^2 = \omega_0^2 \frac{1 + \frac{2}{3}\delta}{\sqrt[3]{1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3}} = \omega_0^2(\delta)\left(1 + \frac{2}{3}\delta\right),$$

$$\omega_z^2 = \omega_0^2 \frac{1 - \frac{4}{3}\delta}{\sqrt[3]{1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3}} = \omega_0^2(\delta)\left(1 - \frac{4}{3}\delta\right),$$

$$\omega_0(\delta) = \omega_0\left(1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3\right)^{-\frac{1}{6}}$$

definiert; es hängt mit dem früher verwendeten β in erster Näherung zusammen durch

$$\delta \sim \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta \sim 0{,}95\,\beta\,.$$

Die an den einzelnen Termen außen angegebenen Zahlen dienen nur zur Numerierung; außerdem sind an jedem Term Ω und die Parität angegeben, für $\delta = 0$ auch l und j. Die Energieskala ist in Einheiten von

$$\hbar\omega_0(\delta) = \hbar\omega_0\left(1 - \frac{4}{3}\delta^2 - \frac{16}{27}\delta^3\right)^{-\frac{1}{6}}$$

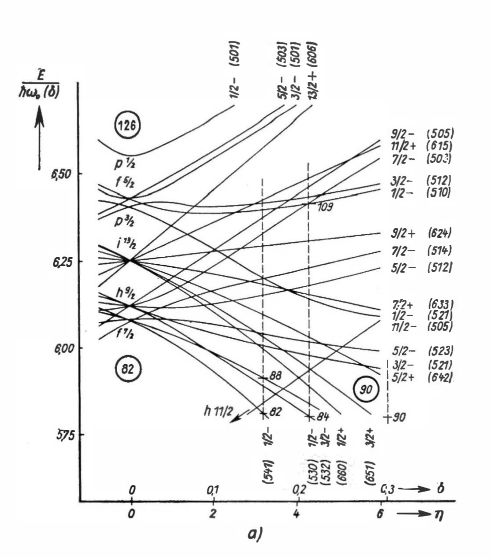
gezeichnet.

Qualitativ zeigt das Termsystem dieselben Eigenschaften wie das des anisotropen Oszillators: große Abstände zum nächsthöheren Term bei Schalenabschlüssen, dagegen viele Überkreuzungen zwischen den Schalenabschlüssen bei endlichen Deformationen, so daß schon bei $\delta \sim 0{,}1$ die einzelnen Unterschalen und ab $\delta \sim 0{,}3$ sogar die Schalen selbst aufgelöst sind. Die qualitativen Ergebnisse des vorigen Abschnitts bezüglich der Deformationseigenschaften gelten also auch hier, und ähnliches ist für die Trägheitseigenschaften zu erwarten.

a) Spins und Deformationen axialsymmetrisch deformierter Kerne

Auf zwei Einzelergebnisse [M 55-2] wollen wir kurz eingehen. Wir hatten auf S. 553 ff. gesehen, daß das Schalenmodell im Gebiet der bleibend deformierten Kerne die Kernspins ungerader Kerne nicht richtig voraussagt. Hier müßte unser jetziges deformiertes Schalenmodell sich bewähren. Die Besetzungsverhältnisse eines deformierten Kerns sind besonders einfach: Jeder gezeichnete Term Ω kann von zwei Teilchen mit $j_{z'} = +\Omega$ und $-\Omega$ besetzt werden, deren j_i sich gegenseitig kompensieren. Der Gesamtdrehimpuls des Grundzustandes eines ungeraden Kerns ist dann wegen $\mathfrak{R} = 0$ gleich dem Ω des letzten ungeraden Teilchens.

Nimmt man nun die Deformation δ an, die sich aus dem gemessenen inneren Quadrupolmoment Q_0 des betreffenden Kerns nach (123.2) ergibt (bzw. aus



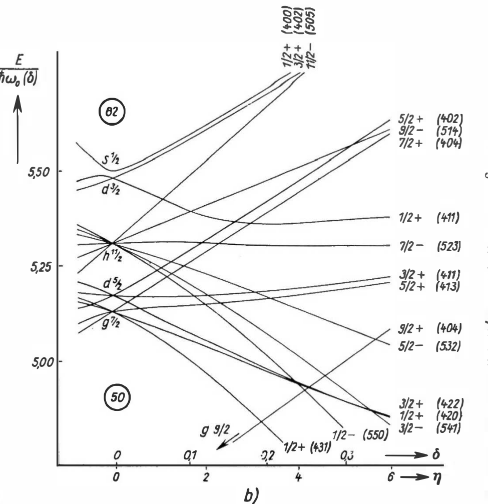


Abb. 276. Ausschnitte aus NILSSONS Termsystem mit Abhängigkeit der Terme von der Deformation δ

$$\left(\eta = -2\hbar\;\omega_0(\delta)\;\frac{\delta}{C}\right)$$

a) für Neutronen, $82 < N \leqq 126$ (Ausschnitt aus Anhang I Tabelle 4; $\mu = 2\,\frac{D}{C} = 0{,}45$), b) für Protonen, $50 < Z \leqq 82$ ($\mu = 0{,}56$). Das Protonenspektrum wurde durch die andere Wahl von μ dem experimentellen Protonenspektrum (Abb. 232) angepaßt. Für jeden Term ist j und Parität am Rand angegeben (die Zahlen in Klammern dienen zur Numerierung der Terme). Für Kugelsymmetrie ist lj angegeben. In a) ist die Besetzung der Terme für die Kerne ${}^{109}_{74}\mathrm{W}^{183}$ ($\delta = 0{,}21$), ${}^{88}_{63}\mathrm{Eu}^{151}$ ($\delta = 0{,}16$) und ${}^{90}_{63}\mathrm{E}\,{}^{153}\mathrm{u}$($\delta = 0{,}30$) eingezeichnet (vgl. S. 648 ff.)

dem seiner Nachbarn interpoliert werden kann), und zählt für dieses δ in Abb. 276 von unten nach oben die zu besetzende Teilchenzahl ab, erhält man die Werte $J_{0\,\mathrm{th}}$ in Tabelle 72. Der Kern $^{109}_{74}\mathrm{W}^{183}$ ($\delta = 0{,}21$) wurde in Abb. 276a als Beispiel eingezeichnet. Ebenso wurden nach Anhang I, Tabelle 4, die theoretischen Spins der Ausnahmekerne Na^{23}, Mn^{55}, Se^{79} bestimmt, deren Quadrupolmoment δ festlegt; man vergleiche mit S. 612.

Tabelle 72

	δ	$J_{0\,\mathrm{th}}$	$J_{0\,\mathrm{exp}}$		δ	$J_{0\,\mathrm{th}}$	$J_{0\,\mathrm{exp}}$
$_{11}\mathrm{Na}^{23}$	0,07	3/2 +	3/2	$^{45}\mathrm{Se}^{79}$	0,20	5/2 +, 1/2−	7/2
$_{25}\mathrm{Mn}^{55}$	0,24	5/2 − 1/2−	5/2				
$_{63}\mathrm{Eu}^{151}$	0,16	3/2±, 5/2±, 1/2−	5/2	$^{91}\mathrm{Gd}^{155}$	0,31	5/2+, 3/2−	3/2
$_{63}\mathrm{Eu}^{153}$	0,30	5/2+, 3/2+	5/2	$^{93}\mathrm{Gd}^{157}$	0,31	3/2−, 5/2+	3/2
$_{65}\mathrm{Tb}^{159}$	0,31	3/2+, 5/2+	3/2	$^{95}\mathrm{Dy}^{161}$	0,31	5/2−	
$_{67}\mathrm{Ho}^{165}$	0,30	7/2−, 1/2+	7/2	$^{99}\mathrm{Er}^{167}$	0,29	1/2−, 7/2+, 11/2−	7/2
$_{69}\mathrm{Tm}^{169}$	0,28	1/2+, 7/2−	1/2	$^{101}\mathrm{Yb}^{171}$	0,29	7/2+, 1/2−, 11/2−	1/2
$_{71}\mathrm{Lu}^{175}$	0,28	7/2+, 5/2+	7/2	$^{103}\mathrm{Yb}^{173}$	0,29	5/2−	5/2
$_{73}\mathrm{Ta}^{181}$	0,23	5/2+, 7/2+	7/2	$^{105}\mathrm{Hf}^{177}$	0,26	7/2−	7/2
$_{75}\mathrm{Re}^{185}$	0,19	9/2−, (5/2+)	5/2	$^{107}\mathrm{Hf}^{179}$	0,27	9/2+	9/2
$_{75}\mathrm{Re}^{187}$	0,19	9/2−, (5/2+)	5/2	$^{109}\mathrm{W}^{183}$	0,21	1/2−, 7/2−, 3/2−	1/2
$_{77}\mathrm{Ir}^{191}$	0,14	3/2+, 1/2+, 11/2−	3/2	$^{111}\mathrm{Os}^{187}$	0,18	1/2−, 3/2−, 9/2−	1/2
$_{77}\mathrm{Ir}^{193}$	0,12	3/2+, 1/2+, 11/2−	3/2	$^{113}\mathrm{Os}^{189}$	0,15	1/2−, 3/2−, 11/2+, (9/2−)	3/2

Das Ergebnis ist befriedigend: Es ergeben sich meist zwei bis drei Möglichkeiten für J_0, unter denen (außer Se^{79}) stets der beobachtete Kernspin ist.[1]) Einige der anderen möglichen J-Werte sollten dann als niedrige angeregte Einteilchen-Zustände des betreffenden Kerns auftreten und sind z. T. bereits als solche bekannt (Lu^{175}: $5/2^+ = 342$ keV; W^{183}: $3/2^- = 209$ keV, $7/2^- = 453$ keV; [M 55-2]). Der genaue Vergleich des *gesamten* empirischen Termsystems mit dem von unserem Modell vorausgesagten findet sich in umfangreichen Arbeiten von Mottelson und Nilsson [M 59-1] und von Stephens u. a. [S 59-1]. Es zeigt sich dabei, daß die empirischen Termsysteme weitgehend im einzelnen verstanden werden können.

An dieser Stelle können wir nachträglich unsere Vektormodelle von Abb. 250 rechtfertigen (vgl. S. 612). Wenn wir in Anhang I, Tabelle 4, drei Teilchen auf die drei aus dem $d_{5/2}$-Term der 20er Schale entstehenden Terme setzen, geraten bei positiven δ (Na^{23}: $\delta = +\,0{,}07$) die ersten beiden Teilchen auf einen Term $1/2^+$, das dritte auf einen Term $3/2^+$, so daß $\Omega = 3/2$ wird. Deshalb haben wir unser

1) Das gilt auch für die Kerne Co^{59}, Se^{75}, $\mathrm{In}^{113,\,115}$, $\mathrm{Sb}^{121,\,123}$, $\mathrm{J}^{127,\,129,\,131}$, Ac^{227}, die nach Abb. 236 abnorm große Quadrupolmomente haben (nachprüfen: $\delta \sim \varepsilon$ nach S. 615 aus Q!).

Vektormodell in Abb. 250b gerade so eingerichtet, daß die z'-Komponenten der drei j_i die Werte $+1/2$, $-1/2$ und $+3/2$ haben. Man überlege sich nach Anhang I, Tabelle 4, das entsprechende Vektormodell für negatives δ. Haben wir 4 Teilchen auf den $d_{5/2}$-Termen, ergibt sich auf dieselbe Weise für positives δ Abb. 250a. Ganz analog wurde das Vektormodell der Abb. 250c für Besetzung der aus dem $f_{7/2}$-Term der 28er Schale entstehenden Terme mit 5 Teilchen (drei Löchern) bei positivem δ gezeichnet (Mn^{55}: $\delta = +0{,}24$). Man zeichne das aus Anhang I, Tabelle 4, folgende Vektormodell für Se^{79}.

Zur Bestimmung der J_0 hatten wir die *empirischen* Deformationen verwendet. Man kann darüber hinaus die Deformationen aus dem Termschema *theoretisch* ableiten [M 55-2], indem man wie auf S. 641 die Abhängigkeit der Gesamtenergie von der Deformation δ für alle in Frage kommenden Protonen- und Neutronenkonfigurationen bestimmt und jeweils das Minimum der Energie aufsucht. Man erhält so für ungerade Kerne die Kurve in Abb. 277, die recht gut zu den experimentellen Werten paßt. Insbesondere ergibt sie den steilen Anstieg der Deformation zwischen $N = 88$ ($^{88}_{63}Eu^{151}$: $\delta = 0{,}16$) und $N = 90$ ($^{90}_{63}Eu^{153}$: $\delta = 0{,}30$). Er erscheint hier vor allem als Folge des Aufbrechens der $h_{11/2}$-Unterschale aus der tieferen Neutronenschale: Für $N = 88$, $\delta = 0{,}16$, ist nach Abb. 276a der Term $11/2^-$ noch besetzt, für $N = 90$, $\delta = 0{,}30$, nicht mehr. Da wir so theoretisch fast dieselben Deformationen bekommen wie experimentell, erhalten wir aus diesen theoretischen Deformationen im wesentlichen wieder dieselben $J_{0\,\mathrm{th}}$-Werte der Tabelle 72, denn letztere hängen nicht sehr kritisch von δ ab. Die Kernspins lassen sich also nicht nur halbempirisch, sondern sogar rein theoretisch aus dem Nilssonschen Modell befriedigend ableiten. Darüberhinaus ist es damit gelungen, beide Gruppen der Kernspin-Abweichungen des Schalenmodells mit einfacher jj-Kopplung (S. 554) mit ganz wenigen Ausnahmen (Se^{79}) durch das kollektive Modell zu verstehen.

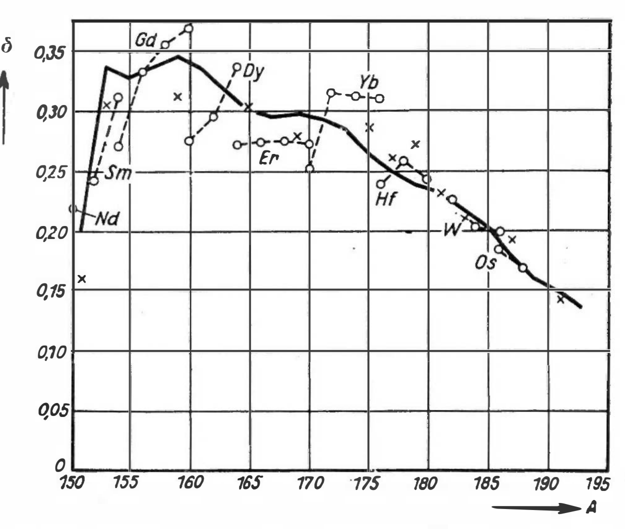


Abb. 277. Experimentelle Deformationen von (g, g)-Kernen (○) und ungeraden Kernen (×), die aus dem gemessenen inneren Quadrupolmoment (vgl. S. 623ff.) bestimmt wurden. Die ausgezogene Kurve gibt die aus dem Nilssonschen Termsystem ermittelte theoretische Deformation ungerader Kerne. (Nach [M 55-2])

Als letztes zeigt die theoretische Kurve der Abb. 277, daß unser Modell auch die Vorzeichen der Deformation und damit das Überwiegen der *positiven*

Qadrupolmomente (S. 575) richtig wiedergibt. Das ist um so bemerkenswerter, als die Deformationen ziemlich empfindlich von der genauen Form des gewählten Potentials abhängen: Z. B. hat man nach Abb. 273 bei parabelförmigem Potential in der ersten Schalenhälfte positive, in der zweiten negative Deformationen bzw. Quadrupolmomente, also beide Vorzeichen gleich häufig.

b) Zusammenfassung

Unser Kollektives Modell mit *Einzelteilchennäherung*, das man auch kollektives oder deformierbares Schalenmodell nennen könnte, ist also sehr erfolgversprechend und ist sicher dem Kollektiven Modell mit hydrodynamischer Näherung überlegen.

Andererseits hat es jedoch noch ungelöste grundsätzliche Schwierigkeiten. Erstens enthält unser Modell zuviel Freiheitsgrade, da wir die kollektiven Freiheitsgrade *zusätzlich* zu den $5A$ Freiheitsgraden der Nukleonen eingeführt haben. Damit besteht also das Problem, die kollektive Bewegung aus der Bewegung der einzelnen Nukleonen *abzuleiten*, statt sie z. B. durch die Form des Potentials wie bei den Rotationszuständen von vornherein festzulegen. Über die bisher hierzu veröffentlichten Arbeiten berichtet zusammenfassend Tamura [T 58-1], vgl. auch [V 57-1].
Zweitens ist unser Modell nicht selbstkonsistent, da noch nicht die gegenseitige Abhängigkeit von Dichteverteilung der Teilchen und Potential berücksichtigt (vgl. S. 527), sondern das Potential nur *angesetzt* wurde. Offenbar handelt es sich hier nur um eine andere Seite desselben Problems wie bei der ersten Frage. Beide werden deshalb wahrscheinlich nur gemeinsam gelöst werden können. —

Das Kollektive Modell erscheint in unserer jetzigen Formulierung als eine direkte Verallgemeinerung des Schalenmodells, das Schalenmodell als ein Spezialfall ($\delta = 0$) des kollektiven Modells. Beide sind also zu e i n e m Modell, zu d e m Einzelteilchenmodell verschmolzen. Deshalb haben wir hier den Namen „unified model“ statt „Kollektives Modell“ vermieden, der auf eine Vereinigung von Tröpfchen- und Schalenmodell hindeuten sollte.

Trotzdem besteht für den Zusammenhang zwischen Schalenmodell und Kollektivem Modell noch das Problem, in welcher Beziehung die Konfigurationsmischungen, d. h. Korrekturen am Schalenmodell, zu kollektiven Deformationen stehen. Wir sahen auf S. 613, daß beide ähnliche Wirkungen beim magnetischen Moment hervorrufen können. Am Kern F^{19} zeigte sich sogar, daß man dessen Spektrum sowohl durch Korrekturen am Schalenmodell (Konfigurationsmischung) als auch durch das Kollektive Modell erhalten kann ([E 57-1], S. 350, [M 57 - 1], S. 539). Anscheinend besteht eine gewisse Äquivalenz zwischen Konfigurationsmischungen und kollektiven Bewegungen, die vielleicht zum besseren Verständnis der letzteren (s. oben) beitragen könnte (vgl. [E 58-2]).

3. COMPOUNDKERN-MODELL

Dieses Modell wurde bereits im Kapitel VI (Kernreaktionen) ausführlich behandelt, so daß wir uns hier auf eine Zusammenstellung der wichtigsten Grundgedanken — besonders im Hinblick auf das anschließend zu behandelnde Optische

Modell – beschränken können. Dabei lehnen wir uns an den für Compoundkern- und Optisches Modell grundlegend wichtigen Artikel von FRIEDMAN und WEISSKOPF [F 55-3] an.

Die Wirkungsquerschnitte von Kernreaktionen zeigen bekanntlich bei mittleren Energien ausgeprägte Resonanzen, bei hohen Energien dagegen einen glatten Verlauf. Die Grenze zwischen diesen beiden Bereichen, die wir als „Resonanzgebiet" und „Kontinuumsgebiet" unterscheiden, verschiebt sich mit wachsendem $A(Z)$ von etwa 10 MeV (leichte Kerne) zu etwa 1 MeV (schwere Kerne), vgl. Abb. 278 für die Neutronenquerschnitte.

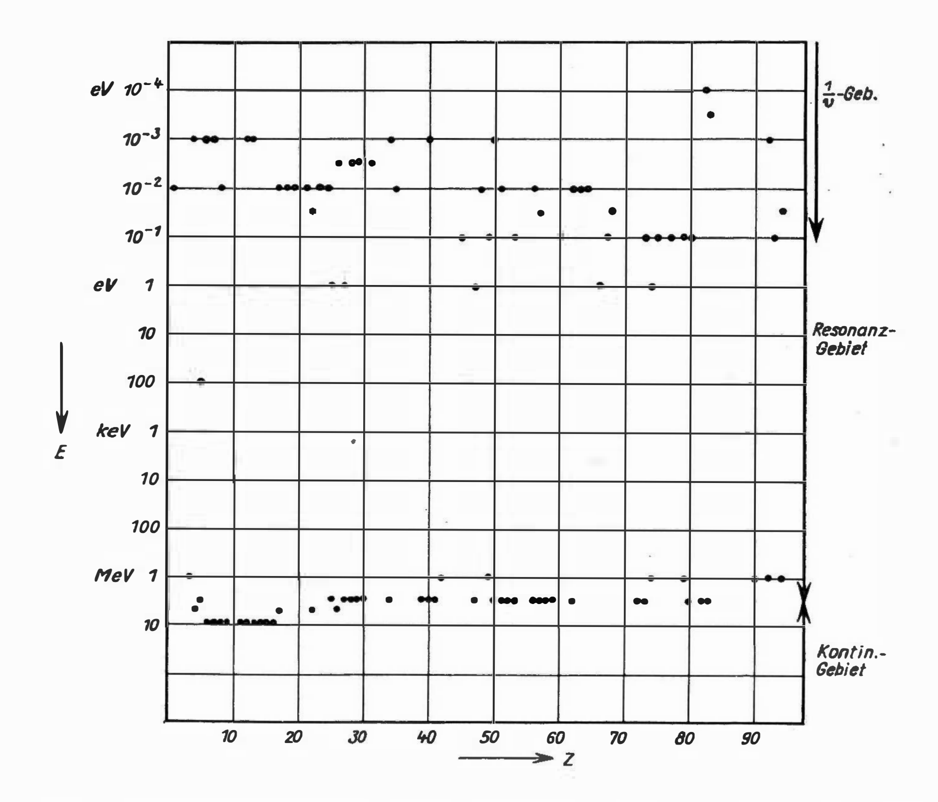


Abb. 278. Ungefähre Lage der Grenze zwischen Resonanz- und Kontinuumsgebiet bei den totalen Neutronenquerschnitten. Die Punkte geben *größenordnungsmäßig* die untere Grenze des Kontinuumsgebiets. Außerdem wurde innerhalb des Resonanzgebiets ebenso die ungefähre Lage der oberen Grenze des $1/v$-Gebiets angegeben (vgl. Kap. VI, S. 127). (Nach HUGHES, HARVEY, Neutron Cross Sections, New York 1955)

A. Grundzüge der Theorie

§ 128. Resonanzgebiet

Das Compoundkern-Modell ist eine Näherung, die im Resonanzgebiet am besten verwirklicht ist. Sie geht davon aus, daß zwischen Nukleonen, insbesondere also zwischen dem anfliegenden Nukleon[1]) und dem Targetkern, starke, kurzreichweitige Kräfte wirken. Das hat zweierlei zur Folge: Erstens setzt dadurch die Kraftwirkung auf das ankommende Nukleon bei Annäherung an die Kernoberfläche sehr plötzlich und stark ein. Dies wird in dem Modell als Potentialsprung erfaßt, den das eindringende Nukleon durchläuft (vgl. S. 278 und § 62).
Zweitens tritt das eindringende Nukleon durch die starken Kernkräfte in starke Wechselwirkung mit den anderen Nukleonen, gibt dadurch rasch seine überschüssige Energie ab, die sich auf den ganzen Kern verteilt, so daß nach kurzer Zeit das eingedrungene Nukleon nicht mehr gegenüber den anderen ausgezeichnet ist. Es ist so ein zusammengesetzter (≡ „compound") Kern von $A + 1$ Nukleonen in einem angeregten Zustand, ein Compound-Zustand, entstanden.
Das übliche Compoundkern-Modell verschärft nun diese Vorstellung zu der folgenden ersten Grundannahme (§ 25):

Der Compoundkern entsteht sofort (innerhalb einer Stoßzeit) nach Eindringen des Nukleons, d. h., die mittlere freie Weglänge l des eingeschlossenen Nukleons ist klein gegen den Kernradius: $l \ll R$.

Wir hatten gesehen, daß im Grundzustand und bei den niedrigen angeregten Zuständen das Schalenmodell bzw. Kollektive Modell mit Einzelteilchennäherung gut brauchbar ist, die Nukleonen im Kern sich also näherungsweise unabhängig bewegen, so daß dort die erste Grundannahme nicht erfüllt ist. Jetzt haben wir höher angeregte Zustände (> 8 MeV) und können deshalb von vornherein nicht sagen, ob bei diesen hohen Anregungen die Annahme einigermaßen gilt. Es wäre auch denkbar, daß das eingedrungene Nukleon erst nach Durchlaufen einer mit R vergleichbaren Strecke wesentlich Energie abgibt; es ist aber die einfachst mögliche Annahme.
Der entstandene Compoundzustand ist ein quasistationärer Zustand des $(A + 1)$-Nukleonensystems; er besitzt eine endliche Lebensdauer

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma},$$

wenn die Resonanz die Breite Γ hat. Andererseits ist nach (62.8) die Periode T des Zustands, die „Umlaufszeit", ungefähr durch den mittleren Abstand $\overline{D}$ der Resonanzen gegeben:

$$T \sim \frac{2\pi\hbar}{\overline{D}} = \overline{T}.$$

---

[1]) Die Beschränkung auf Kernreaktionen mit Nukleonen ist für das Folgende unwesentlich; es gilt alles ähnlich für d, α usw.

Im Resonanzgebiet sind die durchschnittlichen Breiten $\bar{\Gamma} = \frac{\hbar}{\bar{\tau}}$ klein gegen den mittleren Abstand $\bar{D}$: $\bar{\Gamma} \ll \bar{D}$, also $\bar{\tau} \gg \bar{T}$, $\tau \gg T$; es erfolgen demnach sehr viele „Umläufe" während der Lebensdauer der Zustände.
Definieren wir die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Compoundzustands durch $W = \frac{1}{\bar{\tau}}$, dann ist diese das Produkt der Wahrscheinlichkeit $W_1 = \frac{1}{\bar{T}}$ daß das Teilchen an die Oberfläche des Kerns gelangt, und der Wahrscheinlichkeit W_2, daß es die Oberfläche durchdringt und damit den Kern verläßt. Die Durchlässigkeit der Kernoberfläche (des Potentialsprungs) ist also (vgl. S. 271)

$$W_2 = \frac{W}{W_1} = \frac{\bar{T}}{\bar{\tau}} = 2\pi \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{D}} \propto \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{D}} \cdot \qquad (128.1)$$

Ein exakt stationärer Zustand (Lebensdauer ∞) ist vollständig durch seine Quantenzahlen und die zugehörige Eigenfunktion bestimmt, alle seine Eigenschaften sind unabhängig von der Entstehungsweise des Zustands. Ein quasistationärer Zustand (große endliche Lebensdauer) ist fast ein stationärer Zustand, seine Eigenschaften, insbesondere seine Zerfallseigenschaften, sind also näherungsweise von seiner Entstehung unabhängig. Das übliche Compoundkern-Modell verschärft dies zu der zweiten Grundannahme (vgl. § 25), der „Unabhängigkeitsannahme":

Bildung und Zerfall des Compoundkerns erfolgen unabhängig voneinander.

Diese Annahme ergibt die bekannte Dreistufen-Vorstellung der Kernreaktion. Im Gegensatz zur ersten Annahme wissen wir, daß sie im Resonanzgebiet sicher näherungsweise erfüllt ist, da die große Schärfe der Resonanzen eindeutig auf fast stationäre Zustände hinweist. —
Da die Compoundkerntheorie bisher üblicherweise immer nur unter den beiden oben genannten Grundannahmen formuliert wurde, auch in diesem Lehrbuch (Kap. VI), wollen wir diese Form der Compoundkerntheorie kurz „übliche" Compoundkerntheorie (bzw. -modell) nennen. Man kann natürlich die Compoundkerntheorie auch mit abgeänderten Grundannahmen entwickeln. Wir werden sehen, daß das bezüglich der ersten Grundannahme *notwendig* ist.

§ 129. Kontinuumsgebiet

Auch bei höheren Energien hat das einfallende Nukleon die Potentialschwelle zu überwinden und tritt dabei in starke Wechselwirkung mit den Nukleonen, die die Energie rasch auf den ganzen Kern verteilt, so daß sich ein Compoundzustand ausbildet. Auch hier wieder macht das übliche Compoundkern-Modell die vereinfachende erste Grundannahme, daß sich *sofort* ein Compoundzustand bildet; sie ist hier natürlich ebenso oder noch mehr[1]) fraglich, als im Resonanzgebiet.

---

[1]) Man weiß, daß für sehr hohe Energien der Größenordnung 100 MeV die mittlere freie Weglänge der Nukleonen im Kern mindestens gleich dem Kernradius ist, also bei Übergang zu höheren Energien zunimmt.

Außerdem sind jetzt die Breiten Γ der „Resonanzen" nicht mehr klein gegen ihren mittleren Abstand: $\Gamma \sim \bar{D}$ oder $> \bar{D}$.
Das Anwachsen der Resonanzbreiten Γ beim Übergang vom Resonanz- ins Kontinuumsgebiet bedeutet einmal eine Abnahme der Lebensdauern $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$ der einzelnen Compoundzustände (abnehmende „Stationärität"). Die damit verbundene Überlappung der Einzelresonanzen bedeutet aber darüber hinaus, daß jetzt ein Zustand ψ *bestimmter Energie* eine Überlagerung aller der Compoundzustände φ_ν ist, die zur Überlappung bei der betreffenden Energie beitragen:

$$\psi = \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu(\mathfrak{r}), \quad E = \sum_\nu |a_\nu|^2 E_\nu. \tag{129.1}$$

Da jetzt im Gegensatz zum Resonanzgebiet mehrere Compoundzustände φ_ν zum Gesamtzustand beitragen, ist hier auch die zweite Grundannahme nicht mehr von vornherein (näherungsweise) gesichert: Der Zustand ψ kann von der Art seiner Entstehung abhängen, da die *Phasen* arg a_ν der beteiligten Compoundzustände für verschiedene Erzeugungsreaktionen verschieden sein können, denn die vorgegebene Energie E legt nach (129.1) nur die *Beträge* der a_ν fest.
Es ist allerdings denkbar, daß die zweite Grundannahme doch wieder näherungsweise erfüllt ist, wenn die Dichte der überlappenden Zustände so groß ist, daß sehr viele Compoundzustände zu ψ beitragen („angeregt sind"):

$$\Gamma \gg \bar{D}.$$

Denn dann sind so viele Zustände φ_ν und damit so viele Phasen an der Reaktion beteiligt, daß sie praktisch eine statistische Verteilung haben, also für alle Zerfallsmöglichkeiten praktisch denselben Ausgangszustand darstellen, unabhängig von seiner Entstehung. Ob bzw. wann dieser Fall in der Natur vorliegt, kann nur das Experiment entscheiden. –
Wir sahen, daß die erste Grundannahme des üblichen Compoundkern-Modells bei allen Energien, die zweite im Kontinuumsgebiet fraglich ist. Trotzdem führt man die Theorie des Modells zunächst unter diesen beiden Annahmen durch und erhält so die „Resonanztheorie" (§§ 66, 67) für das Resonanzgebiet und die „Kontinuumstheorie" (§ 64) für das Kontinuumsgebiet.

B. Vergleich mit dem Experiment

Der Vergleich mit dem Experiment zeigte (Kap. VI), daß Resonanz- und Kontinuumstheorie mit einem großen Erfahrungsmaterial in Übereinstimmung sind. Man hielt deshalb bis vor einigen Jahren meist beide Grundannahmen für gerechtfertigt. In letzter Zeit konnte durch genauere Messungen gezeigt werden, daß – wie zu erwarten – die *zweite* Grundannahme im Resonanzgebiet gut erfüllt ist (Kap. VI; Blatt, Weisskopf [B 59-1], Kap. IX), aber im Kontinuumsgebiet oft verletzt wird. So beschossen z. B. Cohen und Newman [C **53**-1]

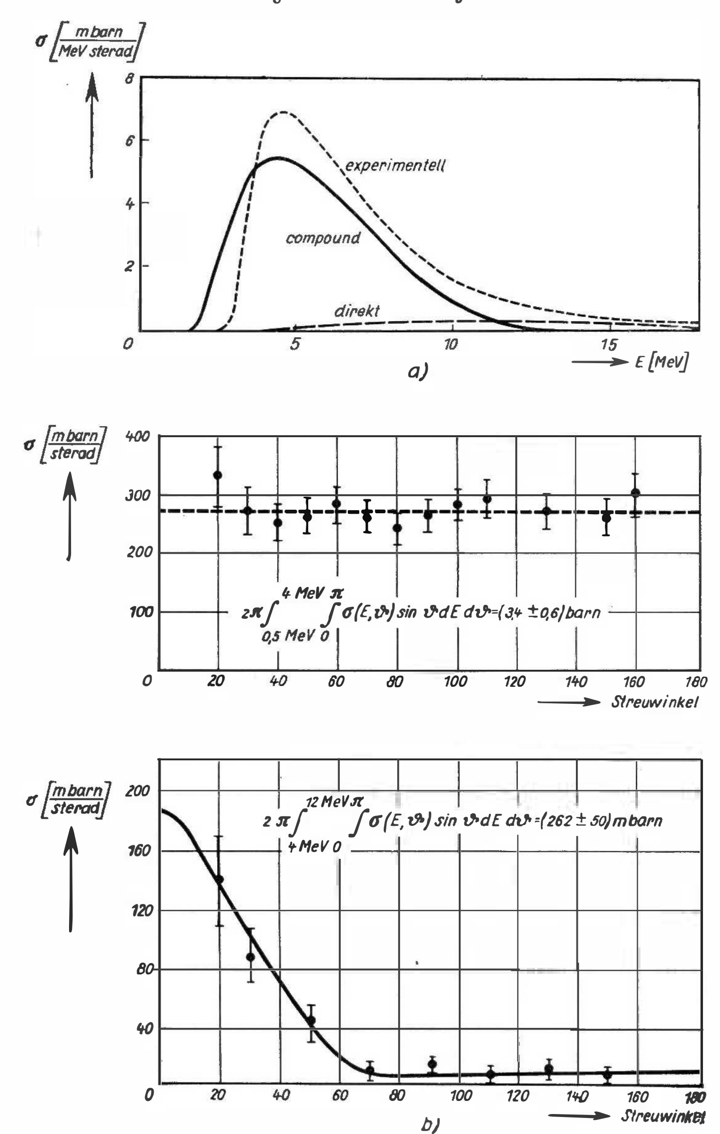


Abb. 279, a) Vergleich der experimentellen Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts mit der des Compoundkern-Modells für Beschuß von Fe^{56} mit 18 MeV-Protonen. Bei hohen Energien (~ 15 MeV) ist der experimentelle Wirkungsquerschnitt um Größenordnungen höher als der des Compoundkern-Modells. Der Überschuß stammt von direkten Prozessen, wie deren ebenfalls gezeichneter theoretischer Wirkungsquerschnitt zeigt. (Nach [K 57-1], Fig. 9, und HAYAKAWA u. a., Progr. Th. Ph. **13**, 415 1955))
b) Winkelverteilung der bei der Beschießung von Bi mit 14 MeV-Neutronen emittierten Neutronen. Oben: Neutronen mit Energien bis 4 MeV zeigen annähernd isotrope Winkelverteilung; unten: mit Energien von 4 bis 12 MeV ausgeprägte Vorwärtsbündelung. (Nach [K 37-1] und ROSEN, STEWART, Phys. Rev. **99**, 1052 (1955))

mittelschwere Kerne mit Protonen und Neutronen zwischen 10 und 20 MeV und fanden, daß aus demselben Compoundzustand mit größerer Wahrscheinlichkeit Protonen emittiert wurden, wenn er durch Protonen erzeugt war, als bei Erzeugung durch Neutronen.

Darüber hinaus zeigten sich bei Kernreaktionen mit Energien der eingeschossenen Teilchen von 10 MeV und mehr (d. h. im Kontinuumsgebiet) definitive Abweichungen vom Compoundmechanismus überhaupt durch das Auftreten sog. „direkter Prozesse". Man findet nämlich bei diesen höheren Energien oft Reaktionsprodukte mit einer viel höheren Energie (Abb. 279a) und oft auch ausgeprägter Vorwärtsbündelung (Abb. 279b), wie sie nach dem Compoundkern-Modell nicht möglich sind; denn nach diesem ist der Zerfall des Compoundkerns eine Art Verdampfungsprozeß, sollte also eine Maxwell-Verteilung der Energie und im wesentlichen isotrope Winkelverteilung der emittierten Teilchen ergeben. Bei höheren Energien tritt offenbar das einfallende Nukleon nur mit einem Nukleon – höchstens einigen wenigen – des Target-Kerns in Wechselwirkung und überträgt fast alle Energie und fast allen Impuls nur auf dieses. (Auch die Stripping- und Pick-up-Reaktionen sind deshalb direkte Prozesse.)

Um zu verstehen, wie solche Einzelstöße zustande kommen, muß man sich vorstellen, daß die Verteilung der Energie des eingedrungenen Teilchens, die zur Ausbildung des Compoundzustands führt, in Form einer Kaskade von Einzelstößen mit den Nukleonen des Targetkerns erfolgt. Wenn bei einem der ersten Einzelstöße der Kaskade zufällig so viel Energie auf ein Nukleon übertragen wird, daß es den Kern verlassen kann, haben wir einen direkten Prozeß: Die direkten Prozesse werden sozusagen der Compoundkernbildung „abgezapft".

Bei Kernreaktionen sehr hoher Energie (> 100 MeV) kennt man diese Erscheinung schon länger (Kap. VII, § 82): Ein eingedrungenes sehr hochenergetisches Teilchen löst zunächst ein enges Bündel hochenergetischer Teilchen in der Vorwärtsrichtung aus, der Rest der Anregungsenergie verläßt den Kern durch annähernd isotrope Abdampfung von Teilchen niedrigerer Energie. Das enge Bündel hochenergetischer Teilchen ist das Ergebnis *zahlreicher* direkter Prozesse, die bei sehr hohen Energien möglich werden; bei den hier betrachteten Energien von etwa 10 bis 50 MeV bleiben davon nur noch wenige direkte Prozesse übrig. –

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß auch die *erste* Grundannahme revidiert werden muß; das wird uns auf das optische Modell führen. Insgesamt ergibt sich, daß das übliche Compoundkern-Modell in verschiedener Richtung verbessert und erweitert werden muß.

4. OPTISCHES MODELL

A. Riesenresonanzen

Als nach 1930 durch die Entdeckung des Neutrons eine theoretische Kernphysik möglich wurde, war es zunächst naheliegend, die in der Hülle bewährten quantenmechanischen Methoden auch am Kern zu versuchen. So wurde damals für die Erklärung der Eigenschaften der Grundzustände vor allem leichter Kerne das Schalenmodell herangezogen (vgl. S. 533), indem man wie beim Schalenmodell der Hülle annahm, daß sich die einzelnen Nukleonen im Kern näherungsweise unabhängig voneinander in einem (kastenartigen) Zentralfeld bewegen.

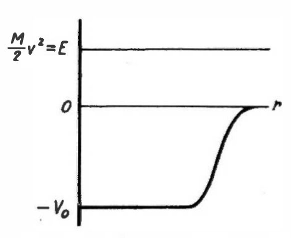


Abb. 280. Einfachstes Optisches Modell für Kernreaktionen mit Neutronen

Man versuchte damals diese Vorstellung auch für die Kernreaktionen zu verwenden. Dabei mußte man beachten, daß bei ihnen ein Teilchen von außen mit *positiver* Energie in den Kern eindringt. Wird der Kern als ein solches Kastenpotential aufgefaßt, wie wir es vom Schalenmodell her kennen ($R = R_0\, A^{1/3}$, V_0 etwa 30 bis 40 MeV), haben wir also die Situation der Abb. 280. Die Zustände der Kernreaktionen erscheinen so als die ungebundenen Zustände ($E > 0$) des Schalenmodells.[1]) Man hat dem so entstandenen Modell der Kernreaktionen einen eigenen Namen gegeben: „Optisches Modell". Wir halten fest:

Im Optischen Modell (ungebundene Zustände des Schalenmodells) bewegt sich das eingeschossene Teilchen unabhängig von den Nukleonen des Targetkerns mit positiver Energie in einem — von letzteren erzeugten — Zentralfeld.

Wie in Kapitel VI, § 70, gezeigt wurde und wie wir sehen werden, ergeben sich nach diesem Modell Resonanzen des Wirkungsquerschnitts mit Abständen D der Größenordnung 10 MeV und für Energien von 1 bis 10 MeV Breiten der Größenordnung 1 MeV, also sehr breite Resonanzen, sog. „Riesenresonanzen". Sie treten bei den Energien auf, bei denen die Amplitude der Welle im Kerninnern (im streuenden Potential) besonders groß ist: Eindringende Welle und Kern sind „in Resonanz".

Außerdem sieht man sofort, daß nach diesem Modell nur *Streuung* des einfallenden Teilchens durch den Kern erfolgen kann, da es sich in einem ungebundenen Zustand befindet und folglich nicht im Kern festgehalten werden kann. Falls also das Optische Modell eine brauchbare Näherung wäre, sollte zumindest

[1]) Dabei haben wir die starke Spin-Bahn-Wechselwirkung weggelassen, da sie für positive Energien nicht so wichtig ist: Sie verursacht Termverschiebungen, die im Kontinuum nicht sehr wesentlich sind, solange man von Polarisationserscheinungen absieht.

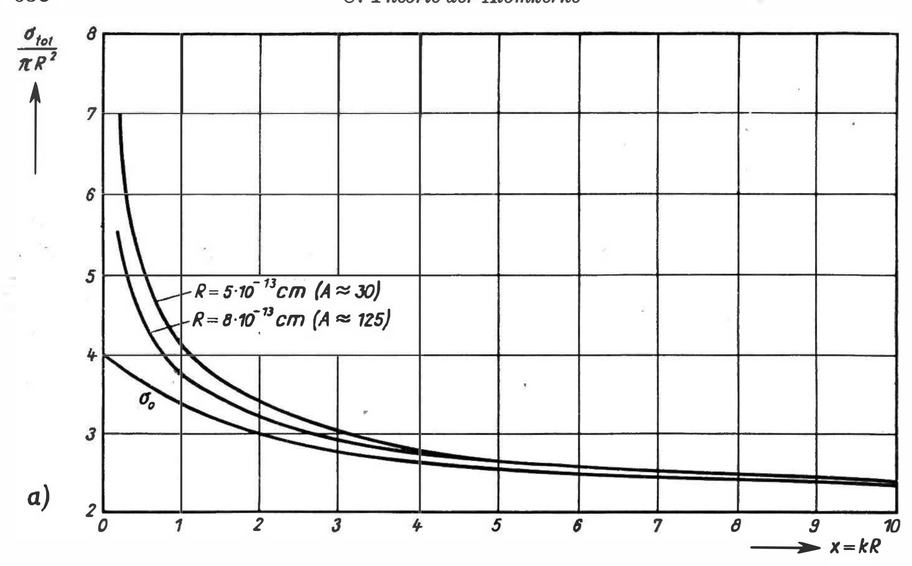


Abb. 281a. Über die Compoundresonanzen gemittelter totaler Wirkungsquerschnitt der „üblichen" (vgl. S. 653) Compoundkerntheorie (≡ totaler Wirkungsquerschnitt der „Kontinuumstheorie"): monotoner Verlauf, keine Riesenresonanzen. $R = 1{,}5 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ [cm], $V_0 = 20$ MeV. σ_0 ist der Wirkungsquerschnitt für Streuung an einer harten Kugel. (Nach [B 59-1], Fig. VIII, 4.4)

bei kleinen Energien[1]) überwiegend Streuung eintreten, d. h., die Kernreaktionen sollten dort vom Typ (a, a') sein.

1935 fanden FERMI und Mitarbeiter bei Kernreaktionen mit langsamen Neutronen (vgl. S. 166) jedoch ein ganz anderes Bild. Der Wirkungsquerschnitt zeigte zwar Resonanzen, aber um viele Größenordnungen dichter und schärfer als nach dem Optischen Modell zu erwarten war: Man fand (damals und seitdem) Breiten von etwa 0,1 eV bis 0,01 MeV und Abstände der Größenordnung 1 eV bis 0,1 MeV. Außerdem ergab sich nicht Streuung (n, n'), sondern Strahlungseinfang (n, γ) als überwiegender Reaktionstyp für langsame Neutronen. Diese eklatanten Widersprüche führten zur Aufstellung des Compoundkern-Modells (N. BOHR, 1936) und zur Aufgabe des Optischen Modells (und Schalenmodells, vgl. S. 533). Wir wissen, daß das Compoundkern-Modell die genannten experimentellen Tatsachen erklären kann, weil es im Gegensatz zum Optischen Modell alle Nukleonen des Targetkerns an der Kernreaktion teilnehmen läßt, also das entgegengesetzte Extrem zum Optischen Modell darstellt.

Die quantitative Formulierung des (üblichen) Compoundkern-Modells führte unter den beiden Grundannahmen der sofortigen Compoundkernbildung und der Unabhängigkeit von Bildung und Zerfall des Compoundkerns (vgl. voriges Kapitel) zu einer Reihe weiterer experimentell nachprüfbarer Ergebnisse. Da nach der ersten Grundannahme das Teilchen sofort nach dem Eindringen einen

1) Bei größeren Energien können (durch Störungen des Modells) Stöße im Kern erfolgen.

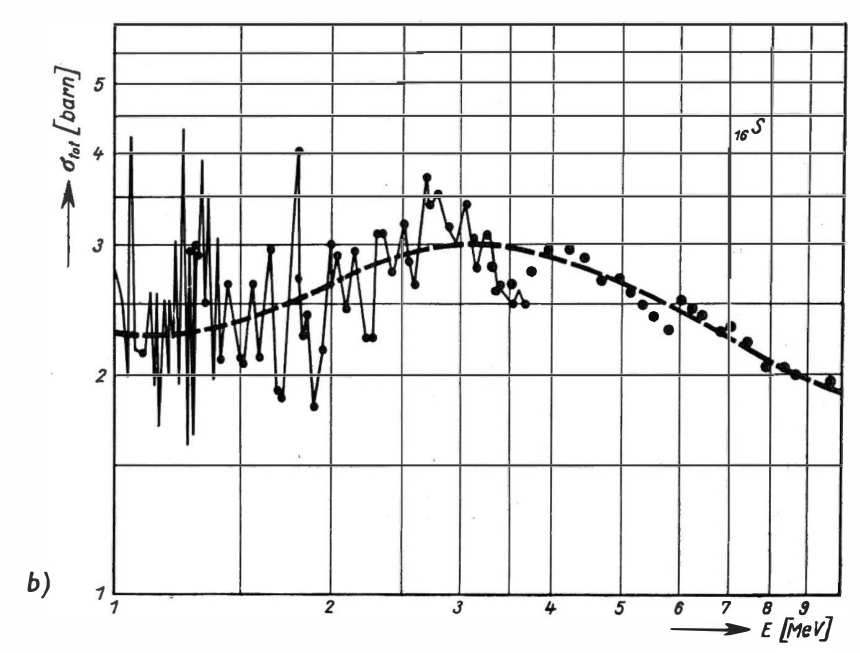


Abb. 281 b. Totaler Wirkungsquerschnitt von Schwefel (95% S^{32}). Gestrichelt der über die Compoundresonanzen gemittelte totale Wirkungsquerschnitt. (Nach HUGHES, HARVEY, Neutron Cross Sections, New York 1955)

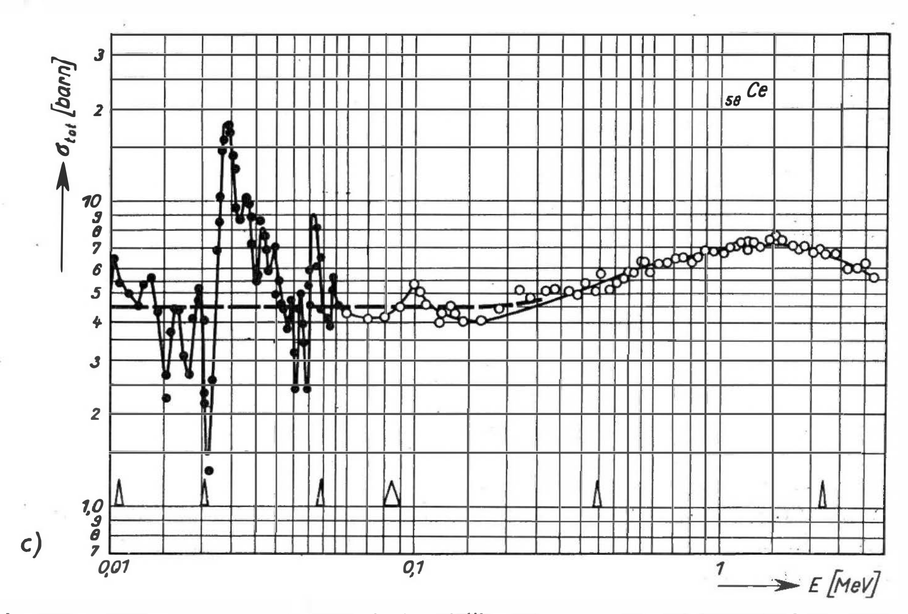


Abb. 281 c. Totaler Wirkungsquerschnitt von Cer (88% Ce^{140}). Weiteres vergleiche b). Die Breite der Dreiecke gibt das Auflösungsvermögen an, mit dem gemessen wurde. b) und c) zeigen deutlich Riesenresonanzen

Compoundzustand erzeugt, „spürt" es den Kern jetzt nicht mehr als Zentralfeld, in dem es gestreut würde: Der Kern wirkt nicht mehr als Streuer, sondern als „Absorber". Folglich kann es nach dem üblichen Compoundkern-Modell keine Riesenresonanzen geben; denn die Welle des eingedrungenen Teilchens klingt im Kern sehr rasch ab, es kommt nicht zur Ausbildung einer den ganzen Kern füllenden Welle und damit nicht zu einer Resonanz der eindringenden Welle im Kern.
Wie wir sehen werden (S. 666ff.), ergibt sich tatsächlich aus einer vereinfachten Form der üblichen Compoundkern-Theorie das Fehlen der Riesenresonanzen im Wirkungsquerschnitt. (Man erhält diese vereinfachte Form, wenn man sich darauf beschränkt, nur die über die einzelnen Compound-Resonanzen *gemittelten* Wirkungsquerschnitte (vgl. Abb. 281 b, c) zu beschreiben.) In dieser Form ergibt das Modell die Aussage, daß der gemittelte totale Wirkungsquerschnitt, bezogen auf πR^2, *monoton* mit wachsender Energie und wachsendem A abfallen sollte. Dieses Ergebnis wurde im wesentlichen bereits in Kapitel VI, (64.6), aus einer noch stärker vereinfachten Theorie abgeleitet:

$$\sigma_{\text{tot}} \sim 2\sigma_c = 2\pi(R + \lambda)^2 \frac{4\lambda\lambda_i}{(\lambda + \lambda_i)^2} = 2\pi(R + \lambda)^2 \frac{4kK}{(k+K)^2},$$

$$k = \lambda^{-1}, \quad K = \lambda_i^{-1}.$$

Wir haben in Abb. 281 a den vorausgesagten monotonen Verlauf des gemittelten totalen Wirkungsquerschnitts, wie er sich auf S. 664 ff. ergeben wird, gezeichnet.
1952 zeigte sich durch Messungen von BARSHALL [B 52-2], daß die gemittelten Neutronenquerschnitte im allgemeinen keinen monotonen Abfall zeigen, sondern daß (außer den schmalen, dichten Compound-Resonanzen) deutlich breite *Riesenresonanzen* auftreten (vgl. Abb. 281 b, c), die den Verlauf des mittleren Wirkungsquerschnitts (gestrichelt) bestimmen. Die Compound-Resonanzen erscheinen der „Grobstruktur" der Wirkungsquerschnitte sozusagen als „Feinstruktur" überlagert.
Die Breite der Riesenresonanzen ist von der Größenordnung MeV, deutet also darauf hin, daß doch das Optische Modell seine Berechtigung hat, aber eben nur *gleichzeitig* mit dem Compoundkern-Modell, da scharfe Compound-Resonanzen und breite Riesenresonanzen gleichzeitig auftreten.

B. Theorie

§ 130. Allgemeines

1954 wurde deshalb von FESHBACH, PORTER und WEISSKOPF ≡ FPW [F 54-2] in etwas abgewandelter Form das Optische Modell (als Modell der „getrübten Kristallkugel" ≡ „cloudy crystal ball") wieder in die Theorie der Kernreaktionen eingeführt. Sie deuten zunächst das gleichzeitige Auftreten beider Resonanztypen so, daß das eingedrungene Teilchen – unter dem wir uns im folgenden speziell ein Neutron vorstellen wollen – im Gegensatz zur ersten Grundannahme

der üblichen Compoundkern-Theorie nicht sofort in starken Energieaustausch mit den Nukleonen des Targetkerns tritt, sondern deren Wirkung zunächst nur summarisch als Zentralfeld „spürt“:

Der Compoundkern entsteht nicht sofort nach Eindringen des Teilchens, sondern das Teilchen hat eine merkliche mittlere freie Weglänge l im Kern: $l \sim R$.

Unser Neutron erreicht deshalb mit einer merklichen Wahrscheinlichkeit wieder die Kernoberfläche, ohne einen Compoundkern gebildet zu haben, und verläßt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den Kern als nur gestreutes Neutron. Diese Streuung führt zu den Riesenresonanzen. Daneben besteht aber offenbar eine merkliche Wahrscheinlichkeit, auf dem Weg durch den Kern mit einem oder mehreren einzelnen Nukleonen in starke Wechselwirkung zu treten und so einen Compoundkern zu erzeugen, d. h. im Kern „stecken zu bleiben“ und damit Compoundresonanzen hervorzurufen. – Es erfolgt im Kern also gleichzeitig nebeneinander Streuung und Compoundkernbildung.
Um dieses komplizierte Verhalten in einfacher Form durch ein – etwas verallgemeinertes – Optisches Modell zu beschreiben, betrachten wir mit FPW nur den *über die Compoundresonanzen gemittelten*[1]) Wirkungsquerschnitt (gestrichelte Kurve in Abb. 281 b, c), der im Kontinuumsgebiet mit dem wirklichen Wirkungsquerschnitt zusammenfällt. Die Mittelung bedeutet, daß wir die Bildung von Compoundzuständen im Resonanzgebiet künstlich verschmieren, so daß wir also nur den mittleren Beitrag der Compoundkernbildung zum totalen Wirkungsquerschnitt erfassen. Wir holen sozusagen für das Resonanzgebiet künstlich nach, was im Kontinuumsgebiet die Natur selbst besorgt.[2]) Dadurch erreichen wir, daß nur noch die Riesenresonanzen übrigbleiben, auf deren theoretische Beschreibung es uns jetzt allein ankommt. Wir werden später genauer auf den Mittelungsprozeß eingehen und dabei sehen, daß diese Mittelung die entscheidende Voraussetzung dafür ist, daß unser einfaches Optisches Modell *überhaupt definiert werden kann.*
Die so im gesamten Energiebereich verschmierte „mittlere“ Compoundkernbildung läßt sich nun sehr einfach gleichzeitig mit der Streuung im Optischen Modell erfassen. Denn immer dann, wenn unser Neutron in einen Compoundzustand eingeht, scheidet es aus der Streuung aus, was für den Streuvorgang eine *Absorption* bedeutet (vgl. Kap. VI, § 71):

Der Kern wirkt auf ein einfallendes Teilchen gleichzeitig als Streuer (brechendes Medium) und in Form der Compoundkernbildung als Absorber (trübes Medium).

Aus der klassischen Optik weiß man, daß gleichzeitige Streuung und Absorption durch einen komplexen Brechungsindex $n = n_1 + i n_2$ beschrieben werden kann. Für Materiewellen ist der Brechungsindex einem Potential äquivalent ($n^2 \propto V - E$), was nahelegt, das Potential jetzt ebenfalls komplex zu wählen:

$$V(r) = V_1(r) + i\, V_2(r);$$

[1]) „Gemittelt“ heißt im folgenden stets „über die Compoundresonanzen gemittelt“.
[2]) Das läßt sich experimentell mit Neutronen von großer Energieunschärfe ΔE realisieren: $\Delta E \gg D$.

damit läßt sich die mittlere Compoundkernbildung als Absorption erfassen. Dieses Hinzufügen eines Imaginärteils zum (reellen) Potential des alten Optischen Modells ist das wesentliche Neue.

Es ist klar, daß man so nur ein mittleres Maß für die Stärke der Compoundkernbildung erhält und nicht letztere selbst – d. h. die einzelnen Compoundresonanzen – beschreiben kann, da die „Absorption" $V_2(r)$ eben *nur das Ausscheiden aus dem Streuvorgang* durch die Compoundkernbildung erfaßt, nicht aber den Mechanismus der Compoundkernbildung selbst.

Die beiden Funktionen $V_1(r)$ und $V_2(r)$ unseres Potentials können zunächst ganz verschiedene Radialabhängigkeit haben. Wir nehmen aber wie beim Schalenmodell an, daß die Nukleonen im Kern annähernd homogen verteilt sind und Randeffekte vernachlässigt werden können, so daß im Innern ein ungefähr konstantes streuendes Potential $V_1(r)$ und eine etwa konstante Absorption $V_2(r)$ entsteht. Wir wählen also beide $V_i(r)$ als Kastenpotentiale:

$$V(r) = \bar{V}(r)\,(1 + i\,\zeta),$$

$$\bar{V}(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

ζ gibt die Stärke des Imaginärteils relativ zum Realteil an, ist also ein Maß für die Stärke der mittleren Compoundkernbildung relativ zur mittleren Streuung. Das Vorzeichen von ζ müssen wir positiv wählen, den Imaginärteil des Potentials also negativ, um *Absorption* zu bekommen. (Ein positiver Imaginärteil würde *Emission* ergeben.)

Zusammenfassende Literatur zum Optischen Modell: Neben der grundlegenden Arbeit FPW [F 54-2] FRIEDMAN, WEISSKOPF [F 55-3], MEDINA, SÜSSMANN [M 56-2] und Handbuchartikel von KINSEY [K 57-1] und RAINWATER [R 57-2].

§ 131. Wirkungsquerschnitte für *s*-Streuung

a) Berechnung der Wirkungsquerschnitte

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall der *s*-Streuung ($l = 0$), der bei kleinen Energien (E wenige MeV) den Hauptteil der Streuung ausmacht und in Kap. VI, § 70, für rein reelles Potential ($\zeta = 0$) bereits durchgerechnet wurde. Wir haben dann die Gleichungen zu lösen

$$\left.\begin{aligned} u_0'' + k^2 u_0 = 0\,, \quad r > R\,, \quad u_0'' + K^2 u_0 = 0\,, \quad r < R\,, \\ \psi(l = 0) = \bar{\psi}_0 = \frac{u_0(r)}{r}\,, \qquad K^2 = K_0^2 + k^2, \\ k^2 = \frac{2M}{\hbar^2} E \geqq 0\,, \quad K_0^2 = \frac{2M}{\hbar^2} V_0 (1 + i\,\zeta) = \bar{K}_0^2 (1 + i\,\zeta)\,. \end{aligned}\right\} \quad (131.1)$$

Die Lösung, die die Randbedingungen

$$\left.\frac{u_0}{r}\right|_{r=0} = \text{endlich}, \qquad \left.\frac{u_0}{r}\right|_{r\to\infty} = \frac{i}{2kr}\left(e^{-ikr} - \bar{\eta}_0\, e^{+ikr}\right)$$

erfüllt, lautet

$$u_0(r) = \begin{cases} A \sin K r, & r < R, \\ \frac{i}{2k}(e^{-ikr} - \bar{\eta}_0 e^{+ikr}) \equiv u_0^{(-)} + \bar{\eta}_0 u_0^{(+)}, & r > R. \end{cases} \qquad (131.2)$$

Wir haben damit durch

$$\bar{\psi}_0 \propto \frac{e^{-ikr}}{r} - \bar{\eta}_0 \frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r > R, \qquad (131.3)$$

eine Streuamplitude $\bar{\eta}_0$ (später ebenso $\bar{\eta}_l$) eingeführt, deren Querstrich andeuten soll, daß wir nicht den wirklichen Streu- und Compoundkernbildungs-Vorgang, sondern diesen *nach Mittelung* über die Compoundresonanzen im Sinne von Abb. 281 b, c betrachten wollen – so, wie er erfolgen würde, wenn wir Neutronen mit einer solchen Energieschärfe ΔE streuten, daß eine ganze Anzahl Compoundresonanzen in den Bereich ΔE fallen (vgl. Fußnote 2 auf S. 661). Wir rechnen zunächst mit dem so vorläufig nur heuristisch definierten $\bar{\eta}_0$, $(\bar{\eta}_l)$; anschließend werden wir diese Definition verschärfen und daraus ein tieferes Verständnis unseres Modells gewinnen.

Definieren wir als logarithmische Ableitung der Eigenfunktion am Kernrand

$$\bar{f}_0 = R \frac{u_0'}{u_0}\bigg|_{r=R}, \qquad (131.4)$$

so findet man leicht, wenn man für u_0 die äußere Eigenfunktion einsetzt ($\delta_0 = kR$), die für alle kurzreichweitigen Potentiale gültige Beziehung

$$\bar{\eta}_0 = \frac{\bar{f}_0 + ikR}{\bar{f}_0 - ikR} e^{-2i\delta_0}. \qquad (131.5)$$

Setzt man andererseits die innere Eigenfunktion in (131.4) ein, so erhält man die spezielle Form von $\bar{f}_0$ für das Kastenpotential:

$$\bar{f}_0 = KR \operatorname{ctg} KR. \qquad (131.6)$$

Formal unterscheidet sich unsere Rechnung nicht von der mit $V_2(r) \equiv 0$ (§ 70), doch ist jetzt $K = \left[\frac{2M}{\hbar^2}(V_0 + i\zeta V_0 + E)\right]^{1/2}$ und folglich $\bar{f}_0$ komplex:

$$K = K_1 + iK_2, \qquad \bar{f}_0 = \Re e \bar{f}_0 + i \Im m \bar{f}_0.$$

Daraus folgt nach (131.5), daß jetzt

$$|\bar{\eta}_0|^2 \neq 1 (< 1)$$

ist, was nach Kapitel VI, § 63, das Auftreten von Absorption anzeigt.

Nach (63.9), (63.11) und (63.16) bestehen zwischen einer Streuamplitude $\bar{\eta}_0$ und dem zugehörigen Streuquerschnitt[1]) bzw. Reaktionsquerschnitt ≡ Absorptionsquerschnitt stets die (für alle Modelle gültigen) Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{\text{Str}}\,0} &= \pi \lambda^2 |1 - \bar{\eta}_0|^2, \\ \sigma_{\overline{\text{Abs}}\,0} &= \pi \lambda^2 (1 - |\bar{\eta}_0|^2), \\ \sigma_{\overline{\text{tot}}\,0} &= \pi \lambda^2 2 (1 - \Re e\, \bar{\eta}_0). \end{aligned} \qquad (131.7)$$

[1]) Mit Streuung ist hier stets elastische Streuung gemeint.

Dabei haben wir bei $\sigma_{\overline{\text{Str}}0}$ usw. Querstriche gemacht, um anzudeuten, daß diese Größen durch $\overline{\eta}_0$ die Mittelung über die Compoundresonanzen enthalten. Man erhält zunächst

$$1-|\overline{\eta}_0|^2 = 1-\frac{(\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0+kR)^2+\mathfrak{Re}^2\overline{f}_0}{(\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0-kR)^2+\mathfrak{Re}^2\overline{f}_0} = -\frac{4kR\,\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0}{(\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0-kR)^2+\mathfrak{Re}^2\overline{f}_0} = -\frac{4x\,\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0}{M_0^2+N_0^2}$$

mit den Abkürzungen

$$x = kR, \qquad M_0 = x-\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0,$$
$$N_0 = \mathfrak{Re}\,\overline{f}_0.$$

Wie es sein muß, verschwindet also der Absorptionsquerschnitt bei reellem $V(r)$, d. h. reellem K und folglich reellem $\overline{f}_0$.

Die Berechnung des Streuquerschnitts ist mühsamer. Wir formen zunächst um:

$$|1-\overline{\eta}_0|^2 = \left|1-e^{-2i\delta_0}-\frac{2ix}{\overline{f}_0-ix}e^{-2i\delta_0}\right|^2 = \left|e^{+2i\delta_0}-1-\frac{2ix}{\overline{f}_0-ix}\right|^2$$
$$= |(e^{2i\delta_0}-1)(\overline{f}_0-ix)-2ix|^2\cdot\frac{1}{M_0^2+N_0^2}.$$

Für das letzte Absolutquadrat ergibt sich

$$|e^{2i\delta_0}-1|^2|\overline{f}_0-ix|^2+4x^2+2ix[(e^{2i\delta_0}-1)(\overline{f}_0-ix)-(e^{-2i\delta_0}-1)(\overline{f}_0^{\,*}+ix)]$$
$$\equiv 4\sin^2\delta_0\cdot(M_0^2+N_0^2)+4x^2+2ix[(\cos 2\delta_0-1+i\cdot\sin 2\delta_0)(N_0-iM_0)$$
$$-(\cos 2\delta_0-1-i\cdot\sin 2\delta_0)(N_0+iM_0)]$$
$$= 4\sin^2\delta_0\cdot(M_0^2+N_0^2)+4x^2+2ix[-2iM_0(\cos 2\delta_0-1)+2iN_0\sin 2\delta_0]$$
$$= 4\sin^2\delta_0\cdot(M_0^2+N_0^2)+4x(M_0\cos 2\delta_0-N_0\sin 2\delta_0)+4x\,\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0.$$

Damit erhalten wir als Wirkungsquerschnitte[1])

$$\sigma_{\overline{\text{Str}}0} = \pi\lambda^2\left[4\sin^2\delta_0+4x\frac{M_0\cos 2\delta_0-N_0\sin 2\delta_0}{M_0^2+N_0^2}+4x\frac{\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0}{M_0^2+N_0^2}\right],$$
$$\sigma_{\overline{\text{Abs}}0} = -\pi\lambda^2\frac{4x\,\mathfrak{Im}\,\overline{f}_0}{M_0^2+N_0^2}, \qquad (131.8)$$
$$\sigma_{\overline{\text{tot}}0} = \sigma_{\overline{\text{Str}}0}+\sigma_{\overline{\text{Abs}}0} = \pi\lambda^2\left[4\sin^2\delta_0+4x\frac{M_0\cos 2\delta_0-N_0\sin 2\delta_0}{M_0^2+N_0^2}\right].$$

[1]) Die Ausdrücke (131.8) gelten ihrer Form nach für jede Streuung mit Absorption, unabhängig von der speziellen Form des kurzreichweitigen Potentials, da (131.5) für alle solchen Potentiale gilt und (131.6) nicht benutzt wurde.

Die Resonanzstellen des Wirkungsquerschnitts sind durch die Bedingung $\overline{f}_0 = 0$ gegeben (vgl. S. 302), denn nach (131.4) hat dann die Funktion u_0 am Kernrand waagerechte Tangente, also maximale Amplitude der Funktion im Kerninnern. Führen wir die Abkürzungen

$$X = KR = (K_1 + iK_2)\,R = X_1 + iX_2 \qquad (x = kR),$$

$$\overline{X}_0 = \overline{K}_0 R, \qquad X_0 = \overline{X}_0 (1 + i\zeta)^{1/2}$$

ein, dann ist

$$X^2 = K^2R^2 = X_1{}^2 + 2iX_1X_2 - X_2{}^2 = \overline{X}_0^2\,(1 + i\zeta) + x^2 = X_0^2 + x^2,$$

also

$$\begin{aligned} X_1{}^2 - X_2{}^2 &= \overline{X}_0^2 + x^2, \\ 2X_1X_2 &= \zeta \overline{X}_0^2. \end{aligned} \tag{131.9}$$

Unsere Resonanzbedingung lautet damit

$$\begin{aligned} \overline{f}_0 &= KR\operatorname{ctg} KR = X \operatorname{ctg} X = (X_1 + iX_2)\operatorname{ctg}(X_1 + iX_2) = 0, \\ \overline{f}_0 &= -(X_1 + iX_2)\,\frac{1 + i\operatorname{ctg} X_1 \operatorname{\mathfrak{Ctg}} X_2}{\operatorname{ctg} X_1 - i\operatorname{\mathfrak{Ctg}} X_2} = 0. \end{aligned} \tag{131.10}$$

b) Starke und schwache Absorption

Wir wollen $\overline{f}_0$ und damit unsere Bedingung für zwei einfache Grenzfälle betrachten: Für starke und schwache Absorption im Kern. Im Fall starker Absorption soll die Neutronenwelle beim Durchlaufen der Strecke $2R$ praktisch vollständig absorbiert werden, bei schwacher Absorption dagegen nur wenig. Nach (131.2) ist die Neutronenwelle im Kern

$$u_0 \propto \sin Kr \propto e^{-iK_1r}\,e^{+K_2r} - e^{+iK_1r}\,e^{-K_2r}. \tag{131.11}$$

Starke Absorption kennzeichnen wir durch $e^{-K_2R} = e^{-X_2} \ll 1$: Die *im Kerninnern* auslaufende Welle verschwindet (näherungsweise) am Kernrand. Das entspricht der ersten Grundannahme der üblichen Compoundkerntheorie; das Optische Modell mit starker Absorption ist also eine Art Mittelung des üblichen Compoundkernmodells.[1]) — Schwache Absorption dagegen ist offenbar durch $X_2 \ll 1$ (oder $\zeta \ll 1$) gegeben. Bei *starker Absorption* ist

$$\operatorname{\mathfrak{Ctg}} X_2 = \frac{e^{X_2} + e^{-X_2}}{e^{X_2} - e^{-X_2}} \sim 1$$

[1]) Die zweite Grundannahme geht nicht in das Optische Modell ein, da es den Zerfall des Compoundkerns (mit Ausnahme der compoundelastischen Streuung, s. weiter unten) nicht mit erfaßt.

und damit

$$\bar{f}_0 \sim -(X_1 + i X_2) \frac{1 + i \operatorname{ctg} X_1}{-i + \operatorname{ctg} X_1} = -iX = -iKR,^{1)} \qquad (131.12)$$

ein Wert, der sich ergeben muß, wenn am Kernrand keine aus dem Kerninnern kommende auslaufende Welle vorhanden ist: $u_0(R) \propto e^{-iKR}$ nach (131.11). (Außerhalb des Kerns ist dagegen durch die Potentialstreuung an der Kernoberfläche trotzdem eine auslaufende Welle vorhanden.)

Für kleine Energien $x \ll \bar{X}_0$ ($E \ll 40$ MeV) ist $x \ll |X_0|$ und

$$X = \sqrt{X_0^2 + x^2} \sim X_0\left(1 + \frac{x^2}{2X_0^2}\right) \sim X_0,$$

also

$$\bar{\eta}_0 = \frac{\bar{f}_0 + ix}{\bar{f}_0 - ix} e^{-2i\delta_0} \sim \frac{X_0 - x}{X_0 + x} e^{-2ix} \sim e^{-2ix},$$

schließlich

$$\sigma_{\overline{\text{tot}}\,0} = \frac{\pi R^2}{x^2} 2 (1 - \Re e\, \bar{\eta}_0) \sim \frac{2\pi R^2}{x^2}(1 - \cos 2x),$$

$$\sigma_{\overline{\text{tot}}\,0} \sim 4\pi R^2 \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Das ist im Gültigkeitsbereich unserer Näherung ($x < 2{,}5$ für $E < 5$ MeV und $R \sim 5 \cdot 10^{-13}$ cm) eine *monoton* abfallende Funktion der Energie $E = \frac{\hbar^2}{2MR^2} x^2$. Der Wirkungsquerschnitt zeigt demnach keine (Riesen-)Resonanzen. In Abb. 281 a (und Abb. 282a) ist der genaue Verlauf des totalen (gemittelten) Wirkungsquerschnitts unter Berücksichtigung der höheren l-Werte eingezeichnet, wie er sich aus den allgemeinen Formeln (131.8) für $l = 0$ und (132.1) für $l > 0$ mit $\bar{f}_l = -iX (u_l \propto e^{-iKr})$ ergibt.

Dasselbe Ergebnis erhalten wir aus unserer Resonanzbedingung

$$\bar{f}_0 = -iX_1 + X_2 = 0,$$

wenn wir beachten, daß nach (131.9)

$$X_1^2 = \frac{1}{2}\left[+\sqrt{(\bar{X}_0^2 + x^2)^2 + \zeta^2 \bar{X}_0^4} + \bar{X}_0^2 + x^2\right],$$

$$X_2 = \frac{\zeta \bar{X}_0^2}{2X_1}$$

ist, also X_1 (> 0) eine monoton steigende positive und folglich X_2 eine monoton fallende positive Funktion von $x^2 \propto E$ ist: X_1 und X_2 können nie zugleich ver-

[1]) Die Gleichung $\bar{f}_0 = -iX$ (allgemein $\bar{f}_l = -iX$) definiert die „Kontinuums-Theorie" (§ 64) im Sinne von Blatt, Weisskopf [B 59-1], Kap. VIII. 4. Allerdings ergibt sie sich nach unserer Rechnung in verallgemeinerter Form, da X hier komplex ist. Das kommt daher, daß in [B 59-1] die Absorption nicht durch einen Imaginärteil des Potentials eingeführt wird. Statt dessen wird dort bei reellem Potential die Absorption dadurch erfaßt, daß die Bedingung $\bar{f}_l = -iX$ (mit reellem X) *postuliert* wird. Hier ergibt sie sich dagegen von selbst.

schwinden (bzw. nicht zugleich klein sein, da ζ nach Voraussetzung nicht klein ist). Für starke Absorption, d. h. für das gemittelte übliche Compoundkern-Modell, zeigt also $\sigma_{\overline{\text{tot}}}$ im Widerspruch zum Experiment (vgl. Abb. 281) keine Riesenresonanzen.

Für *schwache Absorption* wird

$$\mathfrak{C}\text{tg}\, X_2 \sim \frac{1}{X_2}\left(1 + \frac{1}{3} X_2^2\right),$$

$$\overline{f_0} \sim (X_1 + i X_2)\, \frac{\operatorname{ctg} X_1 - i X_2 + \frac{1}{3} X_2^2 \operatorname{ctg} X_1}{1 + i X_2 \operatorname{ctg} X_1 + \frac{1}{3} X_2^2}$$

und ergibt, nach Potenzen von X_2 entwickelt,

$$\overline{f_0} \sim X_1 \operatorname{ctg} X_1 + i X_2 (\operatorname{ctg} X_1 - X_1 - X_1 \operatorname{ctg}^2 X_1) + \cdots.$$

In nullter Näherung haben wir also dasselbe reelle $\overline{f_0} \sim X_1 \operatorname{ctg} X_1$ wie bei verschwindender Absorption (vgl. (71.4.)). Seine Nullstellen

$$X_1 = (n + \tfrac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ergeben Resonanzen der Wirkungsquerschnitte bei den Energien

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2 M R^2}\, x^2 \sim \frac{\hbar^2}{2 M R^2} (X_1^2 - \overline{X}_0^2),$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2 M R^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - V_0.$$

Man schätzt daraus ab, daß der Abstand D zwischen den niedrigsten Resonanzen von der Größenordnung 10 MeV ist.

Die Breiten Γ_0 dieser Resonanzen bestimmen sich analog (71.14) zu

$$\Gamma_0^{(n)} = - \frac{2x}{\left.\frac{d\overline{f_0}}{dE}\right|_{E=E_n}}.$$

Berechnen wir zunächst

$$\frac{d\overline{f_0}}{dX_1} = \operatorname{ctg} X_1 - X_1 (1 + \operatorname{ctg}^2 X_1), \qquad \left.\frac{d\overline{f_0}}{dX_1}\right|_{X_1 = (n+1/2)\pi} = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

und
$$\frac{d\overline{f_0}}{dE} = \frac{dx^2}{dE} \cdot \frac{dX_1}{d(x^2)} \cdot \frac{d\overline{f_0}}{dX_1} = \frac{2 M R^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{2 X_1} \cdot \frac{d\overline{f_0}}{dX_1},$$

so wird
$$\Gamma_0^{(n)} = \frac{2 x \hbar^2}{M R^2} = \frac{2 \hbar v}{R}.$$

Zahlenmäßig erhält man daraus bei Energien von etwa 1 bis 10 MeV Breiten von wenigen MeV. Im Gegensatz zum Fall starker Absorption ergeben sich also hier tatsächlich Riesenresonanzen.

Für die Wirkungsquerschnitte läßt sich hier auch in nullter Näherung kein besonders einfacher Ausdruck angeben, doch erkennt man schon in der allgemeinen Form (131.8) das Auftreten eines Resonanznenners

$$M_0^2 + N_0^2 \sim x^2 + X_1^2 \operatorname{ctg}^2 X_1.$$

§ 132. Wirkungsquerschnitte für beliebige Drehimpulse

In derselben Form wie in (131.8) lassen sich auch die Wirkungsquerschnitte der höheren Drehimpulse für unser komplexes Kastenpotential angeben (vgl. BLATT, WEISSKOPF [B 59-1], Kap. VIII, (2.55), (2.58)):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\overline{\mathrm{Str}}\,l} &= \pi \lambda\!\!\!^{-2}(2l+1)\,|1-\bar\eta_l|^2 \\
&= \pi \lambda\!\!\!^{-2}(2l+1)\left[4\sin^2\delta_l + 4s_l\frac{M_l\cos 2\delta_l - N_l \sin 2\delta_l}{M_l^2+N_l^2} + 4s_l\frac{\Im\mathrm{m}\,\bar f_l}{M_l^2+N_l^2}\right], \\
\sigma_{\overline{\mathrm{Abs}}\,l} &= \pi \lambda\!\!\!^{-2}(2l+1)(1-|\bar\eta_l|^2) \\
&= -\pi \lambda\!\!\!^{-2}(2l+1)\frac{4s_l\,\Im\mathrm{m}\,\bar f_l}{M_l^2+N_l^2}, \\
\sigma_{\overline{\mathrm{tot}}\,l} &= \sigma_{\overline{\mathrm{Str}}\,l} + \sigma_{\overline{\mathrm{Abs}}\,l} = \pi \lambda\!\!\!^{-2}(2l+1)\,2(1-\Re\mathrm{e}\,\bar\eta_l) \\
&= \pi \lambda\!\!\!^{-2}(2l+1)\left[4\sin^2\delta_l + 4s_l\frac{M_l\cos 2\delta_l - N_l\sin 2\delta_l}{M_l^2+N_l^2}\right].
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
u_l &= u_l^{(-)} + \bar\eta_l\, u_l^{(+)}, \\
\bar f_l = \bar f_l(X) &= R\,\frac{u_l'}{u_l}\bigg|_{r=R} = 1 + X\frac{j_l'(X)}{j_l(X)}, \\
\bar f_l^{(+)} = \bar f_l^{(+)}(x) &= R\,\frac{u_l^{(+)\prime}}{u_l^{(+)}}\bigg|_{r=R} = 1 + x\frac{h_l^{(1)\prime}(x)}{h_l^{(1)}(x)} = \Delta_l + i s_l = (\bar f_l^{(-)})^*, \\
\bar\eta_l &= \left(1-\frac{2s_l}{M_l+iN_l}\right)e^{-2i\delta_l} = \frac{\bar f_l - \bar f_l^{(-)}}{\bar f_l - \bar f_l^{(+)}}\,e^{-2i\delta_l}, \\
\delta_l &= \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{j_l(x)}{n_l(x)}\right), \\
M_l &= s_l - \Im\mathrm{m}\,\bar f_l, \\
N_l &= -\Delta_l + \Re\mathrm{e}\,\bar f_l.
\end{aligned} \tag{132.1}$$

$j_l, n_l, h_l^{(1)}$ sind sphärische Bessel-, Neumann-, Hankel-Funktionen:

$$z_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,Z_{l+1/2}(x), \quad Z_\nu = J_\nu,\ N_\nu,\ H_\nu^{(1)}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich für $l = 0$ unsere früheren Formeln ergeben. Es ist zweckmäßig, die höheren $\bar f_l$ und damit M_l, N_l nicht aus ihrer Definitionsgleichung zu berechnen, sondern durch die Rekurrenzbeziehung

$$\bar f_l = \frac{X^2}{l-\bar f_{l-1}} - l,$$

die aus bekannten Eigenschaften der Bessel-Funktionen folgt (vgl. [J 52-2], S. 148 ff.). Die so berechneten Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte wer-

den rasch sehr kompliziert, so daß wir hier auf eine eingehende Diskussion verzichten; ihre genaue Berechnung ist praktisch nur mit Hilfe großer Rechenmaschinen möglich. Qualitativ liegen die Verhältnisse wie im Fall $l = 0$: Es zeigen sich Riesenresonanzen mit Breiten der Größenordnung MeV, wie wir noch sehen werden.

§ 133. Gemittelte Wirkungsquerschnitte

a) Mittelungsprozeß

Ehe wir die berechneten Wirkungsquerschnitte mit den über die Compoundresonanzen gemittelten experimentellen Wirkungsquerschnitten vergleichen, müssen wir den Mittelungsprozeß genauer studieren.

Die Wirkungsquerschnitte unseres Modells hatten wir in der Form (132.1) geschrieben:

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{\mathrm{Str}}\,l} &= \pi \lambda^2 (2l+1)\,|1-\bar{\eta}_l|^2, \\ \sigma_{\overline{\mathrm{Abs}}\,l} &= \pi \lambda^2 (2l+1)\,(1-|\bar{\eta}_l|^2), \qquad (133.1) \\ \sigma_{\overline{\mathrm{tot}}\,l} &= \pi \lambda^2 (2l+1)\,(2-2\,\mathfrak{Re}\,\bar{\eta}_l). \end{aligned}$$

Wie hängen sie mit den ungemittelten, die einzelnen Compoundresonanzen enthaltenden Wirkungsquerschnitten ((63.9), (63.11), (63.16))

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{Str}\,l} &= \pi \lambda^2 (2l+1)\,|1-\eta_l|^2, \\ \sigma_{\mathrm{Reakt}\,l} &= \pi \lambda^2 (2l+1)\,(1-|\eta_l|^2), \qquad (133.2) \\ \sigma_{\mathrm{tot}\,l} &= \pi \lambda^2 (2l+1)\,(2-2\,\mathfrak{Re}\,\eta_l) \end{aligned}$$

zusammen? Nach dem Grundgedanken unseres Modells müssen wir die Wirkungsquerschnitte (133.2) über die Compoundresonanzen mitteln, ehe wir sie mit den Wirkungsquerschnitten (133.1) vergleichen können.

Nun sind die Wirkungsquerschnitte (133.1) bzw. (133.2) durch die jeweiligen Streuamplituden $\bar{\eta}_l$ bzw. η_l festgelegt. η_l ist eine stark variierende Funktion der Energie, die den genauen Verlauf des Wirkungsquerschnitts, jede Compoundresonanz wiedergibt; $\bar{\eta}_l$ dagegen enthält als Streuamplitude des Optischen Modells nur die Riesenresonanzen. Es entspricht deshalb dem Grundgedanken unseres Modells, wenn wir $\bar{\eta}_l$ als Mittelwert von η_l über die Compoundresonanzen auffassen. Wir *definieren* also [1])

$$\bar{\eta}_l(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\frac{1}{2}\Delta E}^{E+\frac{1}{2}\Delta E} \eta_l(E')\,dE'. \qquad (133.3)$$

[1]) Dabei ist im folgenden nur wesentlich, daß die Mittelung als eine *lineare* Operation angesetzt wurde, nicht die sonstigen Einzelheiten der Definition.

Darin sei ΔE ein Energieintervall, das viele Compoundresonanzen enthält, aber noch klein ist gegen die Breiten Γ_R der Riesenresonanzen, damit letztere nicht weggemittelt werden. Deshalb muß notwendigerweise $\Delta E \ll \Gamma_R$ sein, so daß wir bei Anwendung derselben Mittelung auf z. B. das asymptotische ψ_0 (analog ψ_l) der wirklichen, ungemittelten Kernreaktion

$$\psi_0 = \frac{i}{2kr}(e^{-ikr} - \eta_0 e^{+ikr})$$

das langsam variierende $k \propto \sqrt{E}$ nicht zu mitteln brauchen. Wir erhalten so gerade das heuristisch gewonnene $\bar{\psi}_0(\bar{\psi}_l)$, vgl. (131.3):

$$\bar{\psi}_0 = \frac{i}{2kr}(e^{-ikr} - \bar{\eta}_0 e^{+ikr}).$$

Ganz entsprechend bilden wir Mittelwerte der Wirkungsquerschnitte selbst:

$$\overline{\sigma_{\mathrm{Str}\,l}} = \pi \lambda^2 (2l+1)\,\overline{|1-\eta_l|^2},$$

$$\overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}\,l}} = \pi \lambda^2 (2l+1)\left(1 - \overline{|\eta_l|^2}\right),$$

$$\overline{\sigma_{\mathrm{tot}\,l}} = \overline{\sigma_{\mathrm{Str}\,l}} + \overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}\,l}}.$$

Sie lassen sich leicht durch $\bar{\eta}_l$ ausdrücken:

$$\overline{|1-\eta_l|^2} = \overline{(1-\eta_l)(1-\eta_l^*)} = 1 - \bar{\eta}_l - \overline{\eta_l^*} + \overline{|\eta_l|^2},$$

$$|1-\bar{\eta}_l|^2 = (1-\bar{\eta}_l)(1-\bar{\eta}_l^*) = 1 - \bar{\eta}_l - \bar{\eta}_l^* + |\bar{\eta}_l|^2.$$

Da nach (133.3) $\overline{\eta_l^*} = \bar{\eta}_l^*$:

$$\overline{|1-\eta_l|^2} = |1-\bar{\eta}_l|^2 - |\bar{\eta}_l|^2 + \overline{|\eta_l|^2},$$

$$1 - \overline{|\eta_l|^2} = 1 - \overline{|1-\eta_l|^2} + |1-\bar{\eta}_l|^2 - |\bar{\eta}_l|^2,$$

also

$$\overline{\sigma_{\mathrm{Str}\,l}} = \pi \lambda^2 (2l+1)\left(|1-\bar{\eta}_l|^2 - |\bar{\eta}_l|^2 + \overline{|\eta_l|^2}\right),$$

$$\overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}\,l}} = \pi \lambda^2 (2l+1)\left(1 - \overline{|\eta_l|^2}\right),$$

$$\overline{\sigma_{\mathrm{tot}\,l}} = \pi \lambda^2 (2l+1)\left(|1-\bar{\eta}_l|^2 + 1 - |\bar{\eta}_l|^2\right).$$

Vergleichen wir das mit (133.1), so sehen wir, daß die Mittelung der wirklichen Wirkungsquerschnitte (133.2) nicht einfach die Wirkungsquerschnitte unseres Modells liefert, sondern daß die Beziehungen bestehen

$$\overline{\sigma_{\mathrm{Str}\,l}} = \sigma_{\overline{\mathrm{Str}}\,l} + \overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}}, \quad \sigma_{\overline{\mathrm{Str}}\,l} = \overline{\sigma_{\mathrm{Str}\,l}} - \overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}},$$

$$\overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}\,l}} = \sigma_{\overline{\mathrm{Abs}}\,l} - \overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}}, \quad \sigma_{\overline{\mathrm{Abs}}\,l} = \overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}\,l}} + \overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}}, \tag{133.4}$$

$$\overline{\sigma_{\mathrm{tot}\,l}} = \sigma_{\overline{\mathrm{tot}}\,l},$$

wo der (gemittelte) „Compoundstreuungs"-Querschnitt durch

$$\overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}} = \pi \lambda^2 (2l+1)\left(\overline{|\eta_l|^2} - |\bar{\eta}_l|^2\right) \tag{133.5}$$

definiert ist.

Wir sehen also, daß zwar der totale Wirkungsquerschnitt unseres Modells gleich dem über die Compoundresonanzen gemittelten wirklichen totalen Wirkungsquerschnitt ist, der Streu- bzw. Absorptionsquerschnitt des Modells sich dagegen vom gemittelten wirklichen Streu- bzw. Reaktionsquerschnitt um den Betrag $\overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}}$ unterscheidet. Dieser Betrag trägt nach (133.4) zum gemittelten wirklichen Streuquerschnitt bei, wird aber von unserem Modell nicht im Modell-Streuquerschnitt mit erfaßt, sondern *im Absorptionsquerschnitt.*

Nun stellt die Absorption in unserem Modell die Wirkung der gemittelten Compoundkernbildung dar, $\overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}}$ stammt also von Prozessen, die über den Compoundmechanismus verlaufen. Andererseits trägt aber $\overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}}$ nach (133.4) zur gemittelten wirklichen Streuung[1]) bei. $\overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}\,l}}$ bedeutet also offenbar den gemittelten Beitrag der Prozesse, bei denen das mit der Energie E eingeschossene Neutron zwar einen Compoundkern bildet, dieser aber unter Aussendung eines Neutrons *gleicher* Energie E zerfällt, d. h., es ist der Wirkungsquerschnitt der *compoundelastischen Streuung.* Der andere Teil des gemittelten wirklichen Streuquerschnitts, $\overline{\sigma_{\mathrm{Str}\,l}}$, wird deshalb auch häufig als Wirkungsquerschnitt der „formelastischen" Streuung bezeichnet, da er den Beitrag zur Streuung angibt, der von der Streuung durch den Kern „als Ganzes" – durch das Zentralfeld $V_1(r)$ unseres Modells – herstammt; nur er wird in unserem Modell als Streuung gerechnet, da nur diese Streuung nicht über den Compoundmechanismus (Absorption) verläuft.

Insgesamt haben wir damit eine Neuaufteilung des gemittelten totalen Wirkungsquerschnitts vorgenommen,

$$\sigma_{\overline{\mathrm{tot}}} = \sigma_{\overline{\mathrm{Str}}} + \sigma_{\overline{\mathrm{Abs}}} = \sigma_{\overline{\mathrm{Str}}} + (\overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}}} + \overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}}})$$
$$= (\sigma_{\overline{\mathrm{Str}}} + \overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}}}) + \overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}}} = \overline{\sigma_{\mathrm{Str}}} + \overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}}} = \overline{\sigma_{\mathrm{tot}}}\,,$$

und dadurch die Wirkungsquerschnitte $\sigma_{\overline{\mathrm{Str}}}$, $\sigma_{\overline{\mathrm{Abs}}}$ unseres Modells in Beziehung zu den Wirkungsquerschnitten $\overline{\sigma_{\mathrm{Str}}}$, $\overline{\sigma_{\mathrm{Reakt}}}$ gebracht, die *wirklich beobachtbar* sind; denn nur die Summe $\sigma_{\overline{\mathrm{Str}}} + \overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}}} = \overline{\sigma_{\mathrm{Str}}}$ kann man messen, da man einer (elastischen) Streuung nicht anmerkt, ob sie mit oder ohne Compoundmechanismus zustande kommt.

$\overline{\sigma_{\mathrm{Str}}}$ ist nach (133.4) die Summe der *Wirkungsquerschnitte* der beiden Streuungen, wird also nicht aus der Summe der Streu*amplituden* berechnet. Das bedeutet, daß formelastische Streuung ($\sigma_{\overline{\mathrm{Str}}}$) und compoundelastische Streuung ($\overline{\sigma_{\mathrm{Cpd\,Str}}}$) nicht miteinander interferieren. Das heißt – da elastisch gestreute Wellen an sich auf jeden Fall interferenzfähig sind –, daß das Wellenpaket der compoundelastischen Streuung erst dann den Kern verlassen darf, wenn das formelastisch gestreute Wellenpaket den Kern schon lange verlassen hat. Folglich darf das einfallende Wellenpaket eine gewisse Länge nicht überschreiten, also eine bestimmte Impuls- und damit Energieunschärfe nicht unterschreiten.

Die Zeit, nach der das Wellenpaket nach Durchlaufen des Compoundzustandes wieder an der Kernoberfläche erscheint, ist nach S. 652 (ein „Umlauf") $T = 2\pi \frac{\hbar}{D}$.

---

[1]) Mit Streuung ist hier stets elastische Streuung gemeint.

Das einfallende Wellenpaket muß also kürzer sein als die Strecke, die es während T zurücklegt: $\Delta x \ll vT$; also ist $\Delta p \geqq \frac{\hbar}{\Delta x} \gg \frac{\hbar}{vT}$, d. h., die Energieunschärfe des Wellenpakets ist $\Delta E = \frac{2p\Delta p}{2M} = v\Delta p \gg \frac{\hbar}{T} = \frac{D}{2\pi}$. Das Wellenpaket muß demnach eine so große Energieunschärfe $\Delta E \gg D$ haben, daß es die Mittelung über die Compoundresonanzen von selbst bewirkt, die wir (im Resonanzgebiet) nachträglich durch den Mittelungsprozess erreicht haben; nur dann ist die Aufteilung (133.4) der wirklichen Wirkungsquerschnitte in die Wirkungsquerschnitte unseres Modells überhaupt möglich:

Unser Optisches Modell läßt sich nur für die über die Compoundresonanzen gemittelten Wirkungsquerschnitte formulieren:

$$\Delta E \gg D (\Delta E \ll \Gamma_R).$$

Es ist interessant, die Verhältnisse speziell im Kontinuumsgebiet zu betrachten, wo die Natur selbst die Mittelung über die Compoundresonanzen vornimmt. Demnach sollte dort $\eta_l = \bar{\eta}_l$ sein, also nach (133.5) der Compoundstreuquerschnitt verschwinden. Tatsächlich wird im Kontinuumsgebiet die compoundelastische Streuung sehr klein, da so viele andere Zerfallsmöglichkeiten für das Compoundzustands-Gemisch (S. 654) des Kerns zur Verfügung stehen, daß die eine spezielle Zerfallsmöglichkeit der compoundelastischen Streuung sehr unwahrscheinlich wird.

b) Mittelung im Resonanzgebiet

Im Resonanzgebiet ist dagegen $\eta_l \neq \bar{\eta}_l$, d. h. $\overline{\sigma_{\text{Cpd Str}}} \neq 0$. Das muß so sein, denn nach Kapitel VI, S. 287 ff., ist es gerade die compoundelastische Streuung, die für das Auftreten von scharfen Compoundresonanzen verantwortlich ist.

Um hier die Mittelung über die einzelnen Compoundresonanzen explizit durchzuführen, betrachten wir die Streuamplitude für s-Streuung in der Nähe einer Resonanzstelle E_r, d. h. im Intervall $E_r - \frac{D_r}{2} \leqq E \leqq E_r + \frac{D_r}{2}$. Sie ist nach (71.15)

$$\eta_0 = \eta_0(E) = \left| 1 - \frac{i\Gamma_{Nr}}{E - E_r + \frac{i}{2}\Gamma_r} \right| e^{-2ikR}; \quad ^{1)} \tag{133.6}$$

Γ_{Nr} bzw. Γ_{Ar} = Partialbreiten für compoundelastische Streuung bzw. Absorption der Neutronen (Neutronenbreite bzw. Reaktionsbreite), $\Gamma_r = \Gamma_{Nr} + \Gamma_{Ar}$ = Gesamtbreite.

Wir wollen den Ausdruck berechnen

$$\bar{\eta}_0 = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \eta_0(E')\, dE',$$

in dem der Integrand $\eta_0(E)$ eine Funktion ist, die in der Umgebung der einzelnen Resonanzstellen E_r jeweils die Gestalt (133.6) hat, und in dem die Integration über ein Gebiet ΔE erfolgt, das mehrere Resonanzstellen umfaßt:

[1]) Genauer FPW [F 54-2], Gl. (2.10), bzw. Ende dieses Abschnitts.

$\Delta E \gg D_r$. Diese Mittelung können wir in zwei Schritten vornehmen, indem wir η_0 zunächst an jeder einzelnen Resonanzstelle über einen Bereich D_r mitteln, der nur eine Resonanz enthält, und dann aus den so gewonnenen Einzelmittelwerten das Mittel im Bereich ΔE bilden:

$$\bar{\eta}_0 = \overline{\frac{1}{D_r} \int\limits_{D_r} \eta_0(E')\, dE'}^{\Delta E}.$$

Sind schließlich die Resonanzen in ΔE statistisch verteilt, so können wir dafür schreiben

$$\bar{\eta}_0 = \frac{1}{\bar{D}} \int\limits_{\bar{D}} \eta_0(E')\, dE',$$

wenn wir unter $\bar{D}$ den durchschnittlichen Abstand der Resonanzen in ΔE verstehen und im Integranden (133.6) durchschnittliche Werte von Γ_{Nr} und Γ_r innerhalb ΔE verwenden. Damit folgt

$$\bar{\eta}_0 = \frac{e^{-2ikR}}{\bar{D}} \int\limits_{E_r - \frac{\bar{D}}{2}}^{E_r + \frac{\bar{D}}{2}} \left[1 - \frac{i\bar{\Gamma}_N}{E' - E_r + \frac{i}{2}\bar{\Gamma}}\right] dE'$$

$$= \frac{e^{-2ikR}}{\bar{D}} \left[\bar{D} - i\bar{\Gamma}_N \left[\ln\left(E' - E_r + \frac{i}{2}\bar{\Gamma}\right)\right]_{E_r - \frac{\bar{D}}{2}}^{E_r + \frac{\bar{D}}{2}}\right]$$

$$= e^{-2ikR} \left[1 - \frac{i\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}} \ln \frac{\bar{D} + i\bar{\Gamma}}{-\bar{D} + i\bar{\Gamma}}\right]$$

$$= e^{-2ikR} \left[1 - \frac{i\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}} \ln\left(- \frac{1 + i\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{D}}}{1 - i\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{D}}}\right)\right].$$

Obwohl k, Γ_N und Γ ebenfalls von E abhängen, haben wir sie bei der Integration als Konstanten behandelt, da sie sich im Intervall $E_r \pm \frac{\bar{D}}{2}$ nur wenig ändern. Man muß also für diese Größen einen Mittelwert im Intervall $\bar{D}$ nehmen, etwa den Wert an der Stelle $E = E_r$. Im Resonanzgebiet ist $\frac{\bar{\Gamma}}{\bar{D}} \ll 1$, so daß wir schließlich erhalten[1])

$$\bar{\eta}_0 = e^{-2ikR}\left(1 - \pi \frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}}\right). \tag{133.7}$$

[1]) Das Minuszeichen vor π in (133.7) muß gewählt werden, damit $|\bar{\eta}_0|^2 \leq 1$ wird (vgl. S. 663).

Damit ergibt sich für den formelastischen Streuquerschnitt (Modell-Streuquerschnitt)

$$\sigma_{\overline{\text{Str}}0} = \pi \lambda^2 |1 - \overline{\eta}_0|^2 = \pi \lambda^2 \left| e^{2ikR} - 1 + \pi \frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}} \right|^2,$$

also für solche (kleine) Energien, daß $\frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}} \ll kR \ll 1$ ist,

$$\sigma_{\overline{\text{Str}}0} = 4\pi R^2 \left[1 + \left(\frac{\pi \overline{\Gamma}_N}{2kR\overline{D}}\right)^2\right] \sim 4\pi R^2. \tag{133.8a}$$

Für den Absorptionsquerschnitt erhält man

$$\sigma_{\overline{\text{Abs}}0} = \pi \lambda^2 (1 - |\overline{\eta}_0|^2) = 2\pi^2 \lambda^2 \frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}} \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}}\right) \sim 2\pi^2 \lambda^2 \frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}} \tag{133.8b}$$

und damit

$$\overline{\sigma_{\text{tot}0}} = \overline{\sigma_{\text{tot}0}} \sim 4\pi R^2 + 2\pi^2 \lambda^2 \frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}}. \tag{133.8c}$$

c) $\frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}}$-Verhältnis

Den Ausdruck (133.7) für $\overline{\eta}_0$ wollen wir mit dem aus unserem Modell berechneten (131.5)

$$\overline{\eta}_0 = \frac{\overline{f}_0 + ix}{\overline{f}_0 - ix} e^{-2i\delta_0} = e^{-2ix(1-\alpha)} \quad (\delta_0 = x) \tag{133.9}$$

vergleichen, wo α in

$$e^{+2ix\alpha} = \frac{\overline{f}_0 + ix}{\overline{f}_0 - ix}$$

eine komplexe Zahl ist, da $\overline{f}_0$ komplex ist.
Für niedrige Energien ($x \ll |\overline{f}_0|$) ist

$$\frac{\overline{f}_0 + ix}{\overline{f}_0 - ix} \sim \frac{1}{\overline{f}_0} (\overline{f}_0 + ix)\left(1 + \frac{ix}{\overline{f}_0}\right) \sim 1 + \frac{2ix}{\overline{f}_0},$$

$$e^{2ix\alpha} \sim 1 + 2ix\alpha,$$

also mit (131.6)

$$\alpha \sim \frac{1}{\overline{f}_0} = \frac{\operatorname{tg} X}{X}.$$

Damit wird

$$|\overline{\eta}_0|^2 \sim \left|1 - 2ix\left(1 - \frac{1}{\overline{f}_0}\right)\right|^2 \sim 1 - 2ix\left(\frac{1}{\overline{f}_0^*} - \frac{1}{\overline{f}_0}\right) = 1 - 4x\,\Im\mathrm{m}\,\overline{f}_0^{-1},$$

unser Modell liefert also

$$1 - |\overline{\eta}_0|^2 = 4x\,\Im\mathrm{m}\,\overline{f}_0^{-1}.$$

Andererseits ist nach (133.7)

$$1 - |\bar{\eta}_0|^2 \sim 2\pi \frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}} \quad \left(\frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}} \ll 1\right),$$

d. h.

$$\frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}} \sim \frac{2x}{\pi}\, \mathfrak{Im}\, \bar{f}_0^{-1}. \tag{133.10 a}$$

Darin ist

$$\mathfrak{Im}\, \bar{f}_0^{-1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\bar{f}_0} - \frac{1}{\bar{f}_0^*}\right) = \frac{X^* \operatorname{tg} X - X \operatorname{tg}^* X}{2i|X|^2}.$$

Formt man $\operatorname{tg} X = \frac{\sin(X_1 + iX_2)}{\cos(X_1 + iX_2)}$ mittels der Additionstheoreme um, erhält man schließlich

$$\mathfrak{Im}\, \bar{f}_0^{-1} = \frac{1}{|X|^2}\, \frac{X_1 \operatorname{\mathfrak{Sin}} X_2 \operatorname{\mathfrak{Cof}} X_2 - X_2 \sin X_1 \cos X_1}{\cos^2 X_1 + \operatorname{\mathfrak{Sin}}^2 X_2}. \tag{133.10 b}$$

Damit haben wir nach den Wirkungsquerschnitten auch die Größe $\mathfrak{Im}\, \bar{f}_0^{-1}$ unseres Modells in Beziehung zu einer meßbaren Größe $\left(\frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}}\right)$ gebracht.

Für *starke Absorption* ergibt sich mit $\bar{f}_0 = -iX$

$$\bar{f}_0^{-1} = +\frac{i}{X},$$

also

$$\mathfrak{Im}\, \bar{f}_0^{-1} = \frac{X_1}{|X|^2} \equiv \frac{1}{X_1'},$$

folglich

$$\frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}} = \frac{2x}{\pi X_1'} = \frac{2k}{\pi K_1}\, \frac{K_1^2}{K_1^2 + K_2^2}. \tag{133.11}$$

Das ist im wesentlichen das Ergebnis der üblichen Compoundkern-Theorie, die ja durch die erste Grundannahme starke Absorption voraussetzt (vgl. (62.10)). Es bedeutet Unabhängigkeit der Durchlässigkeit der Oberfläche des Kerns (vgl. S. 653) von A, da alle in (133.11) rechts auftretenden Größen unabhängig von A sind. Der einzige Unterschied gegen (62.10) ist der Faktor $\frac{K_1^2}{K_1^2 + K_2^2}$. Er ist aber von der Größenordnung 1, da K_2 höchstens dieselbe Größenordnung wie K_1 haben kann; denn $K_2 \gg K_1$ würde bedeuten, daß die Abklingstrecke K_2^{-1} der Neutronenwelle klein wäre gegen die Wellenlänge K_1^{-1} im Kern, was physikalisch sinnlos ist.

Bei *schwacher Absorption* erhält man aus (133.10) mit $X_2 \ll 1$ ($|X|^2 \sim X_1^2$)

$$\frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}} = \frac{2k}{\pi K_1}\, X_2\, \frac{1 - \frac{1}{2X_1}\sin 2X_1}{X_2^2 + \cos^2 X_1}. \tag{133.12}$$

Auch hier tritt gegenüber (62.10) ein zusätzlicher Faktor auf, der aber etwas wesentlich Neues liefert: Er enthält einen Resonanznenner, der bei $\bar{X}_0 \sim X_1$

$= (n + \frac{1}{2})\pi$ recht scharfe „Resonanzen" ergibt, wie wir noch sehen werden. Die Durchlässigkeit weist also hier im Gegensatz zur (gemittelten) üblichen Compoundkern-Theorie (starke Absorption) starke Schwankungen in Abhängigkeit von A auf, denn $X_1 = K_1 R$ enthält über R die Nukleonenzahl A.

Wir haben hier nur $|\bar{\eta}_0|^2$ aus (133.7) und (133.9) verglichen, d. h. nur die Beträge der beiden $\bar{\eta}_0$. Vergleicht man auch die Argumente arg $\bar{\eta}_0$, findet man (FPW [F 54-2], S. 452; MEDINA, SÜSSMANN [M 56-2], S. 342), daß η_0 im allgemeinen nicht in der Form (133.6) geschrieben werden kann, sondern allgemeiner die Form

$$\eta_0 = e^{-2ikR'} \left| 1 - \frac{i\Gamma_{Nr}}{E - E_r + \frac{i}{2}\Gamma_r} \right|, \quad R' = R + \Delta R$$

hat, folglich ebenso in $\bar{\eta}_0$ (133.7) R durch R' ersetzt werden muß. Das kommt daher, daß wir (133.6) aus der üblichen Compoundkern-Theorie übernommen hatten, von der wir wissen, daß sie starke Absorption voraussetzt. Tatsächlich ist für starke Absorption $R' \sim R$, für schwache dagegen $R' \neq R$. Im letzteren Fall ergibt sich für ΔR ein Ausdruck (FPW, S.456). der denselben „Resonanz"-Nenner wie in (133.12) hat. ΔR kann dann Werte annehmen, bei denen die „Streulänge" R' negativ wird.
An der Ableitung von (133.10) ändert sich nichts, da der Phasenfaktor $e^{-2ikR'}$ aus der Rechnung herausfällt. Dagegen ändert sich (133.8): $R \to R'$.

C. Vergleich mit dem Experiment

Unsere Theorie ergibt vor allem zwei wesentliche Folgerungen, die sich experimentell nachprüfen lassen. Einmal zeigt der gemittelte totale Wirkungsquerschnitt einen monotonen Abfall für starke bzw. Riesenresonanzen für schwache Absorption. Schon daraus müssen wir schließen, daß in der Natur schwache Absorption vorliegt, denn wir wissen bereits, daß experimentell Riesenresonanzen beobachtet werden: Um sie zu erhalten, hatten wir unser Modell ja gerade aufgestellt. Zweitens ergibt sich für das Verhältnis $\frac{\bar{\Gamma}_N}{\bar{D}}$ (Durchlässigkeit der Kernoberfläche, „Stärkefunktion") Unabhängigkeit von A für starke Absorption, dagegen treten ausgeprägte Maxima in Abhängigkeit von A auf, falls schwache Absorption vorliegt.

§ 134. Totale Wirkungsquerschnitte

Wir sahen bereits in Abb. 281 b, c, daß der über die Compoundresonanzen gemittelte totale Neutronenquerschnitt Riesenresonanzen zeigt. In Abb. 282 ist nun in einem dreidimensionalen Diagramm der gemittelte totale Neutronenquerschnitt, bezogen auf πR^2, über $x^2 = \frac{2MR^2}{\hbar^2} E$ und A bzw. $\bar{X}_0 \propto A^{1/3}$ aufgetragen. Abb. 282a zeigt den totalen Wirkungsquerschnitt unseres Modells für starke



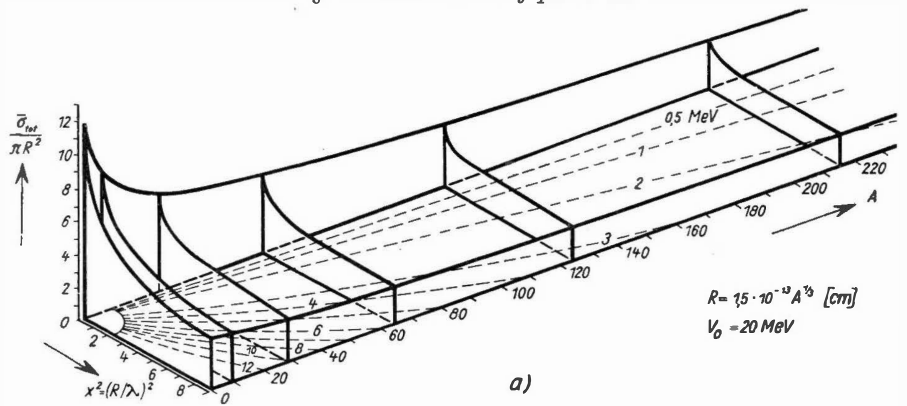


Abb. 282a Totaler Wirkungsquerschnitt des Optischen Modells mit starker Absorption; vgl. Abb. 281a. (Nach [B 59-1], Fig. 4.4)

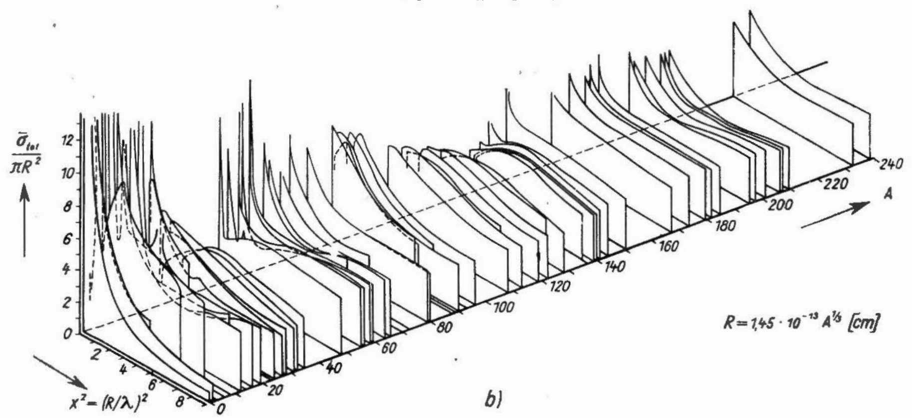


Abb. 282 b. Experimentelle, über die Compoundresonanzen gemittelte totale Wirkungsquerschnitte. (Nach [F 54-2])

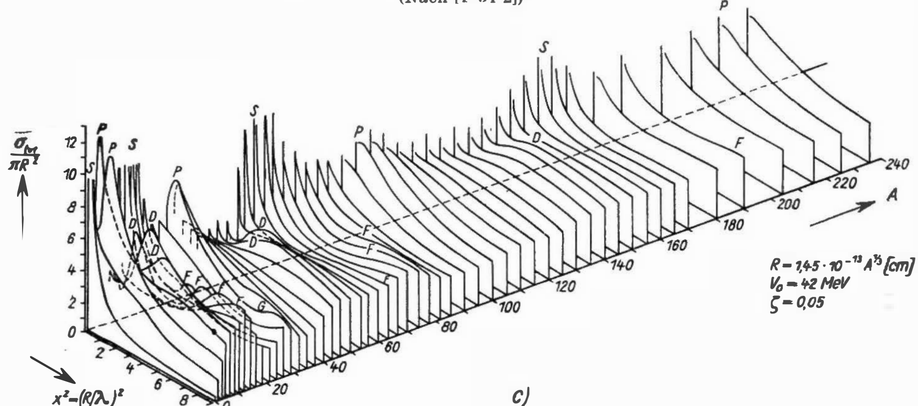


Abb. 282c. Totaler Wirkungsquerschnitt des Optischen Modells mit schwacher Absorption. (Nach [F 54-2])

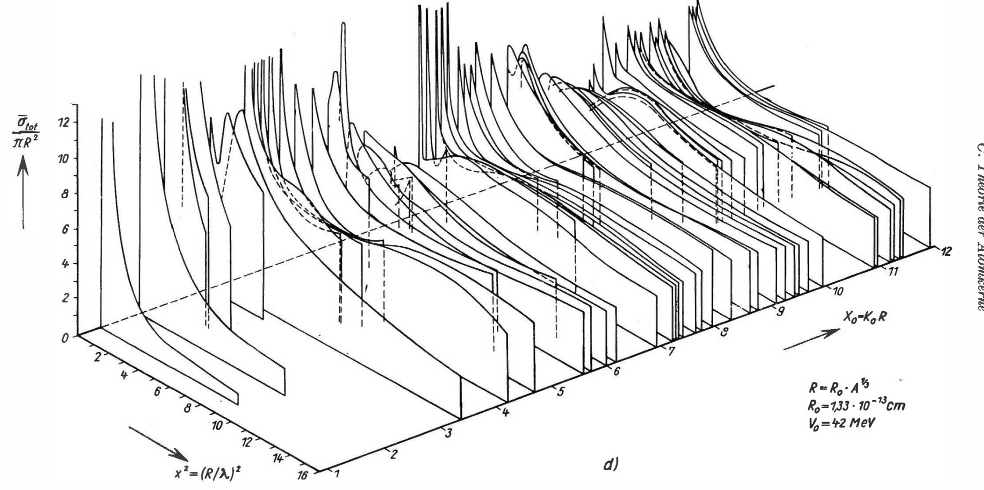


Abb. 282 d. wie b), in etwas anderer Darstellung

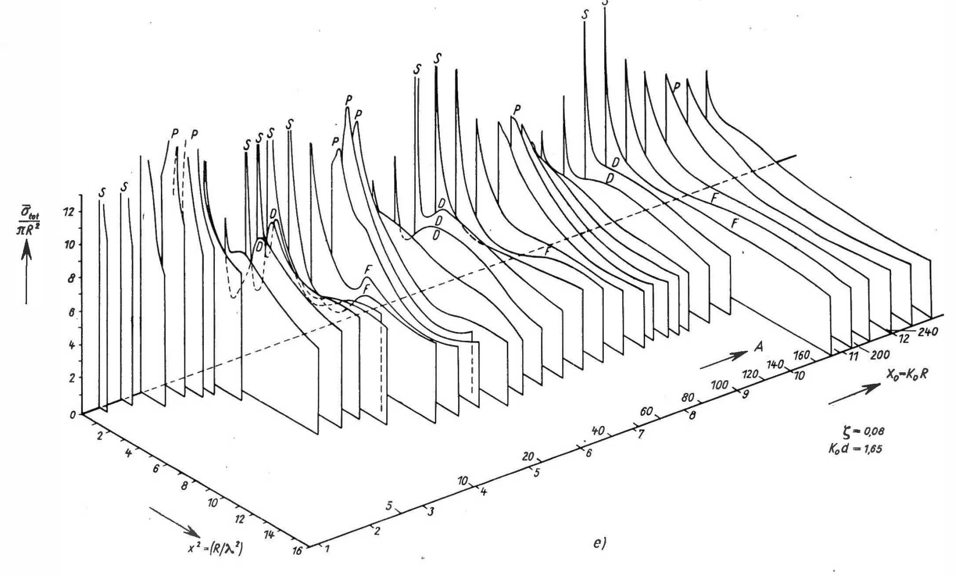


Abb. 282e. wie c), in etwas anderer Darstellung und mit abgerundetem Potential:

$$V(r) = -V_0 \frac{1 + i\zeta}{1 + e^{\frac{r-R}{d}}}, \qquad K_0^2 = \frac{2MV_0}{\hbar^2} \quad \text{(im Text } \bar{K}_0^2 \text{ genannt).} \qquad \text{(Energieskala siehe in a))}$$

Absorption, berechnet nach (132.1) mit monotoner Abhängigkeit von E und A. Er steht in starkem Widerspruch zu den experimentell gefundenen (gemittelten) totalen Wirkungsquerschnitten der Abb. 282b.

In Abb. 282c wurde in derselben Weise der totale Wirkungsquerschnitt unseres Modells mit schwacher Absorption nach (132.1) gezeichnet.[1]) Dabei wurde $R = 1{,}45 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ [cm], $V_0 = 42$ MeV und $\zeta = 0{,}05$ angenommen. Die Buchstaben über den Maxima geben an, welche Partialwelle die betreffende Riesenresonanz erzeugt. Das Gebiet unterhalb von 50 keV wurde nicht dargestellt.

Der Vergleich von 282b mit 282c zeigt, daß der experimentell gefundene Verlauf in großen Zügen richtig wiedergegeben wird — mehr ist bei unserer groben Näherung nicht zu erwarten. So erhält man bei kleinen Energien die Minima bei $A \sim 40$ und $A \sim 120$ und die Maxima bei $A \sim 60$, 90 und 150. Sogar der Unterschied zwischen dem steilen Anstieg der s-Maxima und dem Wiederabfallen der p-Maxima bei kleinsten Energien findet sich in den experimentellen Querschnitten wieder. Die d-Maxima ergeben sich an den richtigen Stellen $A \sim 40$ (vgl. auch Abb. 281b) und 140 (vgl. auch Abb. 281c). Bei $A \sim 65$ und 200 sind die f-Maxima schwach angedeutet. Selbst im Gebiet leichter Kerne ist die Übereinstimmung besser als zu erwarten. Man erkennt das besonders gut aus Abb. 282d, e, wo bei einer besser gewählten Radialabhängigkeit des Potentials die Diagramme im Gebiet leichter Kerne stark auseinandergezogen wurden.

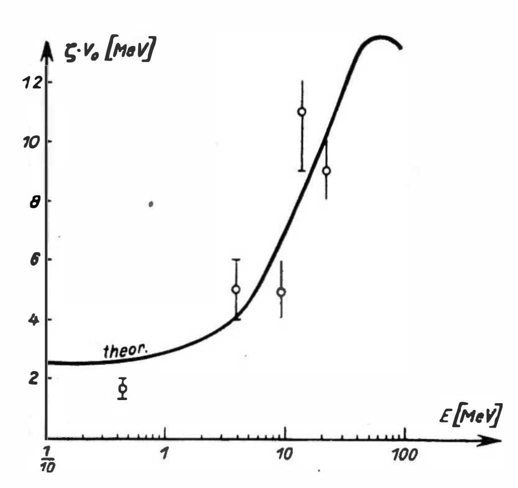


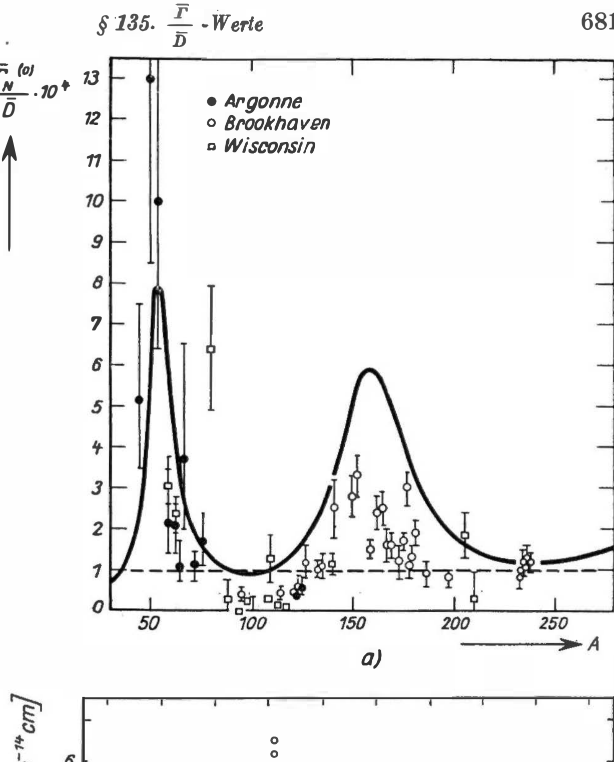
Abb. 283. Tiefe des Imaginärteils des komplexen Potentials in verschiedenen Energiebereichen. Theoretische Kurve nach [L 55-1]. (Nach [M 56-2])

Wir sehen also, daß ein Optisches Modell mit einigen Prozent Absorption, d. h. einer Absorptionslänge $\frac{1}{K_2}\left(\sim \frac{2}{\zeta K_0} \sim 20 \text{ bis } 30 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}\right)$ von mehreren Kerndurchmessern, die beobachteten Riesenresonanzen in brauchbarer Form wiedergibt. Im Gegensatz zur ersten Grundannahme der üblichen Compoundkern-Theorie liegt demnach in der Natur bei Neutronenreaktionen bis etwa 5 MeV der Fall schwacher Absorption vor. Der Kern ist nicht „schwarz", sondern nur „getrübt". Der Imaginärteil des Potentials und damit ζ wächst langsam mit zunehmender Energie, wie man in Abb. 283 sieht. Nach Rechnungen von LANE

[1]) Die Berechnung der Werte aus (132.1) ist nur mit Hilfe größerer Rechenmaschinen möglich. — Herrn Prof. WEISSKOPF sei an dieser Stelle für die Überlassung der Abbildungen 282d, e gedankt.

und WANDEL [L 55-1] sollte er zwischen 50 und 100 MeV ein Maximum erreichen, wie die theoretische Kurve zeigt.

Für $E \to 0$ verschwindet der Imaginärteil nicht, so daß man versuchen kann, auch bei negativen Energien, d. h. beim Schalenmodell (gebundene Zustände), einen Imaginärteil einzuführen, falls man ihm dort einen physikalischen Sinn geben kann. Da die Absorption beim Optischen Modell ein Maß für die Abweichung von der unabhängigen Bewegung des Nukleons war, ist sie bei gebundenen Zuständen offenbar ein Maß für die Reinheit der Schalenmodellzustände, d. h. für die Stärke der Konfigurationsmischung (vgl. [E 57-1], S. 369). Eine Abschätzung, ergibt für V_2 eine Tiefe $< 0{,}5$ MeV ($\zeta < 0{,}01$).



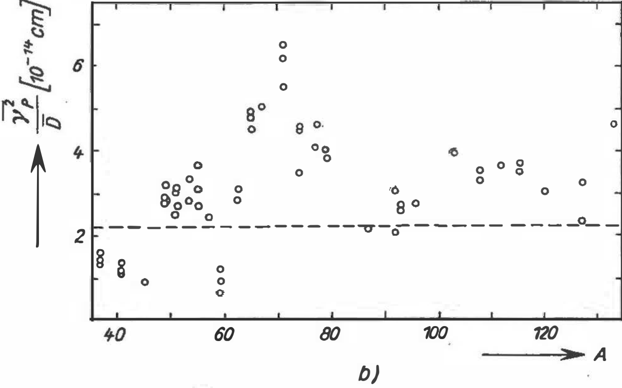


Abb. 284. a) Verhältnis $\frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}}$ experimentell und nach dem Optischen Modell für schwache Absorption (ausgezogen) und starke Absorption (gestrichelt). $\Gamma_N^{(0)}$ ergibt sich durch Mittelung der auf eine Standardenergie $E^{(0)}$ ($= 1$ eV) reduzierten Neutronenbreiten

$$\Gamma_N^{(0)} = \Gamma_N \sqrt{\frac{E^{(0)}}{E}}$$

Potentialform wie in Abb. 282e). (Nach HUGHES, Physica 22, 994 (1956)).
b) Verhältnis $\frac{\overline{\Gamma}_P}{\overline{D}}$ experimentell und nach dem Optischen Modell mit starker Absorption (gestrichelt).

$$\gamma_P^2 = \Gamma_P^{(0)} \sqrt{\frac{\hbar^2}{8 M E^{(0)}}}, \qquad \Gamma_P^{(0)} = \Gamma_P \sqrt{\frac{E^{(0)}}{E}}.$$ (Nach [S 57-2])

§ 135. $\frac{\overline{\Gamma}}{\overline{D}}$-Werte

Auch bei den empirischen $\frac{\overline{\Gamma}_N}{\overline{D}}$-Werten findet man die für *schwache* Absorption vorhergesagten Verhältnisse, die „Resonanzen" bei bestimmten A-Werten. Abb. 284a zeigt das

für die Werte $\zeta = 0{,}08$, $V_0 = 42$ MeV und $R = (1{,}26\,A^{1/3} + 0{,}7)\cdot 10^{-13}$ cm. Die erste Resonanz bei $A \sim 55$ ($n = 2$, vgl. (133.12)) paßt recht gut zu den Meßwerten. Die Verschiebung und Abflachung des Maximums bei $A \sim 170$ ($n = 3$) ist wahrscheinlich auf die starke Deformation der Kerne in diesem Gebiet (vgl. Kollektives Modell) zurückzuführen. Die anderen Resonanzen, die (133.12) liefert, haben hier z. T. keinen Sinn ($n = 0$: $A < 1$; $n > 3$: $A > 300$). $n = 1$ ergibt eine Resonanz bei $A \sim 10$, für die jedoch kein genügendes Material vorliegt.

Für Protonen ergeben sich ganz analoge $\frac{\overline{\Gamma}_P}{D}$-Resonanzen [S 57-2], die nur durch das Coulombfeld etwas verschoben sind [M 57-2]. So liegt die erste Resonanz bei $A \sim 70$ statt 55 (vgl. Abb. 284 b).

§ 136. Differentielle Wirkungsquerschnitte

Eine weitere Prüfungsmöglichkeit sind die Winkelverteilungen der (compound- und form-) elastisch gestreuten Teilchen. Sie werden von der Theorie recht befriedigend dargestellt (vgl. FPW [F 54-2], S. 459, [K 57-1], S. 235, [R 57-2], S.419ff.). Wir zeigen das hier für elastisch gestreute *Protonen* mit einer Energie von 22 MeV (Kontinuumsgebiet) in Abb. 285. Bei diesen Energien machen sich bereits Feinheiten des Potentialverlaufs deutlich bemerkbar: Ein einfaches Kastenpotential liefert bei größeren Winkeln einen zu hohen Wirkungsquerschnitt, während das abgerundete Potential (Wood, Saxon)

$$V(r) = -V_0 \cdot \frac{1 + i\zeta}{1 + e^{+\frac{r-R}{d}}}$$

sich gut der gemessenen Winkelverteilung anpassen läßt. Sehr ausführliche Untersuchungen mit abgerundeten Potentialen wurden vor allem von Bjorklund und Fernbach [B 58-1] gemacht. Sie zeigen, daß eine an der Oberfläche konzentrierte Absorption merklich besser ist, als eine Absorption mit derselben Radialabhängigkeit wie der Realteil des Potentials.

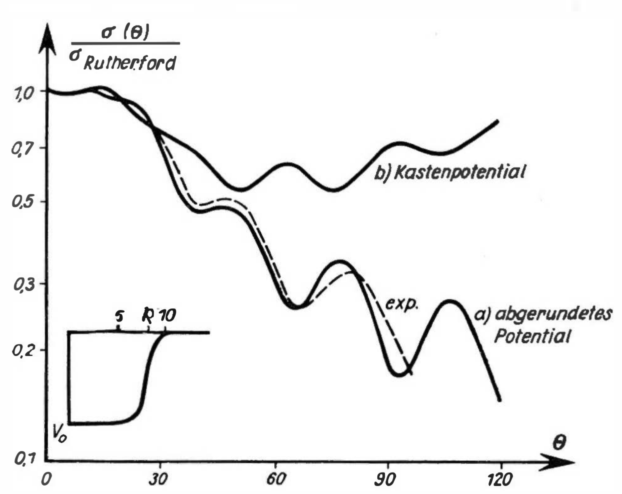


Abb. 285. Winkelverteilung der elastischen Streuung von 22 MeV-Protonen an Pt experimentell (gestrichelt) und theoretisch (ausgezogen). Es wurde a) ein abgerundetes Potential von der Form wie in Abb. 282e verwendet: $V_0 = 38$ MeV, $\zeta = 0{,}24$ ($V_2(r)$ 9 MeV tief, $R = 8{,}24 \cdot 10^{-13}$ cm, $d = 0{,}49 \cdot 10^{-13}$ cm, b) ein Kastenpotential von entsprechenden Abmessungen. (Nach [M 56-2])

D. Zusammenhang mit dem Compoundkern-Modell

Da sich das Optische Modell mit schwacher Absorption bewährt, haben wir im Bereich der ungebundenen Zustände des Kerns (bei Kernreaktionen) eine ähnliche Situation wie bei den gebundenen Zuständen: Es existieren mehrere brauchbare Modelle, von denen jedes gewisse Teilgebiete der Erfahrung beschreibt. Während es bei den gebundenen Zuständen gelang, die beiden Modelle (Schalenmodell und Kollektives Modell) zu einem Modell zu „verschmelzen", ist das hier nicht ohne weiteres möglich, da das Optische Modell (fast) unabhängige Bewegung des eingeschossenen Teilchens im Kern annimmt, das Compoundkern-Modell dagegen starke Wechselwirkung mit den Nukleonen des Kerns.
Doch zeigt das Optische Modell selbst schon den Ausweg, denn die Absorption durch den Imaginärteil des Potentials sollte eine einfache Beschreibung der Tatsache sein, daß das zunächst unabhängig sich bewegende Teilchen doch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit mit einem Targetnukleon wechselwirkt und einen Compoundzustand bildet. Das Optische Modell erscheint also als eine Art Vorstufe des Compoundkern-Modells, so daß wir die beiden Modelle „aneinanderfügen" müssen, wie es nach WEISSKOPF [W 56-1] schematisch in Abb. 286a gezeichnet wurde.
Nach dieser Abbildung werden bei einer Kernreaktion nach der teilweisen Streuung an der Kernoberfläche (Potentialstreuung oder „potential-elastische Streuung") und dem Eindringen des Teilchens drei Stufen durchlaufen: die Einzelteilchenstufe, die Compoundkernstufe und die Endstufe, die wieder eine Einzelteilchenstufe darstellt. In der ersten Stufe bewegt sich das Teilchen nach dem Optischen Modell und wird dabei entweder formelastisch gestreut, oder es geht durch die „Absorption" in die zweite Stufe über, indem es einen Compoundkern bildet. Dieser zerfällt, womit die Kernreaktion die Endstufe erreicht: Die künftigen Zerfallsprodukte verlassen den Restkern und „spüren" ihn dabei wieder als komplexes Potential. Eine spezielle Zerfallsmöglichkeit ist die compoundelastische Streuung, die als einzige in den „Eingangskanal" (d. h. zur Anfangsenergie und zur selben Teilchenart, wie eingedrungen) zurückführt. Abb. 286c zeigt dasselbe weniger symbolisch als Prozesse im wirklichen Kern.
Wie wir auf S. 656 sahen, treten bei etwas höheren Energien (> 10 MeV) direkte Prozesse als neue Phänomene auf. Wir müssen unser Schema einer Kernreaktion deshalb zu dem der Abb. 286 b, d erweitern. An die Stelle der Compound*kern*-Stufe ist die Stufe des Compound*systems* getreten, die dadurch definiert ist, daß das eingeschossene Teilchen, in *irgend* einen Energieaustausch mit dem Targetkern getreten, „absorbiert" worden ist. Dieser Energieaustausch kann zu einem direkten Prozeß, zu einer kollektiven Anregung oder/und zur Compoundkernbildung führen. Dieses Schema ist weit genug, um alle bei Kernreaktionen auftretenden Phänomene zu erfassen; die Compoundkerntheorie ist also in verschiedener Richtung wesentlich erweitert worden.
Das „Zusammenfügen" der verschiedenen Modelle zu einem Gesamtmodell der

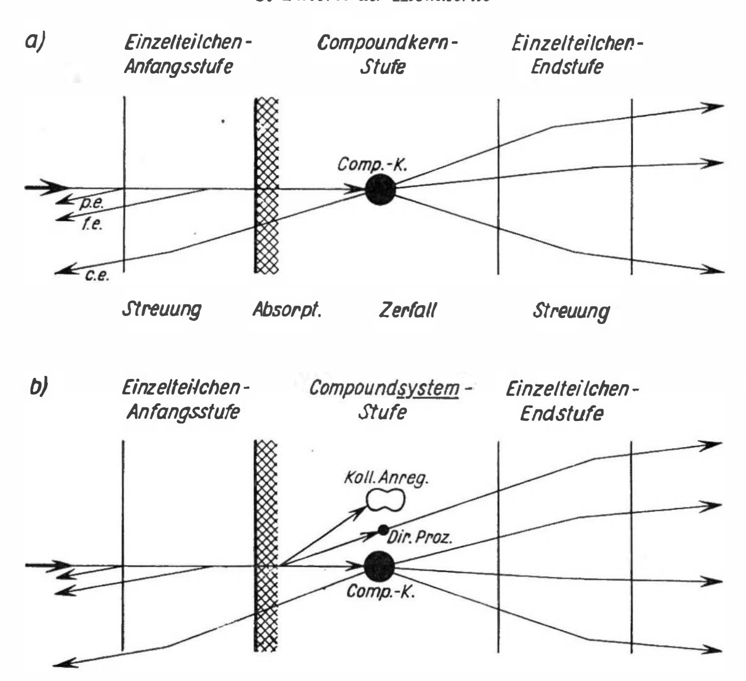


Abb. 286. Ablauf einer Kernreaktion, a), b) symbolisch, c), d) „anschaulich". a) und c) für Kernreaktionen niedriger Energien (< 10 MeV), b) und d) für höhere Energien, wo direkte Prozesse merklich werden. p. e. = „potentialelastische" oder Potential-Streuung, f. e. = formelastische Streuung, c. e. = compoundelastische Streuung. In c) und d) wurde an den Pfeilen Teilchenart und Energie angegeben. a), b) nach WEISSKOPF, Revs. Mod. Phys. **29**, 174 (1957), c), d) nach G. RICHTER

Kernreaktionen haben wir hier nur qualitativ andeuten können. Die quantitative Formulierung dieser Überlegungen erfolgt im Rahmen der systematischen Theorie der Kernreaktionen, die man in der alten („üblichen") Form in [B 59-1], Kap. X, und [S 53-1], S. 284 ff., findet. Die Einordnung des Optischen Modells und der direkten Prozesse in diese Theorie wird z. B. dargestellt in Arbeiten von LANE und THOMAS [L 58-1] und BROWN [B 59-2].

5. BEMERKUNGEN ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER KERNMODELLE

Wir haben bei der Behandlung aller Kernmodelle gesehen, daß die Verhältnisse im Kern entscheidend durch die nahezu unabhängige Bewegung der Nukleonen gekennzeichnet sind. Bei den niedrigen gebundenen Zuständen zeigte sich das zunächst an den überraschenden Erfolgen des Schalenmodells, darüber hinaus beim kollektiven Modell im quantitativen Versagen der hydrodynamischen und im Erfolg der Einzelteilchennäherung. Und selbst im Bereich der ungebundenen

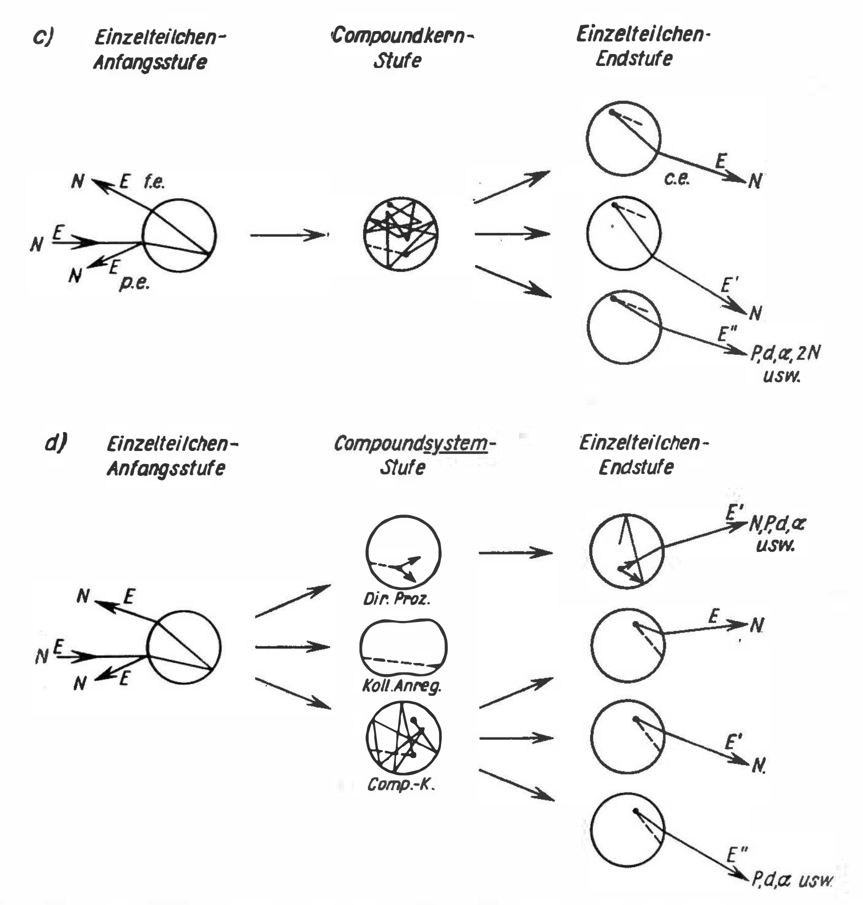


Abb. 286 c und d. (Erklärungen siehe bei a und b). Die Verbindungspfeile zwischen den ersten beiden Stufen sind so zu lesen, daß e n t w e d e r p.e. bzw. f.e. Streuung o d e r Übergang in die zweite Stufe erfolgt.

Zustände (Kernreaktionen) – wo die scharfen Compoundresonanzen das Vorhandensein *starker* Wechselwirkung zwischen den Nukleonen direkt anzeigen existieren daneben die Riesenresonanzen, die nach dem Optischen Modell bedeuten, daß in der Natur schwache Absorption vorliegt und folglich auch hier ein eingedrungenes Nukleon eine merklich unabhängige Bewegung zeigt.

Damit ergibt sich als Grundproblem der Theorie der Kernmodelle (vgl. S. 527) die schwierige Frage: Wie kommt die nahezu unabhängige Bewegung der Nukleonen t r o t z der starken kurzreichweitigen Kernkräfte zustande? Denn anschaulich erwartet man von solchen Kräften zunächst eher das Gegenteil, daß sie – wie es bei den Flüssigkeiten der Fall ist – kräftige Stöße zwischen den Teilchen bewirken und deshalb keine unabhängige Bewegung möglich sein sollte (vgl. S. 643: $v \sim 1$).

Nun hat bereits 1950 WEISSKOPF [W 50-1] darauf hingewiesen, daß das *Pauli-Prinzip* wesentlich für die Möglichkeit der unabhängigen Bewegung der Nukleonen im Kern verantwortlich sein könnte. Seine (qualitative) Argumentation ist folgende: Stöße zwischen den Nukleonen bedeuten Energieübertragung zwischen den beiden Stoßpartnern. Wenn sich nun jedes der beiden stoßenden Teilchen in einem Zustand bestimmter Energie befindet, hat es im allgemeinen keine Möglichkeit, Energie aufzunehmen oder abzugeben, da alle Zustände bereits besetzt sind, in die es durch den Stoß „befördert" würde. Nur die wenigen Teilchen in den obersten besetzten Termen haben naheliegende unbesetzte Terme zur Verfügung und können also Stöße ausführen. Das Pauli-Prinzip scheint demnach geeignet zu sein, die unabhängige Bewegung der Nukleonen gegen die Wirkung der Kernkräfte zu stabilisieren.

Seit 1954 wurde von BRÜCKNER und Mitarbeitern [B 56-1] eine Theorie entwickelt, die diese qualitative Idee quantitativ zu fassen gestattet. Wir können hier nicht auf Einzelheiten dieser Theorie eingehen, sondern müssen uns begnügen, ihren Hauptgedanken zu skizzieren. Während in der Hartree-Fock-Näherung (S. 518 ff.) die unabhängige Bewegung e i n e s Teilchens unter der gemittelten Wirkung aller übrigen Teilchen (d. h. im Potential des Schalenmodells bzw. des Kollektiven Modells mit Einzelteilchennäherung) oder des Optischen Modells betrachtet wird, behandelt die Brückner-Näherung die Bewegung z w e i e r Teilchen *einschließlich ihrer gegenseitigen Wechselwirkung* unter der gemittelten Wirkung aller übrigen Teilchen. Das Ziel ist dabei, daraus *abzuleiten,* unter welchen Bedingungen die näherungsweise unabhängige Bewegung des *einzelnen* Teilchens möglich wird. Es ergibt sich, daß die Bewegung der beiden Nukleonen durch eine quantenmechanische Zweiteilchengleichung, die „Bethe-Goldstone-Gleichung" [B 57-2], bestimmt wird.

Unter Verwendung dieser Gleichung konnten GOMES, WALECKA und WEISSKOPF [G 58-1] zeigen, daß bei „geeignet" gewählten Kernkräften tatsächlich das Pauli-Prinzip in der oben genannten Weise so stark wirksam wird, daß Abweichungen von der unabhängigen Bewegung der Nukleonen klein gehalten werden. Die Eigenschaften, die die Kernkräfte dazu „geeignet" machen, sind

1. hard core (S. 480),
2. Austauschcharakter etwa wie $M: W = 1:1$, d. h. „Serber-Potential" (S. 485),
3. relativ große Reichweite: „langer Schwanz" wie z. B. beim Yukawa-Potential (Abb. 192),
4. Stärke nicht größer, als zur Bindung des Deuterons nötig ist.

Darüber hinaus zeigte sich [G 58-1], daß dieselben Kräfte in der Hauptsache durch die Eigenschaften 1 und 2 auch ungefähr die Sättigung ergeben, wie bereits auf S. 486 angedeutet wurde.

LITERATUR

[A 52-1] ADAIR, R. K., Phys. Rev. **86**, 155 (1952)
[A 52-2] AAMODT, L. G., und P. C. FLETCHER, Phys. Rev. **98**, 1224 (1952)
[A 55-1] AJZENBERG, F., und T. LAURITSEN, Revs. Mod. Phys. **27**, 77 (1955)
[A 56-1] ALDER, K., A. BOHR u. a., Revs. Mod. Phys. **28**, 432 (1956)
[B 33-1] BETHE, H. A., Handbuch der Physik **24**, Teil 1, Berlin 1933
[B 36-1] BREIT, G., und E. FEENBERG, Phys. Rev. **50**, 850 (1936)
[B 36-2] BETHE, H. A., und R. F. BACHER, Revs. Mod. Phys. **8**, 82 (1936)
[B 38-1] BREIT, G., und E. WIGNER, Phys. Rev. **53**, 998 (1938)

[B 49-1] Brix, P., und H. Kopfermann, Z. Phys. **126**, 344 (1949), Festschrift Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. 17 (1951)
[B 51-1] Butler, S., Proc. Roy. Soc. A **208**, 559 (1951)
[B 52-1] Bohr, A., Dan. Math.-fys. Medd. **26**, Nr. 14 (1952)
[B 52-2] Barshall, H. H., Phys. Rev. **86**, 431 (1952)
[B 53-1] Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики (Blochinzew, D. I., Grundlagen der Quantenmechanik); deutsch: Berlin 1953
[B 53-2] Bohr, A., und Mottelson, Dan. Math.-fys. Medd. **27**, Nr. 16 (1953)
[B 54-1] Bohr, A., Rotational States of Atomic Nuclei, Kopenhagen 1954
[B 55-1] Burcham, W. E., Progr. Nucl. Phys. **4**, 171 (1955)
[B 55-2] Blin-Stoyle, R. J., Phil. Mag. **46**, 973 (1955)
[B 55-3] Bohr, A., und Mottelson, Dan. Math.-fys. Medd. **30**, Nr. 1 (1955)
[B 56-1] Brückner, K., Literatur siehe [B 56-2]
[B 56-2] Bethe, H. A., Phys. Rev. **103**, 1353 (1956)
[B 56-3] Bell, J. S., und T. H. R. Skyrme, Phil. Mag. **1**, 1055 (1956)
[B 56-4] Blin-Stoyle, R. J., Revs. Mod. Phys. **28**, 75 (1956)
[B 56-5] Bethe, H. A., Physica **22**, 987 (1956)
[B 57-1] Burcham, W. E., Handbuch der Physik **40**, 1 (1957)
[B 57-2] Bethe, H. A., und J. Goldstone, Proc. Roy. Soc. A **238**, 551 (1957)
[B 57-3] Butler, S., Nuclear Stripping Reactions, Sydney 1957
[B 58-1] Bjorklund, R., und S. Fernbach, Phys. Rev. **109**, 1295 (1958)
[B 59-1] Blatt, J. M., und V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics; deutsch: Theoretische Kernphysik, Leipzig 1959
[B 59-2] Brown, R., Revs. Mod. Phys. **31**, 893 (1959)
[B 59-3] Bohr, A., B. R. Mottelson und D. Pines, Phys. Rev. **110**, 936 (1958); Belyayev, Dan. Math.-fys. Medd. **31**, Nr. 11 (1959); A. B. Migdal, Nucl. Phys. **13**, 655 (1959)
[C 35-1] Condon, E. U., und G. H. Shortley, Theory of Atomic Spectra, Cambridge 1935
[C 53-1] Cohen, B. L., Phys. Rev. **92**, 1245 (1953)
Cohen, B. L., E. Newman u.a., Phys. Rev. **94**, 620 (1954)
[D 58-1] Dawydow, A., und A. N. Filippow, Jetp **35**, 440 (1958), Nucl. Phys. 8, 237 (1958)
[D 59-1] Dawydow, A., Joint Inst. Nucl. Res. (Dubna-Ber.) P-326 (1959), Übersetzung in: Kernenergie 4. Jhg., Heft 2
[E 34-1] Elsasser, W. M., J. de Phys. **5**, 389 (1934)
[E 52-1] Edmonds, A. R., und B. H. Flowers, Proc. Roy. Soc. A **214**, 515 (1952); A **215**, 120 (1952)
[E 55-1] Elliot, J. P., und B. H. Flowers, Proc. Roy. Soc. A **229**, 536 (1955)
[E 57-1] Elliot, J. P., und A. M. Lane, Handbuch der Physik **39**, 241 (1957)
[E 57-2] Eden, R. J., Progr. Nucl. Phys. **6**, 26 (1957)
[E 58-1] Emery, V. J., Nucl. Phys. **6**, 585 (1958)
[E 58-2] Elliot, J. P., Proc. Roy. Soc. A **245**, 128, 562 (1958)
[F 47-1] Flügge, S., Rechenmethoden d. Quantentheorie, Berlin 1947
[F 49-1] Feenberg, E., und K. C. Hammack, Phys. Rev. **75**, 1877 (1949)
[F 52-1] Flowers, B. H., Progr. Nucl. Phys. **2**, 235 (1952)
[F 52-2] Flowers, B. H., Proc. Roy. Soc. A **212**, 248 (1952)
[F 52-3] Flowers, B. H., Proc. Roy. Soc. A **215**, 398 (1952); Flowers, B. H., und A. R. Edmonds, Proc. Roy. Soc. A **214**, 515 (1952); A **215**, 120 (1952); Flowers, B. H., Phil. Mag. **45**, 329 (1954)
[F 52-4] Flowers, B. H., Phil. Mag. **43**, 1330 (1952)
[F 53-1] Feld, B. T., in: E. Segré, Experimental Nuclear Physics, Vol. II, New York 1953

[F 54-1] FERMI, E., Nuovo Chim. **11**, 407 (1954)
[F 54-2] FESHBACH, H., C. E. PORTER und V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. **96**, 448 (1954)
[F 55-1] FEENBERG, E., Shell Theory of the Nucleus, Princeton 1955
[F 55-2] FORD, K. W., und D. L. HILL, Ann. Rev. Nucl. Sci. **5**, 25 (1955)
[F 55-3] FRIEDMAN, F. L., und V. F. WEISSKOPF, in: N. BOHR and the Development of Physics, [London 1955
[F 56-1] FEINGOLD, A. M., Phys. Rev. **101**, 258 (1956)
[G 34-1] GUGGENHEIMER, K., J. de Phys. **5**, 253, 475 (1934)
[G 51-1] GRANGER, S., und R. D. SPENCE, Phys. Rev. **83**, 460 (1951); HILL, D. L., und J. A. WHEELER, Phys. Rev. **89**, 1102 (1953); MOSZKOWSKI, S. A., Phys. Rev. **99**, 803 (1955); GOTTFRIED, K., Phys. Rev. **103**, 1017 (1956)
[G 55-1] GOLDHABER, M., und J. WENESER, Ann. Rev. Nucl. Sci. **5**, 1 (1955)
[G 55-2] GOLDHABER, M., und A. W. SUNJAR in: K. SIEGBAHN, β- and γ-Ray Spectroscopy, [Amsterdam 1955
[G 56-1] GOVE u.a., Physica **22**, 1141 (1956)
[G 58-1] GOMES, L., J. WALECKA und V. F. WEISSKOPF, Ann. of. Phys. **3**, 241 (1958)
[G 59-1] GOLDANSKY, V. J., und M. V. KAZARNOVSKY, Nucl. Phys. **13**, 117 (1959)
[G 60-1] GRIFFIN, J. J., M. RICH, Phys. Rev. **118**, 850 (1960)
[H 48-1] HAXEL, O., J. H. D. JENSEN und H. E. SUESS, Naturwiss. **35**, 376 (1948); **36**, 153, 155 (1949); Phys. Rev. **75**, 1766 (1949); Z. Phys. **128**, 295 (1950)
[H 51-1] HEISENBERG, W., und W. MACKE, Theorie des Atomkerns, Max-Planck-Inst. f. Physik [1951
[H 52-1] HEUSINKVELD, M., und G. D. FREIER, Phys. Rev. **85**, 80 (1952)
[H 52-2] HÖCKER, K.-H., Z. Phys. **132**, 399 (1952)
[H 52-3] HAXEL, O., J. H. D. JENSEN und H. E. SUESS, Ergebn. ex. Naturw. **26**, 244 (1952)
[H 55-1] HORIE, H., und A. ARIMA, Phys. Rev. **99**, 778 (1955)
[H 56-1] HOFSTÄDTER, R., u.a., Phys. Rev. **101**, 1131 (1956); Revs. Mod. Phys. **28**, 214 (1956)
[H 57-1] HILL, D. L., Handbuch der Physik **39**, 178 (1957)
[I 53-1] INGLIS, D. R., Revs. Mod. Phys. **25**, 390 (1953)
[I 54-1] INGLIS, D. R., Phys. Rev. **96**, 1059 (1954); **97**, 701 (1955)
[J 51-1] JASTROW, R., Phys. Rev. **81**, 165 (1951)
[J 52-1] JENSEN, J. H. D., und M. G.-MAYER, Phys. Rev. **85**, 1040 (1952)
[J 52-2] JAHNKE, E., und F. EMDE, Tafeln höherer Funktionen, Leipzig 1952
[J 55-1] JASTROW, R., Phys. Rev. **98**, 1479 (1955)
[K 50-1] KURATH, D., Phys. Rev. **80**, 98 (1950); **88**, 804 (1952); **91**, 1430 (1953)
[K 51-1] KEILSON, G., Phys. Rev. **82**, 759 (1951)
[K 55-1] KOCKEL, B., Darstellungstheoretische Behandlung einfacher wellenmechanischer Probleme, Leipzig 1955
[K 56-1] KURATH, D., Phys. Rev. **101**, 216 (1956)
[K 56-2] KOPFERMANN, H., Kernmomente, Frankfurt/M. 1956; LÖSCHE, A., Kerninduktion, Berlin 1957
[K 57-1] KINSEY, B. B., Handbuch der Physik **40**, 202 (1957)
[L 52-1] LAURITSEN, T., Ann. Rev. Nucl. Sci. **1**, 67 (1952)
[L 52-2] LÉVY, M. M., Phys. Rev. 88, 72, 725 (1952)
[L 55-1] LANE, A. M., und C. F. WANDEL, Phys. Rev. **98**, 1524 (1955)
[L 56-1] LITHERLAND, A. E., u.a., Phys. Rev. **102**, 208 (1956)
[L 58-1] LANE, A. M., und R. G. THOMAS, Revs. Mod. Phys. **30**, 257 (1958)
[L 60-1] LEMMER, R. H., Phys. Rev. **117**, 1551 (1960)
[M 48-1] G.-MAYER, M., Phys. Rev. **74**, 235 (1948)
[M 49-1] G.-MAYER, M., Phys. Rev. **75**, 1969 (1949)
[M 50-1] G.-MAYER, M., Phys. Rev. **78**, 16, 22 (1950)

[M 55-1] G.-MAYER, M., und J. H. D. JENSEN, Elementary Theory of Shell Structure, New York [1955
[M 55-2] MOTTELSON, B. R. und S. G. NILSSON, Phys. Rev. **99**, 1615 (1955)
[M 56-1] MARTY, C., Nucl. Phys. **1**, 85 (1956); **3**, 193 (1957)
[M 56-1] MACKE, W., Ann. Phys. **19**, 89 (1956)
[M 56-2] MEDINA, F. M., und G. SÜSSMANN, Fortschr. d. Phys. **4**, 297 (1956)
[M 57-1] MOSZKOWSKI, S. A., Handbuch der Physik **39**, 411 (1957)
[M 57-2] MARGOLIS, B., und V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. **107**, 641 (1957)
[M 59-1] MOTTELSON, B. R., und S. G. NILSSON, Dan. Math.-fys. Skr. **1**, Nr. 8 (1959)
[N 49-1] NORDHEIM, L. W., Phys. Rev. **75**, 1894 (1949)
[N 55-1] NILSSON, S. G., Dan. Math.-fys. Medd. **29**, Nr. 16 (1955)
[N 59-1] NEWTON, T. D., Canad. J. Phys. **37**, 944 (1959)
[P 47-1] POWELL, C. F., C. M. G. LATTES und G. P. OCCHIALINI, Nature **159**, 694 (1947)
[P 52-1] PFIRSCH, D., Z. Phys. **132**, 409 (1952)
[P 55-1] PERKS, M. K., Proc. Phys. Soc. A **68**, 1083 (1955)
[P 57-1] PAUL, E. B., Phil. Mag. **2**, 311 (1957)
[P 59-1] v. PATTER, D. M., Nucl. Phys. **14**, 42 (1959); Mc DONALD, N. Nucl. Phys. **14**, 70 (1959
[R 48-1] ROSENFELD, L., Nuclear Forces, Amsterdam 1948
[R 51-1] RAINWATER, J., Phys. Rev. **79**, 432 (1951)
[R 53-1] RADICATI, L. A., Proc. Phys. Soc. A **66**, 139 (1953); A **67**, 39 (1954)
[R 55-1] REDLICH, M. G., Phys. Rev. **99**, 1427 (1955)
[R 57-1] RAKAVY, G., Nucl. Phys. **4**, 375 (1957)
[R 57-2] RAINWATER, J., Handbuch der Physik **40**, 373 (1957)
[S 39-1] SOMMERFELD, A., Atombau und Spektrallinien, Braunschweig 1939
[S 49-1] SCHIFF, L. G., Quantum Mechanics, New York 1949
[S 50-1] STEINWEDEL, H., und J. H. D. JENSEN, Z. Naturforsch. **5a**, 413 (1950)
[S 50-2] SWIATECKI, W. J., Proc. Phys. Soc. **63**, 1208 (1950)
[S 53-1] SACHS, R. G., Nuclear Theory, Cambridge (Mass.) 1953
[S 55-1] SIEGBAHN, K., β- and γ-Ray Spectroscopy, Amsterdam 1955
[S 56-1] SHELINE, R. K., Nucl. Phys. **2**, 382 (1956)
[S 57-1] SIGNELL, P. S., und K. E. MARSHAK, Phys. Rev. **106**, 832 (1957); **109**, 1229 (1958)
[S 57-2] SCHIFFER, J. P., und L. L. LEE jr., Phys. Rev. **107**, 640 (1957)
[S 58-1] SULKANE, S., und W. WATARI, Progr. Theor. Phys. **20**, 108 (1958)
[S 59-1] STEPHENS, W. E., u. a., Phys. Rev. **113**, 212 (1959)
[S 60-1] Джелепов, Б. С., Изобаные спины и подобные состояния атомных ядрер (DZHELEPOV, B. S., Der Isospin von Atomkernen); deutsch: Berlin 1960
[T 58-1] TAMURA, T., Fortschr. d. Phys. **6**, 109 (1958)
[T 60-1] TAMURA, T., und T. UDAGAWA, Nucl. Phys. **16**, 460 (1960)
[V 57-1] VILLARS, F., Ann. Rev. Nucl. Sci. **7**, 185 (1957)
[W 35-1] v. WEIZSÄCKER, C. F., Z. Phys. **96**, 431 (1935)
[W 36-1] WIGNER, E. P., Proc. Nat. Ac. Sci. **22**, 662 (1936)
[W 36-2] v. WEIZSÄCKER, C. F., Naturwiss. **24**, 813 (1936)
[W 50-1] WEISSKOPF, V. F., Helv. Phys. Acta **23**, 187 (1950); Science **113**, 101 (1951)
[W 54-1] WOOD, R. D., und D. S. SAXON, Phys. Rev. **95**, 577 (1954)
[W 55-1] WILSON, R., Phil. Mag. **46**, 769 (1955)
[W 56-1] WEISSKOPF, V. F., Physica **22**, 952 (1956)
[W 56-2] WILETS, L., und M. JEAN, Phys. Rev. **102**, 788 (1956)
[W 57-1] WILDERMUTH, K., Fortschr. d. Phys. **5**, 421, 469 (1957)
[Y 50-1] YANG, L. M., Proc. Phys. Soc. **64**, 632 (1950)

X. Theorie des Beta-Zerfalls

§ 137. Allgemeines über den Beta-Zerfall

Der Beta-Zerfall kommt durch eine „schwache" Wechselwirkung zustande, durch die sog. Fermi-Wechselwirkung. Im Gegensatz zu den schwachen stehen die „starken" Wechselwirkungen, wie z. B. die elektromagnetischen Kräfte und die Kernkräfte.

Der charakteristische Zug einer jeden spontanen Beta-Umwandlung eines beta-instabilen Kerns ist die *kontinuierliche Energieverteilung* der emittierten Elektronen. Diese kontinuierliche Energieverteilung steht in starkem Gegensatz zu den Linienspektren, die man bei Alpha- und Gamma-Strahlung sowie bei der Beta-Strahlung, die durch innere Konversion der Gamma-Strahlen („internal conversion") entsteht, beobachtet. In einem gewissen Sinne besteht aber doch eine Ähnlichkeit, denn auch die Beta-Strahler besitzen bestimmte Lebensdauern, die für den betreffenden zerfallenden Kern charakteristisch sind.

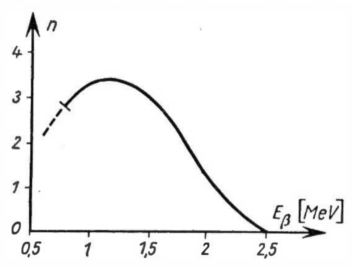


Abb. 287. Beta-Spektrum von In^{114}. Abszisse: Elektronen-Energie in MeV (die Ruheenergie 0,51 MeV mit eingeschlossen). Ordinate: Anzahl n der Elektronen pro Einheitsintervall der Energie

Wir betrachten zunächst den Fall eines „einfachen" Beta-Spektrums. Ein Beta-Spektrum heißt *einfach*, wenn der Mutterkern in ein einziges Niveau des Tochterkerns zerfällt. Die Formen der einfachen Spektren sind — bis auf wenige Ausnahmen — einander ähnlich; sie weichen nur in der Größe der Grenzenergie $E_{\beta\,max}$ voneinander ab. Die Grenzenergie ist dabei die obere Energiegrenze im Beta-Spektrum, d. h. die Energie, oberhalb der keine Elektronen beobachtet werden.

In der Abb. 287 bringen wir ein Beispiel eines einfachen Spektrums. Es handelt sich um In^{114}. Hier beträgt die Grenzenergie 2,5 MeV. Das untere Energiegebiet ist wegen der experimentellen Fehler gestrichelt gezeichnet, denn Streuung und Absorption der Quelle bzw. deren Unterlage verhindern eine genügend genaue Messung bei sehr kleinen Elektronen-Energien.

Umfangreiche Messungen bei Beta-Umwandlungen lieferten zunächst folgenden Sachverhalt:

1. Bei jedem Beta-Übergang wird ein einziges Elektron (oder Positron) emittiert.
2. Das Beta-Spektrum besitzt eine obere Grenze.
3. Die Energie des Kerns nimmt bei der Beta-Umwandlung um einen Betrag ab, der innerhalb der Meßfehlergrenzen gleich der Grenzenergie ist.

Die Eigenschaften 1 und 2 kennen wir schon. Die Eigenschaft 3 wurde beispielsweise dadurch erkannt, daß für den Fall von nichteinfachen Beta-Spektren, wo also zwei oder mehr Grenzenergien vorhanden sind (es handelt sich dann um die Überlagerung zweier oder mehrerer Beta-Spektren), Gammalinien beobachtet wurden, die genau der Differenz zweier Grenzenergien entsprechen. Noch deutlicher sieht man die Eigenschaft 3 in dem Fall, wo die Massen sowohl vom Mutterkern als auch vom Tochterkern unabhängig (etwa massenspektroskopisch) gemessen sind. Beispielsweise liegt C^{14} 0,16 MeV oberhalb N^{14}. 0,16 MeV ist aber auch gerade die Grenzenergie im Beta-Spektrum von N^{14}.

Wir wollen uns jetzt den Mechanismus des Beta-Zerfalls näher ansehen. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit den entstehenden *Elektronen*. Nach der Diracschen Theorie für das Elektron haben Positronen und Negatronen (β^+ und β^-) identische Eigenschaften, außer dem Vorzeichen der Ladung. Hiernach erwartet man, daß die Beta-Strahlen gleiche Eigenschaften haben, ob sie nun aus Positronen oder Negatronen bestehen. Der einzige Unterschied liegt nur darin, daß die Ladung des betaaktiven Kerns beide bei der Emission verschieden beeinflußt. Der Kern stößt die Positronen während der Emission ab, die Negatronen dagegen zieht er an. Die quantitativ sich daraus ergebenden Folgerungen werden wir später noch behandeln. Man kann aber hier schon sagen, daß dieser Effekt bei schweren Kernen (mit hoher Kernladung) stärker ausgeprägt sein wird und daß dort Positronenemission relativ zu Negatronenemission zurücktritt. Positronenemission kann nämlich nur noch selten eintreten, wenn der Coulomb-Wall im Kern höher ist als die Positronenenergie.

Der weitere Grund, weswegen Positronenemission bei schwereren Kernen relativ selten erwartet wird, ist, daß bei genügend großer Kernladung der Einfang eines Hüllenelektrons („E-Einfang") wahrscheinlicher wird als die Emission eines Positrons. Der E-Einfang wurde vorausgesagt von Yukawa und Sakata und zuerst beobachtet von Alvarez. Er ist nach der Diracschen Theorie äquivalent der Emission eines Positrons.

Die experimentelle Evidenz der soeben besprochenen Aussagen der Diracschen Theorie ist besonders eindrucksvoll in den Fällen, wo die beiden Prozesse β^-- und β^+-Emission miteinander und mit dem E-Einfang konkurrieren. Das ist der (verhältnismäßig selten auftretende) Fall, wenn der instabile Kern ein (u,u)-Kern ist, der gegenüber beiden: β^-- und β^+-Emission instabil ist mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß neben der β^+-Emission auch noch E-Einfang stattfindet. Beispiele sind Cl^{36} und As^{76}. Bei Arsen tritt übrigens auch noch Gamma-Strahlung auf, und zwar anschließend an den Beta-Zerfall, herrührend von dem Tochterkern. Diese letztere Eigenschaft wird bei vielen Beta-Umwandlungen beobachtet (etwa 50 Prozent aller Fälle).

Bei dem Beta-Zerfall ändert sich die Zahl der Nukleonen im Kern nicht, d. h., die Massenzahl A bleibt erhalten, wohingegen sich die Kernladungszahl um eine Einheit ändert. Man kann das so beschreiben, daß man sagt, die Negatronenemission ist äquivalent der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton und umgekehrt, die Positronenemission ist äquivalent der eines Protons in ein Neutron.

Bei diesem Umwandlungsprozeß beteiligen sich die anderen Nukleonen im Kern nicht, sie werden daher nur eine sekundäre Rolle bei dem Beta-Prozeß spielen. Das ist plausibel, denn ein freies Neutron kann ja einen β-Zerfall machen, ohne daß sich andere Nukleonen in seiner Nähe befinden.
Im Gegensatz zum Alpha-Zerfall sind die emittierten Teilchen nicht Bestandteile des Mutterkerns, denn es gibt einige theoretische Argumente dafür, daß keine Elektronen im Kern vorhanden sein können. Die magnetischen Momente der Kerne sind von der Größenordnung 1/2000 des magnetischen Moments des Elektrons (Bohrschen Magnetons), und es ist nicht einzusehen, weswegen ein Elektron im Kern durchweg eine derartige Verkleinerung seines magnetischen Moments erleiden sollte, wenn es im Kern reell vorhanden wäre. Ein weiteres Argument stützt sich auf die Wellenfunktion des Elektrons im Kern. Wenn z. B. die kinetische Energie des Elektrons im Kern von der Größenordnung der Ruheenergie wäre – eine berechtigte Annahme, weil solche Energien im Mittel beim Zerfallsprozeß vorkommen –, dann hätte dieses Teilchen überschlagsmäßig eine Wellenlänge, die 100 mal größer wäre als der Kernradius. Um ein Elektron im Kern festzuhalten, müßte man auch, ähnlich wie beim Alpha-Zerfall, ein Potential konstruieren können, auf Grund dessen das Elektron längere Zeit im Kern festgehalten werden könnte. BETHE und FERMI haben aber gezeigt, daß die Konstruktion dieses Potentials nicht widerspruchsfrei gelingt.
Die soeben angestellte Diskussion war geschichtlich sehr wichtig, führte sie doch zur Aufstellung des Nukleonenmodells des Atomkerns.

§ 138. Ladung, Masse und Spin des Neutrinos

Wir kommen jetzt zu dem zweiten beim Beta-Prozeß emittierten Teilchen, dem *Neutrino*. Es ist eines der wichtigsten Teilchen der modernen Theorie, und es lohnt sich, bei ihm etwas länger zu verweilen. Es wird zugleich mit dem Elektron emittiert und ist wie dieses ebenfalls nicht vorher im Kern vorhanden. Es wurde durch Experimente anderer Art, auf die wir hier aber nicht eingehen (vgl. § 43), erst kürzlich direkt nachgewiesen; vorher mußte man sich mit der sog. Neutrinohypothese von PAULI abfinden. Elektronen und Neutrinos fallen unter den Sammelbegriff Leptonen (die μ-Mesonen gehören auch noch dazu).
Es ist zweckmäßig, zwischen Neutrino und Antineutrino zu unterscheiden: Das Teilchen, das gleichzeitig mit einem Positron ausgesandt wird, heißt *Neutrino*, das das Negatron begleitende *Antineutrino*.
Die Tatsache, daß das Neutrino gleichzeitig mit dem Elektron aus dem Kern ausgesandt wird, folgt schon aus der Gestalt der Beta-Spektren (s. S. 690). Die Energien der Elektronen sind, wie wir ja schon besprochen hatten, kontinuierlich im Spektrum verteilt. Nach dem Energiesatz muß also das Neutrino den Restbetrag der Zerfallsenergie aufnehmen (Näheres s. S. 696).
Wir stellen uns vor, der Kern befinde sich in einem stationären Zustand der bestimmten Energie E_A. Wir nennen diesen Kern wie früher den Mutterkern.

Nach dem Beta-Zerfall geht der Mutterkern in den Tochterkern über, der einen Zustand mit der Energie E_B besitze. E_B braucht nicht notwendig der Grundzustand des Tochterkerns zu sein, denn es könnten sich möglicherweise noch weitere Zerfälle anschließen. Die mit dem Beta-Spektrometer gemessene Beta-Energie wird kleiner oder gleich der Differenz der beiden Energien E_A und E_B sein, denn diese Differenz ist ja gerade die vorhin besprochene obere Grenze des Beta-Spektrums. Die Grenzenergie E_0 (wir ändern zur Abkürzung die Bezeichnung) genügt also folgender Gleichung:

$$E_0 = E_A - E_B. \tag{138.1}$$

Welche kinetische Energie das Beta-Teilchen nun zwischen E_B und E_A hat, ist eine reine Wahrscheinlichkeitsfrage, auf die wir später genauer eingehen werden.

Das Neutrino, das beim Beta-Zerfall erzeugt wird, sorgt nun nicht nur dafür, daß der Energiesatz (wie es sein muß) gilt, sondern gewährleistet auch, daß der Spin und die Statistik erhalten bleiben. Man weiß ja, daß Kerne mit einer geraden Teilchenzahl der Bose-Statistik und Kerne mit einem ungeraden A der Fermi-Statistik genügen. Da sich A beim β-Zerfall nicht ändert, haben Anfangs- und Endkern gleiche Statistik; der beim Zerfall wegtransportierte Drehimpuls ist dann notwendig ganzzahlig. Nun ist das beim β-Zerfall ausgesandte Elektron ein Fermion, da es den Spin $\frac{1}{2}$ besitzt. Das andere ausgesandte Teilchen, das Neutrino, muß daher halbzahligen Spin haben. Man wird natürlich den einfachsten Fall annehmen, daß das Neutrino auch den Spin $\frac{1}{2}$ wie das Elektron besitzt. Auf eine nähere Begründung dieser Annahme wollen wir nicht eingehen.

Wir fassen die Haupteigenschaften des Neutrinos tabellarisch zusammen und wollen sie dann auf Grund dieser Zusammenstellung diskutieren.

Die Haupteigenschaften des Neutrinos

1. Neutrinoladung gleich Null,
2. Neutrinomasse gleich Null,
3. Neutrinospin gleich $\frac{1}{2}\hbar$,
4. magnetisches Moment des Neutrinos gleich Null,
5. das Neutrino ist ein Fermion.

Diese Eigenschaften des Neutrinos lassen sich mit gewöhnlichen experimentellen Mitteln nicht leicht feststellen. Die Wechselwirkung, zwischen Neutrino und anderen Teilchen ist so schwach, daß der direkte Nachweis nur unter extrem günstigen experimentellen Bedingungen, auf die wir nicht eingehen, gelang. In der Wilson-Kammer oder durch magnetische Ablenkung läßt sich das Neutrino nicht feststellen. Das ist nach den Eigenschaften 1 und 4 verständlich, da hiernach das Neutrino keinerlei elektromagnetische Wechselwirkung eingehen kann.

Die Frage, ob die Eigenschaften des Neutrinos wirklich exakt zusammengestellt sind, läßt sich heute noch nicht mit Gewißheit mit ja beantworten.

Wir setzen die Neutrinomasse exakt $= 0$ und nehmen an, daß das Neutrino einer Wellengleichung gehorcht, die sich aus der gewöhnlichen Dirac-Gleichung für das Elektron einfach durch Streichung der Ruhemasse ergibt.

Durch diese vereinfachte Darstellung wird allerdings der Tatsache nicht Rechnung getragen, daß das Neutrino ein „spirales" Teilchen ist. Experimentell hat man nämlich bewiesen, daß der Spin des Neutrinos in eigenartiger Weise mit dem Impuls gekoppelt ist, und zwar so, daß beide stets antiparallel sind (beim Antineutrino stets parallel). Demnach ist der Bewegung eines Neutrinos stets ein bestimmter Drehsinn zugeordnet: Impuls und Spin des Neutrinos definieren eine Linksschraube (Antineutrino: Rechtsschraube). Man versteht unter „Helizität" die Komponente eines Einheitsvektors, der parallel zum Spin ist, in Impulsrichtung genommen. Das Neutrino hat also Helizität -1 (Antineutrino: $+1$), was wir als Eigenschaft 6 hinzufügen könnten. Wir kommen im § 145 darauf zurück.

Das zieht noch gewisse philosophische Folgerungen nach sich, auf die wir hier zum Schluß noch kurz eingehen wollen. Nach dem berühmten Machschen Prinzip, das besagt, daß kein spezielles Koordinatensystem vor dem anderen ausgezeichnet ist (eine bisher ausnahmslos bewährte Arbeitshypothese), müßten sich jeder physikalische Prozeß und sein Spiegelbild als gleich real erweisen. Die „spirale" Eigenschaft des Neutrinos zeigt, daß dieses Prinzip hier nicht gilt: Es zeichnet eine Linksschraube und damit ein linkshändiges Koordinatensystem aus. Dieses Problem, dessen Diskussion hier zu weit führen würde, hängt eng mit der Frage zusammen, warum wir in einer Zeit und in einem räumlichen Gebiet leben, wo die Negatronen ein realer Bestandteil der Materie sind, während die Positronen als „Antiteilchen" nur bei hochenergetischen Prozessen auftreten.

§ 139. Die komparativen Lebensdauern

Für eine etwas detailliertere Behandlung des β-Zerfalls stellen wir als erstes die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Zerfallszeit bzw. Halbwertszeit $T_{1/2}$ und der Zerfallsenergie E_0. Zunächst ergab sich auf Grund der empirischen Daten, daß die $T_{1/2}$-Werte für die verschiedenen betaaktiven Kerne stark streuen (es kommen praktisch alle Zerfallszeiten $T_{1/2}$ von Mikrosekunden bis 10^{15} Jahren vor!). Eine entsprechende starke Variation ergab sich ebenso für die Zerfallsenergien. Zum Beweis stellen wir in der Tabelle 73 die diesbezüglichen

Tabelle 73. Halbwertszeit und Zerfallsenergie einiger Kerne

Kern	$T_{1/2}$	E_0
B^{12}	$3 \cdot 10^{-2}$ sec	13,4 MeV
Ti^{51}	$0{,}6 \cdot 10$ min	1,5 und 2,13 MeV
Cu^{64}	$1{,}28 \cdot 10$ h	0,6 MeV
V^{50}	10^{15} a	?

Daten von vier willkürlich herausgegriffenen betalabilen Kernen zusammen. Sie sollen uns als Prototypen für den obigen Sachverhalt dienen.
Schon allein nach den Daten dieser Tabelle vermutet man, daß ein allgemeiner Zusammenhang zwischen Zerfallszeit und Zerfallsenergie besteht. In der Tat, trägt man (in Analogie zum Geiger-Nuttall-Gesetz beim Alpha-Zerfall) log E_0 gegen log $T_{1/2}$ auf, so ergeben sich, wie man sich leicht überzeugen kann, gerade Linien, die sog. Sargent-Kurven.
Die Frage nach einer Theorie der Sargent-Kurven wird etwas kompliziert durch den Umstand, daß die Beta-Energien häufig in Energiegebieten liegen, die nicht groß gegen 0,5 MeV, der Ruheenergie des Elektrons, sind (der genaue Wert ist $mc^2 = 0{,}510976$ MeV). Wäre die Energie durchweg $\gg 0{,}5$ MeV, d. h. hätten die Elektronen nahezu Lichtgeschwindigkeit bei Verlassen des Kerns, wie etwa bei B^{12} (s. Tabelle 74), so könnte man aus der Theorie des „statistischen Gewichtsfaktors" (s. § 140) das Gesetz: $T_{1/2} E_0^5 = \text{const}$ herleiten. Mit anderen Worten, die Sargent-Kurven stellten in diesem Falle exakt gerade Linien dar. Das Ziel einer genaueren Theorie wird nun in erster Linie sein, einen theoretisch verständlichen Zusammenhang zwischen Zerfallszeit und Zerfallsenergie zu finden, der quantitativ das Richtige ergibt.
Es wird sich zeigen, daß auf Grund der Kernstruktur (das Schalenmodell wird als gültig angenommen) ein einziger Wert der fraglichen Konstanten für alle Beta-Strahler gar nicht zu erwarten ist. Die Beta-Strahler zerfallen in Klassen, wobei sich die einzelnen Klassen durch eine wohldefinierte Größe, den sog. ft-Wert oder die komparative oder reduzierte Lebensdauer, unterscheiden. f ist hier eine theoretisch angebbare Funktion von E_0 und Z (Kernladung des Tochterkerns) allein. Für große E_0 ergibt sich für f eine von Z praktisch unabhängige Funktion, und es gilt dann $f \approx E_0^5$. Man nennt ft deswegen die komparative Lebensdauer, weil sie für die Beta-Strahler aus einer Klasse (im obigen Sinne) wirklich vergleichbare Werte hat, auf die wir später noch zu sprechen kommen. Wie wir dann sehen werden, läuft die vorgenommene Klassifizierung der Beta-Strahler nach komparativen Lebensdauern im wesentlichen auf eine Klassifizierung nach dem Drehimpulsunterschied zwischen Mutterkern und Tochterkern hinaus. Eine Aufgabe der Theorie des Beta-Zerfalls wird es sein, die beobachteten geringen Schwankungen der ft-Werte innerhalb der einzelnen Klassen mit der Kernstruktur in Zusammenhang zu bringen.
Der theoretische Zusammenhang zwischen der Zerfallsenergie und der Zerfallszeit, d. h. die Theorie der komparativen Lebensdauern, ist eng mit dem sog. statistischen Gewichtsfaktor verknüpft, der, wie wir sehen werden, auch die in § 137 diskutierte Gestalt der Beta-Spektren bestimmt.

§ 140. Der statistische Gewichtsfaktor

Ein allgemeiner Zug aller Beta-Spektren ist (s. Abb. 287) ihre glockenförmige Gestalt. Die Elektronen können also die ganze beim Beta-Übergang freiwerdende Energie E_0 oder nur ihre Ruheenergie 0,51 MeV oder, was am wahrscheinlichsten

ist, irgend eine Energie E zwischen 0,51 eV und E_0 übernehmen, den Rest $E_0 - E$ erhält das Neutrino. Diese allgemeine Tatsache findet eine ganz einfache Erklärung. Aus der statistischen Mechanik ist bekannt, daß von allen Bewegungsmöglichkeiten zweier oder mehrerer Teilchen mit fester Gesamtenergie diejenigen von überwiegender Häufigkeit sind, die im Mittel der Gleichverteilung der Energie entsprechen. Analysiert man also in unserem Fall die Bewegung von Elektron und Neutrino, so wird man zuerst die entsprechenden Impulse p und p' als vorgegeben betrachten. (Wir wollen hier und im folgenden alle Bestimmungsstücke des Neutrinos zur bequemen Unterscheidung von denjenigen der Elektronen mit einem Strich versehen.)

Der Aufteilung der Zerfallsenergie E_0 in zwei Teile, E und $E' = E_0 - E$, korrespondiert eine gewisse Aufteilung der Impulsbeträge p und p'. Je kleiner E und damit p gewählt ist, desto kleiner ist der Bereich, den die Komponenten p_1, p_2, p_3 von p überstreichen können. Daraus ergibt sich: Die Größe des erreichbaren Volumens im Impulsraum ist eine monoton mit der Energie E anwachsende Funktion. Nehmen wir nun E so groß, daß $E_0 - E$ und damit p' sehr klein relativ zu p wird, so bleibt dem Neutrino nur eine ganz begrenzte Variationsmöglichkeit im Impulsraum – also: Eine möglichst große Bewegungsmöglichkeit beider Teilchen ist nur dann vorhanden, wenn keiner der beiden Partner in der Energieübernahme vor dem anderen ausgezeichnet ist.

Um dies quantitativ zu verfolgen, nehmen wir wie üblich an, daß die Wahrscheinlichkeit eines Prozesses (Zerfalls), der zu einem bestimmten Volumen im Phasenraum führt, direkt proportional zu diesem Volumen ist. Ist also nach dem Zerfall das Elektron im Raumelement dV mit einem Impuls zwischen p und $p + dp$ mit einer Richtung im Raumwinkelelement $d\Omega$ (für Neutrino entsprechend gestrichene Größen), dann ist das Volumen im Phasenraum

$$d\Phi = p^2\, dp\, d\Omega\, dV \cdot p'^2\, dp'\, d\Omega'\, dV'. \tag{140.1}$$

Mit $E' = E_0 - E = \sqrt{c^2 p'^2 + m_\nu^2 c^4}$ ($= cp'$ für $m_\nu = 0$) können wir dp' umrechnen:

$$dp' = \left(\frac{\partial p'}{\partial E_0}\right)_E dE_0 = \frac{E'}{c^2 p'}\, dE_0. \tag{140.2}$$

Für die Anzahl dn der Endzustände im Volumenelement $d\Phi$ erhalten wir demnach mit $m_\nu = 0$

$$dn = \frac{d\Phi}{(2\pi\hbar)^6} = \varrho(E_0)\, dE_0,$$

wo

$$\varrho(E_0) \propto p^2\, dp\, d\Omega\, dV \cdot p'^2\, d\Omega'\, dV' \tag{140.3}$$

die Anzahl der Endzustände im Energieintervall dE_0 oder die Dichte der Endzustände pro Einheits-Energieintervall ist.

Integrieren wir über die Raumvolumina, indem wir das gesamte System in einem Volumen V eingeschlossen denken, und über alle Winkel, so haben wir

$$\varrho(E_0) = \varrho(E_0, E) \propto p^2 p'^2\, dp, \qquad c^2p^2 = E^2 - m^2c^4, \quad c^2p'^2 = (E_0 - E)^2. \tag{140.4}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, daß für ein bestimmtes E_0 der Impulsbetrag p des Elektrons zwischen p und $p + dp$ liegt, ist also (bis auf einen unwesentlichen Proportionalitätsfaktor) gegeben durch das Produkt

$$p^2 p'^2\, dp \propto p^2 (E_0 - E)^2\, dp \propto pE (E_0 - E)^2\, dE. \tag{140.5}$$

Man sagt, (140.5) ist das *statistische Gewicht* für die Energieübernahme E von seiten des Elektrons oder, kürzer, (140.5) ist der *statistische Gewichtsfaktor*.
Oft wird der „Impuls“ p (d. h. Betrag des Impulses) und die Energie E in besonderen, der bequemeren Schreibweise wegen eingeführten Einheiten gegeben: Man dividiert dazu p durch mc (Ruhemasse des Elektrons mal Lichtgeschwindigkeit) und E durch mc^2 und führt die Symbole η und W ein, indem man setzt

$$\eta = \frac{p}{mc}, \tag{140.6}$$

$$W = \frac{E}{mc^2}, \qquad W_0 = \frac{E_0}{mc^2}. \tag{140.7}$$

Wir treffen die Übereinkunft, daß die Elektronen-Energie E auch die Ruheenergie des Elektrons enthält, und setzen

$$E = mc^2 + E_{\text{kin}}.$$

Dann ergibt die Gleichung (140.6) in Zusammenhang mit (140.7) nach der relativistischen Mechanik

$$W = (1 + \eta^2)^{1/2}.$$

Mit diesen Abkürzungen erhält der statistische Gewichtsfaktor z. B. die Form

$$\eta\, W (W_0 - W)^2\, dW = (W^2 - 1)^{1/2} (W_0 - W)^2\, W\, dW.$$

Da die Anzahl $N(p)$ bzw. $N(E$ der mit p bzw. E pro sec ausgesendeten Elektronen dem statistischen Gewichtsfaktor proportional ist, gibt uns (140.5) die Form des Impuls- bzw. Energiespektrums. Die dritte Schreibweise in (140.5) zeigt, daß bei $E = 0$ und $E = E_0$ Nullstellen vorliegen sollen und dazwischen ein Ansteigen und wieder Absinken des Spektrums erfolgen soll. Wir erhalten also qualitativ ein Bild wie in Abb. 287.
Um quantitativ das theoretische Spektrum mit dem experimentellen zu vergleichen, ist es zweckmäßig, die sog. Fermi-Kurie-Kurve (FK) zu zeichnen. Dabei geht man davon aus, daß nach (140.5)

$$N(p)\, dp = K^2 p^2 (E_0 - E)^2 dp \tag{140.8}$$

ist (K ist eine Konstante). Trägt man also die Größe

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2}} = K(E_0 - E) \tag{140.9}$$

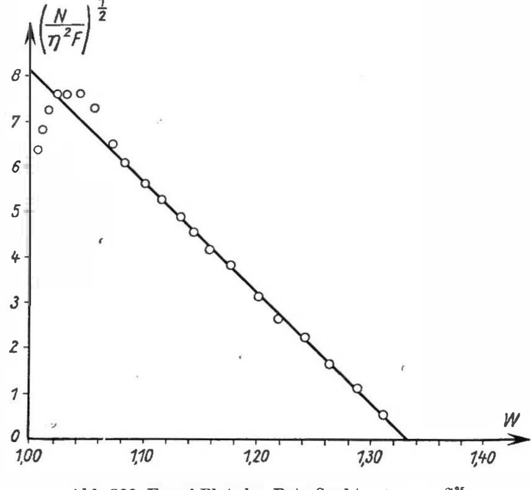


Abb. 288. Fermi-Plot des Beta-Spektrums von S^{35}

über E auf, sollte sich eine Gerade ergeben, wenn für $N(p)$ die Anzahl der gemessenen Elektronen vom Impuls p eingesetzt wird. Dies zeigt Abb. 288 für das Beta-Spektrum von S^{35}. (Allerdings wurde dabei durch den Faktor F noch eine Coulomb-Korrektion angebracht, auf die wir später eingehen werden.) Man sieht, daß abgesehen vom Gebiet kleiner Energien, wo verschiedene experimentelle Fehler die genaue Messung des Spektrums verhindern, das Spektrum recht gut einer Geraden folgt. Mit Hilfe dieser Geraden kann der genaue Wert von E_0 (W_0) als Schnittpunkt mit der Achse durch Extrapolation wesentlich genauer bestimmt werden, als durch direkte Messung.

§ 141. Die Fermische Theorie

Wir haben jetzt zwei Aufgaben zu bewältigen. Erstens müssen wir den Proportionalitätsfaktor K in (140.8) noch etwas genauer untersuchen. Zweitens ist ein plausibler Ansatz für die Wechselwirkungsenergie des β-Zerfalls anzugeben, eine Aufgabe, die Fermi erstmals gelöst hat (1934).

Nach der quantenmechanischen Störungstheorie hat man für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit

$$d\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \varrho(E_0). \tag{141.1}$$

Darin ist H_{if} das Matrixelement der Wechselwirkung H, die für den Übergang $i \rightarrow f$ verantwortlich ist, $\varrho(E_0)$ ist die bereits in (140.3), (140.4) berechnete Dichte der Endzustände pro Einheits-Energieintervall. Danach ist

$$d\gamma(E_i E_0) = N(E_i E_0)\, dE = \mathrm{const}|H_{if}|^2\, pE(E_0 - E)^2\, dE. \tag{141.2}$$

Für den Ausdruck, der vor dem statistischen Gewichtsfaktor steht, schreibt man üblicherweise

$$\mathrm{const} \cdot |H_{if}|^2 = \frac{\ln 2}{T_0} |M|^2, \quad M \propto H_{if}. \tag{141.3}$$

Darin ist M eine dimensionslose Größe, das sog. *Kernmatrixelement*; es ist der Teil von H_{if}, der nur durch die Kernstruktur bestimmt ist. T_0 ist eine universelle „Halbwertszeit". Ihr kommt an sich keine direkte experimentelle Bedeutung zu. Ihre Einführung ist aber einmal wegen der bequemen dimensionslosen Schreibweise sehr zweckmäßig; zum anderen kann man sie als eine für den β-Zerfall schlechthin charakteristische Zeit ansehen, worauf wir noch zurückkommen werden. Endgültig haben wir als differentielles Energiespektrum

$$N(E)\, dE = \frac{\ln 2}{T_0} |M|^2\, pE(E_0 - E)^2\, dE. \tag{141.4}$$

Wir kommen jetzt zu der Beantwortung der zweiten der beiden oben gestellten Fragen, nämlich zur Frage nach der Form der Wechselwirkungsenergie H, durch die der Beta-Übergang induziert wird.

FERMI hat auf Grund allgemeiner feldtheoretischer Überlegungen gezeigt, daß H im wesentlichen das Produkt aus den Wellenfunktionen aller vier bei dem Beta-Zerfall beteiligten Teilchen ist, d. h., das Produkt aus den Wellenfunktionen des Protons und Neutrons im Kern, die sich auf Grund der Beta-Wechselwirkung ineinander umwandeln, und der beiden Leptonen. Das ist einigermaßen plausibel, denn da nach (141.2) die Übergangswahrscheinlichkeit $\propto |H|^2$ ist, wird sie bei diesem Ansatz

$$\propto |\psi_P(\mathfrak{r})|^2 \, |\psi_N(\mathfrak{r})|^2 \, |\psi(\mathfrak{r})|^2 \, |\psi'(\mathfrak{r})|^2, \tag{141.5}$$

also proportional der Wahrscheinlichkeit, alle vier beteiligten Teilchen an der Stelle $\mathfrak{r}$ anzutreffen (wobei noch über das gesamte Kernvolumen integriert werden muß). Eine wirkliche Begründung dieser Annahme kann jedoch im Rahmen einer hier vorgetragenen elementaren Theorie nicht gegeben werden; der interessierte Leser findet aber alle nötigen Informationen in der Originalarbeit von FERMI oder Lehrbüchern der theoretischen Kernphysik, die über alle diesbezüglichen Fragen erschöpfende Auskunft geben. Wir haben also

$$H = G \int \psi_P^* \, \psi_N \, \psi^* \, \psi' \, d\tau. \tag{141.6}$$

In (151.6) ist G die Kopplungskonstante für den Beta-Zerfall, d. h. die Konstante, die die Stärke der β-Wechselwirkung angibt. Sie hat in unserer Theorie eine ganz ähnliche Bedeutung wie die Ladung des Elektrons bei der Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes (z. B. Compton-Effekt oder Paarbildung). Man hätte genaugenommen in (141.6) noch eine Summe über sämtliche Nukleonen im Kern hinschreiben müssen, was aber in der hier skizzierten Theorie nicht wesentlich ist. Die in (141.6) angedeutete Integration bezieht sich auf das gesamte Kernvolumen.

Das in (141.3) eingeführte Kernmatrixelement M ist so definiert, daß es die Kopplungskonstante G nicht enthält: $H_{if} \propto G \cdot M$; nach (141.3) wird deshalb $T_0 \propto \frac{1}{G^2}$. Die an sich triviale Bestimmung des Proportionalitätsfaktors zwischen T_0 und $\frac{1}{G^2}$ ist für unsere weiteren Zwecke nicht notwendig. Nach den empirischen Daten ergab sich für T_0 eine Zeit von der Größenordnung einer Stunde. Bedenkt man nun, daß die Kernperiode von der Größenordnung von etwa 10^{-22} sec ist, so muß man folgern, daß „vom Standpunkt des Kerns aus der β-Zerfall praktisch nie geschieht" (RUTHERFORD). Wegen der relativ außerordentlichen Größenordnung von T_0 ist also die Stärke G der Beta-Wechselwirkung sehr klein gegenüber den anderen in der Kernphysik auftretenden Wechselwirkungen. Das ist auch der Grund, weswegen man bei der Aufstellung eines Kernmodells die Beta-Wechselwirkungskräfte (ähnlich wie die Gravitationskräfte) vollständig vernachlässigen kann.

Wir gehen jetzt dazu über, eine Formel für die Halbwertszeiten herzuleiten, wie man sie empirisch beobachtet. Zu diesem Zwecke müssen wir den Ausdruck (141.4) für das differentielle Energiespektrum über alle möglichen Energien der Elektronen integrieren.

Dazu führen wir zunächst durch

$$Q = \frac{1}{W_0} \tag{141.7}$$

die dimensionslose Energievariable Q ein und haben als Gesamtübergangswahrscheinlichkeit pro sec dafür, daß ein β-Zerfall wirklich stattfindet,

$$\int_{mc^2}^{E_0} N(E)\,dE = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\,. \tag{141.8}$$

Mit (141.4) ergibt sich nach einer etwas umständlichen aber elementaren Integration für die reziproke Halbwertszeit ein Ausdruck, den wir in folgender Form schreiben wollen:

$$\frac{1}{T_{1/2}} = \frac{|M|^2}{T_0}\,\frac{W^5}{30}\,J(Q). \tag{141.9}$$

Darin bedeuten $T_{1/2}$ die gemessene Halbwertszeit und $J(Q)$ eine Funktion von Q (der Faktor $\frac{1}{30}$ in Formel (141.9) ist nur zu dem Zwecke eingeführt, damit $J(Q)$ möglichst einfach wird; es ist dann nämlich $J(Q) = 1$ für $Q = 0$). Abb. 289 stellt $J(Q)$ als Funktion von Q dar.

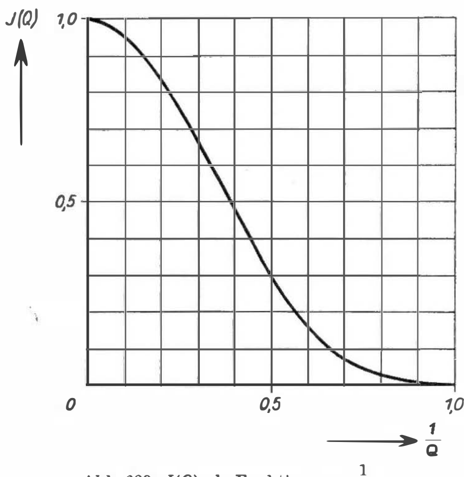


Abb. 289. $J(Q)$ als Funktion von $\frac{1}{Q}$

Bei der Herleitung der Formel (141.9) haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß das Matrixelement M nicht merklich von E' und E abhängt. Wir setzen zur Abkürzung

$$f(Q) = \frac{W_0^5}{30}\,J(Q) \tag{141.10}$$

und bekommen dann aus (141.9) ($T_{1/2}$ kürzen wir mit t ab!):

$$ft = \frac{T_0}{|M|^2}\,. \tag{141.11}$$

In dieser Formel bedeutet t die Halbwertszeit des betreffenden betainstabilen Kerns, M das Kernmatrixelement, das dem betrachteten Beta-Übergang korrespondiert, T_0 ist die universelle „Halbwertszeit" (s. oben). Die Größe ft ist der „ft-Wert" oder die „komparative Lebensdauer". ft kann bei experimentell bekannter Zerfallsenergie E_0 (bzw. Q nach Formel (141.7)) und Zerfallszeit t theoretisch bestimmt werden, wie aus dem Obigen hervorgeht. Damit kann man dann nach (141.11) das Kernmatrixelement M berechnen. Für größere Werte der Kernladungszahl Z muß aber noch eine Korrektur („Coulomb-Korrektur") angebracht werden, auf die wir in § 142 zu sprechen kommen.

Aus (141.10) und Abb. 289 findet man leicht, daß für große $E_0 (Q \to 0)$ der ft-Wert $\propto E_0^5$ wird, wie bereits früher erwähnt wurde.

§ 142. Präzisierung des statistischen Gewichtsfaktors

Bei der Bestimmung des statistischen Gewichtsfaktors in den beiden vorhergehenden Paragraphen hatten wir noch zwei Effekte außer acht gelassen, die ihn gegenüber der besprochenen einfachen Gestalt modifizieren können. Der erste

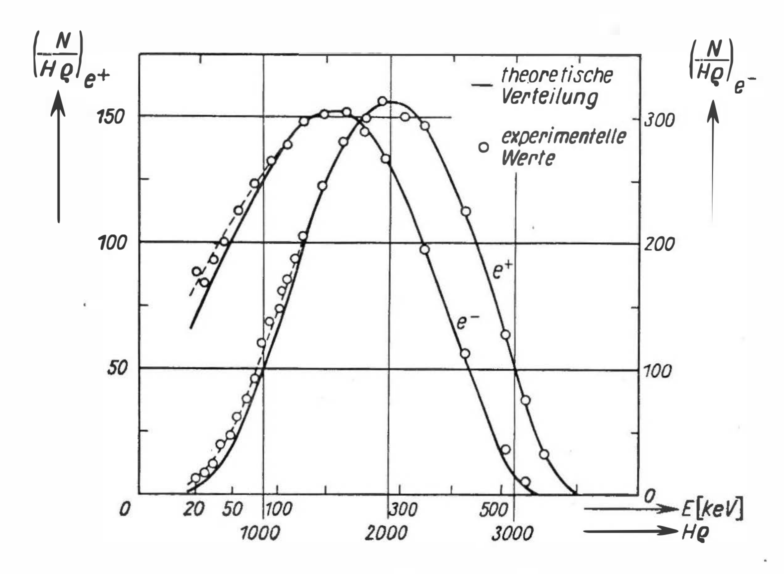


Abb. 290. Das Spektrum des $\beta^{\pm}$- und β^{-}-Zerfalls von Cu^{64}

dieser beiden Effekte, den wir bereits in § 141 erwähnt hatten, rührt von den Coulomb-Kräften her und kann namentlich für große Kernladung Z die Gestalt des Beta-Spektrums (insbesondere bei kleinen Beta-Energien) sowie die ft-Werte merklich modifizieren. Er wird spürbar etwa ab $Z = 20$.

Wir wollen das am Beispiel des Beta-Zerfalls von Cu^{64} illustrieren, bei dem Positronen- und Negatronen-Zerfall mit vergleichbarer Häufigkeit vorkommen (ein an sich seltener Fall!). Zu diesem Zwecke geben wir in der Abb. 290 die beiden entsprechenden Spektren wieder. (Man beachte, daß die beiden Spektren hier verschiedene Ordinatenskalen haben, damit beide in dieselbe Figur passen!)

Der Coulomb-Effekt ist in diesem Beispiel besonders deutlich zu erkennen. Er bringt es nämlich mit sich, daß β^{+}-Zerfall und β^{-}-Zerfall gesondert behandelt werden müssen.

Zur Erläuterung gibt die Abb. 291 die Wellenfunktionen ψ für ein positiv geladenes Elektron (+), ein fiktives ungeladenes Elektron (0) und ein negativ geladenes Elektron (−) im Coulomb-Feld eines Kerns bei gleicher Energie für die

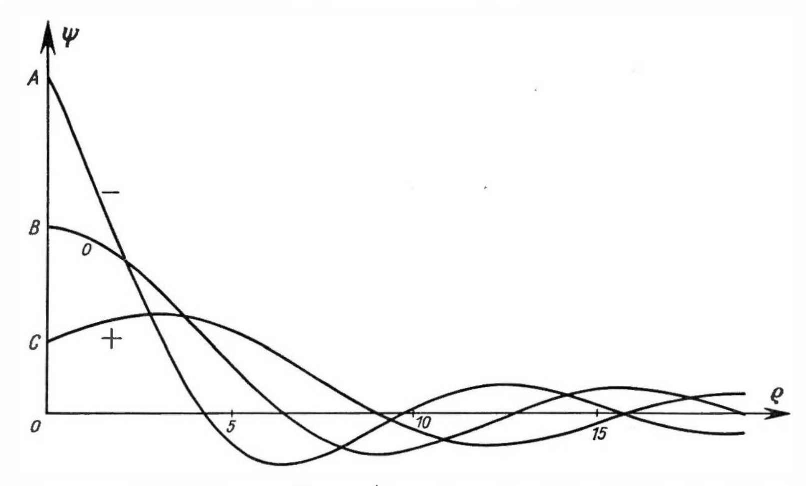


Abb. 291. Wellenfunktionen ψ für positiv (+), nicht (0) und negativ geladenes (−) Elektron

drei Teilchen (und Drehimpuls 0).[1]) Bei großem Abstand (in der Abb. 291 rechts) sind die Amplituden gleich. Die physikalische Ausdeutung heißt in diesem Bereich: Es fliegt ein positiv, nicht oder negativ geladenes Elektron weg. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Emissionsakt ausgelöst wird, ist jedoch nach (141.5) dem Quadrat von ψ im Kern, also dem Quadrat der Ordinate bei $\varrho = 0$ proportional. Die Emissionswahrscheinlichkeit für ein Elektron (Positron) ist also um den Quotienten

$$F = \frac{|\psi_-(0)|^2}{|\psi_0(0)|^2} = \left(\frac{\text{Ordinate von } A}{\text{Ordinate von } B}\right)^2, \qquad = \frac{|\psi_+(0)|^2}{|\psi_0(0)|^2} = \left(\frac{\text{Ordinate von } C}{\text{Ordinate von } B}\right)^2 \tag{142.1}$$

für Elektron für Positron

größer (kleiner) als die Emissionswahrscheinlichkeit eines fiktiven ungeladenen Elektrons. Zur Berücksichtigung des Coulomb-Effekts muß also die Emissionswahrscheinlichkeit mit $F = F(Z, E)$ multipliziert werden. Man kann F im unrelativistischen Fall einigermaßen elementar berechnen und findet

$$F = \frac{2\pi \frac{Ze^2}{\hbar v}}{1 - \exp\left(-2\pi \frac{Ze^2}{\hbar v}\right)}, \qquad = \frac{2\pi \frac{Ze^2}{\hbar v}}{\exp\left(+2\pi \frac{Ze^2}{\hbar v}\right) - 1}$$

für Elektron für Positron

(Z = Kernladung, v = Elektronen- oder Positronengeschwindigkeit in großer Entfernung vom Kern). Dieser Faktor $F(Z, E)$ – in (140.8) (und (141.4)) rechts eingefügt – wurde in Abb. 288 berücksichtigt.

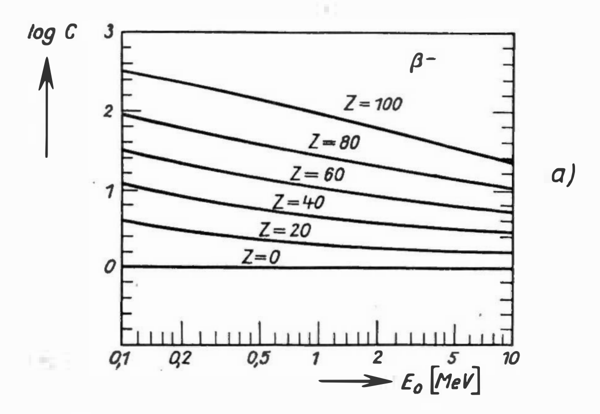
[1]) Die Abb. 291 gibt Lösungen von

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d^2}{d\varrho^2}(\varrho\psi) + \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{\varrho}\right)\psi = 0 \quad \text{mit} \quad k = +\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}.$$

Zur Berücksichtigung des besagten Effektes ist man allgemein übereingekommen, einen „modifizierten" f-Wert einzuführen, der sich von dem alten f (ohne Berücksichtigung des Coulomb-Effektes berechnet) nur durch einen Faktor C unterscheidet:

$$f_{\pm} = C f. \qquad (142.2)$$

Die wirkliche Ausrechnung des „Korrektur"-Faktors C in Formel (142.2) ist besonders bei relativistischer Rechnung sehr umständlich (obgleich der Effekt an sich trivial ist) und kann nur mit modernen Rechenmaschinen bewältigt werden, wenn es auf einigermaßen genaue Werte ankommt. Das Ergebnis der Rechnung wollen wir graphisch wiedergeben. Zu diesem Zweck ist in den Abb. 292a und 292b der $\log C$ gegen die Zerfallsenergie E_0 (in MeV) für die beiden hier interessierenden Fälle des Positronen- und Negatronen-Zerfalls aufgetragen. Wie man daraus erkennt, wird der Coulomb-Effekt tatsächlich (wie vorhin behauptet) erst ab $Z = 20$ merklich.



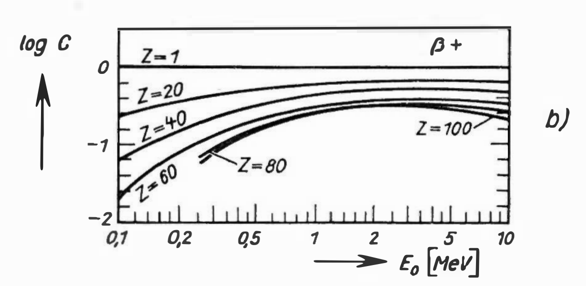


Abb. 292. log C als Funktion von E_0 für β^-- und β^+-Zerfall

In der Abb. 293 bringen wir noch die FK-Plots der beiden Cu^{64}-Beta-Spektren aus Abb. 290 nach Anbringen der Coulomb-Korrektur. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, daß sich sogar in diesem Fall, wo Z noch nicht sehr groß gegen 20 ist, ganz falsche (etwa 10 Prozent zu große) Grenzenergien ergeben hätten, wenn man die Korrektur nicht angebracht hätte.

Wir kommen jetzt zu dem zweiten, zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Effekt. Dieser besteht in folgendem: Die Größe des von den Leptonen eingenommenen Phasenraumvolumens in Formel (140.1) wird nicht nur durch die soeben besprochenen elektrostatischen Kräfte beeinflußt. Es treten vielmehr auch noch (namentlich, wenn der Drehimpuls des Ausgangskerns groß ist) Zentrifugalkräfte in Erscheinung. Das berücksichtigt man wiederum dadurch, daß man den statistischen Gewichtsfaktor mit $2 I_i + 1$ multipliziert. Dieser zweite Effekt ist aber bisher schwer experimentell nachzuweisen und hat daher nur geringe Bedeutung, weswegen wir uns nicht mit ihm aufhalten wollen. Er ist

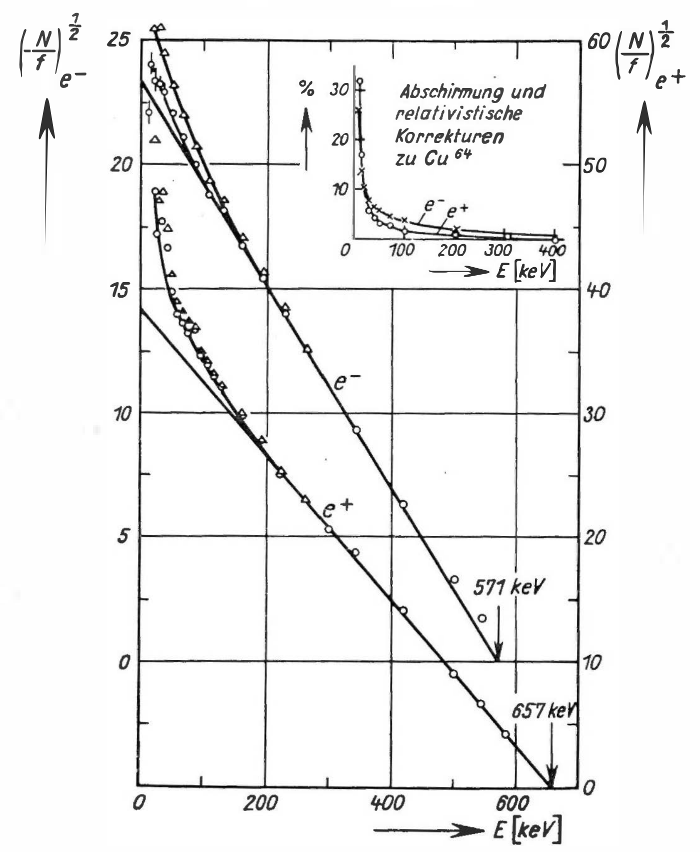


Abb. 293. *FK*-Plots für Cu^{64} (○ mit Korrektur, △ ohne Abschirmung und relativistische Korrekturen)

nämlich von derselben Größenordnung wie die Schwankungen des Matrixelementes M, wenn man von einem betaaktiven Kern zu einem benachbarten betaaktiven Kern übergeht. Weiterhin sind, insbesondere bei den leichtesten Kernen, die verfügbaren Daten, wie Grenzenergie und Zerfallszeit, in vielen Fällen noch zu ungenau bekannt, als daß es sich lohnte, theoretische Feinheiten von der obigen Art eingehender zu diskutieren.

§ 143. Die möglichen Formen der Beta-Wechselwirkung

Wir wenden uns jetzt eingehender der Matrix M zu, die wir in Formel (141.3) eingeführt hatten und die, bis auf einen jetzt unwesentlichen Dimensions- und Zahlenfaktor mit dem Matrixelement H_{if} des Operators H der Beta-Wechselwirkung identisch ist. Der Dimensionsfaktor ist so gewählt, daß M dimensionslos wird.

Die selbstverständliche Forderung, die man an den Operator H stellen muß, ist, daß er gegenüber einer eigentlichen[1]) Lorentz-Transformation invariant ist, denn andernfalls ließe sich leicht ein mit dem Beta-Zerfall zusammenhängendes Experiment ausdenken, das es erlaubte, z. B. eine absolute Zeit zu bestimmen, was ja nach den Prinzipien der Relativitätstheorie unmöglich ist. Außerdem wollen wir vorläufig eine zweite Forderung stellen, die bis etwa 1955 für ebenso selbstverständlich galt: Daß H invariant gegenüber (räumlichen) Spiegelungen ist, da sonst ein bestimmter Schraubensinn ausgezeichnet würde. Wir kommen auf diese zweite Forderung im § 145 zurück. (Die erste Forderung bedeutet, daß H ein Skalar oder Pseudoskalar (im vierdimensionalen $\mathfrak{r}$-t-Raum) sein muß. Die zweite läßt davon nur den Skalar übrig: $H =$ Skalar.)
Es gibt, wie sich zeigen läßt, im ganzen 5 Formen der Beta-Wechselwirkung, die diesen Forderungen genügen. Die durch die Formel (141.6) dargestellte Wechselwirkung ist eine dieser Möglichkeiten, und zwar die einfachste. Wir bezeichnen sie, der üblich gewordenen Terminologie folgend, als skalare Wechselwirkung oder Kopplung.
Eine zweite Möglichkeit ist die sog. Vektorkopplung, die ein geläufiges elektromagnetisches Analogon besitzt. Wir denken uns eine bewegte Punktladung in einem beliebigen elektromagnetischen Feld. Man kann dann sagen, das Teilchen ist an ein Maxwell-Feld gekoppelt, in Analogie zur Vektor-Kopplung beim Beta-Zerfall, wo das Nukleon an das Leptonen-Feld gekoppelt ist.
Das von der Punktladung durchlaufene elektromagnetische Feld wird üblicherweise durch einen (Vierer-)Vektor $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_t$ beschrieben, wobei die zeitliche Komponente φ_t das gewöhnliche skalare (elektrostatische) Potential darstellt, und die übrigen Komponenten $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ die des Vektorpotentials sind, aus dem sich durch Rotorbildung in bekannter Weise das Magnetfeld berechnen läßt. Der Vektor, der das geladene Teilchen charakterisiert, ist der bekannte Viererstrom, dessen ersten drei Komponenten j_x, j_y, j_z die gewöhnliche elektrische Stromdichte bilden, und dessen vierte Komponente im wesentlichen die Ladungsdichte ist: $j_t = c\varrho$.
Die Energie des Teilchens im Feld, also die „Kopplungsenergie" des Teilchens an das Feld müssen wir dann als Skalar in folgender Form (Skalarprodukt im Vierdimensionalen) schreiben:

$$\mathcal{H} = j_x \varphi_x + j_y \varphi_y + j_z \varphi_z - j_t \varphi_t, \tag{143.1}$$

$$H = \int \mathcal{H} \, d\mathfrak{r}.$$

Bemerkenswert ist an diesem Ausdruck, daß, falls elektrisches und magnetisches Feld (beide etwa im elektrostatischen Maßsystem gemessen) von gleicher Größenordnung sind, der Teil von $\mathcal{H}$, der vom Magnetfeld herrührt (also die ersten drei

[1]) Mit eigentlichen Transformationen bezeichnet man diejenigen, die sich stetig in die identische überführen lassen, d. h. keine Spiegelungen enthalten.

Terme), im Verhältnis zum elektrostatischen Teil (letzter Term) von der Größenordnung $\frac{v}{c}$ ist:

$$\frac{v}{c} = \frac{\text{Geschwindigkeit des Teilchens}}{\text{Lichtgeschwindigkeit}}.$$

Im „unrelativistischen" Fall, d. h. im Falle, daß sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit bewegt, die klein gegen c ist, reduziert sich H praktisch auf den letzten (elektrostatischen) Term.

Bei der Beta-Wechselwirkung verhält es sich ganz ähnlich: Die Vektorkopplung hat genau die Form (143.1), nur setze man $j_x, \ldots$ bzw. $\varphi_x, \ldots$ gleich den aus der entsprechenden relativistischen Wellengleichung (Dirac-Gleichung) folgenden Strömen (Wahrscheinlichkeitsströmen) für die Nukleonen bzw. Leptonen. Wir wissen überdies, daß sich die Nukleonen im Kern „unrelativistisch" verhalten, d. h., daß ihre mittleren Bewegungen praktisch mit Geschwindigkeiten erfolgen, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Die Vektorwechselwirkung reduziert sich also auch hier auf einen einzigen Term.

Man kann neben dem skalaren Produkt zweier Vierervektoren noch mehr relativistische Invarianten herstellen. Wie gesagt, gibt es im ganzen fünf Invarianten dieser Art. Der Vollständigkeit halber stellen wir sie, allerdings ohne Begründung, die hier zu weit führen würde, in folgender Übersicht zusammen:

(*S* Skalar-)
V Vektor-
(*T* Tensor-) -Kopplung
A Axialvektor-
(*P* Pseudoskalar-)

Nur die nichteingeklammerten Wechselwirkungstypen scheinen aber nach neueren experimentellen und theoretischen Untersuchungen in der Natur eine Rolle zu spielen. Die diesbezüglichen äußerst interessanten, geschichtlich wichtigen Diskussionen hier zu besprechen, würde aber außerhalb des Rahmens unserer Darstellung fallen.

Wir bemerken noch, daß die Axial-Wechselwirkung, die (zusammen mit der Tensor-Wechselwirkung) üblicherweise als Gamow-Teller-Wechselwirkung bezeichnet wird, sich in unrelativistischer Näherung im Gegensatz zur Vektorwechselwirkung auf die räumlichen Terme im Skalarprodukt reduziert, und daß die Wechselwirkungsmatrizen einfach durch die Paulischen Spinmatrizen beschrieben werden.

§ 144. Erlaubte und verbotene Übergänge

Wie wir in § 139 gesehen hatten, klassifiziert man die Beta-Übergänge nach den zugehörigen ft-Werten oder komparativen Lebensdauern. Um große Zahlenwerte zu vermeiden, ist es üblich geworden, lieber die gewöhnlichen Logarithmen der ft-Werte anzugeben, also $\log ft$. In der folgenden Tabelle 74 sind aus dem umfangreichen experimentellen Material einige Beta-Zerfälle zusammengestellt, und

Tabelle 74. log *ft*-Werte *für einige Beta-Zerfälle*

A			log ft	Parität geändert	$\|I_f - I_i\|$	Auswahl-regeln
	erlaubte Übergänge					
33	P → S	$s_{1/2} \to d_{3/2}$	5,05			
35	S → Cl	$d_{3/2} \to d_{3/2}$	4,98			
37	S → Cl	$d_{3/2} \to d_{3/2}$	5,00	nein	0,1	erlaubt
39	Ar → K	$f_{7/2} \to f_{7/2}$	5,10			
53	Fe → Mn	$f_{7/2} \to f_{7/2}$	4,80			
111	Sn → In	$g_{7/2} \to g_{9/2}$	4,69			
	einfach verbotene Übergänge					
85	Kr → Rb	$g_{9/2} \to f_{5/2}$	9,2			
113	Cd → In	$h_{11/2} \to g_{9/2}$	8,75	ja	1,2	einfach verboten
125	Sn → Sb	$h_{11/2} \to g_{7/2}$	8,88			
133	J → Xe	$g_{7/2} \to h_{11/2}$	9,10			
	zweifach verbotene Übergänge					
93	Zr → Nb	$d_{5/2} \to g_{9/2}$	11,58			
99	Tc → Ru	$g_{9/2} \to d_{5/2}$	12,27	nein	2,3	zweifach verboten
129	J → Xe	$g_{7/2} \to d_{3/2}$	13,38			
137	Cs → Ba	$g_{7/2} \to d_{3/2}$	11,99			
	dreifach verbotene Übergänge					
87	Rb → Sr	$g_{9/2} \to p_{3/2}$	17,56	ja	3,4	dreifach verboten
115	In → Sn	$g_{9/2} \to s_{1/2}$	23,02			

zwar ist eine Ordnung nach den empirisch bestimmten log ft-Werten vorgenommen. Die erste Spalte gibt die Massenzahl, die zweite enthält Mutter- und Tochterkern in der üblichen Bezeichnungsweise, die dritte Spalte gibt die spektroskopische Bezeichnung von Anfangs- und Endzustand, die durch das Schalenmodell wahrscheinlich gemacht ist. In der vierten Spalte sind die log ft-Werte angegeben. Die beiden letzten Spalten geben die den Übergängen entsprechenden Auswahlregeln. Man sieht hier deutlich, daß sich die Übergänge wirklich in sich stark in ihren ft-Werten unterscheidende Klassen einteilen lassen, wobei die ft-Werte innerhalb der einzelnen Klassen nur relativ geringen Schwankungen unterworfen sind.

Worin besteht nun diese Klassifizierung? Diese Frage ist nicht schwer zu beantworten, wenn man bedenkt, daß die Größenordnung des ft-Wertes einzig

durch das Matrixelement in (141.11) bestimmt ist. Je nach der Größenordnung des Matrixelementes M spricht man von „Verbotenheitsgraden". Diese Terminologie ist aus der Theorie der gewöhnlichen Atomspektren bekannt, wo man ja auch von verbotenen Übergängen spricht, wenn das Matrixelement, durch das die Intensität einer Spektrallinie bestimmt ist, zufällig sehr klein ist.
Der Begriff „verboten" ist nach experimentellen Gesichtspunkten geprägt worden und soll nichts anderes heißen, als daß die nicht verbotenen (d. h. die „erlaubten") Übergänge in überwiegender Anzahl beobachtet werden können. Man kann sich als Regel merken, daß ein Übergang mit etwa 1 Prozent relativer Häufigkeit im Experiment als verboten gelten kann, wenn er mit dem erlaubten genau parallel geht, also dieselben Niveaus verbindet.
Die Übergänge mit den niedrigsten ft-Werten (größten Übergangswahrscheinlichkeiten) sind die „erlaubten" Übergänge. Bei ihnen verlassen die beiden Leptonen, Elektron und Neutrino, den Kern in Zuständen mit dem Bahndrehimpuls $l = 0$ (d. h. als s-Wellen).
Die Begründung der in der Tabelle 74 angegebenen Auswahlregeln ist ziemlich kompliziert, wir wollen darauf nicht näher eingehen, erwähnen aber die Regeln für erlaubte Übergänge, die sog. Fermi- und Gamow-Teller-Auswahlregeln.

$$\text{Fermi:} \qquad I_i = I_f, \qquad \text{kein Paritätswechsel;}$$

$$\text{Gamow-Teller:} \quad I_i = \begin{cases} I_f + 1, \\ I_f, \\ I_f - 1, \end{cases} \qquad \text{kein Paritätswechsel.}$$

Bei Fermi-Übergängen wird das Leptonenpaar im Singulettzustand emittiert (Spins von e und ν antiparallel), bei Gamow-Teller-Übergängen im Triplettzustand (Spins parallel). (Fermi-Übergänge werden von der Skalar- und Vektor-Kopplung verursacht, Gamow-Teller-Übergänge von der Axialvektor- und Tensor-Kopplung. Die Pseudoskalar-Kopplung trägt zu erlaubten Übergängen nicht bei.)

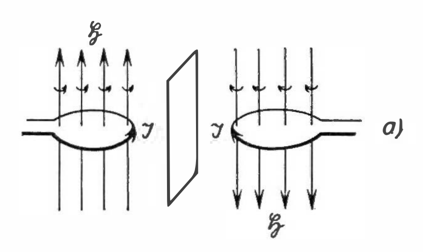
§ 145. Paritätsverletzung beim β-Zerfall

Wir kommen abschließend zu einer kurzen und nur qualitativen Darstellung der neueren Entwicklung der Theorie des β-Zerfalls, die etwa 1956 begann und zu der Entdeckung führte, daß die β-Wechselwirkung (und wahrscheinlich alle schwachen Wechselwirkungen überhaupt) einen Schraubensinn auszeichnen oder, was gleichbedeutend damit ist, die Parität nicht erhalten. Zunächst war der Gedanke der Paritätsverletzung von Lee und Yang [L 56-1] rein theoretisch daraus abgeleitet worden, daß das Θ-Meson und das τ-Meson in Zustände entgegengesetzter Parität zerfallen, aber in allen übrigen Eigenschaften ununterscheidbar sind (Herbst 1956). Sie nahmen deshalb an, daß beide Teilchen identisch sind: $\Theta \equiv \tau \equiv$ „K-Meson". Dieses K-Meson zerfällt demnach (durch $K \to 2\pi$ und $K \to 3\pi$) in Zustände entgegengesetzter Parität, folglich

muß in mindestens einem der beiden Zerfälle der Erhaltungssatz der Parität verletzt sein.

Das legt nahe, bei anderen, experimentell besser zugänglichen schwachen Wechselwirkungen ebenfalls nach einer Paritätsverletzung zu suchen. LEE und YANG schlugen deshalb zur Prüfung ihrer Hypothese Experimente zum Nachweis der Paritätsverletzung, z. B. beim β-Zerfall bzw. beim $\pi \to \mu \to e$-Zerfall, vor. Bereits im Frühjahr 1957 zeigten die ersten dieser Experimente von Frau WU und Mitarbeitern [W 57-1] für den β-Zerfall und von GARWIN, LEDERMANN und WEINRICH [G 57-1] für den $\pi - \mu - e$-Zerfall, daß auch bei diesen Zerfällen Paritätsverletzung vorliegt (und außerdem Verletzung der Invarianz gegenüber der Operation „Ladungskonjugation").

Um zunächst zu zeigen, wie sich die Paritätsverletzung experimentell äußert, vergleichen wir das Wu-Experiment mit einem elektromagnetischen Vorgang. Abb. 294a zeigt links die Erzeugung eines Magnetfelds durch eine Stromschleife. Spiegeln wir den Vorgang nach rechts, wird zunächst die Umlaufsrichtung von J umgekehrt.¹) Aber auch $\mathfrak{H}$ kehrt sich um, denn wir dürfen nicht vergessen, daß $\mathfrak{H}$ ein axialer Vektor ist, der eigentlich nicht durch eine Richtung, sondern durch einen Umlaufssinn gekennzeichnet werden muß. Wir haben das durch die kleinen Pfeile um die $\mathfrak{H}$-Linien angedeutet: Sie sind zu spiegeln und danach die „Richtung" von $\mathfrak{H}$ nach der Spiegelung neu festzulegen.²)



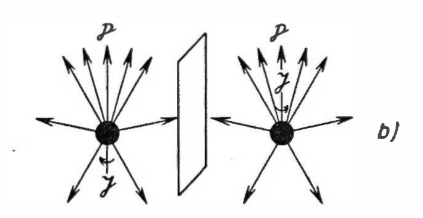


Abb. 294. Spiegelung a) einer Stromschleife mit Magnetfeld, b) des Wu-Experiments

Die Spiegelung führt also einen elektromagnetischen Vorgang in einen gespiegelten über, der, wie man leicht sieht, ebenfalls in der Natur vorkommt, also möglich ist. In diesem Fall liegt Paritätserhaltung vor; Paritätsverletzung dagegen haben wir dann, *wenn das Spiegelbild eines Vorgangs kein möglicher Vorgang ist.* Dieser merkwürdige Sachverhalt liegt z. B. beim Wu-Experiment vor.

WU und Mitarbeiter richteten Co^{60}-Kerne durch ein äußeres Magnetfeld folgendermaßen aus: Auf der Oberfläche eines Ce-Mg-Nitrat-Einkristalls ließen sie eine dünne Kristallschicht aufwachsen, der Co^{60} zugesetzt wurde. Der Kristall wurde durch flüssiges Helium gekühlt und durch adiabatische Entmagnetisierung auf

---

¹) Wir spiegeln hier an einer Ebene, während die eigentliche Paritätsoperation Spiegelung am Koordinatenursprung, d. h. an 3 senkrecht zueinander stehenden Ebenen, ist. Es gilt aber: Spiegelung an einer Ebene = Paritätsoperation + Drehung um 180° um eine Achse senkrecht zu dieser Ebene.

²) Die „Richtung" von $\mathfrak{H}$ ist so definiert, daß sie mit dem die Feldstärke $\mathfrak{H}$ eigentlich darstellenden Umlaufssinn stets eine Rechtsschraube bildet.

etwa 0,01 °K gebracht. Ein äußeres schwaches Magnetfeld richtete dann zunächst die Elektronen im Kristall teilweise aus, und die dadurch am Kernort erzeugten Magnetfelder bewirkten schließlich die Ausrichtung der Kerne („Rose-Gorter-Methode").

Sie beobachteten nun die Richtungsverteilung der beim Zerfall des Co^{60} ausgesandten β^--Teilchen gegenüber der Richtung des magnetischen Moments und damit des „Spins" der ausgerichteten Kerne und fanden bevorzugte Elektronenemission entgegengesetzt zum „Kernspin" $\mathfrak{J}$ (Abb. 294b links).[1] Spiegeln wir diesen Vorgang, dann kehrt sich $\mathfrak{J}$ um (Drehimpuls = axialer Vektor), die Richtungsverteilung der Elektronen dagegen nicht (Impuls $\mathfrak{p}$ = polarer Vektor), und wir erhalten rechts einen Vorgang, der in der Natur nicht auftritt, also nicht möglich ist: Bevorzugte Elektronenemission parallel zum Kernspin $\mathfrak{J}$.

Damit sehen wir auch, daß Paritätsverletzung gleichbedeutend mit der *Auszeichnung eines Schraubensinnes* ist: Vorzugsrichtung der Elektronen und Umlaufssinn des als Eigenrotation aufgefaßten Kernspins definieren eine Linksschraube (Abb. 294b links), während die Rechtsschraube (Abb. 294b rechts) in der Natur nicht auftritt. (Allerdings muß man dabei vorsichtig sein, denn auch in Abb. 294a definieren $\vec{J}$ und $\mathfrak{H}$ „offensichtlich" links eine Rechtsschraube, rechts ebenfalls eine Rechtsschraube, woraus man schließen würde, daß elektromagnetische Vorgänge den Rechtsschraubensinn bevorzugen. Der Fehler ist, daß wir nicht beachtet haben, daß $\mathfrak{H}$ gar keine Richtung, sondern nur einen Umlaufssinn auszeichnet; die Umlaufsrichtung von $\vec{J}$ und der Umlaufssinn von $\mathfrak{H}$ definieren aber keinen Schraubensinn.)

Da der Vorgang des β-Zerfalls einen Schraubensinn auszeichnet, kann die Wechselwirkung H kein reiner Skalar mehr sein. Die genauere Theorie zeigt, daß H einen skalaren und einen pseudoskalaren Anteil enthalten muß, um Paritätsverletzung zu bekommen: H = Skalar + Pseudoskalar. Es ist klar, daß H dann nicht mehr mit dem Paritätsoperator P vertauschbar ist:

$$[H, P] \neq 0;$$

die Parität ist keine Erhaltungsgröße.

Eine dritte Ausdrucksweise ist, daß Paritätsverletzung vorliegt, *wenn ein nichtverschwindender Pseudoskalar gemessen werden kann*. Dabei liegt der Ton auf „nichtverschwindend", denn im Falle von Abb. 294a z. B. läßt sich zwar aus dem polaren Vektor J und dem axialen Vektor $\mathfrak{H}$ ein Pseudoskalar $(\vec{J} \cdot \mathfrak{H})$ bilden, aber er verschwindet, da $\vec{J}$ und $\mathfrak{H}$ stets senkrecht zueinander stehen. Umgekehrt

---

[1]) Die zahlreichen e^--Impulse $\mathfrak{p}$ in Abb. 294b bedeuten natürlich nicht, daß derselbe Kern viele e^- emittiert, sondern sollen durch ihre Dichte die Winkel*verteilung* der emittierten e^- andeuten. Die Abbildung beschreibt also keinen einzelnen β^--Emissionsvorgang, sondern ein Mittel über viele. *Nur diesen „gemittelten Vorgang" betrachten wir in allem folgenden.*

läßt sich beim Wu-Experiment der Pseudoskalar $(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J})$ bilden, und er verschwindet nicht, denn die gemessene (auch die theoretische) Winkelverteilung ergibt sich als

$$\sim 1 + a \cos\theta = 1 + b(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}), \qquad \theta = \sphericalangle(\mathfrak{p}, \mathfrak{J});$$

die experimentell gefundene Asymmetrie bedeutet $a, b \neq 0$, so daß also der Pseudoskalar wirklich in der Winkelverteilung auftritt und gemessen wird.

Mit der Auszeichnung eines Schraubensinns beim β-Zerfall hängt die Tatsache eng zusammen, daß das ausgesandte Neutrino selbst einen Schraubensinn hat¹) (vgl. S. 693): Der Pseudoskalar „Helizität" $= (\vec{\sigma}_\nu \cdot \vec{e}_\nu)$ hat die Werte -1 fürs Neutrino (und $+1$ fürs Antineutrino), wie Goldhaber [G 58-1] durch ein sehr geschicktes Experiment am e^--Einfang von Eu^{152} direkt zeigen konnte. Dabei sind $\vec{\sigma}_\nu$ und $\vec{e}_\nu$ Einheitsvektoren in Spin- und Impulsrichtung. Man könnte meinen, daß es dieser Schraubensinn des Neutrinos ist, der für die Paritätsverletzung beim β-Zerfall verantwortlich ist. Doch wird damit das Problem nicht gelöst, denn es ergibt sich sofort die weitere Frage, warum beim β-Zerfall gerade solche Schraubenneutrinos entstehen und keine anderen (theoretisch an sich möglichen) Neutrinos. Darüber hinaus zeigen andere schwache Wechselwirkungen, wie K-Zerfall und Hyperonenzerfall, ebenfalls Paritätsverletzung, obwohl bei einigen ihrer Zerfallsarten keine Neutrinos entstehen. Die Frage nach dem Warum der Paritätsverletzung ist deshalb noch unbeantwortet und sicher eine der tiefsten und schwierigsten der Elementarteilchenphysik.

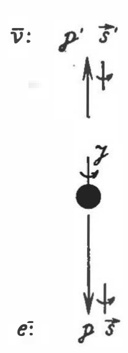


Abb. 295. Helizität von Elektron und Antineutrino beim Wu-Experiment

Abschließend wollen wir das Wu-Experiment benützen, um zu zeigen, daß auch die Elektronen beim β-Zerfall einen Schraubensinn haben, d. h. longitudinal polarisiert emittiert werden – eine Tatsache, die erst jetzt zum Vorschein gekommen ist, nachdem man bereits 60 Jahre lang mit diesen Elektronen experimentiert hat.²)

Wir wissen, daß Co^{60} die Elektronen bevorzugt entgegengesetzt zum Kernspin $\mathfrak{J}$ emittiert, was wir in Abb. 295 schematisch andeuten. Der Zerfall

$$Co^{60} \to Ni^{60} + e^- + \nu$$

ist ein Gamow-Teller-Übergang, bei dem der Kernspin von 5 auf 4 abnimmt, also eine Einheit Drehimpuls von den Leptonen wegtransportiert wird. Vernachlässigen wir die Rückwirkung des Zerfalls auf den Endkern Ni^{60}, dann hat

¹) Man nennt ein solches Neutrino auch „Zweikomponenten-Neutrino", weil man es am einfachsten durch eine zweikomponentige Gleichung beschreiben kann, die der (vierkomponentigen) Dirac-Gleichung ähnlich ist.

²) Auch die Kerne selbst werden durch den β-Zerfall polarisiert (wenn sie nicht schon vorher polarisiert sind, wie beim Wu-Experiment). Schopper [S 57-1] konnte die Polarisation des Tochterkerns experimentell nachweisen.

auch dessen Kernspin die Richtung senkrecht nach oben, so daß der „wegtransportierte“ Drehimpuls ebenfalls nach oben zeigt. Da nach S. 708 bei Gamow-Teller-Übergängen die beiden Leptonen mit parallelen Spins und ohne Bahndrehimpuls emittiert werden, müssen beide Spins nach oben zeigen, um die eine Einheit Drehimpuls wegtransportieren zu können. Folglich muß das Antineutrino (bevorzugt) nach oben emittiert werden, damit sein Spin parallel zum Impuls steht, wie es nach S. 711 sein muß (s. Abb. 295). Das Elektron wird also mit antiparallelem Spin und Impuls ausgesendet: Es ist negativ longitudinal polarisiert. Diese Polarisation konnte in zahlreichen Experimenten, z.B. von FRAUENFELDER [F 57-1], [F 57-2] und GOLDHABER [G 57-2], direkt nachgewiesen werden. – (Man spiegele Abb. 295 und zeige, daß das Spiegelbild kein möglicher Zerfall ist!)

Abb. 295 erweckt den Eindruck, daß Spin und Impuls des Elektrons genau antiparallel sein müßten, wie dies beim Neutrino der Fall ist. Doch ist das nur eine Folge unserer starken Vereinfachungen, denn man kann beweisen, daß der longitudinale Polarisationsgrad P (= Helizität) für ein Teilchen mit nichtverschwindender Masse

$$|P| \leq \frac{v}{c},$$

also stets kleiner als 1 ist.

Man überlegt sich leicht, daß für nichtverschwindende Masse die longitudinale Polarisation eines Teilchens vom Bezugssystem abhängt. Denn wegen $m \neq 0$ läßt sich z. B. stets ein Lorentz-System angeben, mit dem man das Teilchen überholt. Von diesem System aus gesehen behält der Spin des Teilchens seine Richtung, der Impuls aber ist umgekehrt, also wechselt die Polarisation das Vorzeichen. Das masselose Neutrino ($v = c$) dagegen kann man nicht überholen, und deshalb hat es unabhängig vom Bezugssystem die longitudinale Polarisation oder Helizität -1. –

Wir konnten in diesem Paragraphen nur auf einige besonders wichtige qualitative Ergebnisse der neueren Entwicklung eingehen. Eine genauere Einführung und Literaturangaben findet der Leser z. B. in den zusammenfassenden Artikeln von SCHOPPER [S 57-2], PARK [P 58-1], GOLDHABER [G 58-2] und WU [W 59-1], vgl. auch WICK [W 58-1] und KONOPINSKI [K 59-1].

LITERATUR

Allgemeine Literatur zum β-Zerfall:

BETHE, H. A., und P. MORRISON, Elementary Nuclear Theory, New York 1956
BLATT, J. M., und V. F. WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics; deutsch: Leipzig 1959
FERMI, E., Nuclear Physics, Chicago 1950
FERMI, E., Z. Phys. 88, 161 (1934)
KONOPINSKI, E. J., Ann. Rev. Nucl. Sci. **9**, 99 (1959)
ROSE, M. E., und E. J. KONOPINSKI in: K. SIEGBAHN, β- and γ-Ray Spectroscopy, Amsterdam 1955
KONOPINSKI, E. J., Revs. Mod. Phys. **15**, 209 (1943)
KONOPINSKI, E. J., und L. M. LANGER, Ann. Rev. Nucl. Sci. **2**, 261 (1953)

Spezielle Literatur zur Paritätsverletzung:

[F 57-1] FRAUENFELDER, H., u. a., Phys. Rev. **106**, 386 (1957)
[F 57-2] FRAUENFELDER, H., u. a., Phys. Rev. **107**, 643 (1957)
[G 57-1] GARWIN, R. L., L. M. LEDERMANN, M. WEINRICH, Phys. Rev. **105**, 1415 (1957)
[G 57-2] GOLDHABER, M., L. GRODZINS und A. W. SUNYAR, Phys. Rev. **106**, 826 (1957)
[G 58-1] GOLDHABER, M., L. GRODZINS, A. W. SUNYAR, Phys. Rev. **109**, 1015 (1958)
[G 58-2] GOLDHABER, M., Proc. Ann. Internat. Conf. on High Energy Physics, Geneva 1958, S. 233
[K 59-1] KONOPINSKI, E. J., Ann. Rev. Nucl. Sci. **9**, 99 (1959)
[L 56-1] LEE, T. L., und C. N. YANG, Phys. Rev. **104**, 254 (1956)
[P 58-1] PARK, J. G., Am. J. Phys. **26**, 210 (1958)
[S 57-1] SCHOPPER, H., Phil. Mag. **2**, 710 (1957)
[S 57-2] SCHOPPER, H., Fortschr. d. Phys. **5**, 581 (1957)
[W 57-1] WU, C. S., E. AMBLER u. a., Phys. Rev. **105**, 1413 (1957)
[W 58-1] WICK, G. C., Ann. Rev. Nucl. Sci. 8, 1 (1958)
[W 59-1] WU, C. S., Revs. Mod. Phys. **31**, 83 (1959)

D. NEUTRONENPHYSIK

In den vorangehenden Kapiteln ist gezeigt worden, daß neben den Protonen die Neutronen als Grundbestandteile der Atomkerne aufzufassen sind. Dies ist jedoch erst in einem relativ späten Stadium der Entwicklung der Kernphysik erkannt worden. Bis zur Entdeckung des Neutrons war man allgemein der Ansicht, daß die Kerne aus Protonen und Elektronen (oder aus Alphateilchen, Protonen und Elektronen) zusammengesetzt seien, weil man keine anderen Elementarteilchen kannte. Die mit dieser Hypothese verbundenen Schwierigkeiten mußten wohl oder übel in Kauf genommen werden. Erst im Jahre 1932 gelang J. CHADWICK [C 32-1] der Nachweis, daß bei der durch Alphateilchen an Beryllium ausgelösten Kernreaktion elektrisch neutrale Teilchen emittiert werden, die in der Lage sind, leichte Kerne, wie H, N, Ar usw., anzustoßen. Durch Vergleich der maximalen Reichweiten von Rückstoßkernen verschiedener Masse konnte die Masse des neutralen stoßenden Teilchens als wenig verschieden von der des Protons bestimmt werden.

Das Auftreten einer durchdringenden Strahlung beim Beschuß von Beryllium mit Alphateilchen war bereits 1930 von BOTHE und BECKER [B 30-1] berichtet worden. CURIE und JOLIOT [C 32-2] hatten dann festgestellt, daß diese Strahlung aus wasserstoffhaltigen Substanzen Protonen herausschlagen kann, versuchten dies jedoch als Compton-Effekt einer extrem harten Gammastrahlung zu deuten. Diese Arbeiten hatten schließlich den Anstoß zu CHADWICKS Untersuchungen gegeben.

Seit der Entdeckung des Neutrons hat die Kernphysik eine stürmische Entwicklung durchgemacht. Nur sechs Jahre später entdeckten HAHN und STRASSMANN [H 39-1] die Spaltung des Urans durch Neutronen, und bereits im Jahre 1942 wurde von FERMI der erste Kernreaktor gebaut.

Heute ist die Kerntechnik in den technisch entwickelten Ländern schon zu einem mächtigen Industriezweig geworden. In diesem Zusammenhange hat die Neutronenphysik auch für die industrielle Praxis eine außerordentliche Bedeutung gewonnen. Aus diesem Grunde sollen im folgenden einige wichtige Gebiete der Neutronenphysik dargestellt werden, obwohl in den voranstehenden Kapiteln schon mehrfach von Neutronen und ihrer Wechselwirkung mit Atomkernen die Rede war.

§ 146. Eigenschaften des freien Neutrons

a) Masse

Es wurde oben kurz berichtet, daß CHADWICK die Masse des Neutrons aus der Reichweite von durch schnelle Neutronen angestoßenen Rückstoßkernen abgeschätzt hat. Dieses Verfahren eignet sich jedoch nicht für eine genaue Massenbestimmung.

Genauere Werte für die Neutronenmasse erhält man aus den *Energiebilanzen von Kernreaktionen* und *massenspektroskopischen Messungen*. Am besten ist dies mit Hilfe der gut untersuchten Reaktion

$$\mathrm{H} + n = \mathrm{D} + \varepsilon \tag{146.1}$$

möglich. Der Massenunterschied zwischen einem Wasserstoffmolekül und einem Deuteriumatom läßt sich mit einem hochauflösenden Massenspektrometer durch eine Dublettmessung sehr genau bestimmen. Die Reaktionsenergie ε ergibt sich aus der Energie der Gammaquanten, die beim Einfang langsamer Neutronen durch Wasserstoff emittiert werden, oder auch aus der Schwellenenergie für die Photospaltung des Deuterons. Bezeichnen wir mit ΔM die Massendifferenz $\mathrm{H}_2 - \mathrm{D}$, so erhalten wir aus (146.1) für die Neutronenmasse

$$M_n = M_\mathrm{H} + \frac{\varepsilon}{c^2} - \Delta M. \tag{146.2}$$

Mit Hilfe der experimentellen Werte

$$M_\mathrm{H} = 1{,}008141 \pm 0{,}000002 \text{ Masseneinheiten (ME)} \quad \text{[D 56-1]},$$

$$\varepsilon = 2{,}227 \pm 0{,}003 \text{ MeV} \quad \text{[L 51-1]}, \qquad \Delta M = (1{,}5483 \pm 0{,}001)\, 10^{-3} \text{ ME} \quad \text{[D 56-1]}$$

ergibt sich[1])

$$M_n = 1{,}008985 \pm 0{,}000004 \text{ ME}.$$

Das Neutron ist also um etwa 1,5 Elektronenmassen schwerer als das Wasserstoffatom. Gegenüber dem Proton ist die Differenz noch um die Masse eines weiteren Elektrons größer.

b) Radioaktiver Zerfall

Im Gegensatz zum Proton ist das freie Neutron nicht stabil. Dieser Sachverhalt wurde bereits kurz nach der Entdeckung des Neutrons vermutet, konnte jedoch erst bestätigt werden, als durch die Entwicklung der Reaktortechnik genügend intensive Neutronenstrahlen zur Verfügung standen. Daß eine radioaktive Instabilität des Neutrons erwartet werden kann, folgt bereits aus einer Anwendung der für schwere Kerne gut bestätigten Mattauchschen Regel auf das Isobarenpaar Neutron–Proton. Da nach dieser Regel nur ein Isobar ungerader Massenzahl stabil sein kann und das Proton bekanntlich stabil ist, muß

[1]) Unter Berücksichtigung der Beziehung 1 ME = 931 MeV.

das Neutron radioaktiv sein, zumal es schwerer ist als das Proton. Aus der Massendifferenz $M_n - M_H$ ergibt sich eine *Zerfallsenergie* von 0,785 ± 0,005 MeV. Daraus läßt sich – unter der Voraussetzung, daß der Zerfall ein erlaubter β-Übergang ist – eine *Halbwertszeit* von der Größenordnung 20 min abschätzen. *Der bisher genaueste experimentelle Wert beträgt* 12 ± 1,5 min [S 55-1]. Das Prinzip der Messung besteht darin, die Zahl der aus einem Neutronenstrahl bekannter

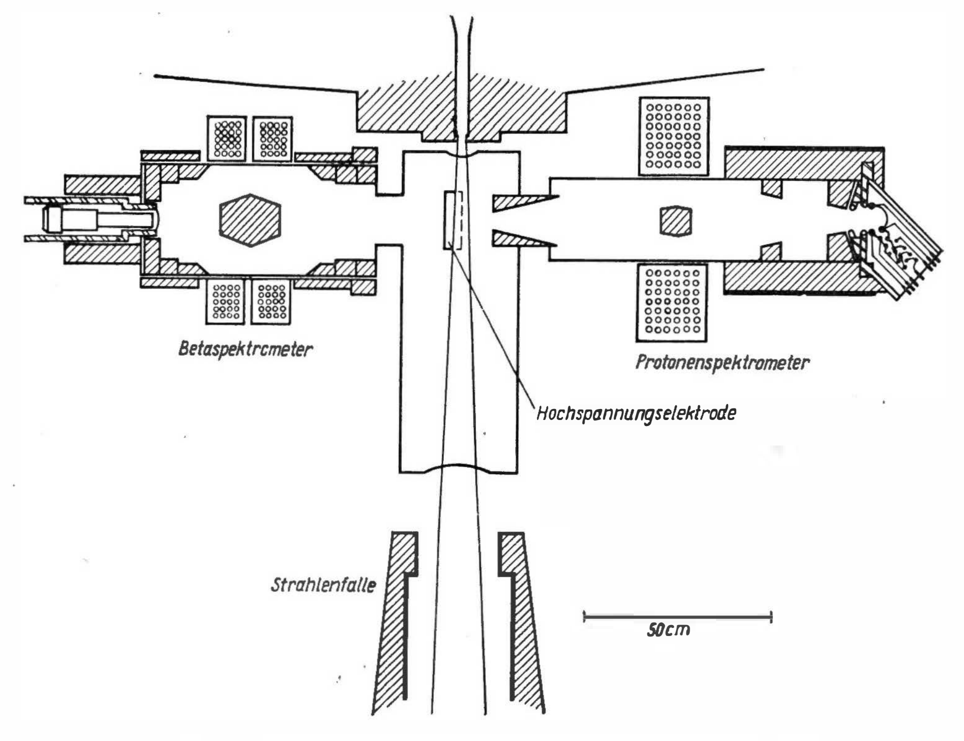


Abb. 296. Apparatur zur Beobachtung des Neutronenzerfalls nach ROBSON [R 51-1]

Dichte austretenden Protonen zu registrieren. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß der Neutronenstrahl eine große Dichte besitzen muß, wenn man einen merklichen Effekt beobachten will. Langsame Neutronen, wie sie von einem Reaktor geliefert werden, haben eine wahrscheinlichste Geschwindigkeit v von etwa $2{,}2 \cdot 10^5$ cm/sec. Die Zerfallskonstante des Neutrons ist $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = 0{,}96 \cdot 10^{-3}$ sec. Damit also pro cm³ des Strahlvolumens im Mittel ein Zerfall pro sec stattfindet, ist eine Stromdichte $J = \frac{v}{\lambda} \approx 2 \cdot 10^8$ Neutronen/cm² sec notwendig. Solche Intensitäten können nur erzielt werden, wenn ein Reaktor als Neutronenquelle benutzt wird.

In Abb. 296 ist die Versuchsanordnung von Robson [R 51-1] gezeigt, mit der die Halbwertszeit und das Zerfallsspektrum des Neutrons gemessen wurden. Die Stromdichte in dem Neutronenbündel von 3 cm Durchmesser betrug hier etwa $2 \cdot 10^9$ Neutronen/cm² sec. Das beim Zerfall eines Neutrons entstehende Proton hat eine im Vergleich zur Energie des entstehenden Elektrons sehr geringe kinetische Energie (<1 keV). Daher ist eine Elektrode zur Nachbeschleunigung vorgesehen. Durch die zwischen dieser Elektrode und der Eintrittsöffnung

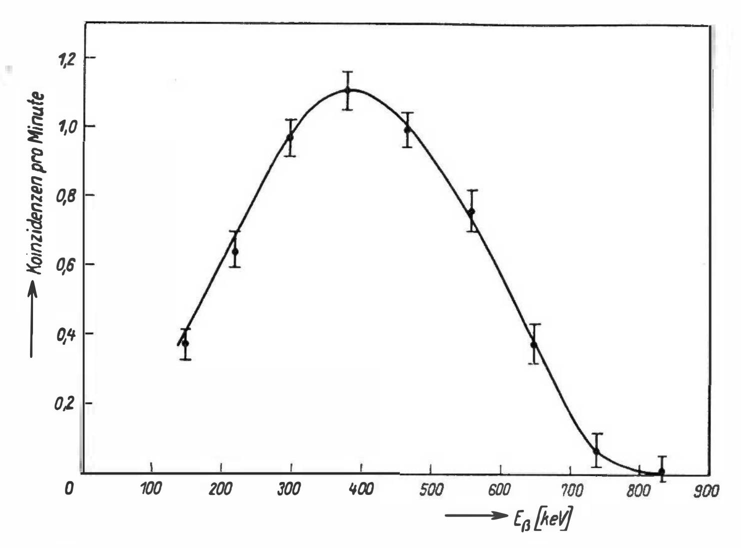


Abb. 297. β-Spektrum des Neutrons, gemessen mit der in Abb. 296 dargestellten Apparatur

des magnetischen Protonenspektrometers angelegte Spannung von 13 kV werden die in einem Volumen von einigen cm³ im Strahl entstehenden Protonen abgesaugt. Nach Durchlaufen des Spektrometers werden sie durch einen Sekundärelektronenvervielfacher registriert. Die Elektronen durchlaufen ein in Koinzidenz geschaltetes magnetisches Betaspektrometer. Während das Protonenspektrometer fest eingestellt bleibt – die Protonenenergie wird ja in der Hauptsache durch die konstante Saugspannung bestimmt –, kann mit dem Betaspektrometer das Spektrum der Zerfallselektronen aufgenommen werden. Das auf diese Weise gewonnene Spektrum zeigt Abb. 297. Die obere Grenze der Elektronenenergie ergab sich zu 782 ± 13 keV in guter Übereinstimmung mit dem aus der Massendifferenz Neutron–Proton gefundenen Wert.

c) Spin und magnetisches Moment

Bekanntlich haben die Protonen den Spin $\frac{1}{2}$ (in Einheiten $\hbar$) und gehorchen der Fermi-Statistik. Daß dies auch für die Neutronen gilt, ergibt sich indirekt, jedoch zwangsläufig aus der gesamten Diskussion der Kernstruktur, die bereits in

den vorangehenden Kapiteln durchgeführt wurde. *Die Daten über die Kernspins und die Neutron-Proton-Wechselwirkung könnten in ihrer Gesamtheit nicht verstanden werden, wenn das Neutron einen vom Wert $\frac{1}{2}$ abweichenden Spin besäße.*
Das *magnetische Moment des Neutrons* ist nach einer von BLOCH angegebenen Resonanzmethode sehr genau gemessen worden (vgl. Bd. I, S. 95). Es ergab sich der Wert

$$\mu_n = -1{,}913148 \pm 0{,}00006 \text{ Kernmagnetons.}$$

Bemerkenswert ist das *negative Vorzeichen von* μ_n. Dies bedeutet, daß beim Neutron das magnetische Moment antiparallel zu seinem mechanischen Moment orientiert ist, im Gegensatz zum Proton, das ein positives magnetisches Moment besitzt.

§ 147. Erzeugung freier Neutronen

Neutronen können wegen ihrer starken Wechselwirkung mit Atomkernen und wegen ihrer Instabilität nicht in freiem Zustande „aufbewahrt" werden. Sie müssen daher jeweils durch *Kernreaktionen* erzeugt werden, wenn man sie benötigt. Zur Neutronenerzeugung eignen sich die Reaktionen (α, n), (γ, n), (p, n), (d, n) und die Kernspaltung im Reaktor. Nicht jede Neutronenquelle eignet sich für jeden Zweck. Benötigt man die Neutronen z. B. zur Aktivierung von Substanzen (Herstellung radioaktiver Isotope), so wird man vor allem Wert auf hohe Intensität legen, während die Energieverteilung der von der Quelle ausgesandten Neutronen relativ gleichgültig ist. Will man dagegen, um ein anderes Beispiel zu nennen, Resonanzen von Wirkungsquerschnitten ausmessen, so ist man auf einen möglichst monoenergetischen Neutronenstrahl angewiesen. Zur Einschätzung einer Neutronenquelle ist es daher vor allem nötig, die *Ausbeute* (die Zahl der pro sec erzeugten Neutronen) und das *Spektrum* (die Energieverteilung der Neutronen) zu kennen.

a) Neutronenerzeugung mit Hilfe radioaktiver α-Strahler

Mit Hilfe der (α, n)-Reaktion wurde, wie bereits erwähnt, das Neutron entdeckt. Auch heute noch sind Neutronenquellen, die unter Verwendung natürlicher Alphastrahler hergestellt werden, für viele Zwecke wegen ihrer Kleinheit, ihrer Stabilität und leichten Transportierbarkeit unentbehrlich.
Die am häufigsten benutzten Neutronenquellen dieser Art verwenden die Reaktion

$${}_4\mathrm{Be}^9\,(\alpha, n)\,{}_6\mathrm{C}^{12},$$

wobei die auslösenden Alphateilchen durch *Radium*, *Radon*, *Polonium* oder neuerdings auch durch *Plutonium* geliefert werden. Wichtig bei der Herstellung solcher Quellen ist eine gute Durchmischung der radioaktiven Substanz mit dem

Beryllium, damit die Alphateilchen ihren Weg möglichst vollständig im Beryllium zurücklegen. Die Mischung wird in losem Zustande oder besser als zusammengepreßte Pastille in einer gasdicht[1]) verschlossenen Kapsel untergebracht.

Die Neutronenausbeute einer Ra-Be-Quelle hängt vom *Mischungsverhältnis* ab. Je größer der Berylliumanteil, desto größer ist der Teil der Reichweite, den die Alphateilchen im Beryllium zurücklegen. Deswegen ist es zweckmäßig, das Mischungsverhältnis Beryllium : Radium nicht zu klein zu wählen. Gewöhnlich werden etwa 5 g Be auf 1 g Ra genommen. Eine solche Quelle liefert etwa 10^7 Neutronen pro Sekunde und Gramm Radium.

Bei einer frisch hergestellten Quelle ist die Neutronenausbeute zeitlich nicht konstant, da sich aus dem Radium die ebenfalls α-aktiven Folgeprodukte bilden, die dann auch an der Neutronenerzeugung teilnehmen. Eine konstante Ausbeute ist erst nach Erreichen des radioaktiven Gleichgewichts zwischen dem Radium und seinen Folgeprodukten zu erwarten, was wegen der langen Halbwertszeit des RaD (22 Jahre) erst nach sehr langer Zeit der Fall ist. Die Einstellung des radioaktiven Gleichgewichts zwischen den übrigen Folgeprodukten wird jedoch durch die kurze Halbwertszeit des Rn bestimmt (3,8 Tage), so daß die Ausbeute nach einem in den ersten Tagen sehr raschen Anstieg nach etwa drei Wochen bereits 90% des Gleichgewichtswertes erreicht hat. Der weitere Anstieg erfolgt dann mit einer Rate von nur 0,2% pro Jahr und kann daher bei den meisten Untersuchungen unberücksichtigt bleiben.

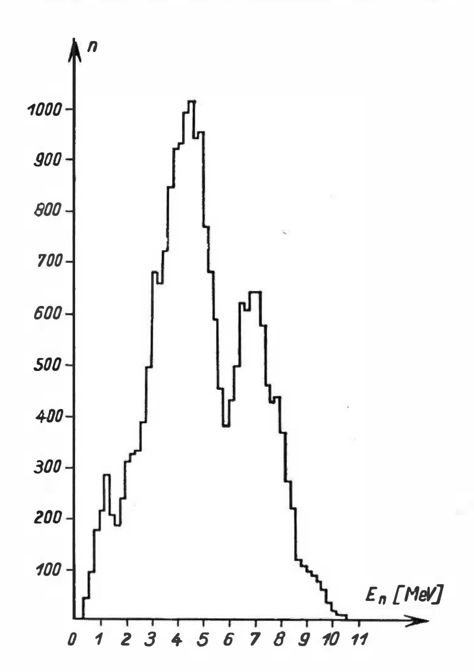


Abb. 298. Energiespektrum einer Po-Be-Quelle. Das Spektrum wurde aus der Reichweiteverteilung von Rückstoßprotonen in einer Kernphotoplatte gewonnen (vgl. § 148c). [M 56-1]

Die Ra-Be-Quelle sendet eine starke *Gammastrahlung* aus, die bei manchen Experimenten störend wirkt. In einem solchen Falle empfiehlt es sich, als Alpha-Strahler *Polonium* zu verwenden, das nur eine geringfügige Gammastrahlung aussendet. Freilich hat die kurze Halbwertszeit des Poloniums (138 Tage) eine rasche Abnahme der Ausbeute zur Folge. Bei Verwendung von *Plutonium* wird auch dieser Nachteil vermieden.

Das *Energiespektrum* der Neutronen, die von einer Ra-Be-, Po-Be- oder Pu-Be-Quelle ausgesandt werden, ist *kontinuierlich* und überdeckt einen weiten Energiebereich. Dies hat seinen Grund darin, daß die Alphateilchen auf ihrem Wege durch das Material kontinuierlich abgebremst werden und daher die Reaktion mit verschiedenen Energien auslösen

[1]) Damit das entstehende Radon nicht entweichen kann.

und daß die Neutronenenergie nicht nur von der kinetischen Energie der Alphateilchen beim Stoß, sondern auch stark vom Winkel zwischen einfallendem Alphateilchen und ausgesandtem Neutron abhängt. Außerdem kann der bei der Reaktion entstehende Kohlenstoffkern in verschiedenen angeregten Zuständen zurückbleiben. Das von MEDVECZKY [M 56-1] gemessene Spektrum einer Po-Be-Quelle ist in Abb. 298 wiedergegeben.

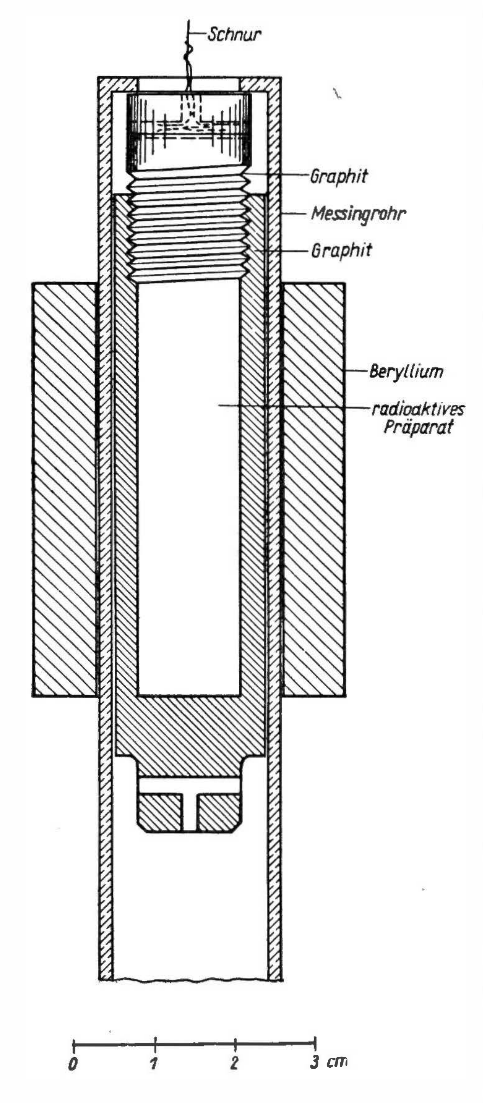


Abb. 299. Konstruktion einer Photoneutronenquelle nach WATTENBERG [W 47-1]. Das radioaktive Präparat befindet sich in einem Graphitbehälter und hängt an einer Schnur im Innern des Messingrohres. Es kann bei Nichtgebrauch der Quelle durch Fernbedienung in einen Schutzbehälter herabgelassen werden. Solche Vorsichtsmaßnahmen sind nötig, denn die verwendeten Aktivitäten sind sehr groß (bis zu 75 Curie). Die Präparate werden durch Bestrahlung im Reaktor erzeugt

b) Neutronenerzeugung mit Hilfe radioaktiver γ-Strahler

Zur Erzeugung annähernd monochromatischer Neutronen mittlerer Energie mit Hilfe einer leicht transportablen Quelle kann man sich des *Kernphotoeffekts* bedienen. Hier wird die Gammastrahlung radioaktiver Elemente zur Auslösung einer (γ, n)-Reaktion benutzt. Praktisch kommen dafür nur zwei Reaktionen in Frage, nämlich

$$_1D^2(\gamma, n)\,_1H^1$$

(Schwellenenergie 2,23 MeV)

und

$$_4Be^9(\gamma, n)\,_4Be^8$$

(Schwellenenergie 1,67 MeV).

Alle anderen (γ, n)-Prozesse haben so hohe Schwellenenergien, daß sie mit radioaktiver Gammastrahlung nicht ausgelöst werden können.

Eine *Photoneutronenquelle* besteht gewöhnlich aus einem γ-strahlenden Präparat, das von einer Beryllium- oder D_2O-Schicht umgeben ist (Abb. 299). Da die Wirkungsquerschnitte für die (γ, n)-Reaktion sehr klein sind (einige Millibarn), muß diese Schicht ziemlich dick sein, wenn man eine genügende Ausbeute erzielen will. Dies führt dazu,

daß ein Teil der entstehenden Neutronen in der Schicht durch elastische Stöße abgebremst wird, wodurch sich die Energieverteilung verbreitert. Trotzdem haben die Neutronen aus einer Photoquelle eine viel einheitlichere Energie als die Neutronen aus einer (α, n)-Quelle. Die Spektren von (γ, n)-Quellen des in Abb. 299 gezeigten Typs sind in Abb. 300 dargestellt. Als Gammastrahler wurde in diesem Falle im Reaktor hergestelltes Na^{24} verwendet. Die *Neutronenausbeute* betrug für Beryllium $2{,}4 \cdot 10^6$ und für schweres Wasser $2{,}7 \cdot 10^6$ Neutronen pro Sekunde und Curie.

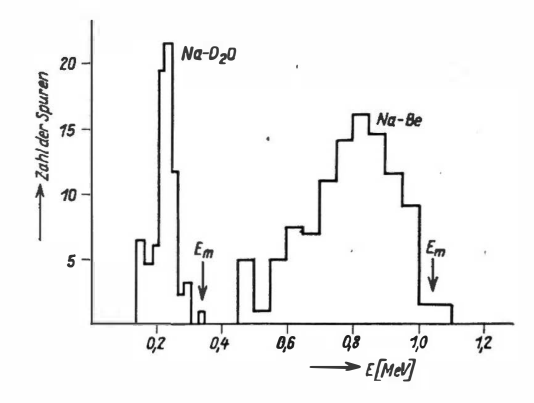


Abb. 300. Spektren von Photoneutronenquellen des in Abb. 299 dargestellten Typs nach HUGHES und EGGLER [H 47-1]. Die Spektren wurden durch Ausmessen der Reichweite von Rückstoßprotonen in einer Nebelkammer erhalten (s. § 148c). Als γ-Strahler wurde das im Reaktor hergestellte Isotop Na^{24} ($T_{1/2} = 15$ h, $E_\gamma = 2{,}76$ MeV) verwendet. E_m bezeichnet die theoretisch zu erwartenden Maximalenergien

c) Neutronenerzeugung mit Hilfe von Beschleunigern

Für viele Aufgaben der Neutronenphysik benötigt man *intensive Neutronenstrahlen möglichst einheitlicher Energie*, die mit Neutronenquellen der oben beschriebenen Art nicht erzeugt werden können. Für diesen Zweck werden daher *Teilchenbeschleuniger* eingesetzt.

Früher bestand das Hauptinteresse an derartigen Anlagen darin, große Neutronenausbeuten zu erzielen, um radioaktive Isotope möglichst hoher spezifischer Aktivität herstellen zu können. Vom Beschleuniger wurden daher hohe Teilchenenergie und hohe Stromstärke gefordert. Da jetzt radioaktive Isotope mit viel geringerem Aufwand in Reaktoren hergestellt werden können, überwiegt heute das Interesse an Beschleunigern mit möglichst definierter und zeitlich konstanter Teilchenenergie, mit denen man streng monochromatische Neutronen erzeugen kann. Für Teilchenenergien bis etwa 1,5 MeV wird hierfür meist der *Kaskadengenerator* und im Gebiet zwischen 1 und etwa 8 MeV der *van de Graaff-Generator* eingesetzt. Werden noch höhere Energien für die auslösenden Teilchen benötigt, so ist man auf *Linearbeschleuniger* oder die verschiedenen Typen von *Kreisbeschleunigern* angewiesen (vgl. Bd. I).

Die Vorgänge bei Kernreaktionen, die durch künstlich beschleunigte Teilchen ausgelöst werden, sind an anderer Stelle bereits systematisch behandelt worden. Es genügt daher in diesem Zusammenhange daran zu erinnern, daß die kinetische Energie E_n eines durch eine solche Kernreaktion erzeugten Neutrons a) von der kinetischen Energie E_x des auslösenden Teilchens, b) von der (positiven oder negativen) Reaktionsenergie Q, c) von dem Winkel ϑ zwischen den Flugbahnen des auslösenden Teilchens und des erzeugten Neutrons (in Laborkoordinaten)

und d) von den Massen M_x, M_n, M_R[1]) der Reaktionspartner abhängt. Es gilt die Formel

$$Q = E_n\left(1 + \frac{M_n}{M_R}\right) - E_x\left(1 - \frac{M_n}{M_R}\right) - \frac{2\sqrt{M_x E_x M_n E_n}}{M_R}\cos\vartheta, \qquad (147.1)$$

die sich durch Anwendung von Energie- und Impulssatz auf das gegebene Problem ergibt. Hieraus läßt sich bei bekannten Q, E_x und $\cos\vartheta$ die resultierende Neutronenenergie E_n berechnen.

Die wesentlichen physikalischen Faktoren, die die Neutronenerzeugung mit Hilfe beschleunigter geladener Teilchen bestimmen, sind die Höhe der *Coulomb-Barriere* des Targetkerns und die *Reaktionsenergie* Q. Je höher die Ladung des Targetkerns ist, eine desto größere Energie müssen die bombardierenden Teilchen besitzen, um die Coulomb-Barriere zu überwinden, und desto geringer wird bei gegebener Teilchenenergie die Ausbeute. Aus diesem Grunde werden als Targetmaterial fast ausschließlich die leichten Elemente D, T, Li und Be verwendet, während als Geschoßteilchen Protonen und Deuteronen dienen können. Die charakteristischen Daten für die Reaktionen, die sich aus den verschiedenen Kombinationen der genannten Reaktionspartner ergeben, sind in Tabelle 75 eingetragen.

Tabelle 75. Neutronenerzeugung mit Beschleunigern [H 49-1], [R 50-1]

a) Endotherme Reaktionen

Reaktion	Q[MeV]	E_S[MeV]
${}_1T^3(p, n)\,{}_2He^3$	$-0{,}764$	1,02
${}_3Li^7(p, n)\,{}_4Be^7$	$-1{,}65$	1,88
${}_4Be^9(p, n)\,{}_5B^9$	$-1{,}85$	2,06

b) Exotherme Reaktionen

Reaktion	Q[MeV]	$E_n{}^0$[MeV]
${}_1D^2(d, n)\,{}_2He^3$	$+3{,}28$	2,45
${}_1T^3(d, n)\,{}_2He^4$	$+17{,}6$	14,1
${}_3Li^7(d, n)\,{}_4Be^8$	$+14{,}91$	kontinuierliches Spektrum bis 14 MeV
${}_3Li^7(d, n)\,2\,{}_2He^4$	$+15{,}05$	
${}_4Be^9(d, n)\,{}_5B^{10}$	$+4{,}39$	mehrere Gruppen

Für die endothermen Reaktionen ($Q < 0$) ist in der letzten Spalte die *Schwellenenergie* E_S angegeben. Das ist die Mindestenergie, die zur Auslösung der Reaktion erforderlich ist. Für die exothermen Reaktionen ($Q > 0$) ist die Neutronen-

[1]) M_x = Masse des auslösenden Teilchens, M_n = Masse des Neutrons, M_R = Masse des zurückbleibenden Kerns.

energie $E_n{}^0$ eingetragen, die sich für den Grenzfall $E_x \to 0$ ergibt. Die Auswahl einer dieser Reaktionen richtet sich im wesentlichen nach den Forderungen hinsichtlich Energieintervall und Energiehomogenität der zu erzeugenden Neutronen und ist natürlich auch abhängig von dem zur Verfügung stehenden Beschleuniger.

Werden *monochromatische Neutronen niedriger Energie* benötigt, so verwendet man die *endothermen (p, n)-Reaktionen.* Für diese erhält man aus (147.1) nach einigen elementaren Umrechnungen

$$\left(\text{man setze } M_n = M_x,\ \frac{M_R}{M_n} = A \text{ und } Q = -\frac{A E_S}{(A+1)}\right)$$

die Beziehung $$\frac{v_n}{v_p}(A+1) = \cos\vartheta \pm \sqrt{A^2\left(1-\frac{E_S}{E_p}\right) - \sin^2\vartheta}\,, \qquad (147.1\text{a})$$

wobei v_n, v_p die Geschwindigkeiten von emittiertem Neutron und auslösendem Proton und A die Massenzahl des Targetkerns sind. Die Reaktion ist natürlich nur dann möglich, wenn die rechte Seite der Gleichung positiv und reell ist. Die Beziehung (147.1a) ist in Abb. 301 graphisch dargestellt, wobei die Größe $\varkappa = A^2\left(1-\frac{E_S}{E_p}\right)$ als Parameter dient.

Aus Abb. 301 ist ersichtlich, daß für $\vartheta < 90°$ bei kleinen Neutronenenergien ($\varkappa < 1$) zwei Gruppen mit verschiedener Energie auftreten. Dies ist dann der Fall, wenn die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunktssystems der Reaktion gegenüber dem Laborsystem größer ist als die Geschwindigkeit der Neutronen im Schwerpunktssystem. Für $\vartheta > 90°$ ist jedoch auch bei kleinen Neutronenenergien nur eine einzige Gruppe vorhanden. Im Prinzip können daher mit Hilfe der endothermen (p, n)-Reaktionen monochromatische Neutronen beliebig kleiner Energie erzeugt werden, wenn man $\varkappa$ etwas größer als 1 $\left(\text{d. h. } E_p > \frac{E_S A^2}{(A^2-1)}\right)$ und $\vartheta > 90°$ wählt.

In der Praxis wächst jedoch die durch die Schwankungen der Beschleunigungsspannung ΔE_x und den endlichen Beobachtungswinkel $\Delta\vartheta$ verursachte relative Schwankungsbreite der Neutronenenergie mit abnehmendem E_n stark an. Aus (147.1) ergibt sich durch Differentiation für diese Schwankungsbreite:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{\Delta E_x}{E_x}&\left\{\frac{E_x(M_R - M_x) + \sqrt{M_x E_x M_n E_n}\cos\vartheta}{E_n(M_R + M_n) - \sqrt{M_x E_x M_n E_n}\cos\vartheta}\right\}\\ &+ \Delta\vartheta\left\{\frac{2\sqrt{M_x E_x M_n E_n}\sin\vartheta}{E_n(M_R + M_n) - \sqrt{M_x E_x M_n E_n}\cos\vartheta}\right\}.\end{aligned} \qquad (147.2)$$

Bei gegebenen $\frac{\Delta E_x}{E_x}$ und $\Delta\vartheta$ ist danach der günstigste Beobachtungswinkel $\vartheta = 180°$, d. h. entgegengesetzt zur Einfallsrichtung des Protonenstrahls. In ΔE_x ist auch die Schwankung der Teilchenenergie enthalten, die sich aus der Abbremsung der Protonen im Targetmaterial ergibt. Wenn man Wert auf eine gute Energiehomogenität der Neutronen legt, muß man daher das Target so dünn wie möglich machen.

Durch gute Kollimierung des Neutronenstrahls und gute Stabilisierung der Beschleunigungsspannung ist es heute möglich, bei Neutronenenergien von 5 bis 10 keV bereits eine für spektroskopische Arbeiten ausreichende Energieauflösung zu erreichen (siehe z. B. [G 56-1]).

Neutronen höherer Energie erhält man entweder durch Erhöhung der Protonenenergie bei den endothermen Reaktionen oder durch Verwendung einer der in

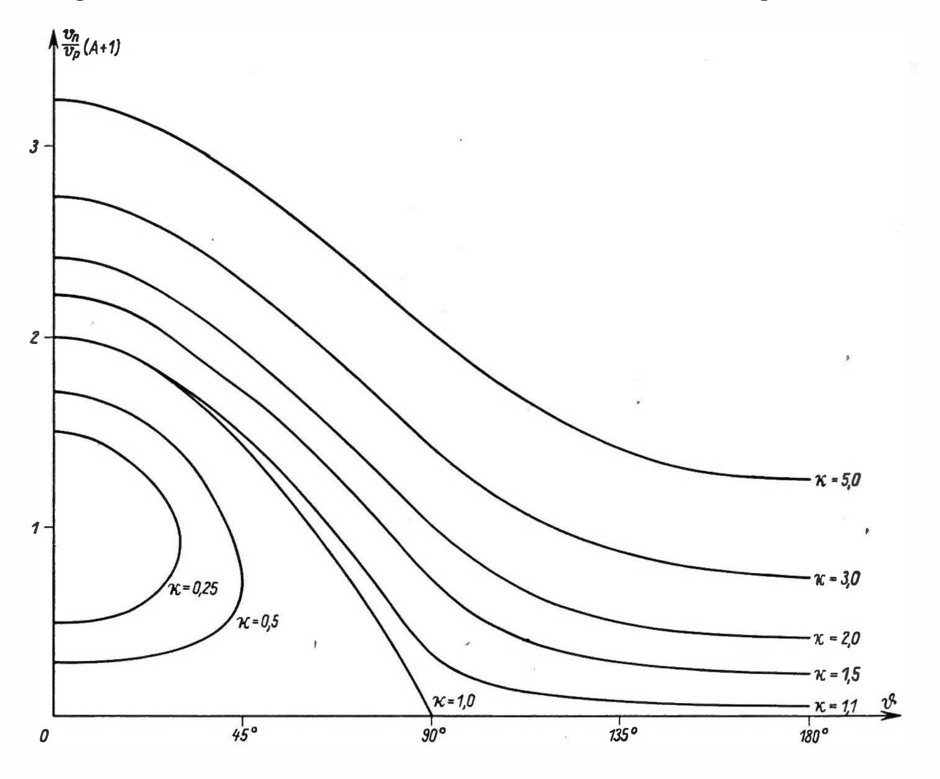


Abb. 301. Zur Neutronenerzeugung durch endotherme (p, n)-Reaktionen

Tabelle 75 aufgeführten *exothermen* Reaktionen. Es eignet sich jedoch nicht jede Reaktion zur Erzeugung monochromatischer Neutronen. Wenn nämlich die Reaktion auf angeregte Zustände des Restkerns führen kann, so entstehen mehrere Gruppen von Neutronen verschiedener Energie. Z. B. tritt bei der $Li^7\,(p, n)$-Reaktion eine zweite Gruppe von Neutronen niedriger Energie auf, wenn die Protonenenergie 2,38 MeV überschreitet. Die Reaktionen $Li^7\,(d, n)$ und $Be^9\,(d, n)$ können überhaupt nicht zur Erzeugung monochromatischer Neutronen verwendet werden. Mit der $T\,(p, n)$-, der $D\,(d, n)$-und der $T\,(d, n)$-Reaktion lassen sich dagegen sehr intensive Quellen monochromatischer Neutronen herstellen, mit denen der gesamte Energiebereich zwischen einigen keV und 20 MeV über-

deckt werden kann. Besonders häufig wird die D(*d*, *n*)-Reaktion benutzt, die schon bei Deuteronenenergien von 100 bis 200 keV große Ausbeuten liefert. Bei solchen niedrigen Beschleunigungsspannungen kann auch ein „dickes" Target[1]) verwendet werden, ohne daß die relative Schwankungsbreite der Neutronenenergien dadurch wesentlich vergrößert wird.

Wenn die Erzielung einer *möglichst hohen Ausbeute* und nicht die Energiehomogenität im Vordergrund steht, so eignen sich dicke Lithium- oder Berylliumtargets

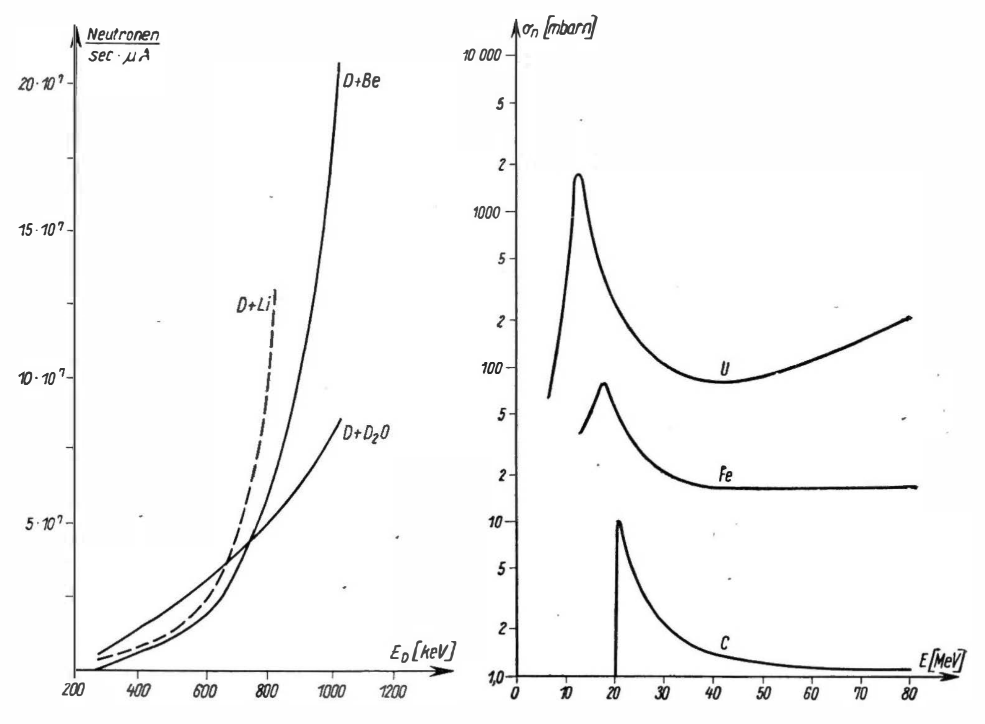


Abb. 302. Neutronenausbeute verschiedener D(*d*, *n*)-Reaktionen als Funktion der Deuteronenenergie für dicke Targets. Nach Messungen von AMALDI, HAFSTAD und TUVE [A 37-1]

Abb. 303. (*γ*, *n*)-Wirkungsquerschnitte von C, Fe und U als Funktion der Quantenenergie. Nach Messungen von JONES und TERWILLIGER [J 53-1]

am besten. Die Abb. 302 zeigt die Ausbeute verschiedener (*d*, *n*)-Reaktionen als Funktion der Geschoßenergie. Mit einem Zyklotron und einem Be-Target wurde bei einer Deuteronenenergie von 10 MeV eine Ausbeute von $(3{,}23 \pm 0{,}24) \cdot 10^{10}$ Neutronen/μA sec gemessen [S 51-1].

Zur Erzeugung von *Neutronen sehr hoher Energie* benutzt man den Effekt der *Zerlegung des Deuterons im Kernfeld*, der auftritt, wenn ein schnell bewegtes

[1]) Ein Target ist dann als „dick" zu betrachten, wenn die Reichweite der beschleunigten Teilchen im Targetmaterial kleiner als die Dicke des Targets ist.

Deuteron in unmittelbarer Nähe eines Kerns vorüberfliegt. Die mittlere Energie der dabei entstehenden Neutronen ist gleich der halben Deuteronenenergie. Mit den großen Synchrozyklotrons sind auf diese Weise Neutronenenergien von mehreren Hundert MeV erreichbar.

In den letzten Jahren wurden in Zusammenhang mit der Entwicklung von Laufzeitspektrometern (s. § 148) auch *Elektronenbeschleuniger* für die Neutronenerzeugung herangezogen. In diesem Falle wird der Kernphotoeffekt ausgenutzt, wobei der Elektronenbeschleuniger (z. B. Betatron oder Linearbeschleuniger) als starke γ-Strahlquelle dient. Der Wirkungsquerschnitt für den (γ, n)-Prozeß hat für alle Kerne einen charakteristischen Verlauf. Oberhalb der Schwelle, die (außer bei den leichtesten Kernen) zwischen 5 und 10 MeV liegt, steigt er schnell an, erreicht im Gebiet zwischen 10 und 25 MeV ein Maximum und fällt dann wieder ab. Dabei verschiebt sich die Lage des Maximums bei wachsendem Atomgewicht zu niedrigeren Energien, während die absolute Größe des Wirkungsquerschnitts stark zunimmt (s. Abb. 303). Es empfiehlt sich daher, als Target ein schweres Element zu wählen. Auch die durch die beschleunigten Elektronen erzeugte Bremsstrahlung nimmt mit wachsendem Atomgewicht an Härte und Intensität zu. Es ist daher zweckmäßig, Elektronen- und γ-Target zu vereinigen. So wurden z. B. mit einem 100 MeV-Betatron, das Elektronenimpulse von 30 mA und 0,1 μsec Dauer liefert, bei Verwendung eines massiven Uranblocks als Target Neutronenblitze mit einer Intensität von mehr als 10^9 Neutronen/Impuls erzeugt [H 56-1], [Y 57-1]. Die auf diese Weise erhaltenen Neutronen sind zwar nicht monochromatisch, unter Ausnutzung des Impulsbetriebes lassen sich jedoch mit Hilfe einer Laufzeitanordnung bestimmte Neutronenenergien auf relativ einfache Weise aussieben (s. § 148d).

d) Der Reaktor als Neutronenquelle

Forschungsreaktoren spielen in der experimentellen Kernphysik als äußerst intensive Neutronenquellen eine große Rolle. Da die Reaktorphysik im Bd. III ausführlich dargestellt werden wird, soll hier nur kurz auf die speziellen Eigenschaften eines Reaktors als Neutronenquelle eingegangen werden.

Für experimentelle Zwecke stehen hauptsächlich die die aktive Zone nach außen verlassenden Neutronen zur Verfügung. Ihre Gesamtzahl ist leicht zu berechnen. Nach der Reaktortheorie (s. Bd. III) ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spaltungsneutron den Reaktor verläßt, gleich $\frac{(k_\infty - 1)}{k_\infty}$. Für die Gesamtzahl A der pro Sekunde den Reaktor verlassenden Neutronen erhalten wir also

$$A = N \nu \frac{k_\infty - 1}{k_\infty}, \qquad (147.3)$$

wobei N die Zahl der Spaltungen pro sec und ν die Zahl der pro Spaltung entstehenden Neutronen ist. N ist der Reaktorleistung W proportional. Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte ergibt

$$\frac{A}{W} \cong 8{,}2 \frac{k_\infty - 1}{k_\infty} \cdot 10^{13} \left[\frac{\text{Neutronen}}{\text{sec kW}}\right]. \qquad (147.4)$$

Der Multiplikationsfaktor k_∞ ist für Reaktoren mit angereichertem Uran als Brennstoff und gewöhnlichem Wasser als Moderator von der Größenordnung 1,5, so daß sich bei einer Leistung von z. B. 2000 kW¹) eine *Gesamtausbeute* von etwa $5{,}5 \cdot 10^{16}$ Neutronen/sec ergibt. Um die gleiche Neutronenmenge mit Ra-Be-Quellen zu erzeugen, würde man etwa 5000 Tonnen Radium benötigen.

Die aus dem Reaktor austretenden Neutronen haben eine kontinuierliche Energieverteilung. Ein Teil sind *„thermische" Neutronen*, die im Reaktor durch Abbremsung der Spaltneutronen auf die Energie der Temperaturbewegung entstehen. Das Geschwindigkeitsspektrum dieses Anteils besitzt die bekannte *Maxwell-Verteilung* eines idealen Gases im Temperaturgleichgewicht:

$$d n = \frac{4 n}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_0{}^3} e^{-\frac{v^2}{v_0{}^2}} d v; \tag{147.5}$$

hierbei bedeuten n die Anzahl der Neutronen pro cm³ und v deren Geschwindigkeit; v_0 ist die *wahrscheinlichste Geschwindigkeit*, der eine kinetische Energie $E_0 = k\,T$ entspricht.²) Für Zimmertemperatur gilt $v_0 = 2200$ m/sec und $E_0 = 0{,}025$ eV. Mit diesen Werten wird gewöhnlich gerechnet, wenn von thermischen Neutronen schlechthin die Rede ist. Jedoch ist zu beachten, daß sich auch die „thermischen" Neutronen in einem Reaktor nicht vollständig im Temperaturgleichgewicht mit ihrer Umgebung befinden, da die kurze Lebensdauer eines Neutrons im Reaktor nicht zur vollkommenen Einstellung des Gleichgewichts ausreicht. Die mit Hilfe der Verteilung (147.5) experimentell bestimmte *„Neutronentemperatur"* liegt daher stets höher als die Temperatur der aktiven Zone des Reaktors. Außer den thermischen treten aus einem Reaktor auch *Neutronen höherer Energie* aus, die vor dem Verlassen der aktiven Zone nur teilweise oder gar nicht abgebremst wurden. Man unterteilt diese gewöhnlich in zwei Anteile: Die *„schnellen" Neutronen* sind solche, die direkt aus der Spaltung stammen und noch nicht abgebremst wurden. Die *„Resonanzneutronen"* sind solche Neutronen, die teilweise abgebremst wurden, aber noch nicht thermische Energie erreicht haben. Hierzu sind die Neutronen im Energiebereich zwischen 1 eV und 1 MeV zu rechnen.³) Die Intensität der Resonanzneutronen nimmt mit wachsender Energie etwa proportional $\frac{1}{E}$ ab, wie sich aus der Theorie der Neutronenbremsung ergibt (s. S. 751).

Der Prozentsatz der Neutronen, deren Energie oberhalb der thermischen liegt, hängt stark vom Reaktortyp ab. Er ist besonders groß bei H_2O-moderierten Reaktoren ($> 50\%$) und relativ klein bei Reaktoren, die D_2O oder Graphit als

¹) Die angegebenen Daten entsprechen etwa denen des Rossendorfer Forschungsreaktors.

²) Nicht zu verwechseln mit der wahrscheinlichsten Energie $\left(= \frac{k\,T}{\sqrt{2}}\right)$ und der mittleren Energie $\left(= \frac{3\,k\,T}{2}\right)$.

³) In diesem Energiebereich findet der Resonanzeinfang von Neutronen durch Atomkerne statt.

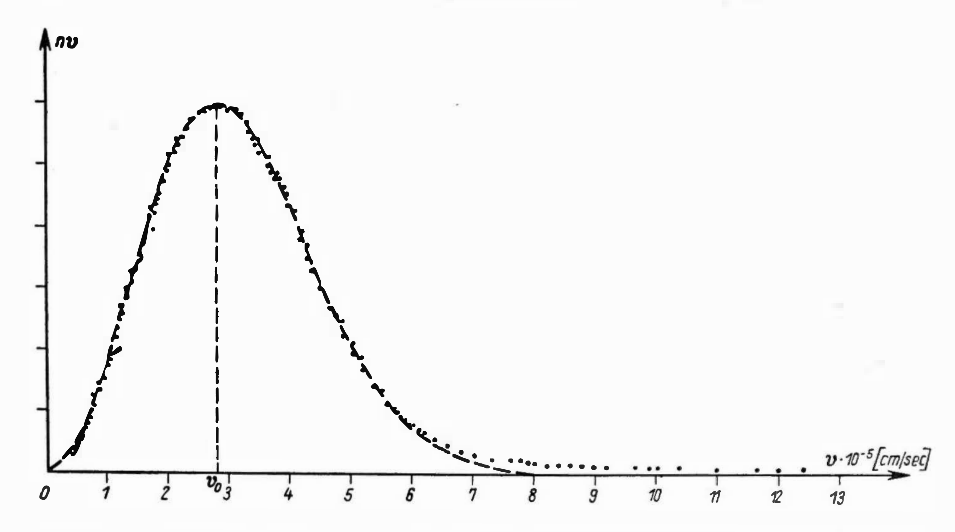


Abb. 304. Geschwindigkeitsspektrum der aus einem Reaktor mit Graphitmoderator austretenden Neutronen nach KRUSHILIN [K 56-1]. Die eingezeichnete gestrichelte Kurve entspricht einer Maxwell-Verteilung für eine Neutronentemperatur $T' = 480\,°K$ ($v_0 = 2{,}8 \cdot 10^5$ cm/sec)

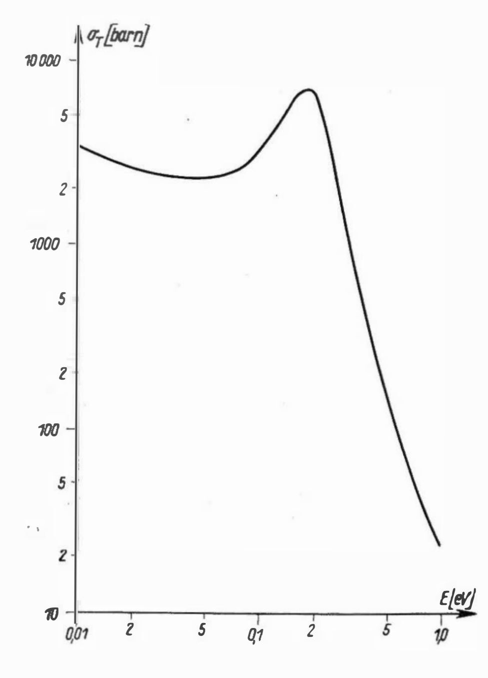


Abb. 305. Totaler Wirkungsquerschnitt des Cadmiums für langsame Neutronen als Funktion der Neutronenenergie

Moderator enthalten.[1]) In Abb. 304 ist die *Geschwindigkeitsverteilung* der aus der aktiven Zone des sowjetischen graphitmoderierten Reaktors RPT austretenden Neutronen dargestellt.

Versuche, die durch die im Spektrum enthaltenen schnellen und Resonanzneutronen gestört werden, können in der sog. „*thermischen Säule*" durchgeführt werden, mit der die Forschungsreaktoren gewöhnlich ausgerüstet sind. Dies ist ein großer, in die Strahlenschutzwand eingelassener Block aus Graphit, dessen innere Fläche unmittelbar an die aktive Zone oder den Reflektor des Reaktors grenzt. Da die Bremslänge für schnelle Neutronen in Graphit wesentlich kürzer ist als die Diffusionslänge für thermische Neutro-

[1]) Dies hängt damit zusammen, daß im Wasser die Bremslänge wesentlich größer ist als die Diffusionslänge, während bei D_2O und Graphit das umgekehrte der Fall ist.

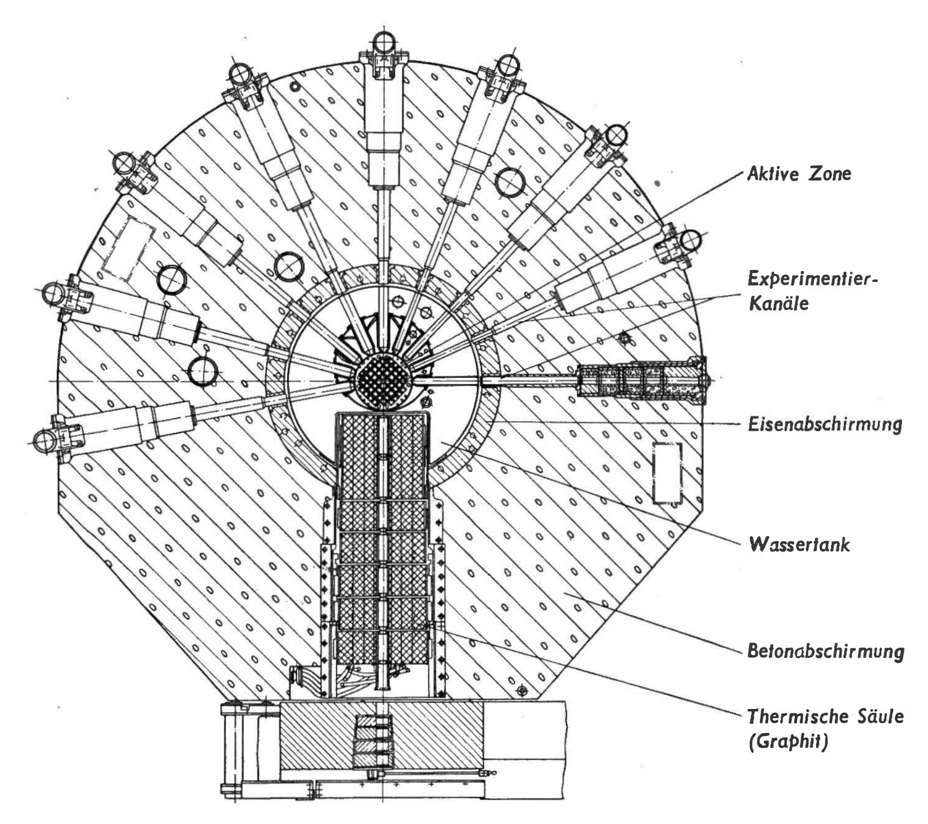


Abb. 306. Querschnitt durch einen 2000 kW-Forschungsreaktor

nen,[1]) nimmt der Fluß der schnellen und der Resonanzneutronen mit wachsendem Abstand von der aktiven Zone schneller ab als der Fluß der thermischen Neutronen, so daß in einiger Entfernung von der aktiven Zone ein nahezu rein thermisches Spektrum vorliegt.

Will man dagegen umgekehrt die thermischen Neutronen aus dem Spektrum beseitigen, so genügt eine *Filterung* des Strahls mit einem dünnen *Cadmiumblech.* Cadmium absorbiert thermische Neutronen unterhalb 0,4 eV äußerst stark mit einem Wirkungsquerschnitt von 2550 barn. Cadmium ist überhaupt ein allgemein sehr gebräuchliches Material zur selektiven Abschirmung gegen thermische Neutronen, zumal es für Resonanzneutronen relativ durchsichtig ist. Der Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts des Cd im Gebiet kleiner Neutronenenergien ist in Abb. 305 dargestellt.

Für Experimente mit Neutronen benötigt man oft ein *kollimiertes Strahlenbündel.* Zur Herstellung solcher Bündel dienen *Kanäle* von einigen cm Durchmesser, die

---

[1]) Zur Erklärung der Begriffe Bremslänge und Diffusionslänge s. § 149d, e.

von der aktiven Zone ausgehen und an der Außenseite der mehrere m dicken Strahlenschutzwand enden. Abb. 306 zeigt einen horizontalen Schnitt durch den Rossendorfer Reaktor. Es handelt sich hier um einen vielseitig verwendbaren Forschungsreaktor, bei dessen Konstruktion besonderer Wert auf eine möglichst große Zahl von Versuchskanälen gelegt wurde. Als *erreichbare Neutronenintensität* an der äußeren Mündung der Kanäle werden 0,5 bis $1 \cdot 10^9$ Neutronen/cm² sec angegeben [N 55-1].
Mit Hilfe der großen Intensität thermischer Neutronen, die mit einem Reaktor erzeugt werden kann, läßt sich auch leicht eine starke *Quelle mit dem Spektrum der Spaltungsneutronen* herstellen. Zu diesem Zweck wird eine Platte aus U^{235} dem Neutronenfluß aus der thermischen Säule ausgesetzt. Die Platte wirkt dann als „*Neutronentransformator*", der thermische Neutronen in schnelle Spaltungsneutronen umwandelt. Wenn kein moderierendes Material in der Nähe ist, kann die Verunreinigung des erhaltenen Spektrums durch Resonanzneutronen sehr gering gehalten werden.

§ 148. Experimentelle Methoden der Neutronenspektroskopie

a) Allgemeines zur Neutronenspektroskopie

Eine der wichtigsten Aufgaben der Neutronenphysik ist die Messung der *Wirkungsquerschnitte* von Atomkernen als Funktion der Energie der auffallenden Neutronen. Der *totale Wirkungsquerschnitt* eines Stoffes (der sich aus Streu- und Reaktionsquerschnitt zusammensetzt) läßt sich auf relativ einfache Weise mit Hilfe eines *Transmissionsexperimentes* bestimmen (Abb. 307). Neutronenquelle, zu untersuchende Probe und Neutronendetektor befinden sich in einer Linie. Es wird die Neutronenintensität mit und ohne Probe gemessen. Das Verhältnis der beiden Messungen wird *Transmission* genannt und gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein Neutron den Probekörper ohne Wechselwirkung durchdringt. Der Zusammenhang zwischen totalem Wirkungsquerschnitt σ_t und Transmission T ergibt sich dann aus der Beziehung

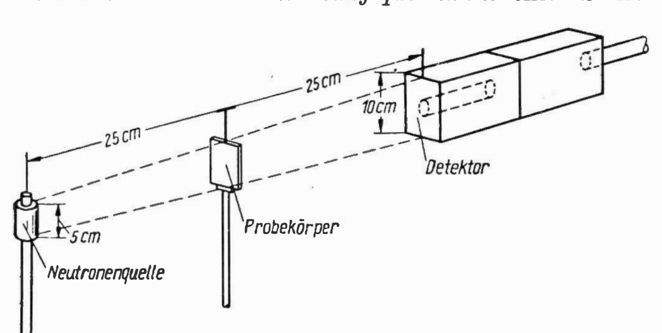


Abb. 307. Einfache experimentelle Anordnung zur Bestimmung totaler Wirkungsquerschnitte mit Hilfe einer Photoneutronenquelle [W 47-1]

$$T = e^{-N \sigma_t x},$$
$$\sigma_t = \frac{1}{N x} \ln \frac{1}{T}, \qquad (148.1)$$

wobei N die Zahl der Atome pro cm^3 und x die Dicke des Probekörpers bezeichnen.

Für jede Transmissionsmessung ist es wichtig, daß die *Bedingung der „guten Geometrie"* eingehalten wird. Damit möglichst wenig der in der Probe um kleine Winkel abgelenkte Neutronen vom Detektor registriert werden, müssen die Öffnungswinkel der Neutronenbündel möglichst klein sein. Wie weit sie verkleinert werden können, hängt natürlich hauptsächlich von der verfügbaren Neutronenintensität ab. Zur Bedingung der guten Geometrie gehört auch, daß sich keine störenden Gegenstände in der Nähe der Anordnung befinden, die Neutronen in den Detektor streuen könnten. Es ist also auf einen genügend großen Abstand von den Laborwänden, dem Fußboden usw. zu achten.

Bei Transmissionsmessungen brauchen nur *relative* Intensitäten bestimmt zu werden, und die geometrischen Bedingungen sind leicht optimal zu gestalten. Viel schwieriger ist es, zuverlässige Messungen von *Streuquerschnitt* und *Reaktionsquerschnitt* einzeln durchzuführen, da dann absolute Intensitäten unter ungünstigen geometrischen Verhältnissen bestimmt werden müssen. Über totale Wirkungsquerschnitte liegt deshalb bisher ein weit umfangreicheres und präziseres experimentelles Material vor als über Streu- und Reaktionsquerschnitte.
Je genauer die Energie der Neutronen definiert ist, desto wertvoller ist die aus einer Wirkungsquerschnittsmessung zu gewinnende physikalische Information. Es werden daher entweder *monochromatische Neutronenstrahlen*, deren Energie in einem größeren Intervall variiert werden kann, verwendet, oder man benutzt besondere Anordnungen, die aus einem kontinuierlichen Neutronenspektrum bestimmte Energien heraussieben. Das erstgenannte Verfahren läßt sich jedoch nur für Neutronenenergien von einigen keV an aufwärts anwenden. Es wurde oben bereits darauf hingewiesen, daß es mit Beschleunigern nicht möglich ist, bei kleineren Energien Neutronen genügender Energiehomogenität zu erzeugen. In dem physikalisch sehr interessanten Bereich zwischen der thermischen Energie und einigen keV ist man daher auf das an zweiter Stelle genannte Verfahren angewiesen. Als intensive Neutronenquelle wird hier entweder der *Reaktor* oder ein *Beschleuniger*, dessen Target sich in einem Block aus moderierendem Material (z. B. Paraffin) befindet, verwendet.
Ein anderer, eng mit dem bisher besprochenen zusammenhängender Problemkreis ist die möglichst genaue *Bestimmung von Neutronenenergien.* So ist z. B. die Kenntnis des Spektrums einer Ra-Be-Quelle oder eines Reaktors eine notwendige Vorbedingung für viele Anwendungen. Aus der Energieverteilung der bei Kernreaktionen entstehenden Neutronen können wertvolle Aufschlüsse über die angeregten Zustände der beteiligten Kerne gewonnen werden. Hierfür können zum Teil dieselben Hilfsmittel wie bei Wirkungsquerschnittmessungen verwendet zum Teil müssen, entsprechend der abweichenden Fragestellung, andere Wege beschritten werden. Alle Verfahren der Neutronenspektroskopie lassen sich jedoch auf einige wenige Grundtypen zurückführen, die in den folgenden Abschnitten der Reihe nach besprochen werden sollen.
Die charakteristische Kenngröße für die *Güte einer spektroskopischen Anordnung* ist ihr *Auflösungsvermögen.* Darunter ist wie üblich folgendes zu verstehen:

Gegeben seien streng monoenergetische Neutronen mit der Energie E. Das Spektrometer wird in diesem Falle jedoch nicht eine scharfe Linie registrieren, sondern eine Verteilung, die ein gewisses Energieintervall überdeckt und eine *Halbwertsbreite* ΔE besitzt. Unter der „*Auflösung*" der Apparatur verstehen wir dann das Verhältnis $\frac{\Delta E}{E}$, das gewöhnlich in Prozenten angegeben wird. Auch bei Wirkungsquerschnittsmessungen spielt das Auflösungsvermögen der Apparatur eine entscheidende Rolle. Ist z. B. die relative Halbwertsbreite $\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{\text{res}}$ einer Resonanzlinie kleiner als die apparative Auflösung, so kann die Form der Resonanzlinie nicht mehr richtig wiedergegeben werden. Häufig tritt sogar der Fall ein, daß die Auflösung nicht genügt, um benachbarte Resonanzlinien zu trennen oder schmale Resonanzen überhaupt zu entdecken.

Ein notwendiges Element jeder neutronenspektroskopischen Anordnung ist der *Detektor*. Stehen von vornherein monochromatische Neutronen zur Verfügung, so hat der Detektor lediglich die Aufgabe, die Intensität der auffallenden Neutronen zu registrieren. Bei anderen Versuchsanordnungen ist der Detektor oft auch gleichzeitig das energieselektive Element.

Über den einfachen *Nachweis von Neutronen* soll hier nicht ausführlich gesprochen werden, da dies schon an anderer Stelle geschehen ist (s. Bd. I, Abschn. B). Wir wollen hier nur kurz zusammenfassen, welche Möglichkeiten es für den Neutronennachweis überhaupt gibt. Wir kennen drei grundsätzlich verschiedene Nachweismethoden:

1. Beobachtung von *Kernreaktionen*, die durch Neutronen ausgelöst werden. Hierzu gehört die bekannte $B^{10}(n, \alpha)\,Li^7$-Reaktion, die in Ionisationskammern, BF_3-Zählrohren oder auch neutronenempfindlichen Szintillatoren Verwendung findet. Erwähnt sei, daß auch die beim (n, γ)-Prozeß entstehende Gammastrahlung in Verbindung mit einem Szintillationszähler zum Nachweis dienen kann.

2. Messung der von Neutronen in geeigneten *Detektorfolien* induzierten künstlichen Radioaktivität.

3. Beobachtung von elastisch gestreuten *Rückstoßkernen* (meist Protonen), z.B. in der Wilson-Kammer, in der Kernspuremulsion oder in der Ionisationskammer. Dieses Verfahren eignet sich nur für schnelle Neutronen.

b) Schwellenreaktionen, Resonanzdetektoren und Filtermethoden

Um aus einem kontinuierlichen Neutronenspektrum, wie es von einer Ra-Be-Quelle oder einem Reaktor geliefert wird, Neutronen eines bestimmten Energieintervalls herauszusieben, kann man sich der Tatsache bedienen, daß bestimmte Kernreaktionen nur oder vorzugsweise von Neutronen einer bestimmten Energie ausgelöst werden. Eine Reihe von (n, p)- und (n, α)-Reaktionen sowie alle $(n, 2n)$-Reaktionen sind stark endotherm und werden daher nur von Neutronen höherer Energie ausgelöst. Sie sind dadurch charakterisiert, daß der Reaktionsquerschnitt bis zum Erreichen der *Schwellenenergie* gleich Null ist, nach Überschreiten der Schwelle aber mehr oder weniger rasch ansteigt. Man wählt solche Reaktionen aus, bei denen die Halbwertszeit der radioaktiven Folgeprodukte in einem für

die Messung bequemen Bereich liegt. Wird eine Detektorfolie aus der betreffenden Substanz in den zu analysierenden Neutronenfluß gebracht und dort eine bestimmte Zeit gelassen, so ist die im Anschluß an die Bestrahlung mit einem Zählrohr gemessene *Aktivität* der Folie ein *Maß für die Intensität der Neutronen*, deren Energie oberhalb der Schwelle liegt. Um zu quantitativen Resultaten zu kommen, muß allerdings die allgemeine Form des Neutronenspektrums bekannt sein. Für die Aktivität A des (als dünn vorausgesetzten) Detektors gilt

$$A = N\lambda(1 - e^{-\lambda T})\, e^{-\lambda t} \int_{\text{Schwelle}}^{\infty} \Phi(E)\, \sigma(E)\, dE\,, \qquad (148.2)$$

wobei N die Zahl der Atome in der Detektorfolie, λ die Zerfallskonstante, T die Bestrahlungsdauer und t die Zeit nach Beendigung der Bestrahlung bedeuten. $\Phi(E)$ ist der zu messende differentielle *Neutronenfluß* (Neutronen pro cm^2, sec und Energieintervall) und $\sigma(E)$ der Wirkungsquerschnitt der Reaktion bei der Energie E. Auch wenn $\sigma(E)$ als bekannt vorausgesetzt werden kann, erlaubt die Integralbeziehung keine eindeutige Festlegung von $\Phi(E)$. Werden jedoch mehrere verschiedene Detektoren mit verschiedenen Schwellenenergien gleichzeitig verwendet und lassen sich außerdem plausible Annahmen über den ungefähren Verlauf des Neutronenspektrums machen, so ist die Methode durchaus für die *quantitative* Spektroskopie schneller Neutronen oberhalb 1 MeV geeignet. Wegen ihrer vollkommenen *Unempfindlichkeit gegen Gammastrahlung* bieten die Schwellendetektoren besondere Vorteile für Messungen innerhalb der aktiven Zone eines Reaktors. Abb. 308 zeigt das mit dieser Methode aufgenommene Spektrum der schnellen Neu-

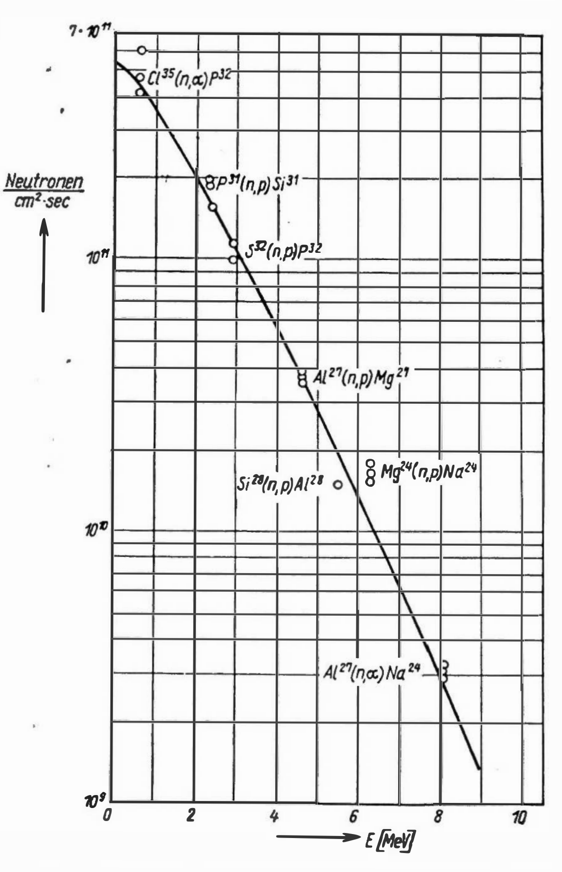


Abb. 308. Spektrum der schnellen Neutronen in der Nähe eines Brennstoffelements in einem H_2O-moderierten Reaktor, aufgenommen mit Hilfe von Schwellendetektoren [R 55-1]. Es handelt sich um ein integrales Spektrum (Neutronenfluß oberhalb der Schwellenenergie als Funktion der Schwellenenergie). Ausgezogene Kurve = Spektrum der Spaltungsneutronen

tronen in unmittelbarer Nähe eines Brennstoffelements in einem Bassin-Reaktor[1]), das praktisch mit dem unmoderierten Spektrum der Spaltungsneutronen (ausgezogene Kurve) übereinstimmt. Zu beachten ist, daß in der Abbildung „effektive" Schwellenwerte angegeben sind, die sich aus der Integralbeziehung (148.2) unter Verwendung eines in bestimmter Weise angenommenen Verlaufs

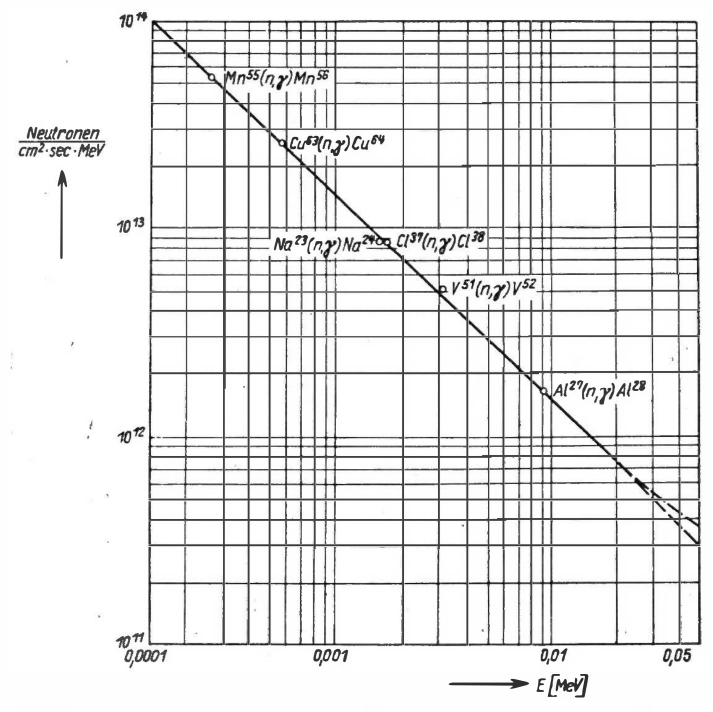


Abb. 309. Spektrum der Resonanzneutronen in einem H_2O-moderierten Reaktor, aufgenommen mit Hilfe von Resonanzdetektoren [R 55-1]. Es handelt sich hier um ein differentielles Spektrum (Neutronenfluß pro Energieintervall als Funktion der Energie). Ausgezogene Kurve = $\frac{1}{E}$ -Verteilung

von $\Phi(E)$ ergeben. Dabei ist zusätzlich vorausgesetzt, daß $\sigma(E)$ oberhalb der effektiven Schwellenenergie einen konstanten („effektiven") Wert besitzt und unterhalb der Schwelle verschwindet. Die wirkliche Reaktionsschwelle liegt bei niedrigeren Neutronenenergien.

Die gleiche Methodik kann auch auf das Gebiet der *Resonanzneutronen* übertragen werden. Hier wird die Tatsache ausgenutzt, daß der Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang bei vielen Stoffen einen ausgesprochenen *Resonanzcharakter*

[1]) Dies ist ein Forschungsreaktor mittlerer Leistung mit angereichertem Uran als Brennstoff und gewöhnlichem Wasser als Moderator, der zur Abschirmung in einem großen Wasserbassin untergebracht ist. Das Neutronenspektrum innerhalb der aktiven Zone dürfte etwa dem des Rossendorfer Forschungsreaktors entsprechen.

besitzt, d. h. bei bestimmten Neutronenenergien besonders große Werte annimmt. Ein aus einem solchen Stoff bestehender Detektor wird also vorzugsweise durch Neutronen aktiviert werden, deren Energie der betreffenden Resonanzenergie entspricht. Abb. 309 zeigt das mit verschiedenen Resonanzdetektoren aufgenommene Spektrum der Neutronen mittlerer Energie innerhalb des Bassin-Reaktors. Es besteht gute Übereinstimmung mit der für die Resonanzneutronen zu erwartenden $\frac{1}{E}$-Verteilung.

Ein Material, das bei einer bestimmten Neutronenenergie eine starke Resonanzabsorption aufweist, läßt sich auch als *Neutronenfilter* verwenden. Hierauf wurde schon kurz am Beispiel des Cd hingewiesen, das eine ausgeprägte

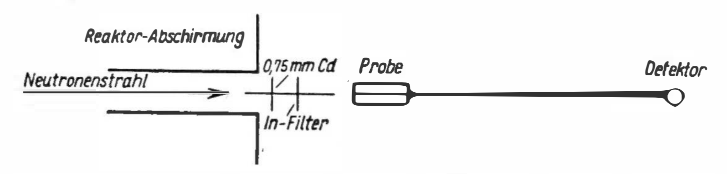


Abb. 310. Experimentelle Anordnung zur Messung totaler Wirkungsquerschnitte bei 1,44 eV nach der Filtermethode. Das Cd-Blech bleibt ständig im Strahl zur Abschirmung der thermischen Neutronen

Resonanzstelle im thermischen Gebiet besitzt und daher zur Abschirmung thermischer Neutronen verwendet wird. Der Einfangsquerschnitt des *Indium* steigt bei einer Neutronenenergie von 1,44 eV in einer scharfen Resonanz auf 30 000 barn an. Eine dünne In-Folie stellt daher ein ideales Filter für 1,44 eV-Neutronen dar. Eine einfache Versuchsanordnung zur Bestimmung totaler Wirkungsquerschnitte bei 1,44 eV nach der Filtermethode zeigt Abb. 310. Bei konstanter Intensität des einfallenden Strahls werden hintereinander vier Messungen durchgeführt: T_1 = Zählrate ohne Probe und ohne In-Filter, T_2 = Zählrate ohne Probe und mit In-Filter, T_3 = Zählrate mit Probe und ohne In-Filter, T_4 = Zählrate mit Probe und mit In-Filter. Dann ist die Transmission

$$T = \frac{T_3 - T_4}{T_1 - T_2}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron von 1,44 eV von der Probe durchgelassen wird. Noch einfacher läßt sich natürlich die Transmission für 1,44 eV-Neutronen bestimmen, wenn Indium nicht nur als Filter, sondern auch statt des BF_3-Zählrohrs als Detektor benutzt wird, dessen Aktivierung ein Maß für die Neutronenintensität ist [H 41-1].

c) Spektroskopie der Rückstoßprotonen

Zur quantitativen Spektrometrie schneller Neutronen verwendet man häufig die elastische Neutron-Proton-Streuung. Für den Zusammenhang zwischen der Energie des Neutrons, E_n, der Energie des angestoßenen Protons, E_p, und dem

Winkel θ zwischen den Flugbahnen von Neutron und Proton ergibt die Anwendung von Impuls- und Energiesatz die einfache Beziehung[1])

$$E_p = E_n \cos^2 \theta . \tag{148.3}$$

Wenn also die Einfallsrichtung des Neutrons bekannt ist, läßt sich aus der relativ bequem meßbaren Energie des Protons und dem Winkel θ die Energie des auslösenden Neutrons berechnen.

Eine wegen ihrer Einfachheit und vielfältigen Anwendbarkeit weit verbreitete Methode beruht auf der Beobachtung der Rückstoßprotonen in einer *Kern-*

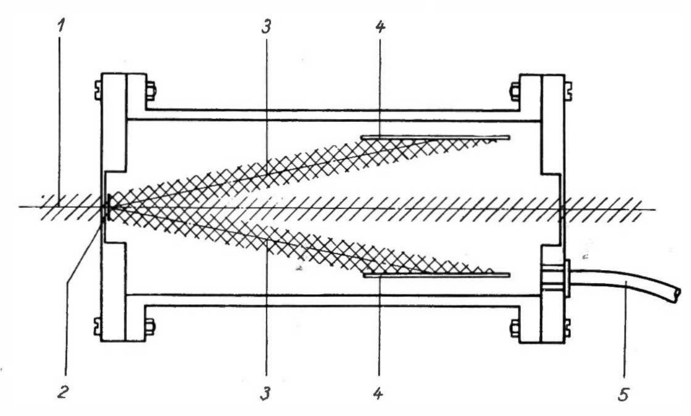


Abb. 311. Neutronenspektrometer mit Kernphotoplatten (1 durchgehendes Neutronenbündel, 2 Radiatorfolie aus Polyäthylen, 3 ausgenutzte Rückstoß-Protonenbündel, 4 Kernphotoplatten, 5 Anschluß für Vakuumpumpe)

spuremulsion. Ein Neutronenspektrometer, das nach diesem Prinzip gebaut ist, zeigt Abb. 311. Ein feiner Neutronenstrahl trifft auf eine dünne Schicht eines wasserstoffhaltigen Materials, den Radiator. Die dort ausgelösten Protonen fallen unter dem Winkel θ auf die Schicht der Platten, die sich gemeinsam mit dem Radiator in einer evakuierten Kammer befinden. Aus der nach der Entwicklung mit einem Mikroskop gemessenen Reichweitenverteilung der Protonenspuren kann dann das Energiespektrum der Neutronen berechnet werden.

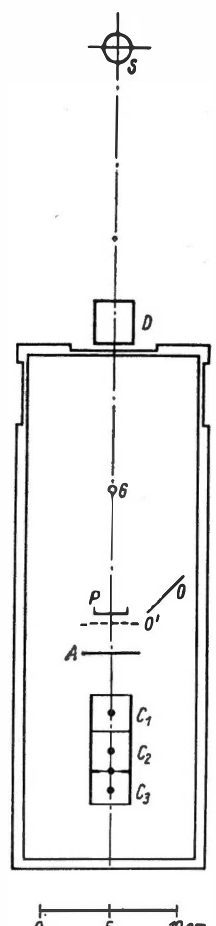
Da die Emulsion selbst Wasserstoff enthält, kann man auch die Neutronen direkt auf die Schicht fallen lassen, so daß die Rückstoßprotonen in der Schicht selbst erzeugt werden. Dies Verfahren ist zwar nicht so genau wie das zuerst beschriebene, hat jedoch den Vorteil, daß niedrigere Neutronenintensitäten ausreichen. Die Auswertung ist in diesem Falle mühsamer, da nicht nur die Reichweiten, sondern auch die Winkel der Protonenspuren gemessen werden müssen. Die *relative Genauigkeit,* mit der ein Neutronenspektrum im Gebiet zwischen 2 und

---

[1]) Man beachte bei der Ableitung, daß Proton und Neutron praktisch die gleiche Masse besitzen.

14 MeV ausgemessen werden kann, beträgt ± 5% bei Verwendung eines äußeren Radiators und ± 10%, wenn die Protonen in der Emulsion erzeugt werden [R 53-1].
Für Energien < 0,5 MeV kann die Kernplatte nicht mehr eingesetzt werden, da die Spuren für eine quantitative Auswertung zu kurz sind. Hier empfiehlt sich die Verwendung einer *Nebelkammer*, die mit Wasserstoff oder einem wasserstoffhaltigen Gas gefüllt ist. Bonner und Mitarbeiter [B 52-1] konnten z. B. in einer mit H_2 unter einem Druck von $\frac{1}{3}$ Atm gefüllten Kammer die Reichweiten von Rückstoßprotonen für Energien zwischen 50 und 700 keV bestimmen und damit den unteren Teil des Spektrums der Spaltungsneutronen ausmessen.

Kernplatte und Nebelkammer haben den gemeinsamen Nachteil, daß die Auswertung der Ergebnisse erst nachträglich erfolgen kann und viel Mühe und Zeit kostet. In dieser Hinsicht sind die im folgenden beschriebenen Anordnungen, die eine direkte Ablesung der Resultate ermöglichen, vorzuziehen.



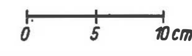


Abb. 312. Neutronenspektrometer nach Ageno, Amaldi, Bocciarelli und Tabacchini [A 47-1]

Bei höheren Neutronenenergien läßt sich die Energie der Rückstoßprotonen aus ihrer *Reichweite in Absorberfolien* bestimmen. Eine einfache Anordnung dieser Art zeigt Abb. 312. Die Neutronen der Quelle S durchdringen den Probekörper D, dessen Transmission gemessen werden soll, und lösen in einer dünnen Paraffinschicht P Protonen aus. Die in einem engen Winkelbereich nach vorn herausgeschlagenen Protonen werden in einem Teleskop aus drei in Koinzidenz geschalteten Proportionalzählern C_1, C_2, C_3 registriert, wenn sie genügend Energie besitzen, um die bei A eingeschobene Absorberfolie durchdringen zu können. Die Dicke des Absorbers A bestimmt also eine untere Grenzenergie E_0 für die registrierten Protonen, und die gemessene Zählrate ist ein Maß für die Intensität der Neutronen oberhalb E_0. Wird ein zweiter Absorber O ebenfalls in den Strahl gedreht (an die Stelle O'), so wird die untere Grenzenergie auf E_1 erhöht, und die Zählrate nimmt entsprechend ab. Die Differenz der beiden Zählraten ist dann ein Maß für die Intensität der Neutronen im Intervall zwischen E_0 und E_1.
Ein solcher Apparat hat natürlich nur ein *geringes Auflösungsvermögen*. Genauere Resultate sind zu erzielen, wenn die Energie der Rückstoßprotonen direkt gemessen wird. Dies kann z. B. in einer *Hochdruck-Ionisationskammer* geschehen, wie sie von Schmidt-Rohr [S 53-1] verwendet wurde. Die Auswahl der nach vorn angestoßenen Protonen erfolgt hier durch ein Blendensystem in Verbindung mit einer Antikoinzidenzschaltung. Es werden nur solche Protonen registriert, die in einem gewissen Winkelbereich nach vorn angestoßen wurden

Abb. 313. Neutronenspektrometer nach SCHMIDT-ROHR S [53-1]. Die Rückstoßprotonen werden im Gas der Kammer I erzeugt, durchlaufen ein Blendensystem und kommen im Gas der Kammer II zur Ruhe. Registriert wird die Gesamtionisation in Kammer I + II, wobei Kammer III in Antikoinzidenz geschaltet ist. Das Gerät wird mit Wasserstoff oder Methan unter einem Druck von einigen atü gefüllt

und deren Flugbahn innerhalb der Registrierkammer endet (s. Abb. 313). Dieses Spektrometer arbeitet in einem Energiebereich zwischen 2 und 25 MeV.
Bei noch höheren Neutronenenergien wird die Reichweite der Rückstoßprotonen so groß, daß auch eine Hochdruck-Ionisationskammer nicht mehr ausreicht. In diesem Falle besteht die Möglichkeit, die Protonen in einem *Szintillationskristall* aufzufangen, wobei dann die Größe des mit einem Sekundärelektronenvervielfacher gemessenen Lichtblitzes ein Maß für die Protonenenergie darstellt. Ein derartiges Spektrometer für Neutronen von 50 bis 250 MeV ist z. B. von GUERNSEY und Mitarbeitern [G 52-1] gebaut worden. Zur Festlegung des Streuwinkels dient bei diesem Gerät ein Teleskop aus drei mit dem Spektrometerkristall in Koinzidenz geschalteten Szintillationszählern, deren Kristalle von den durchfliegenden Protonen passiert werden müssen, damit der Impuls des Spektrometerkristalls registriert wird.

d) Laufzeitmethoden

Besonders weite Verbreitung hat in den letzten Jahren die Verwendung von *Laufzeitspektrometern* für die Neutronenspektroskopie gefunden. Allen diesen Geräten ist gemeinsam, daß sie mit einer *modulierten Neutronenquelle* arbeiten, die Neutronenimpulse extrem kurzer Zeitdauer produziert. Die Neutronen durchfliegen eine Laufstrecke von einigen m Länge, wobei die Impulse entsprechend den verschiedenen Geschwindigkeiten der Neutronen auseinandergezogen werden. Die am Ende der Laufstrecke aufgestellte *elektronische Detektoranordnung* arbeitet synchron mit der Impulsfrequenz und ist gewöhnlich mit einem *Vielkanalanalysator* ausgerüstet, der die ankommenden Neutronen nach ihrer Flugzeit sortiert. Man gewinnt auf diese Weise ein *Geschwindigkeitsspektrum* der Neutronen.
Die *Auflösungsfähigkeit* einer solchen Apparatur hängt vor allem von der Zeitdauer eines Neutronenimpulses τ_i, der Zeitunsicherheit τ_d bei der Registrierung (meist bestimmt durch die Kanalbreite des Analysators) und der Länge l der Laufstrecke ab. Gewöhnlich wird der Ausdruck

$$\Delta t = \frac{\tau_i + \tau_d}{2l} \tag{148.4}$$

als *Auflösung* bezeichnet und in μsec/m angegeben. Für die relative Unsicherheit in der Geschwindigkeitsmessung ergibt sich

$$\frac{\Delta v}{v} = v\,\Delta t = \frac{\Delta t}{t}, \tag{148.5}$$

wobei $t = \frac{1}{v}$ die Flugzeit pro Meter bedeutet. Unter Δv ist hier wie üblich die Halbwertsbreite der Spektrometerkurve für eine monochromatische Neutronenlinie zu verstehen. Aus (148.5) erhalten wir sofort für die Energieauflösung der Apparatur[1])

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\left(\frac{2E}{M_n}\right)^{1/2}\Delta t = 2\left(\frac{2E}{M_n c^2}\right)^{1/2} c\,\Delta t. \tag{148.6}$$

[1]) Die Einführung des Faktors c (= Lichtgeschwindigkeit) dient zur einfacheren numerischen Auswertung. Man benötigt in diesem Falle nur die Zahlenwerte: $M_n c^2 = 939{,}5$ MeV, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec = 300 m/μsec.

Neutronenimpulse großer Intensität lassen sich mit Beschleunigern herstellen. Am einfachsten ist dies, wenn der Beschleuniger selbst impulsweise arbeitet wie z. B. ein Synchrozyklotron oder ein Betatron. Wenn der Beschleuniger kontinuierlich arbeitet (Zyklotron, van de Graaff-Generator), so kann man entweder die Ionenquelle modulieren oder den Strahl mit einer Ablenkvorrichtung periodisch über das Target führen.

Steht ein Reaktor als Neutronenquelle zur Verfügung, so werden die Neutronenimpulse durch *mechanische Unterbrechung* des aus einem Kanal des Reaktors austretenden Neutronenstrahls erzeugt. Der mechanische Unterbrecher enthält eine

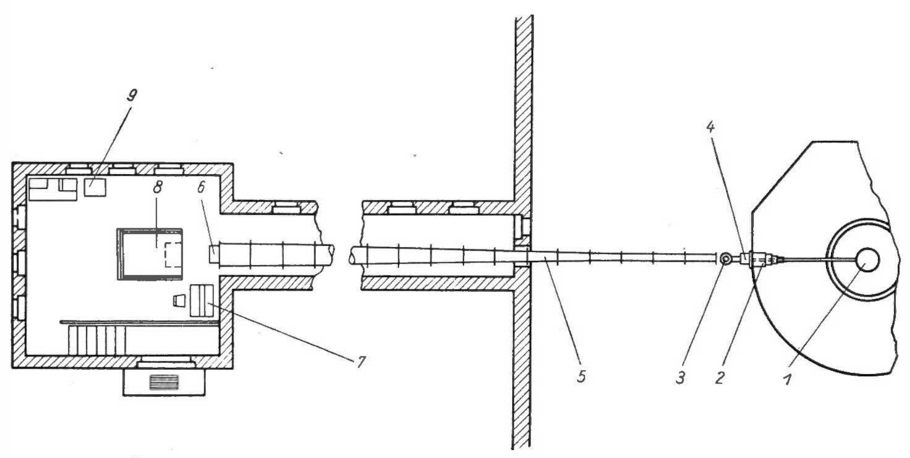


Abb. 314. Laufzeitspektrometer am Rossendorfer Forschungsreaktor

1 aktive Zone des Reaktors	4 Kollimator	7 Schaltpult
2 Kanalverschluß	5 evakuiertes Rohr	8 Strahlenfalle
3 Rotor	6 BF_3-Zählrohre	9 100-Kanal-Laufzeitanalysator

schnell rotierende Trommel, in der sich enge Schlitze befinden, so daß der Neutronenstrahl nur bei einer ganz bestimmten Trommelstellung hindurchgelassen wird. Eine solche Anordnung zeigt Abb. 314.

Obwohl heute sehr intensive Neutronenquellen zur Verfügung stehen, ist doch bei allen Laufzeitspektrometern die *Erzielung einer ausreichenden Neutronenintensität* am Detektorort ein entscheidendes Problem. So würde es zunächst am einfachsten erscheinen, die Auflösung einer gegebenen Anordnung dadurch zu erhöhen, daß die Länge l der Laufstrecke vergrößert wird (vgl. Gl. (148.4)). Da aber die Neutronenintensität pro cm^2 mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt, müßte gleichzeitig die Detektoroberfläche stark vergrößert oder eine erhebliche Senkung der Zählrate in Kauf genommen werden. Oft erweist es sich deshalb als zweckmäßiger, die Auflösung durch Verkleinerung von τ_i und τ_d zu verbessern, obwohl auch das mit einem Intensitätsverlust verknüpft ist. Der Intensitätsverlust, der sich aus einer Verkürzung der Impulszeitdauer τ_i ergibt, kann durch Erhöhung der Impulsfolge-

Tabelle 76. Laufzeitspektrometer

Ort	Neutronenquelle	Detektor	Länge der Laufstrecke [m]	maximale Auflösg. [µsec/m]	Messungen im Energieintervall	Literatur
Argonne Nat. Lab.	Reaktor + mech. Unterbr. $\tau_i = 45$ µsec	BF_3-Zähler	1,5	30	< 0,1 eV	[B 47-1]
Brookhaven Nat. Lab.	Reaktor + mech. Unterbr. $\tau_i = 1$ µsec	Szintillat. $\tau_d = 0{,}5 - 4$ µsec	20	0,06	10 eV bis 10 keV	[S 54-1], [H 56-2]
Moskau	Reaktor + mech. Unterbr. $\tau_i = 1$ µsec	$B^{10}F_3$-Zähler $\tau_d = 1-4$ µsec	19	0,07	1 eV bis 10 keV	[W 55-1]
Brookhaven Nat. Lab.	Zyklotron Be(d, n) + Moderator $\tau_i = 1{,}2$ µsec	Szintillat. $\tau_d = 0{,}5-512$ µsec	4,3	0,2	< 100 eV	[H 56-1]
Oak Ridge Nat. Lab.	van de Graaff Li(p, n) + Moderator $\tau_i < 0{,}01$ µsec	γ-Szintillat. $\tau_d < 0{,}01$ µsec	0,8	0,013	1 bis 40 keV	[H 56-1]
Los Alamos Sci. Lab.	van de Graaff T(p, n) $\tau_i = 0{,}002$ µsec	Szintillat.	1,2	0,0038	1 bis 2,5 MeV	[C 56-1]

frequenz ausgeglichen werden.[1]) Die Impulsfolgefrequenz ν ist jedoch durch die Bedingung

$$\nu < \frac{v_{\max} v_{\min}}{l(v_{\max} - v_{\min})} \qquad (148.7)$$

begrenzt, die besagt, daß die entsprechend der Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen (in den Grenzen zwischen $v_{\min}$ und $v_{\max}$) auseinandergezogenen Impulse am Ende der Laufstrecke nicht zusammenfließen.

Die Zeitdauer τ_d wird durch die Konstruktion des Detektors und die elektronische Registriervorrichtung bestimmt. Auch hier ist die Intensitätsfrage von Bedeutung. Je kleiner die Kanalbreite des Analysators gemacht wird, desto geringer wird bei gleichbleibender Neutronenintensität die Zählrate pro Kanal. Es hat daher keinen Sinn, τ_d wesentlich kleiner zu wählen als τ_i, auch wenn dies ohne Schwierigkeiten möglich wäre.

Vom *Detektor* eines Laufzeitspektrometers wird hohe Empfindlichkeit und möglichst schnelles Ansprechen verlangt. Für Neutronenenergien bis zu einigen keV, für die bisher die meisten Laufzeitspektrometer gebaut wurden, reicht die Zeitauflösung von einigen Zehntel Mikrosekunden aus, die mit speziellen BF_3-Zählern erreicht werden kann.

---

[1]) Dies geschieht bei den mechanischen Unterbrechern automatisch, wenn die Rotationsgeschwindigkeit erhöht wird.

Für Neutronenenergien im MeV-Gebiet dagegen ist die Anwendung schnell arbeitender Detektoren (z. B. Szintillationszähler) mit Auflösungszeiten von einigen 10^{-9} sec eine notwendige Voraussetzung.

In Tabelle 76 sind die charakteristischen Daten einiger moderner Laufzeitspektrometer angegeben.

e) Kristallmonochromatoren

Für die *Wellenlänge* λ von Neutronen der Geschwindigkeit v gilt nach DE BROGLIE die Beziehung

$$\lambda = \frac{\hbar}{M_n v} = \frac{\hbar}{\sqrt{2 M_n E}} = \frac{\lambda_c}{\sqrt{\frac{2E}{M_n c^2}}}, \qquad (148.8)$$

wobei $\lambda_c = \frac{h}{M_n c} = 1{,}32 \cdot 10^{-13}$ cm die Compton-Wellenlänge des Neutrons bedeutet und $M_n c^2 = 939{,}5$ MeV das Energieäquivalent der Neutronenmasse darstellt. Nach Einsetzen der Zahlenwerte sieht man, *daß die Wellenlänge von Neutronen mit kinetischen Energien der Größenordnung* eV *der Wellenlänge harter Röntgenstrahlung entspricht. Neutronenstrahlen können daher ebenso wie Röntgenstrahlen an Kristallgittern gebeugt werden,* insbesondere ist eine *Reflexion an einer Kristalloberfläche* möglich. Für den Fall, daß sich alle von den einzelnen Gitterebenen ausgehenden Wellen in einer bestimmten Richtung durch Interferenz verstärken, also Reflexion eintritt (s. Abb. 315), gilt die *Braggsche Bedingung*

$$n\lambda = 2d \sin\vartheta, \qquad (148.9)$$

wobei d den Abstand der betreffenden Gitterebenen, ϑ den Winkel zwischen Strahl und Gitterebene und $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Ordnung der Reflexion bedeuten. Es leuchtet sofort ein, daß sich diese Erscheinung zur Herstellung mono-

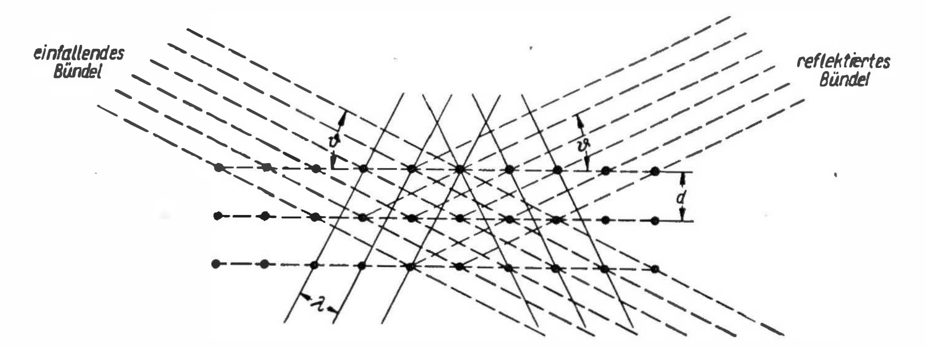


Abb. 315. Reflexion eines Neutronenbündels an einem Kristallgitter

chromatischer Neutronenbündel eignet, da für jeden Einfallswinkel ϑ nur eine (bzw. bei Berücksichtigung höherer Ordnungen einige wenige) Wellenlänge reflektiert wird. Reflexionen höherer Ordnung können jedoch im allgemeinen

vernachlässigt werden, da erstens der Reflexionsfaktor wie $\frac{1}{n^2}$ abnimmt und da zweitens bei Benutzung eines Reaktors als Neutronenquelle oberhalb des thermischen Gebiets die Intensität mit zunehmender Energie der Neutronen stark abfällt.

Aus (148.9) ergibt sich durch Differentiation

$$\Delta \lambda = \frac{2d}{n} \cos \vartheta \, \Delta \vartheta , \tag{148.10}$$

woraus mit (148.8) für das *Auflösungsvermögen*

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} = \operatorname{ctg} \vartheta \, \Delta \vartheta \tag{148.11}$$

folgt. In der Praxis wird gewöhnlich bei Winkeln $\vartheta \ll \pi$ gearbeitet, so daß $\operatorname{ctg} \vartheta \approx \frac{1}{\vartheta}$ gesetzt werden kann. Dann erhalten wir bei gegebener Winkeldivergenz $\Delta \vartheta$ für das Auflösungsvermögen als Funktion der Energie

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2 \Delta \vartheta}{\vartheta} \approx \frac{4d}{n \lambda_c} \left(\frac{2E}{M_n c^2} \right)^{1/2} \Delta \vartheta . \tag{148.12}$$

Die Auflösung hängt also beim Kristallmonochromator in gleicher Weise von der Neutronenenergie ab wie beim Laufzeitspektrometer (s. Gl. (148.6)). Im Gebiet höherer Neutronenenergie ist jedoch dem Kristallmonochromator im Gegensatz zum Laufzeitspektrometer durch den wie $\frac{1}{E}$ abnehmenden Reflexionsfaktor aus Intensitätsgründen eine Grenze gesetzt. Daher wird der Kristallmonochromator vorzugsweise im Gebiet unterhalb 10 eV verwendet. Die die Auflösung bestimmende Winkeldivergenz $\Delta \vartheta$ kann nicht beliebig verkleinert werden, auch wenn eine genügend große Intensität zur Verfügung steht, da bereits die Mosaikstruktur des Kristalls eine gewisse Schwankungsbreite des Reflexionswinkels erzeugt. Als Kristalle eignen sich z. B. LiF oder Beryllium.

Abb. 316 zeigt schematisch den Aufbau eines Kristallmonochromators.

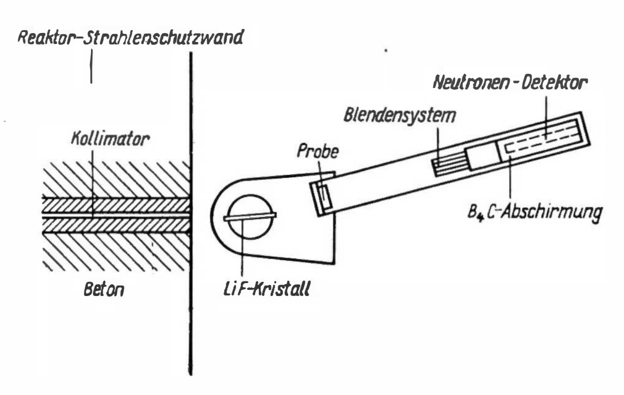


Abb. 316. Prinzipieller Aufbau eines Kristallmonochromators

Ein wesentlicher Vorteil des Kristallmonochromators gegenüber dem Laufzeitspektrometer besteht darin, daß er sich auch zur *Messung von Aktivierungsquerschnitten* als Funktion der Neutronenenergie eignet.

Es sei noch erwähnt, daß die *Beugung von langsamen Neutronen an Kristallgittern* ebenso wie die *Röntgenstrukturanalyse* zur Erforschung der Kristallstruktur verwendet werden kann. Es ist jedoch nicht möglich, hier auf diese, häufig als *Neutronenoptik* bezeichnete Forschungsrichtung näher einzugehen (s. [H 54-1]).

f) Mechanische Monochromatoren

Für Neutronenenergien unterhalb der thermischen Energie eignet sich der Kristallmonochromator in Verbindung mit einem Reaktor schlecht. In diesem Gebiet wächst die Neutronenintensität mit wachsender Energie, so daß sich die Reflexionen höherer Ordnung störend bemerkbar machen.
Monochromatische Strahlen solcher „*kalter*" *Neutronen* lassen sich mit einem *mechanischen Monochromator* herstellen. Dieser besteht z. B. aus zwei oder

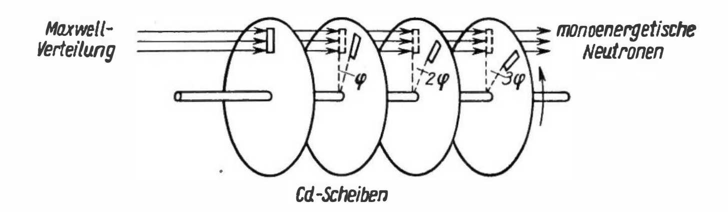


Abb. 317. Prinzip eines mechanischen Monochromators für langsame Neutronen

mehr Cadmiumscheiben, die auf einer gemeinsamen Achse angeordnet sind und in denen sich gegeneinander versetzte Schlitze befinden. Läßt man diese Anordnung rotieren, so werden nur Neutronen einer bestimmten Geschwindigkeit durchgelassen, die sich aus der Bedingung

$$v = \frac{2\pi\nu l}{\varphi} \qquad (148.13)$$

ergibt. Hierbei bedeuten ν die Rotationsfrequenz, l den Abstand zwischen den Scheiben und φ den Winkel, um den die Schlitze gegeneinander versetzt sind. Abb. 317 zeigt das Prinzip eines solchen Monochromators.

g) Ein Beispiel

Mit Hilfe der besprochenen Methoden wurden in den letzten Jahren für fast alle Elemente die *totalen Wirkungsquerschnitte* und auch eine ganze Reihe von *Reaktionsquerschnitten* als Funktion der Neutronenenergie bestimmt. Die verfügbaren Daten wurden von Hughes und Harvey zusammengestellt und in Form eines umfangreichen Atlanten veröffentlicht [H 55-1]. Aus diesem Atlas wurde als Beispiel der in Abb. 318 dargestellte *totale Wirkungsquerschnitt von Uran* im Gebiet zwischen $2 \cdot 10^{-4}$ und 10^{8} eV entnommen.

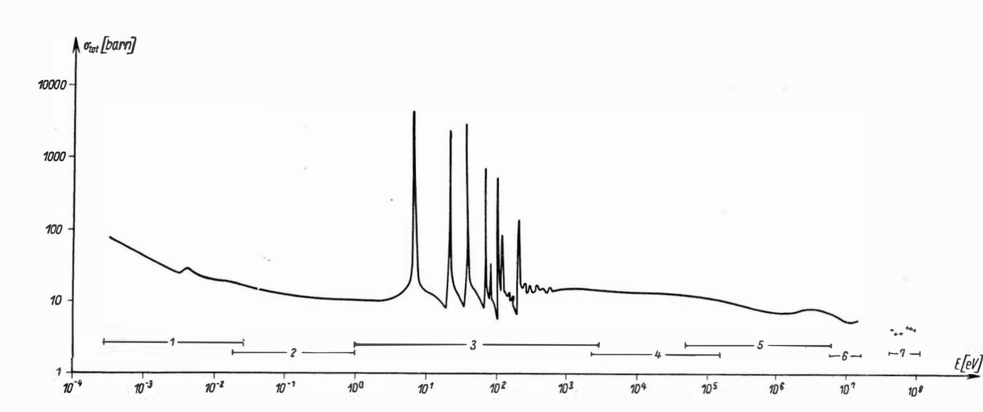


Abb. 318. Totaler Wirkungsquerschnitt des Urans als Funktion der Energie [H 54-1]. Die Transmissionsmessungen wurden durchgeführt mit:

1. Reaktor + Laufzeitspektrometer mit mechanischem Unterbrecher (slow chopper), Brookhaven;
2. Reaktor + Kristallmonochromator, Saclay;
3. Reaktor + Laufzeitspektrometer mit mechanischem Unterbrecher (fast chopper), Argonne und Brookhaven;
4. van de Graaff Li (p, n), Argonne;
5. van de Graaff Li (p, n), T(p, n), D(d, n), Los Alamos;
6. Schneller Reaktor + Rückstoßprotonen-Spektrometer, Los Alamos;
7. Synchrozyklotron Be(d, n) + Laufzeitspektrometer, Berkeley

Gut erkennbar sind hier die stark ausgeprägten Resonanzen im Gebiet zwischen 5 und 200 eV, welche die für die Neutronenbilanz im Reaktor schädliche *Resonanzabsorption* verursachen.
Außerdem ist vermerkt, mit welchen experimentellen Methoden die Meßpunkte in den einzelnen Bereichen des Spektrums gewonnen wurden.

§ 149. Bewegung von Neutronen in kompakter Materie

a) Stoßprozesse

Da die Neutronen nur mit den Kernen, nicht aber mit den Elektronen der Atomhüllen[1]) in Wechselwirkung treten, verhalten sie sich beim Durchgang durch Materie grundsätzlich anders als geladene Teilchen. *Wegen der geringen Größe der Kerne kann ein Neutron auch in kompakter Materie Weglängen in der Größenordnung einiger* cm *ohne Wechselwirkung zurücklegen.* Kommt es jedoch zum Stoß mit einem Kern des Mediums, so tritt stets eine intensive Wechselwirkung ein.
Wir unterscheiden hierbei drei Arten von Wechselwirkung: und zwar a) die *elastische Streuung*, bei der sich Bewegungsrichtung und Energie des Neutrons ändern, aber die gesamte kinetische Energie des Systems Neutron-Kern erhalten bleibt, b) die *unelastische Streuung*, bei der ein Teil der kinetischen Energie des stoßenden Neutrons zur Anregung des Kerns verbraucht wird, so daß sich sowohl die Bewegungsrichtung des Neutrons als auch die kinetische Energie des Systems Neutron-Kern ändert, c) die *Absorption des Neutrons* durch eine Kernreaktion, wobei es in diesem Zusammenhange gleichgültig ist, welcher Art diese Kernreaktion ist ((n, γ)-, (n, p)-, (n, α)-Reaktion usw.). Es sei noch bemerkt, daß die unelastische Streuung nur bei höheren Neutronenenergien (Größenordnug MeV) und schweren Kernen eine Rolle spielt.
Für jeden dieser drei Prozesse können wir eine *mittlere freie Weglänge* λ einführen, die mit dem entsprechenden Wirkungsquerschnitt durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} \tag{149.1}$$

zusammenhängt. Hierbei ist N die Zahl der Kerne pro cm³. Häufig wird die Größe $N\sigma$ auch als *makroskopischer Wirkungsquerschnitt* bezeichnet, wofür sich der Buchstabe Σ eingebürgert hat:

$$\Sigma = N\sigma = \frac{1}{\lambda}\cdot \tag{149.2}$$

Es ist jedoch zu beachten, daß Σ nicht die Dimension einer Fläche, sondern die einer reziproken Länge besitzt.
Die Wirkungsquerschnitte σ_s (für elastische Streuung), σ_{us} (für unelastische Streuung) und σ_a (für Absorption) hängen von der Art der betreffenden Kerne

[1]) Abgesehen von einer in diesem Zusammenhange nicht interessierenden geringfügigen elektromagnetischen Wechselwirkung infolge des magnetischen Moments des Neutrons.

und von der Neutronenenergie ab. Dabei ist der Variationsbereich von σ_s im allgemeinen geringer als der für σ_a. Die zugehörigen freien Weglängen bzw. makroskopischen Wirkungsquerschnitte hängen außerdem noch von der Dichte des Materials ab, in dem sich die Neutronen bewegen.

Ist die Zahl der Neutronen pro cm³ gleich n und der Betrag ihrer Geschwindigkeit gleich v, so bezeichnen wir das Produkt

$$\Phi = n v$$

als *Neutronenfluß*. Hier ist über die Bewegungsrichtung der Neutronen nichts ausgesagt, sie können regellos durcheinanderfliegen. Die Zahl der Stoßprozesse pro cm³ und sec, für die der Wirkungsquerschnitt σ gilt, ist dann

$$F = N \sigma n v = \frac{1}{\lambda} \Phi = \Sigma \Phi . \tag{149.3}$$

Wir werden im folgenden voraussetzen, daß die Wahrscheinlichkeit der Absorption eines Neutrons beim Stoß stets klein gegen die Wahrscheinlichkeit der elastischen Streuung ist ($\lambda_a \gg \lambda_s$ bzw. $\Sigma_a \ll \Sigma_s$) und daß keine unelastische Streuung auftritt.

b) Bremsung schneller Neutronen

Die bei Kernreaktionen entstehenden Neutronen haben gewöhnlich eine hohe Geschwindigkeit. Eine *Abbremsung* solcher schnellen Neutronen kann durch *elastische Streuung* an Atomkernen erfolgen. Die theoretische und experimentelle Erforschung dieses Bremsprozesses ist von großer praktischer Bedeutung für den Bau von Kernreaktoren (vgl. Bd. III).

Zunächst berechnen wir den *Energieverlust*, den ein Neutron der Masse M_n und Energie E_0 bei einem Stoß mit einem Kern der Masse M_K erleidet. Bei einem solchen Stoß gibt das Neutron einen Teil seiner kinetischen Energie an den getroffenen Kern ab, der dadurch aus dem Atomverband herausgeschlagen wird und dann seinerseits als geladenes Teilchen durch Wechselwirkung mit den Elektronen der Umgebung kontinuierlich abgebremst wird. Dabei setzen wir voraus, daß der Kern vor dem Stoß als ruhend angenommen werden kann, daß also seine thermische Bewegung im Verhältnis zur Bewegung des Neutrons vernachlässigbar ist.

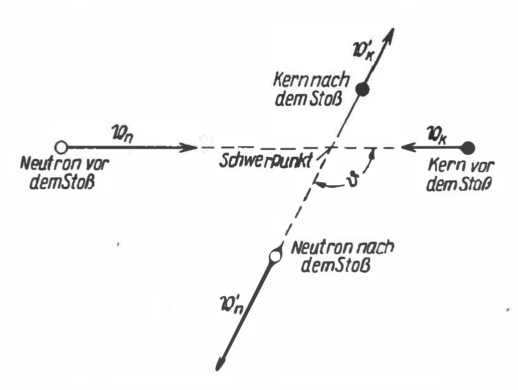


Abb. 319. Elastische Streuung im Schwerpunktsystem (Beispiel: Streuung an D)

Es erweist sich als zweckmäßig, den Stoßprozeß nicht in dem Koordinatensystem, in dem der Kern ruht *(Laborsystem)*, sondern im *System der Schwerpunktkoordinaten* zu beschreiben (Abb. 319).

$\mathfrak{v}_n$ sei die anfängliche Geschwindigkeit des Neutrons im Laborsystem; dann gilt für die *Schwerpunktsgeschwindigkeit* des Systems Kern-Neutron im Laborsystem

$$\mathfrak{v}_s = \frac{M_n}{M_n + M_K} \mathfrak{v}_n . \tag{149.4}$$

Im Schwerpunktssystem haben also Kern und Neutron die Geschwindigkeiten (wir benutzen zur Unterscheidung große Buchstaben)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_K &= -\mathfrak{v}_s &&= -\frac{M_n}{M_n + M_K} \mathfrak{v}_n , \\ \mathfrak{V}_n &= \mathfrak{v}_n - \mathfrak{v}_s = && \frac{M_K}{M_n + M_K} \mathfrak{v}_n . \end{aligned} \tag{149.5}$$

Im Schwerpunktssystem ist der *Gesamtimpuls* vor dem Stoß gleich Null. Wegen der Gültigkeit des Impulssatzes muß daher auch nach dem Stoß der Gesamtimpuls verschwinden:

$$M_n \mathfrak{V}_n + M_K \mathfrak{V}_K = M_n \mathfrak{V}_n' + M_K \mathfrak{V}_K' = 0 . \tag{149.6}$$

Da beim elastischen Stoß die *kinetische Energie* erhalten bleibt, gilt

$$M_n V_n^2 + M_K V_K^2 = M_n V_n'^2 + M_K V_K'^2 . \tag{149.7}$$

Die Gleichungen (149.6) und (149.7) lassen sich nur dann gleichzeitig erfüllen, wenn $|\mathfrak{v}_n| = |\mathfrak{v}_n'| = V_n$ und $|\mathfrak{v}_K| = |\mathfrak{v}_K'| = V_K$ ist, d. h., *im Schwerpunktsystem bleiben die Beträge der Impulse und die kinetischen Energien der stoßenden Teilchen einzeln erhalten. Lediglich ihre Bewegungsrichtung ändert sich* (Abb. 319). Bei der Rücktransformation auf das Laborsystem ergibt sich (s. Abbildung 320)

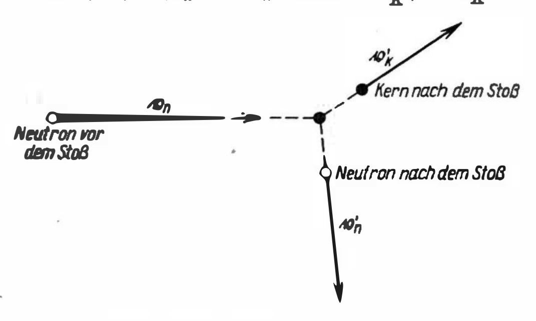


Abb. 320. Elastische Streuung im Laborsystem (Transformation von Abb. 319)

$$v_n'^2 = v_s^2 + V_n^2 + 2 v_s V_n \cos\theta , \tag{149.8}$$

wobei θ den Streuwinkel im Schwerpunktssystem bedeutet. Durch Einsetzen von (149.4) und (149.5) erhalten wir für das Quadrat der Geschwindigkeit des Neutrons nach dem Stoß

$$v_n'^2 = \left(\frac{M_n v_n}{M_n + M_K}\right)^2 + \left(\frac{M_K v_n}{M_n + M_K}\right)^2 + \frac{2 M_n + M_K}{(M_n + M_K)^2} v_n^2 \cos\theta$$

oder für die *Energie E nach dem Stoß* als Funktion der Ausgangsenergie E_0 und des Streuwinkels

$$E = \frac{M_n^2 + 2 M_n M_K \cos\theta + M_K^2}{(M_n + M_K)^2} E_0 . \tag{149.9}$$

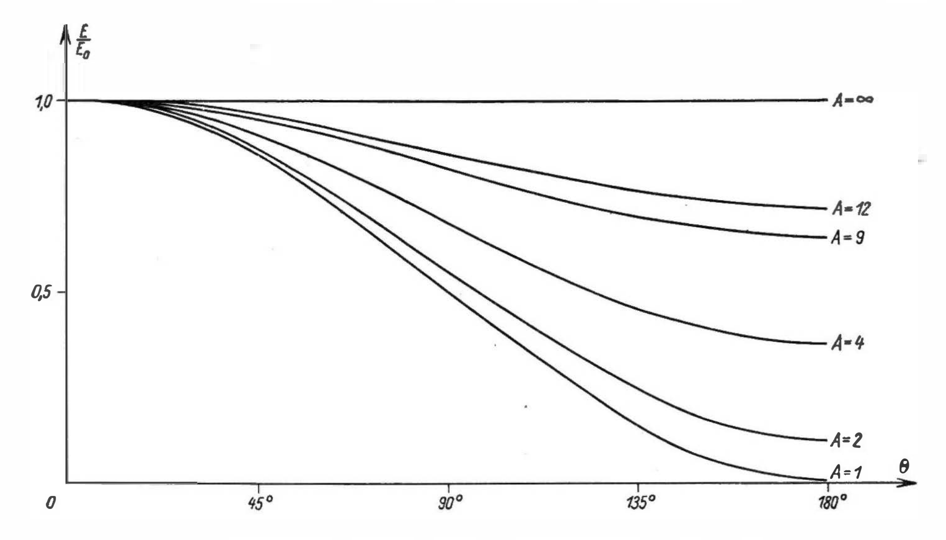


Abb. 321. Energieverlust bei der elastischen Streuung von Neutronen

θ = Streuwinkel im Schwerpunktssystem; $A = \frac{M_K}{M_n}$)

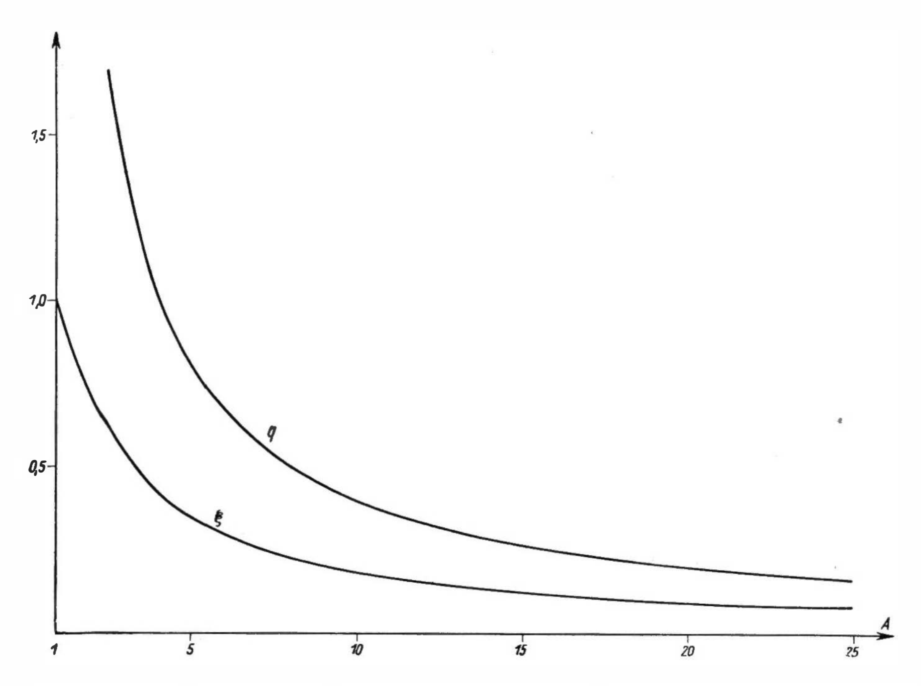


Abb. 322. Maximaler und mittlerer Lethargiezuwachs pro Stoß als Funktion der Massenzahl des streuenden Kerns

Der *maximale Energieverlust* (Abb. 321) tritt offenbar für $\cos\theta = -1$ ein. In diesem Falle gilt

$$(E_0 - E)_{\max} = \varDelta E_{\max} = E_0 - E_0 \left(\frac{M_K - M_n}{M_K + M_n}\right)^2 = \frac{4 M_n M_K}{(M_n + M_K)^2} E_0 \,. \tag{149.10}$$

Erfolgt die Bremsung durch Protonen ($M_K = M_n$), so tritt im günstigsten Falle eine vollständige Abbremsung ($\varDelta E = E_0$) ein. Auf schwerere Kerne kann dagegen bei einem Stoß die Neutronenenergie nicht vollständig übertragen werden.

Für die folgenden Betrachtungen empfiehlt es sich, zu einer logarithmischen Energieskala überzugehen. Wir führen daher das „*logarithmische Energiedekrement*"

$$u \equiv \ln \frac{E_0}{E} \tag{149.11}$$

ein, das kurz und treffend auch als „*Lethargie*" bezeichnet wird (u wächst mit abnehmender Neutronenenergie!). Für den *maximalen Lethargiezuwachs pro Stoß* (Abb. 322) folgt aus (149.10)

$$q = \ln \left(\frac{M_K + M_n}{M_K - M_n}\right)^2. \tag{149.12}$$

Dies ist eine *Materialkonstante* für den Stoff, in dem die Neutronen abgebremst werden.

Wir wollen jetzt die Wahrscheinlichkeit $f(u)\,du$ dafür bestimmen, daß ein Neutron, dessen Lethargie vor dem Stoß gleich Null war, nach dem Stoß in einem Lethargieintervall zwischen u und $u + du$ angetroffen wird ($0 \leqq u \leqq q$). Dazu muß eine Annahme über das *Streugesetz* gemacht werden. Bis zu Neutronenenergien von einigen MeV wird die Voraussetzung einer *kugelsymmetrisch isotropen Streuung* im Schwerpunktssystem experimentell bestätigt, und wir werden daher ausschließlich diesen Fall betrachten. Im Schwerpunktssystem soll also

$$f(\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2} \sin\theta \, d\theta \tag{149.13}$$

gelten, d. h., jedes Flächenelement einer Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt des Systems Neutron–Kern zusammenfällt, wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vom gestreuten Neutron getroffen.

Für die Verteilungsfunktion $f(u)$ erhalten wir mit (149.9), (149.11) und (149.13)

$$f(u)\, du = \frac{f(\theta)}{\frac{du}{d\theta}}\, du = \frac{(M_n + M_K)^2}{4 M_n M_K}\, e^{-u}\, du \,. \tag{149.14}$$

Hieraus ergibt sich für den mittleren Lethargiezuwachs pro Stoß

$$\xi = \overline{\ln \frac{E_0}{E}} = \frac{\int\limits_0^q u\, f(u)\, du}{\int\limits_0^q f(u)\, du} = \frac{1 - (1 + q)\, e^{-q}}{1 - e^{-q}} \,. \tag{149.15}$$

Wichtig an diesem Ergebnis ist, daß ξ nicht von E_0 abhängt, sondern ebenso wie q eine *Materialkonstante* des bremsenden Mediums darstellt. Die Unabhängigkeit des mittleren Lethargiezuwachses pro Stoß von der Neutronenenergie ist

der Hauptgrund für die Wahl der Lethargie anstelle der Energie als Maß für die Neutronenbremsung. Der Vorteil des Lethargiemaßstabes macht sich vor allem dann bemerkbar, wenn die Abbremsung von Neutronen durch viele aufeinanderfolgende Stöße betrachtet wird. Hierfür gilt bei x Stößen

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_x = x\,\xi .$$

Für die Zahl x der Stöße, die zur Abbremsung eines schnellen Neutrons von 2 MeV auf thermische Geschwindigkeit (0,025 eV) im Mittel benötigt wird, erhalten wir z. B.

$$x = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_{\mathrm{th}}} = \frac{1}{\xi} \ln (8 \cdot 10^7) = \frac{18{,}2}{\xi} .$$

Die für einige Elemente berechneten Werte finden sich in Tabelle 77.

Tabelle 77. Neutronenbremsung[1])

Element	M_K	ξ	x
H	1	1	18
D	2	0,725	25
Be	9	0,209	86
C	12	0,158	114
O	16	0,120	150
U	238	0,00838	2172

Die Bremsung ist um so stärker, je geringer das Atomgewicht der Bremssubstanz ist. Stark bremsende und dabei die Neutronen wenig absorbierende Substanzen nennt man auch *Moderatoren.*

c) Energiespektrum der Bremsneutronen

Wir nehmen jetzt an, daß in einem unendlich ausgedehnten Moderator ständig schnelle Neutronen erzeugt werden, deren Energiespektrum durch die Funktion $Q(E)$ bzw. $Q(u)$[2]) gegeben sei. Der im folgenden zu verwendende Lethargiemaßstab u sei dabei so normiert, daß $u = 0$ der oberen Grenzenergie E_0 des Spektrums

---

[1]) Es handelt sich hier allerdings nur um eine grobe Abschätzung, da die Kerne der Bremssubstanz als frei und vor dem Stoß ruhend angenommen wurden. In Wirklichkeit treffen diese Annahmen für Neutronenenergien unterhalb einiger eV nicht mehr zu. In diesem Bereich müßte bei einer exakten Berechnung der Abbremsung die thermische Bewegung und die chemische Bindung der Kerne berücksichtigt werden. Die chemische Bindung der Kerne im Molekular- oder Kristallgefüge hat eine Vergrößerung ihrer effektiven Masse zur Folge, woraus sich ergibt, daß bei niedrigen Neutronenenergien ξ nicht mehr unabhängig von E ist (ξ wird mit fallender Energie kleiner). Dementsprechend sind die wirklichen Stoßzahlen zur Abbremsung auf thermische Energie etwas größer als in Tabelle 77 angegeben.

[2]) Dimension: Neutronen pro cm^3, sec und Energie- bzw. Lethargieintervall.

der Primärneutronen entspricht. Zunächst interessieren wir uns nicht für die räumliche Verteilung, sondern nur für die *Energieverteilung im stationären Zustande*. Wir machen daher die Annahme, daß die Quellstärke Q im ganzen Medium räumlich und zeitlich konstant ist.

In (149.3) wurde bereits der Begriff der *Stoßzahldichte* F eingeführt. Da sich bei jedem Stoß die Lethargie des Neutrons ändert, ist $F(u)\,du$ die Anzahl der Neutronen, die pro cm³ und sec aus dem Lethargieintervall zwischen u und $u + du$ herausgestreut werden. Im stationären Zustande müssen die aus diesem Intervall durch Stöße herausgeworfenen Neutronen durch aus anderen Lethargiebereichen hineingestreute Neutronen ersetzt werden. Diese Bedingung wird durch die Integralgleichung

$$F(u)\,du = du\int_0^u \{F(u') + Q(u'\}\,f(u-u')\,du' \tag{149.16}$$

ausgedrückt. Hierbei ist $f(u-u')\,du$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron mit der Lethargie u' in das Intervall u, $u + du$ hineingestreut wird. Diese Funktion wurde bereits abgeleitet.

Aus (149.14) und (149.12) ergibt sich mit

$$\alpha = \frac{(M_n + M_K)^2}{4 M_n M_K}$$

$$f(u-u') = \begin{cases} \alpha\, e^{-(u-u')} & \text{für} \quad u - u' \leqq q\,, \\ 0 & \text{für} \quad u - u' > q\,. \end{cases} \tag{149.17}$$

Die allgemeine Lösung von (149.16) [P 46-1], [M 47-1], [B 49-1] ist kompliziert und kann hier nicht diskutiert werden. Die mathematische Schwierigkeit beruht dabei auf der in (149.17) enthaltenen *Unstetigkeit* der Funktion $f(u-u')$. Wir beschränken uns daher auf zwei besonders wichtige Spezialfälle.

α) *Bremsung an Wasserstoff*. In diesem Falle ist $\alpha = 1$, $q = \infty$, und die Unstetigkeit in $f(u-u')$ verschwindet. Die Integralgleichung (149.16) läßt sich dann leicht durch Differentiation lösen. Wir erhalten

$$F(u) = \int_0^u \{F(u') + Q(u')\}\,e^{-(u-u')}\,du',$$

$$F(u) = F(u) + Q(u) - \int_0^u \{F(u') + Q(u')\}\,e^{-(u-u')}\,du = Q(u),$$

$$F(u) = \int_0^u Q(u')\,du'. \tag{149.18}$$

Die leicht durchführbare Umrechnung auf den Energiemaßstab liefert

$$F(E)\,dE = \frac{dE}{E}\int_E^{E_0} Q(E)\,dE \tag{149.19}$$

für das *Energiespektrum der Bremsneutronen*.

β) Bremsung an beliebigen Kernen, asymptotischer Grenzfall. Wir betrachten die Bremsung in einem Lethargieintervall, in dem sich keine Quellen befinden. Dann folgt aus (149.16) und (149.17)

$$F(u) = \alpha \int_{u-q}^{u} F(u')\, e^{-(u-u')}\, du' \,. \tag{149.20}$$

Zum Aufsuchen der Lösung dieser Integralgleichung sind noch zusätzliche Annahmen nötig. Es sei daher weiterhin vorausgesetzt, daß auch die langsamsten Primärneutronen, deren Lethargie gleich u_0 sei, eine größere Anzahl von Stößen ausführen müssen, um die Lethargie u des betrachteten Intervalles zu erreichen. Es soll also $\frac{(u-u_0)}{q} \gg 1$ gelten. Da durch mehrere aufeinanderfolgende Stöße die ursprüngliche Form des Energiespektrums vollkommen verwischt wird, ist zu erwarten, daß $F(u)$ nach mehreren Stößen nicht mehr von der speziellen Quellverteilung abhängen und sich einer *universellen Funktion* annähern wird. Diese universelle Funktion ist aber offenbar gleich einer *Konstanten*, wie man durch Einsetzen in (149.20) unter Verwendung von (149.12) leicht nachprüfen kann. Um diese Konstante F_{as} zu bestimmen, benutzen wir die Tatsache, daß im stationären Zustande die Zahl der die Lethargie u pro sec überschreitenden Neutronen gleich der Zahl Q der pro sec insgesamt erzeugten Neutronen sein muß, da während des Bremsprozesses keine Neutronen verloren gehen sollen. Diese Bedingung lautet

$$Q = \int_{0}^{u_0} Q(u')\, du' = \alpha F_{as} \int_{u-q}^{u} du' \int_{u}^{u'+q} e^{-(u''-u')}\, du'' ,$$

woraus mit (149.12) und (149.15)

$$F_{as} = \frac{Q}{\alpha\{1-(1+q)\, e^{-q}\}} = \frac{Q}{\xi} \tag{149.21}$$

folgt. Für das *Energiespektrum* ergibt sich analog zu (149.19)

$$F_{as}(E)\, dE = \frac{Q}{\xi E}\, dE \,. \tag{149.22}$$

Auch hier ist die Stoßzahldichte proportional $\frac{1}{E}$.
Aus der Stoßzahldichte kann sehr leicht die *Neutronendichte*

$$n(E) = \frac{\lambda_s}{v} F(E) \tag{149.23}$$

und der *Neutronenfluß*

$$\Phi(E) = \lambda_s F(E) \tag{149.24}$$

berechnet werden. Wenn die Streuweglänge λ_s als energieunabhängig angenommen werden kann, folgt mit (149.19) bzw. (149.22) für die Bremsneutronen ein *Energiespektrum* der Form

$$n(E) \sim \frac{1}{E^{3/2}} \quad \text{bzw.} \quad \Phi(E) \sim \frac{1}{E} \,. \tag{149.25}$$

Dieses Spektrum besitzen z. B. die Neutronen in einem Reaktor oberhalb des thermischen Gebiets, wie durch Abb. 309 auf S. 734 bestätigt wird.

d) Diffusion thermischer Neutronen

Die Abbremsung der Neutronen ist beendet, wenn ihre kinetische Energie die Größenordnung kT erreicht hat und sich das „Neutronengas" mit den Kernen des Mcderators im Temperaturgleichgewicht befindet. Wenn das Material einen geringen Einfangquerschnitt für Neutronen besitzt, was wir im folgenden voraussetzen wollen, dann werden die thermischen Neutronen noch viele Stöße ausführen, ehe sie absorbiert werden. Sie diffundieren dann wie ein verdünntes Gas durch das Medium hindurch, wobei ihre mittlere Geschwindigkeit v gleich bleibt. Wir nehmen jetzt an, *daß die Dichte der thermischen Neutronen im Medium eine Funktion des Ortes ist*: $n = n(x, y, z)$. Dann wird ein *Diffusionsstrom* von Orten höherer Dichte zu Orten niedrigerer Dichte fließen. Zunächst stellen wir uns die Aufgabe, bei einem gegebenen Neutronenfeld $n(x, y, z)$ den Diffusionsstrom durch ein Flächenelement dS, das normal zur z-Richtung orientiert sei, zu berechnen (Abb. 323).

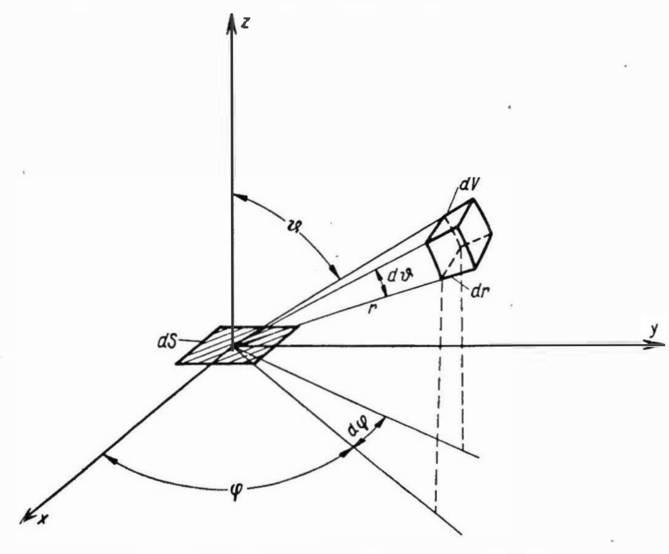


Abb. 323. Zur Berechnung der Neutronenstromdichte

Die Anzahl der Neutronen, die pro sec im Volumenelement dV gestreut wird, ist

$$\left(n_0 + r\cos\vartheta \left.\frac{\partial n}{\partial z}\right|_0\right)\frac{v}{\lambda_s}\,dV; \tag{A}$$

davon fliegt der Bruchteil

$$\frac{\cos\vartheta}{4\pi r^2}\,dS \tag{B}$$

in Richtung auf dS. Für diese besteht die Wahrscheinlichkeit

$$e^{-\frac{r}{\lambda_s}} \tag{C}$$

dafür, daß sie ohne einen weiteren Stoß auszuführen dS erreichen. Die Integration des Produktes (A) (B) (C) über den positiven Halbraum ergibt

$$J_z^- = \frac{n_0 v}{4} + \frac{\lambda_s v}{6}\left.\frac{\partial n}{\partial z}\right|_0 \text{ [Neutronen/cm}^2\text{sec]} \tag{149.26}$$

für den Neutronenstrom in negativer z-Richtung. Ebenso folgt

$$J_z^+ = \frac{n_0 v}{4} - \frac{\lambda_s v}{6} \frac{\partial n}{\partial z}\bigg|_0 . \qquad (149.27)$$

Der Diffusionsstrom in z-Richtung ergibt sich dann als Differenz von (149.26) und (149.27):

$$J_z^+ - J_z^- = -\frac{\lambda_s v}{3} \frac{\partial n}{\partial z}\bigg|_0 .$$

Das gleiche gilt selbstverständlich auch für die x- und y-Richtung, so daß wir für den Diffusionsstrom allgemein die Beziehung

$$J = -\frac{\lambda_s v}{3} \operatorname{grad} n = -D_n \operatorname{grad} n \qquad (149.28)$$

erhalten. $D_n = \frac{\lambda_s v}{3}$ ist der übliche *Diffusionskoeffizient*, der aus dem Fickschen Gesetz wohlbekannt ist (Dimension: cm²/sec). Häufig wird statt (149.28) auch

$$J = -D_\Phi \operatorname{grad} \Phi \qquad (149.29)$$

geschrieben, wobei $\Phi = nv$ den Neutronenfluß darstellt und $D_\Phi = \frac{\lambda_s}{3}$ jetzt die Dimension cm besitzt.

Bei der hier dargestellten einfachen Diffusionstheorie muß jedoch beachtet werden, daß einige Voraussetzungen gemacht wurden, die nicht immer erfüllt sind. So wurde bei der Ableitung des Diffusionskoeffizienten angenommen, daß die Streuung im Laborsystem kugelsymmetrisch erfolgt. Dies ist jedoch in Wirklichkeit häufig nicht der Fall. Wenn wir z. B. – wie im vorangehenden Abschnitt – auch im thermischen Gebiet eine isotrope Streuung relativ zum Schwerpunkt des Systems Neutron-Kern annehmen, so muß die Streuung im Laborsystem anisotrop sein, und zwar desto stärker, je leichter der streuende Kern ist. Andererseits kann im thermischen Gebiet der streuende Kern nicht mehr als frei angenommen werden, denn die chemische Bindungsenergie ist hier wesentlich größer als die beim Stoß übertragene kinetische Energie. Damit kommt die Molekül- bzw. Kristallstruktur des Mediums mit ins Spiel, und die exakte Behandlung der Streuung wird wesentlich komplizierter. Die *Anisotropie der Streuung*, die durch diese Effekte hervorgerufen wird, kann in der Diffusionstheorie durch Einführung der sog. *Transportweglänge* anstelle der Streuweglänge berücksichtigt werden (siehe z. B. [L 49-1]):

$$D_n = \frac{\lambda_{tr} v}{3} \quad \text{mit} \quad \lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{1 - \overline{\cos\vartheta}} ; \qquad (149.30)$$

$\cos\vartheta$ ist der Streuwinkel im Laborsystem, so daß also der Mittelwert $\overline{\cos\vartheta}$ ein Maß für die Anisotropie der Streuung ist. In der Praxis wird λ_{tr} jeweils experimentell bestimmt.

Außerdem haben wir bei der Berechnung des Diffusionsstromes nur das erste Glied einer Taylor-Entwicklung für die Neutronendichte berücksichtigt. Die Diffusionstheorie muß daher versagen, wenn sich die Neutronendichte über

Abstände von der Größenordnung der Transportweglänge zu stark ändert (etwa an einer Grenzfläche). Hier helfen die exakteren Methoden der *Transporttheorie*, die jedoch in diesem Zusammenhange nicht dargestellt werden sollen.

Ausgehend von (149.28) betrachten wir jetzt die *zeitliche und räumliche Änderung des Neutronenfeldes*. Die Neutronendichte an der Stelle x, y, z kann sich a) durch Hinzu- oder Abdiffusion von Neutronen, b) durch die örtliche Erzeugung und c) durch die örtliche Absorption von Neutronen ändern. Daraus ergibt sich die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial n(x,y,z;t)}{\partial t} = D_n \Delta n(x,y,z;t) + Q(x,y,z;t) - \frac{n(x,y,z;t)\,v}{\lambda_a}. \tag{149.31}$$

Ist die Quellverteilung $Q(x,y,z;t)$ zeitlich stationär, so muß sich auch die Dichteverteilung auf einen stationären Wert einstellen, d.h., wir können in diesem Falle $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ setzen. Diese Voraussetzung wird man auch dann machen können, wenn sich $Q(x,y,z;t)$ genügend langsam ändert (quasistationärer Fall).

Am einfachsten zu behandeln ist das Beispiel der *stationären, ebenen Flächenquelle*. Wir setzen voraus, daß sich in einem unbegrenzt ausgedehnten, streuenden Medium in der x, y-Ebene bei $x = 0$ eine Quelle thermischer Neutronen befindet, die nach beiden Seiten pro cm² und sec je $\frac{Q}{2}$ thermische Neutronen emittiert. Dann gilt nach (149.31) für den Raum außerhalb der Quelle

$$D_n \frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{nv}{\lambda_a} = 0 \tag{149.32}$$

mit den Randbedingungen

$$-D_n \frac{dn}{dx} = \frac{Q}{2} \quad \text{für} \quad x \to +0,$$

$$n = 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Daraus ergibt sich als Lösung

$$n = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{\lambda_a}{D_n v}}\exp\left\{-x\sqrt{\frac{v}{\lambda_a D_n}}\right\} = \frac{Q}{2}\frac{L}{D_n}e^{-\frac{x}{L}}. \tag{149.33}$$

Die Größe

$$L = \sqrt{\frac{\lambda_a D_n}{v}} = \sqrt{\lambda_a D_\Phi} = \sqrt{\frac{\lambda_a \lambda_{tr}}{3}} \tag{149.34}$$

heißt *Diffusionslänge*. Sie gibt an, in welcher Entfernung von einer thermischen Flächenquelle die Neutronendichte infolge Absorption auf den e-ten Teil abgefallen ist.

Für eine *Punktquelle*, die Q thermische Neutronen pro sec emittiert, folgt aus (149.31)

$$D_n\left(\frac{d^2 n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dn}{dr}\right) - \frac{a}{\lambda_a} n = 0 \tag{149.35}$$

mit den Randbedingungen

$$-D_n 4\pi r^2 \frac{dn}{dr} = Q \quad \text{für} \quad r \to 0,$$

$$n = 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty$$

und der Lösung
$$n = \frac{Q}{4\pi D_n r} e^{-\frac{r}{L}}. \qquad (149.36)$$

In der Praxis stehen natürlich keine unendlich ausgedehnten Streumedien zur Verfügung. Es müssen daher noch die Bedingungen für das *Verhalten der Neutronendichte am Rande* eines Streumediums formuliert werden, ehe die Lösungen der Diffusionsgleichung (149.31) für die in der Praxis vorkommenden begrenzten Streukörper gefunden werden können.

Definierte Verhältnisse am Rande erhalten wir, wenn sich außerhalb des Streukörpers Vakuum befindet, so daß keine Möglichkeit für eine Rückstreuung von Neutronen, die den Körper einmal verlassen haben, besteht. Experimentell läßt sich diese Bedingung am einfachsten durch eine Umhüllung des Streukörpers mit Cadmiumblech erreichen, das alle austretenden thermischen Neutronen absorbiert.

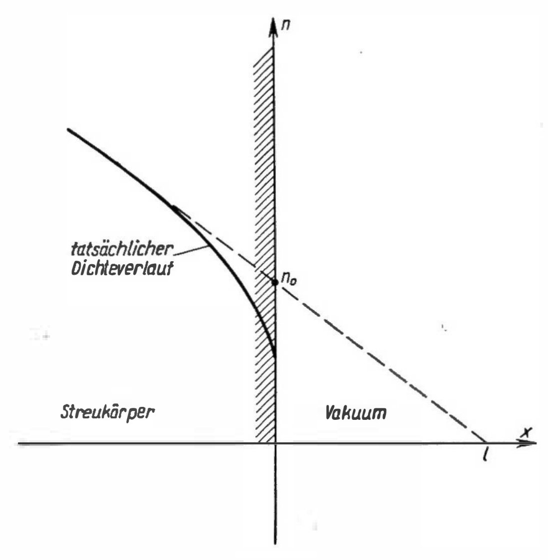


Abb. 324.
Lineare Extrapolation des Randabfalles der Neutronendichte

Da mit Sicherheit Neutronen durch die Oberfläche abdiffundieren, kann weder der Dichtegradient, noch die Neutronendichte selbst an der Oberfläche verschwinden. Entsprechend dem Näherungscharakter der Diffusionstheorie nehmen wir an, daß der Randabfall der Neutronendichte *linear* erfolge (Abb. 324). Der das Streumedium durch die ebene Grenzfläche bei $x = 0$ verlassende Diffusionsstrom ist dann

$$J_x = -D_n \frac{dn}{dx}\bigg|_{x=0} = -\frac{\lambda_{tr} v}{3} \frac{dn}{dx}\bigg|_{x=0}. \qquad (149.37)$$

Die Anzahl der Neutronen, die pro sec und cm² das Streumedium verläßt, ergibt sich andererseits auch aus der Neutronendichte n_0 an der Grenzfläche. Die Hälfte dieser Neutronen wird sich in positiver x-Richtung bewegen, also das Medium verlassen, so daß wir mit (149.37)

$$\frac{1}{2} n_0 v = -\frac{\lambda_{tr} v}{3} \frac{dn}{dx}\bigg|_{x=0} \qquad (149.38)$$

erhalten. Wenn der Randabfall der Neutronendichte linear in den Außenraum extrapoliert wird, so definiert der Schnittpunkt mit der x-Achse die *Extrapolationslänge l*, und wir erhalten

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n_0}{l}.$$

Einsetzen in (149.39) ergibt

$$l = \frac{2}{3}\,\lambda_{tr}. \tag{149.39}$$

Die hier gegebene Ableitung ist allerdings ziemlich roh, denn es ist ja eigentlich nicht erlaubt, die einfache Diffusionstheorie auf dieses Problem anzuwenden. Trotzdem ist das Ergebnis qualitativ richtig. Die genauere Transporttheorie gibt für die Extrapolationslänge

$$l = 0{,}71\,\lambda_{tr}. \tag{149.40}$$

Die Randbedingungen, denen die Lösungen der Gleichung (149.31) genügen müssen, sind daher am einfachsten so zu formulieren:

Man vergrößere die Dimensionen des gegebenen Streukörpers nach allen Richtungen um die Extrapolationslänge l und setze die Neutronendichte auf dieser vorgestellten neuen Grenzfläche gleich Null.[1])

Als einfaches Beispiel betrachten wir den Fall einer thermischen Punktquelle im Mittelpunkt eines kugelförmigen Streukörpers, der den Radius R besitzt. Die Lösung der Gleichung (149.35) muß jetzt den Randbedingungen

$$-D_n\,4\pi r^2\,\frac{dn}{dr} = Q \quad \text{für} \quad r \to 0,$$

$$n = 0 \quad \text{für} \quad r = R + l$$

genügen. Wir erhalten als Lösung

$$n(r) = \frac{Q}{4\pi D_n r\left(1 - e^{-\frac{2(R+l)}{L}}\right)}\left\{e^{-\frac{r}{L}} - e^{-\frac{2(R+l)}{L}}\,e^{+\frac{r}{L}}\right\}. \tag{149.41}$$

Dieser Ausdruck geht, wie es sein muß, für $R \to \infty$ in (149.36) über.

e) Diffusion der Bremsneutronen (Fermische Theorie)

In der bisherigen Behandlung der Diffusionstheorie haben wir die Geschwindigkeit der Neutronen als konstant angenommen, woraus sich die Beschränkung auf thermische Neutronen ergab. Meistens treten die Neutronen jedoch nicht mit thermischer, sondern mit höherer Energie in den Diffusionsprozeß ein, sie werden also während der Diffusion zugleich abgebremst.

Die exakte Behandlung dieses Vorgangs ist mathematisch schwierig und kann hier nicht dargestellt werden (siehe z. B. [M 47-1]). Es ist jedoch möglich, auf einfache Weise eine für viele Zwecke ausreichende *Näherungsgleichung für die räumliche Verteilung der Bremsneutronen* abzuleiten.

Wenn für die Abbremsung der Quellneutronen eine größere Anzahl von Stößen notwendig ist, so ist es näherungsweise erlaubt, den Bremsprozeß als *zeitlich*

[1]) Es ist hierbei stets vorausgesetzt, daß die Dimensionen des Streukörpers groß gegen die Transportweglänge sind. Andernfalls wäre es nicht möglich, im Innern des Streukörpers die Diffusionstheorie anzuwenden.

kontinuierlichen Vorgang aufzufassen. Wir betrachten nun das zeitliche und räumliche Verhalten eines kurzen *Neutronenimpulses*, der zur Zeit $t = 0$ mit der Energie $E = E_0$ (bzw. Lethargie $u = 0$) in die Moderatorsubstanz eingeschossen wird. Bei kontinuierlicher Abbremsung wird dann jederzeit $t > 0$ eine Neutronenenergie $E < E_0$ eindeutig entsprechen. Da der mittlere Lethargiezuwachs pro Stoß gleich ξ ist, hängt die Lethargie u mit der *Bremszeit* t offenbar durch die Beziehung

$$d t = \frac{\lambda_s}{v \xi} d u \tag{149.42}$$

zusammen. Wenn wir voraussetzen, daß während der Bremsung keine Absorption erfolgt, so gilt nach (149.31) für die Neutronendichte als Funktion der Zeit

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \Delta n . \tag{149.43}$$

Einsetzen von (149.42) in (149.43) ergibt

$$\frac{\partial n}{\partial u} = \frac{D_n \lambda_s}{v \xi} \Delta n = \frac{\lambda_{\mathrm{tr}} \lambda_s}{\xi} \Delta n .$$

Nach Einführung des Parameters

$$\tau(u) \equiv \int_0^u \frac{\lambda_{\mathrm{tr}}}{3} \frac{\lambda_s}{\xi} d u \tag{149.44}$$

folgt daraus die zuerst von FERMI abgeleitete einfache Beziehung

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \Delta n. \tag{149.45}$$

Der Parameter τ, der eine Funktion der Lethargie ist und der von den Eigenschaften des Moderators abhängt, wird als „*Fermi-Alter*“ oder einfach „*Alter*“ der Neutronen bezeichnet. Er hat jedoch nicht die Dimension einer Zeit, sondern die einer Fläche. Der Übergang zum praktisch interessierenden *stationären Fall* ist jetzt ganz einfach. Wir haben bisher die „Lebensgeschichte“ eines einzelnen Neutronenimpulses betrachtet, der zur Zeit $t = 0$ in den Bremsprozeß eintritt. Die aus (149.45) unter Berücksichtigung der jeweiligen Anfangs- und Randbedingungen zu berechnende Dichteverteilung $n(x, y, z; t)$ ist dann gleich der Anzahl der Neutronen pro cm³, die an der Stelle x, y, z *zu einer bestimmten Zeit* $t = t(\tau)$ das Alter τ überschreiten. Wird nun der gleiche Neutronenimpuls regelmäßig ν mal pro sec wiederholt, so ist

$$q(x, y, z; \tau) = \nu n(x, y, z; \tau) \text{ [Neutronen/cm}^3\text{ sec]}$$

die Anzahl der Neutronen pro cm³, die an der Stelle x, y, z *pro Sekunde* das Alter τ überschreiten. Unter der Voraussetzung, daß die Impulsfolgefrequenz ν zeitlich konstant ist, kann (149.45) auch in der Form

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q \tag{149.45a}$$

geschrieben werden. Da ν ganz beliebig gewählt werden kann, ist damit schon der Übergang zum stationären Fall vollzogen, der dadurch charakterisiert ist,

daß die Quelle nicht impulsweise, sondern kontinuierlich mit zeitlich konstanter Intensität arbeitet.

Die Anzahl $q(x, y, z; \tau)$ der Neutronen, die pro cm³ und sec das Alter τ (oder die entsprechende Lethargie u) überschreiten, nennt man *Bremsdichte*.

Gleichung (149.45) wird dazu benutzt, die räumliche Verteilung der auf das „Alter" τ abgebremsten Neutronen zu berechnen, wenn die Quellverteilung für

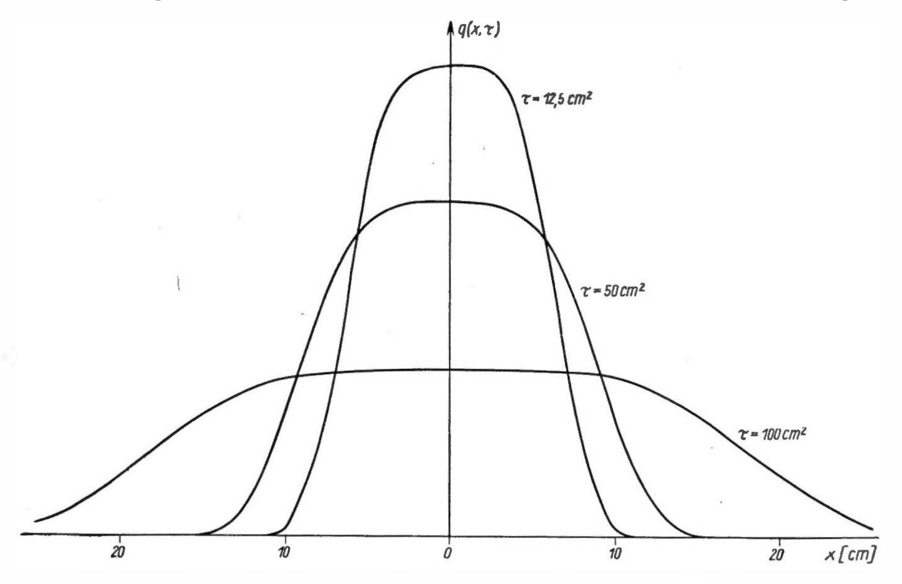


Abb. 325. Räumliche Verteilung der Bremsdichte in der Umgebung einer Flächenquelle für verschiedenes „Fermi-Alter" τ

$\tau = 0$ bekannt ist. (149.45) ist *formal identisch mit der Differentialgleichung der Wärmeleitung*, wenn die Temperaturleitzahl gleich Eins gesetzt wird.

Die üblichen Lösungsmethoden für die Wärmeleitungsgleichung sollen hier nicht abgehandelt werden. Der interessierte Leser findet sie in den einschlägigen Lehrbüchern (z. B. SOMMERFELD [S 58-1]). Wir wollen hier nur die Lösungen für eine *Flächenquelle* (Abb. 325)

$$q(x, \tau) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \tag{149.46}$$

und eine *Punktquelle*

$$q(r, \tau) = \frac{Q}{(4\pi\tau)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\tau}} \tag{149.47}$$

anschreiben, die durch Einsetzen leicht verifiziert werden können. Die Verteilung der Bremsneutronen um die Quelle herum entspricht also einer *Gauß-Verteilung*, deren Breite mit wachsendem Neutronenalter (d. h. mit abnehmender Neutronenenergie) zunimmt.

Eine große praktische Bedeutung hat die Bestimmung des Fermi-Alters für die Abbremsung der Neutronen einer bestimmten Primärenergie auf *thermische Energie* (τ_{th}). Wenn τ_{th} bekannt ist, dann kann aus einer gegebenen räumlichen Quellverteilung schneller Neutronen zunächst die Quellverteilung der thermischen Neutronen berechnet werden, aus der sich dann mit Hilfe der gewöhnlichen Diffusionstheorie die räumliche Verteilung der thermischen Neutronendichte im Streumedium ergibt.

Experimentell wird gewöhnlich die sog. *Bremslänge* bestimmt, die für die Verteilung der Bremsneutronen um eine Punktquelle herum durch die Beziehung

$$B_E^2 = \overline{r_E^2} = \frac{4\pi \int\limits_0^\infty r^2 q_E(r)\, r^2\, dr}{4\pi \int\limits_0^\infty q_E(r)\, r^2\, dr} = \frac{\int\limits_0^\infty r^4 q_E(r)\, dr}{\int\limits_0^\infty r^2 q_E(r)\, dr} \tag{149.48}$$

definiert ist. Der Index E erinnert daran, daß die Neutronenverteilung und damit die Bremslänge sowohl von der Anfangsenergie E_0 als auch von der Endenergie E der Neutronen abhängt. Die Definition (149.48) setzt natürlich nicht die Gültigkeit der oben entwickelten einfachen Beziehungen der Fermischen Theorie voraus, *die Bremslänge ist eine rein empirisch festgelegte Größe*. Wenn jedoch für die experimentell gegebene Verteilung die Fermische Theorie gilt, so ergibt sich durch Einsetzen von (149.47) in (149.48)

$$B_E = 6\, \tau_E \tag{149.49}$$

als Zusammenhang zwischen Bremslänge und Fermi-Alter.

Gleichung (149.47) beschreibt zunächst die räumliche Verteilung der auf ein bestimmtes Alter τ abgebremsten Neutronen in der Umgebung einer Punktquelle, wobei der Parameter τ eine eindeutige Funktion der Neutronenenergie ist (siehe Gl. (149.44) und (149.11)). Die Beziehung (149.47) läßt sich aber auch in der Weise interpretieren, daß der Abstand r von der Quelle als Parameter und das Alter τ als Variable aufgefaßt werden. Wir erhalten dann das Neutronenspektrum in einem bestimmten Abstand von der Quelle, natürlich ebenfalls unter der Voraussetzung, daß die Fermische Annahme einer kontinuierlichen Abbremsung erlaubt ist.

Wenn wir zusätzlich noch voraussetzen können – was bei nicht zu großer Primärenergie der Neutronen für die Moderatorsubstanzen in der Regel zutrifft –, daß Transport- und Streuweglänge nicht wesentlich von der Neutronenenergie abhängen, so erhalten wir aus (149.44)

$$\tau \approx \frac{\lambda_{tr}\lambda_s}{3\xi}\, u = \frac{\lambda_{tr}\lambda_s}{3\xi} \ln \frac{E_0}{E}.$$

Einsetzen in (149.47) ergibt

$$q(u, \varrho) \approx Q \left(\frac{3\xi}{4\pi\, \lambda_{tr}\lambda_s u}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varrho^2}{u}} \tag{149.49 a}$$

mit dem Parameter

$$\varrho = \left(\frac{3\xi}{4\lambda_{tr}\lambda_s}\right)^{1/2} r.$$

Die Bremsdichte $q(u)$ ist in der Fermischen Näherung mit der Stoßzahldichte $F(u)$ durch die Beziehung $F(u) = \frac{q(u)}{\xi}$ verknüpft, so daß wir mit (149.49a) und unter Benutzung von (149.3) für das Lethargiespektrum des Flusses der Bremsneutronen

$$\Phi(u, \varrho) \approx \frac{C}{u^{3/2}} e^{-\frac{\varrho^2}{u}} \tag{149.49 b}$$

erhalten. In der Konstanten C sind alle für die Form des Spektrums unwesentlichen konstanten Faktoren zusammengefaßt. Gleichung (149.49b) ist für ver-

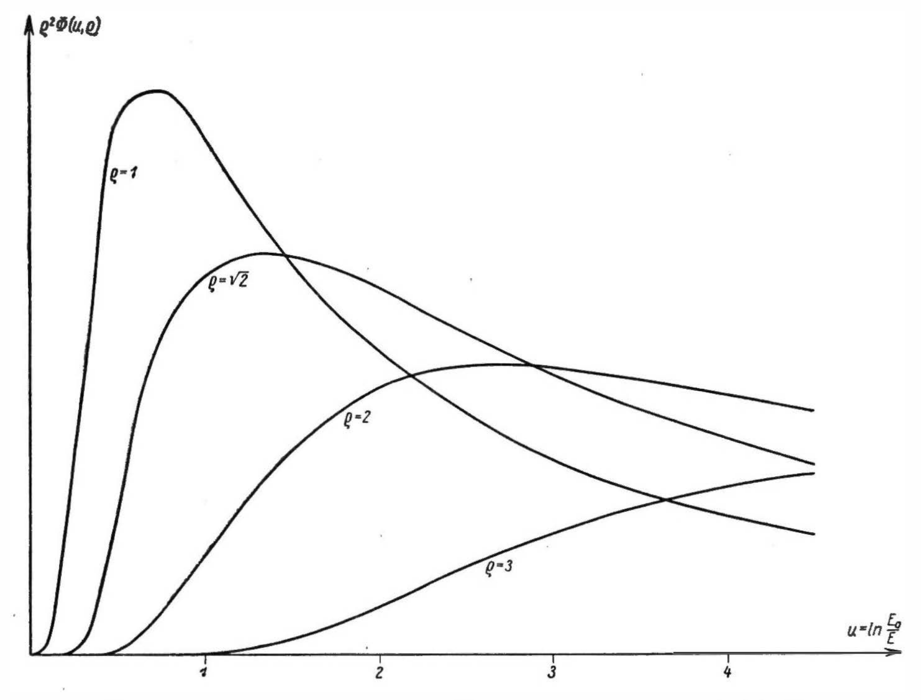


Abb. 326. Lethargiespektrum des Neutronenflusses für verschiedene Abstände von einer monoenergetischen Punktquelle

$$\left(\text{Parameter:} \quad \varrho = \sqrt{\frac{3\xi}{4\lambda_{tr}\lambda_s}}\, r\right)$$

schiedene Werte von ϱ in Abb. 326 dargestellt. Man sieht, wie sich das Spektrum der Bremsneutronen mit zunehmendem Abstand von der Quelle immer mehr nach größeren Lethargien (d. h. niedrigeren Energien) verlagert.

f) Bremsung und Diffusion in begrenzten Medien, nichtstationäre Probleme

Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, daß in einem räumlich begrenzten Streukörper zur Zeit $t = 0$ ein kurzzeitiger Neutronenimpuls mit der räumlichen Quellverteilung $Q(x, y, z)$ und der Energie E_0 erzeugt wird. Mit Hilfe der Deltafunktion, die den Bedingungen

$$\delta(t) = 0 \quad \text{für} \quad -\infty < t < 0, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

genügt, läßt sich Gl. (149.31) dann in der Form

$$\frac{\partial n(x, x, z, t)}{\partial t} = D_n(t)\, \Delta n(x, y, z, t) + Q(x, y, z)\, \delta(t) - \frac{v(t)}{\lambda_a(t)}\, n(x, y, z, t) \quad (149.50)$$

darstellen. Daß hier D_n, v und λ_a als Funktionen der Zeit angesetzt sind, entspricht der Fermischen Annahme kontinuierlicher Bremsung. Für $t > 0$ erhalten wir die homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \Delta n - \frac{v}{\lambda_a} n, \quad (140.51)$$

die sich durch Separation der Variablen lösen läßt. Wir machen den Ansatz

$$n = \varrho(x, y, z)\, f(t)$$

und erhalten

$$f(t, \varkappa) = \exp\left\{-\int_0^t \left(\frac{v}{\lambda_a} + \varkappa^2 D_n\right) dt'\right\}, \quad (149.52)$$

$$\Delta \varrho + \varkappa^2 \varrho = 0. \quad (149.53)$$

Die Randbedingungen erfordern, daß die Neutronendichte auf der extrapolierten Oberfläche des Streukörpers verschwindet, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß die Extrapolationslänge l, die ja nur eine kleine Korrektur bedeutet, nicht von der Neutronenenergie bzw. der Bremszeit abhängt. Durch diese Randbedingungen werden die Eigenfunktionen ϱ_ν und die Eigenwerte $\varkappa_\nu$ der Gl. (149.53) bestimmt. Die allgemeine Lösung von (149.51),

$$n(x, y, z, t) = \sum_\nu \alpha_\nu \varrho_\nu \exp\left\{-\int_0^t \left(\frac{v}{\lambda_a} + \varkappa_{\nu\,-\,n}\right) dt'\right\}, \quad (149.54)$$

muß dann noch der Anfangsbedingung für $t = 0$,

$$\sum_\nu \alpha_\nu \varrho_\nu = Q(x, y, z), \quad (149.55)$$

genügen, wodurch die Entwicklungskoeffizienten α_ν festgelegt werden.

Für eine *Kugel* mit dem Radius R erhalten wir die Eigenfunktionen

$$\varrho_\nu = \frac{\sin \varkappa_\nu r}{\pi r}$$

mit (149.56)

$$\varkappa_\nu = \frac{\nu \pi}{R + l}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

und für einen *Quader* mit den Kantenlängen a, b, c

$$\varrho(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\cos \varkappa_{\nu_1} x)(\cos \varkappa_{\nu_2} y)(\cos \varkappa_{\nu_3} z) \tag{149.57}$$

mit

$$\varkappa_{\nu_1} = \frac{\nu_1 \pi}{a + 2l}, \quad \varkappa_{\nu_2} = \frac{\nu_2 \pi}{b + 2l}, \quad \varkappa_{\nu_3} = \frac{\nu_3 \pi}{c + 2l},$$

$$\varkappa_\nu{}^2 = \varkappa_{\nu_1}^2 + \varkappa_{\nu_2}^2 + \varkappa_{\nu_3}^2, \qquad \nu_1, \nu_2, \nu_3 = 1, 2, 3, \ldots$$

Entsprechend ergeben sich für einen *Zylinder* Bessel-Funktionen als radiale Eigenfunktionen.

Aus (149.54) ist zu entnehmen, daß die Neutronendichte aus zwei voneinander unabhängigen Ursachen zeitlich abnimmt. Der Faktor

$$\exp\left\{-\int_0^t \frac{v}{\lambda_a}\, dt'\right\} \tag{149.58}$$

bedeutet, daß Neutronen innerhalb des Streukörpers *absorbiert* werden, während die Faktoren

$$\exp\left\{-\varkappa_\nu{}^2 \int_0^t D_n dt'\right\} \tag{149.59}$$

den Neutronenverlust infolge *Abdiffusion* durch die Oberfläche des Streukörpers darstellen.

Es ist zweckmäßig, die Zeitdauer t in zwei Abschnitte zu unterteilen. Solange die Neutronen noch nicht die thermische Energie erreicht haben, sind v, λ_a und D_n Funktionen der Zeit, während dies nach der Einstellung des thermischen Gleichgewichtes, die zur Zeit $t = \vartheta$ erfolgt sei, nicht mehr der Fall ist. Für den ersten Abschnitt (die reine Bremszeit) ergibt sich mit (149.42) und (149.11)

$$\frac{v(t)}{\lambda_a(t)}\, dt = \frac{\lambda_s(u)}{\xi\, \lambda_a(u)}\, du = -\frac{\lambda_s(E)}{\xi\, \lambda_a(E)} \frac{dE}{E},$$

woraus wir durch Einsetzen in (149.58)

$$p(E) = \exp\left\{-\frac{1}{\xi} \int_E^{E_0} \frac{\lambda_s}{\lambda_a} \frac{dE'}{E'}\right\} \tag{149.60}$$

erhalten. *Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron bei der Abbremsung von der Primärenergie E_0 auf die Energie E nicht absorbiert wird.* Diese Größe hat für die Reaktorphysik eine große Bedeutung (s. Bd. III).

Nach der Abbremsung auf thermische Energie ist $\frac{v}{\lambda_a} = \frac{1}{T}$ eine Konstante. Hierbei ist T die *mittlere Lebensdauer der thermischen Neutronen in der Moderatorsubstanz*, die bei den in der Neutronenphysik verwendeten Moderatoren (H_2O, D_2O, Graphit usw.) stets groß gegen die Bremszeit ϑ ist.
Durch Vergleich von (149.44), (149.42) und (149.30) ergibt sich für das in (149.59) enthaltene Integral für $t \leqslant \vartheta$

$$\int_0^t D_n\,dt' = \tau\,, \qquad (149.61)$$

so daß also

$$\int_0^\vartheta D_n\,dt = \tau_{\text{th}} \qquad (149.62)$$

einfach das *Fermi-Alter für die Abbremsung auf thermische Energie* darstellt.
Für Zeiten $t > \vartheta$ nimmt dann (149.54) folgende Gestalt an:

$$n(x, y, z, t) = p(E_{\text{th}}) \sum_\nu \alpha_\nu \varrho_\nu \exp\left\{-\left(\varkappa_\nu^2 \tau_{\text{th}} + \frac{t}{T} + \varkappa_\nu^2 (t-\vartheta)\, D_n\right)\right\}. \qquad (149.63)$$

Je größer der Eigenwert $\varkappa_\nu$ ist, desto schneller klingt das entsprechende Glied der Entwicklung (149.63) ab. Nach genügend langer Zeit wird daher die Neutronenverteilung unabhängig von der ursprünglichen Quellverteilung nur noch durch den niedrigsten Eigenwert $\varkappa_1$ bestimmt. Für $t \gg \vartheta$ folgt daher

$$n(x, y, z, t) = A\,\varrho_1 \exp\left\{-\left(\frac{1}{T} + \varkappa_1^2 D_n\right) t\right\}, \qquad (149.64)$$

wobei A eine nicht von der Zeit und den Ortskoordinaten abhängende Konstante ist.

g) Experimentelle Methoden

Zur Ausmessung der räumlichen Verteilung der Neutronendichte in einem Streumedium verwendet man sog. *Neutronensonden*, mit deren Hilfe die am Sondenort herrschende Neutronendichte registriert werden kann.
Als *direkt anzeigende Sonde* eignet sich z. B. eine kleine BF_3-Ionisationskammer, die an die verschiedenen Meßstellen gebracht wird.
Am häufigsten werden jedoch wegen ihres geringen Raumbedarfs und des vergleichsweise geringfügigen experimentellen Aufwandes *Indikatorfolien* als Neutronensonden verwendet. Die nach der Exposition mit einem Zählrohr bestimmte Aktivität einer solchen Folie ist ein Maß für die an der Meßstelle herrschende Neutronendichte.
Durch Auswahl und Kombination geeigneter Indikatorsubstanzen lassen sich dabei die in § 148b dargestellten spektroskopischen Methoden ausnutzen. Mit einer durch Cadmium abgedeckten *Indiumfolie* kann z. B. die räumliche Verteilung der auf 1,44 eV abgebremsten Neutronen in der Umgebung einer Quelle

schneller Neutronen bestimmt werden, ohne daß dabei die ebenfalls vorhandenen thermischen Neutronen stören. Diese werden ja durch die Cadmium-Abschirmung von der Indikatorfolie ferngehalten.

Die in der Sonde absorbierten Neutronen müssen durch Diffusion aus der Umgebung der Sonde nachgeliefert werden. Dies ist aber nur möglich, wenn ein Dichtegradient existiert. Jede Sonde stört daher die Neutronenverteilung, indem sie eine Absenkung der Neutronendichte sowohl in ihrer Umgebung als auch innerhalb der Sonde selbst erzeugt (Abb. 327). Je weniger Neutronen in der Sonde absorbiert werden, desto geringer ist die Störung des Feldes, aber desto unempfindlicher ist auch die Sonde. Es ist daher nur bei der Ausmessung hoher Neutronendichten möglich, durch Verwendung sehr dünner Indikatorfolien die *Sondenstörung* soweit zu verringern, daß sie vernachlässigt werden kann. Bei geringeren Neutronendichten muß der Indikator empfindlicher sein, und die Meßwerte müssen für die Sondenstörung korrigiert werden [B 41-1], [V 54-1], [M 56-2]. Dies ist natürlich nur dann notwendig, wenn eine Absolutmessung der Neutronendichte erfolgen soll. Für viele Zwecke genügen Relativmessungen, bei denen die Sondenkorrektur unberücksichtigt bleiben kann.

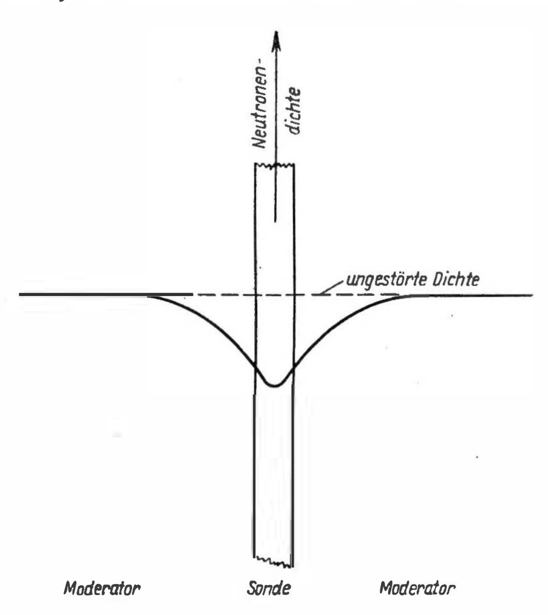


Abb. 327. Störung der Neutronendichte durch eine Sonde

Mit Hilfe von Sondenmessungen lassen sich *Diffusions-* und *Bremslängen* in Moderatorsubstanzen sehr genau bestimmen.

Zur Bestimmung der *Diffusionslänge* muß das auszumessende Neutronenfeld naturgemäß Dimensionen haben, die zumindest von der gleichen Größenordnung wie die Diffusionslänge selbst sind. Das führt bei den guten Moderatoren, wie D_2O, Graphit oder Beryllium, zu recht erheblichen Materialmengen.

Als Neutronenquelle eignet sich für Diffusionsmessungen z. B. die *thermische Säule* eines Reaktors, deren äußere Oberfläche eine Flächenquelle thermischer Neutronen darstellt. Soll z. B. die Diffusionslänge einer bestimmten Graphitsorte gemessen werden, so wird aus mehreren Tonnen dieses Materials ein Quader errichtet, der mit einer Seite an die thermische Säule grenzt und der im übrigen mit Cadmiumblech abgedeckt wird. Die Lösung der Diffusionsgleichung für dies Problem ist etwas komplizierter als Gl. (149.33), da sie in dem begrenzten Medium anderen Randbedingungen genügen muß, sie enthält je-

doch ebenfalls die Diffusionslänge L als Parameter, der die räumliche Verteilung der Neutronendichte bestimmt.

Die praktische Bedeutung von Diffusionslängenmessungen besteht vor allem darin, daß mit ihrer Hilfe die *Reinheit von Moderatormaterialien* geprüft werden kann. So haben geringfügige, mit anderen Hilfsmitteln schwer nachweisbare Spuren von Bor in Graphit oder von gewöhnlichem Wasser in schwerem Wasser wegen ihres vergleichsweise großen Absorptionsquerschnittes einen starken Einfluß auf die Diffusionslänge.

Zur Messung der *Bremslänge* benötigt man eine Quelle schneller Neutronen, in deren Umgebung die Dichte der abgebremsten, aber noch nicht thermisch gewordenen Neutronen ausgemessen wird. Gewöhnlich wird für diesen Zweck durch Kadmium abgedecktes Indium als Sonde gewählt. Als praktisch punktförmige Quelle kann eine Ra-Be-Quelle oder eine nach dem Prinzip des auf S. 730 beschriebenen „Neutronentransformators" arbeitende Quelle dienen. Letztere erlaubt eine unmittelbare Messung der Bremslänge für das Spektrum der Spaltungsneutronen, die für die Praxis naturgemäß besondere Bedeutung hat. In Tabelle 78 sind die Diffusions- und Bremslängen für verschiedene Moderatoren angegeben.

Tabelle 78. Diffusions- und Bremslänge in Moderatoren [R 55-2]

Stoff	Dichte	L [cm]	$\frac{1}{6}\overline{r^2}\,(=\tau)$ [cm²] [1]
H_2O	1,0	2,85 ± 0,03	30,4 ± 0,4
D_2O (0,16 % H_2O)	1,1	116 ± 4	100 ± 5
Be	1,85	20,8 ± 0,5	80 ± 2
Graphit	1,60	54,4 ± 0,5	311 ± 3

Der *Diffusionskoeffizient* für thermische Neutronen läßt sich durch eine *Impulsmethode* sehr genau messen.

Man beobachtet bei dieser Methode das in (149.64) dargestellte zeitliche Abklingen der Neutronendichte am Rande eines Moderatorvolumens, in das mit Hilfe eines Beschleunigers impulsweise schnelle Neutronen eingeschossen werden. Durch Änderung der Abmessungen des Moderatorblocks kann die Abhängigkeit der Abklingzeit von dem Parameter $\varkappa_1$ experimentell bestimmt werden, woraus dann direkt D_n berechnet werden kann. Durch Extrapolation der Messungen auf $\varkappa_1 = 0$ ergibt sich außerdem $\frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda_a}$. Wegen der aus (149.34) folgenden Beziehung

$$L = \sqrt{D_n T}$$

kann daher gleichzeitig auch die Diffusionslänge bestimmt werden. Allerdings ist für diesen Zweck die Sondenmethode genauer.

---

[1]) für Abbremsung von Spaltungsneutronen auf In-Resonanz (1,44 eV).

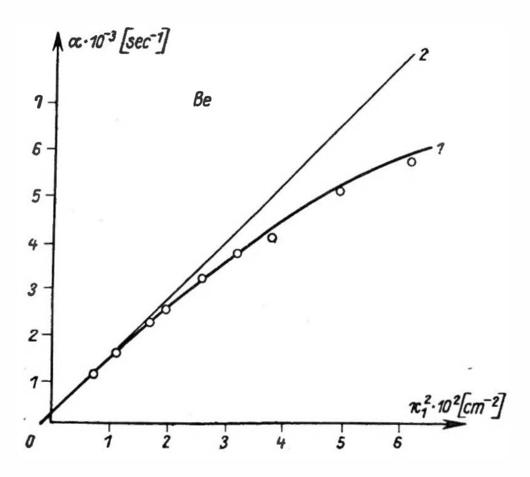


Abb. 328. α als Funktion von $\varkappa_1^2$ für Beryllium [A 55-1]. Den experimentellen Werten entsprechen folgende Abmessungen des Berylliumblocks: 56 · 60 · 72, 56 · 60 · 60, 40 · 40 · 56, 40 · 40 · 40, 32 · 40 · 40, 32 · 32 · 32, 24 · 32 · 32, 20 · 32 · 32, 20 · 20 · 20 cm³.

Kurve 1: $\alpha = \frac{1}{T} + D_0 \varkappa_1^2 - c \varkappa_1^4$,

Kurve 2: $\alpha = \frac{1}{T} + D_0 \varkappa_1^2$

Bei der Auswertung der Messungen nach der Impulsmethode muß berücksichtigt werden, daß der Diffusionskoeffizient etwas von den Abmessungen des Streumediums abhängt. Je größer der Prozentsatz der durch die Oberfläche diffundierenden Neutronen ist, desto „kälter“ werden die im Streumedium zurückbleibenden, da die schnelleren Neutronen aus dem oberen Teil der Maxwell-Verteilung bevorzugt herausdiffundieren. Diese „Diffusionsabkühlung“, die Ähnlichkeit mit der Abkühlung einer verdunstenden Flüssigkeit hat, kann durch den Ansatz

$$D_n(\varkappa_1) = D_n - c \varkappa_1^2$$

berücksichtigt werden. Einsetzen in (149.64) ergibt daher für den zeitlichen Abfall der Neutronendichte

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} = -\left(\frac{1}{T} + \varkappa_1^2 D_n - c \varkappa_1^4\right) = -\alpha. \qquad (149.65)$$

Abb. 328 zeigt die experimentell gefundenen Werte für α als Funktion von $\varkappa$, für die Diffusion in Beryllium.

In Tabelle 79 sind die nach der Impulsmethode von ANTONOW und Mitarbeitern [A 55-1] gemessenen Diffusionskonstanten und Lebensdauern thermischer Neutronen in Beryllium, Graphit und Wasser eingetragen.

Tabelle 79. Diffusionskonstanten und Lebensdauern thermischer Neutronen in Moderatoren

Stoff	$D_n \cdot 10^{-5}$ [cm²/sec]	$D_\Phi = \frac{\lambda_{tr}}{3}$ [cm][1])	T [µsec]
Be	1,22 ± 0,05	0,55	4 000
Graphit	1,98 ± 0,03	0,90	12 200 ± 500
H_2O (23°C)	0,35 ± 0,01	0,158	207 ± 6
H_2O (80°C)	0,45 ± 0,04	0,189	212 ± 6

[1]) berechnet aus D_n.

LITERATUR

[A 37-1] AMALDI, E., E. HAFSTAD und M. TUVE, Phys. Rev. **51**, 896 (1937)
[A 47-1] AGENO, M., E. AMALDI, D. BOCCIARELLI und G. C. TABACCHINI, Phys. Rev. **71**, 20 (1947)
[A 55-1] Антонов, А. В., А. И. Исаков, И. Д. Мурин, Б. А. Неупокоев, И. М. Франк, Ф. Л. Шапиро, И. В. Штраних, Докл. сов. дел. на межд. конф. по мирному исп. атомной энергии, физ. иссл. (ANTONOW, A. W., A. I. ISAKOW, I. D. MURIN, B. A. NEUPOKOJEW, I. M. FRANK, F. L. SCHAPIRO, I. W. SCHTRANICH, Vorträge der sowjet. Delegierten auf der Internationalen Konferenz über friedliche Anwendung der Atomenergie, Phys. Forschungen), S. 158, Moskau 1955
[B 30-1] BOTHE, W., und H. BECKER, Z. Phys. **66**, 289 (1930)
[B 41-1] BOTHE, W., Z. Phys. **118**, 401 (1941)
[B 47-1] BRILL, T., und H. LICHTENBERGER, Phys. Rev. **72**, 585 (1947)
[B 49-1] BOTHE, W., Z. Phys. **125**, 210 (1949)
[B 52-1] BONNER, T. W., R. A. FERELL und M. C. RINEHART, Phys. Rev. **87**, 1032 (1952)
[C 32-1] CHADWICK, J., Nature **129**, 312 (1932); Proc. Roy. Soc. A **136**, 692, (1932); A **142**, 1 (1933)
[C 32-2] CURIE, I., und F. JOLIOT, Compt. rend. **194**, 397 (1932)
[C 56-1] CRANBERG, L., Proc. Intern. Conf. Atomic Energy, Vol. 4, S. 40 (P/577), New York 1956
[D 56-1] Демирханов, Р. А., Г. И. Гуткин, В. В. Дорохов und А. Д. Руденко, Атомная энергия (DEMIRCHANOW, R. A., G. I. GUTKIN, W. W. DOROCHOW und A. D. RUDENKO, Atomenergie) **1**, Nr. 2, 21 (1956)
[G 52-1] GUERNSEY, G. J., G. R. MOTT, B. K. NELSON und A. ROBERTS, Rev. Sci. Instr. **23**, 476 (1952)
[G 56-1] GIBBONS, J. H., Phys. Rev. **102**, 1574 (1956)
[H 39-1] HAHN, O., und F. STRASSMANN, Naturwiss. **27**, 11 (1939)
[H 41-1] HANSTEIN, H. B., Phys. Rev. **59**, 489 (1941)
[H 47-1] HUGHES, D. J., und C. EGGLER, Phys. Rev. **72**, 902 (1947)
[H 49-1] HANSON, A. O., R. F. TASCHEK und J. H. WILLIAMS, Revs. Mod. Phys. **21**, 635 (1949)
[H 54-1] HUGHES, D. J., Neutron Optics, New York 1954; G. E. BACON, Neutron Diffraction, Oxford 1955
[H 55-1] HUGHES, D. J., und J. A. HARVEY, Neutron Cross Sections (Selected Reference Material on Atomic Energy, Vol. 5), New York 1955
[H 56-1] HAVENS, W. W., Proc. Intern. Conf. Atomic Energy, Vol. 4, S. 74 (P/574), New York 1956
[H 56-2] HUGHES, D. J., Proc. Intern. Conf. Atomic Energy, Vol. 4, S. 3 (P/576), New York 1956
[J 53-1] JONES, L. W., und K. M. TERWILLIGER, Phys. Rev. **91**, 699 (1953)
[K 56-1] Кружилин, Г. Н., Докл. сов. дел. на межд. конф. по мирному исп. атомной энергии, реакторостроение и теория реакторов (KRUSHILIN, G. N., Vorträge der sowjet. Delegierten auf der Internationalen Konferenz über friedliche Anwendung der Atomenergie, Reaktorbau und Theorie der Reaktoren), S. 49, Moskau 1955
[L 49-1] LYONS, D., Ann. Phys. **4**, 379 (1949)
[L 51-1] LI, C. W., W. WHALING, W. A. FOWLER und C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **83**, 512 (1951)

[M 47-1] Marshak, R. E., Revs. Mod. Phys. 19, 185 (1947)
[M 55-1] Мостовой, В. И., М. И. Певзнер und А. П. Цитович, Докл. сов. дел. на межд конф. по мирному исп. атомной энергии, физ. иссл. (Mostowoi, W. I., M. I. Pewsner und A. P. Zitowitsch, Vorträge der sowjet. Delegierten auf der Internationalen Konferenz über friedliche Anwendung der Atomenergie, Phys. Forschungen), S. 3, Moskau 1955
[M 56-1] Medveczky, L., Acta Phys. Hung. 6, 261 (1956)
[M 56-2] Meister, H., Z. Naturforsch. 11a, 579 (1956)
[P 46-1] Placzek, G., Phys. Rev. 69, 423 (1946)
[N 55-1] Николаев, Ю. Г., Докл. сов. дел, на межд. конф. по мирному исп. атомной энергии, реакторостроение и теория реакторов (Nikolajew, J. G., Vorträge der sowjet. Delegierten auf der Internationalen Konferenz über friedliche Anwendung der Atomenergie, Reaktorbau und Theorie der Reaktoren), S. 119, Moskau 1955
[R 50-1] Richards, H. T., R. V. Smith und C. P. Browne, Phys. Rev. 80, 524 (1950)
[R 51-1] Robson, J. M., Phys. Rev. 83, 349 (1951)
[R 53-1] Rosen, L., Nucleonics 11, Nr. 7, 32 (1953); Nr. 8, 38 (1953)
[R 55-1] Research Reactors, S. 107, New York 1955
[R 55-2] Reactor Handbook, Physics (Selected Reference Material on Atomic Energy), New York 1955
[S 51-1] Smith, L. W., und P. G. Kruger, Phys. Rev. 83, 1137 (1951)
[S 53-1] Schmidt-Rohr, U., Z. Naturforsch. 8a, 470 (1953)
[S 54-1] Seidl, F. G. P., D. J. Hughes, H. Palevsky, J. S. Levin, W. Y. Kato und N. G. Sjöstrand, Phys. Rev. 95, 476 (1954)
[S 55-1] Спивак, П. Е., et al., Докл. сов. дел. на межд. конф. по мирному исп. атомной энергии, физ. иссл. (Spiwak, P. J., u. a., Vorträge der sowjet. Delegierten auf der Internationalen Konferenz über friedliche Anwendung der Atomenergie, Phys. Forschungen), S. 235, Moskau 1955
[S 58-1] Sommerfeld, A., Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI., Leipzig 1958
[V 54-1] Vigon, M. A., und K. Wirtz, Z. Naturforsch. 9a, 286 (1954)
[W 47-1] Wattenberg, A., Phys. Rev. 71, 497 (1947)
[W 55-1] Владимирский, В. В., И. А. Радкевич und В. В. Соколовский, Докл. сов. дел. на межд. конф. по мирному исп. атомной энергии, физ. иссл., (Wladimirski, W. W., I. A. Radkewitsch und W. W. Sokolowski, Vorträge der sowjet. Delegierten auf der Internationalen Konferenz über die friedliche Anwendung der Atomenergie, Phys. Forschungen), S. 26, Moskau 1955
[Y 57-1] Yeater, M. L., und E. R. Gaertner, Rev. Sci. Instr. 28, 514 (1957)

WEITERFÜHRENDE LITERATUR

Feld, B. T., The Neutron, in: Experimental Nuclear Physics, ed. by E. Segrè Vol. II, S. 208, New York 1953
Власов, Н. А., Нейтроны (Wlassow, N. A., Neutronen); deutsch: Berlin 1959
Hughes, D. J., Pile Neutron Research, Cambridge (Mass.) 1953
Glasstone, S., und M. C. Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, New York 1952 (zu § 149)
Wirtz, K., und K. H. Beckurts, Elementare Neutronenphysik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958

TABELLENANHANG

ANHANG I

Tabelle 1. Ladungseigenfunktionen (zu Kapitel IX)

des Dreinukleonensystems:

$T=\frac{3}{2}$	$T_3=\frac{3}{2}$	$\nu\nu\nu$	$1\ \overline{23}$	Quartett
	$=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}[\nu(\nu\pi+\pi\nu)+\nu\pi\pi]$	$1\ \overline{23}$	
	$=-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}[\pi(\pi\nu+\nu\pi)+\pi\nu\nu]$	$1\ \overline{23}$	
	$=-\frac{3}{2}$	$\pi\pi\pi$	$1\ \overline{23}$	
$T=\frac{1}{2}$	$T_3=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[\nu(\nu\pi+\pi\nu)-2\pi\nu\nu]$	$1\ \overline{23}$	Dublett (mit Entartung)
		$\frac{1}{\sqrt{2}}\nu(\nu\pi-\pi\nu)$	$1\ \widetilde{23}$	
	$=-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[\pi(\pi\nu+\nu\pi)-2\nu\pi\pi]$	$1\ \overline{23}$	
		$\frac{1}{\sqrt{2}}\pi(\pi\nu-\nu\pi)$	$1\ \widetilde{23}$	

des Viernukleonensystems:

$T=2$	$T_3=2$	$\nu\nu\nu\nu$	$\overline{12}\ \overline{34}$	Quintett
	$=1$	$\frac{1}{2}[\nu\nu(\nu\pi+\pi\nu)+(\nu\pi+\pi\nu)\nu\nu]$	$\overline{12}\ \overline{34}$	
	$=0$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[\nu\nu\pi\pi+\pi\pi\nu\nu+(\nu\pi+\pi\nu)(\nu\pi+\pi\nu)]$	$\overline{12}\ \overline{34}$	
	$=-1$	$\frac{1}{2}[\pi\pi(\pi\nu+\nu\pi)+(\pi\nu+\nu\pi)\pi\pi]$	$\overline{12}\ \overline{34}$	
	$=-2$	$\pi\pi\pi\pi$	$\overline{12}\ \overline{34}$	
$T=1$	$T_3=1$	$\frac{1}{2}[\nu\nu(\nu\pi+\pi\nu)-(\nu\pi+\pi\nu)\nu\nu]$	$\overline{12}\ \overline{34}$	Triplett (mit Entartung)
		$\frac{1}{\sqrt{2}}\nu\nu(\nu\pi-\pi\nu)$	$\overline{12}\ \widetilde{34}$	
		$\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\pi-\pi\nu)\nu\nu$	$\widetilde{12}\ \overline{34}$	
	$=0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu\nu\pi\pi-\pi\pi\nu\nu)$	$\overline{12}\ \overline{34}$	
		$\frac{1}{2}(\nu\pi+\pi\nu)(\nu\pi-\pi\nu)$	$\overline{12}\ \widetilde{34}$	
		$\frac{1}{2}(\nu\pi-\pi\nu)(\nu\pi+\pi\nu)$	$\widetilde{12}\ \overline{34}$	
	$=-1$	$\frac{1}{2}[\pi\pi(\pi\nu+\nu\pi)-(\pi\nu+\nu\pi)\pi\pi]$	$\overline{12}\ \overline{34}$	
		$\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\pi(\pi\nu-\nu\pi)$	$\overline{12}\ \widetilde{34}$	
		$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi\nu-\nu\pi)\pi\pi$	$\widetilde{12}\ \overline{34}$	
$T=0$	$T_3=0$	$\frac{1}{\sqrt{12}}[2(\nu\nu\pi\pi+\pi\pi\nu\nu)-(\nu\pi+\pi\nu)(\nu\pi+\pi\nu)]$	$\overline{12}\ \overline{34}$	Singulett (mit Entartung)
		$\frac{1}{2}(\nu\pi-\pi\nu)(\nu\pi-\pi\nu)$	$\widetilde{12}\ \widetilde{34}$	

Tabelle 2. Resonanzfrequenz (bei 10 kG) und diamagnetische Korrektur des magnetischen Dipolmomentes (zu Kapitel III)

Die in dieser Tabelle angegebenen Resonanzfrequenzen sind abgerundete Werte, die lediglich für eine erste Information dienen sollen. Die Werte der diamagnetischen Korrekturen sind mit größerer Stellenzahl angegeben; diese Genauigkeit ist für die Auswertung von Präzisionsmessungen des magnetischen Momentes erforderlich, bei denen man eine Genauigkeit von sieben Stellen erreicht. — Die diamagnetische Korrektur berücksichtigt die abschirmende Wirkung der Elektronenhülle; diese wird durch ein äußeres Magnetfeld in Rotation versetzt und schwächt so dessen Einfluß auf den Kern (Lenzsche Regel).

Symbol und Z 1	A 2	Resonanzfrequenz bei 10 kG [MHz] 3	diamagnetische Korrektur [1]) $1-\sigma$ 4	Korrektur des magnetischen Dipolmomentes μ [1]) [μ_0] 5
$_0$n	1	29,17	0	0
$_1$H	1	42,57	0,999 974 0	0,000 074 [2])
	2	6,535	0,999 974 0	0,000 022 [2])
	3*	45,41	0,999 974 0	0,000 077 [2])
$_2$He	3	32,44	0,999 930	0,000 149
$_3$Li	6	6,267	0,999 919 2	0,000 07
	7	16,55	0,999 919 2	0,000 26
$_4$Be	9	5,987	0,999 878 5	0,000 143
$_5$B	10	4,576	0,999 832	0,000 30
	11	13,67	0,999 832	0,000 45
$_6$C	13	10,71	0,999 802	0,000 14
$_7$N	14	3,077	0,999 744	0,000 10
	15	4,316	0,999 744	0,000 07
$_9$F	19	40,07	0,999 611	0,001 0
$_{11}$Na	23	11,267	0,999 456	0,001 21
$_{13}$Al	27	11,10	0,999 282	0,002 61
$_{15}$P	31	17,24	0,999 088	0,001 03
$_{17}$Cl	35	4,173	0,998 877	0,000 92
$_{19}$K	39	1,987	0,998 687	0,000 5
	40*	2,470	0,998 687	0,001 7
	41	1,092	0,998 687	0,000 3
$_{21}$Sc	45	10,34	0,998 490	0,007 2
$_{23}$V	51	11,21	0,998 293	0,008 8
$_{25}$Mn	55	10,56	0,998 083	0,006 6

[1]) Aus N. F. Ramsey, Nuclear Moments, New York 1953.
[2]) Gilt für Wasser.

Tabelle 2
(Fortsetzung)

Symbol und Z 1	A 2	Resonanzfrequenz bei 10 kG [MHz] 3	diamagnetische Korrektur $1-\sigma$ 4	Korrektur des magnetischen Dipolmomentes μ $[\mu_K]$ 5
$_{27}$Co	59	10,11	0,997 858	0,010 0
$_{29}$Cu	63	11,31	0,997 612	0,005 32
	65	12,13	0,997 612	0,005 69
$_{31}$Ga	69	10,23	0,997 387	0,005 3
	71	12,99	0,997 387	0,006 7
$_{35}$Br	79	10,70	0,996 916	0,006 5
	81	11,53	0,996 916	0,007 0
$_{36}$Kr	83	1,64	0,996 800	0,003 1
$_{37}$Rb	85	4,113	0,996 671	0,004 50
	87*	13,97	0,996 671	0,009 15
$_{45}$Rh	103	1,52		
$_{47}$Ag	107	1,31	0,995 38	0,000 4
	109	2,42	0,995 38	0,000 8
$_{48}$Cd	111	9,030	0,995 248	0,002 83
	113	9,446	0,995 248	0,002 96
$_{49}$In	113	9,311	0,995 110	0,026 8
	115*	9,331	0,995 110	0,026 9
$_{50}$Sn	115	13,93	0,994 973	0,004 61
	117	15,17	0,994 973	0,005 02
	119	15,87	0,994 973	0,005 26
$_{51}$Sb	121	10,19	0,994 763	0,017 6
	123	5,519	0,994 763	0,013 3
$_{53}$J	127	8,565	0,994 553	0,005 30
$_{54}$Xe	129	11,78	0,994 411	0,004 3
$_{55}$Cs	133	5,617	0,994 269	0,014 8
$_{56}$Ba	135	4,25	0,994 125	0,004 9
	137	4,76	0,994 125	0,005 5
$_{57}$La	139	6,050	0,993 983	0,016 72
$_{78}$Pt	195	9,155	0,990 702	0,005 63
$_{79}$Au	197	0,691	0,990 526	0,001 9
$_{80}$Hg	199	7,614	0,990 349	0,004 86
$_{81}$Tl	203	24,56	0,990 170	0,015 84
	205	24,80	0,990 170	0,016 00
$_{82}$Pb	207	8,899	0,989 989	0,005 90
$_{83}$Bi	209	6,843	0,989 808	0,041 6

Tabelle 3. Kernmomente und Schalenmodell-Konfigurationen (zu Kapitel IX)

In den folgenden Tabellen 3a und 3b werden die gemessenen Kernmomente („Kernspin = Gesamtdrehimpuls J, magnetisches Dipolmoment μ, elektrisches Quadrupolmoment Q) und die Konfiguration nach dem Schalenmodell für ungerade (a) und für (u, u)-Kerne (b) angegeben. Die μ-Werte sind diamagnetisch korrigiert. Die Tabelle 3a enthält alle ungeraden Kerne, für die mindestens eines der genannten Kernmomente gemessen wurde, Tabelle 3b dagegen nur eine Auswahl wichtiger (u, u)-Kerne. Bei fast allen Kernen handelt es sich um die Kernmomente und Konfigurationen des Grundzustandes; die wenigen Fälle, in denen in einem langlebigen angeregten (isomeren) Zustand ein Kernmoment gemessen wurde, sind in der dritten Spalte durch ein hochgestelltes m gekennzeichnet (z. B. Cd: 111^{m}). Andere angeregte Zustände wurden nicht mit erfaßt.

Als Quellen wurden für Tabelle 3a die Tabelle im Handbuch der Physik **39**, S. 264 [E 57-1], und die von K. F. Smith, Progr. Nucl. Phys. **6**, S. 52 (1957), verwendet. Nach der so entstandenen Tabelle wurden die Abbildungen 231, 234 und 236 des Textes gezeichnet. Später wurde die Tabelle nach den neuesten Isotopentafeln von D. Strominger, J. M. Hollander, G. T. Seaborg, Revs. Mod. Phys. **30**, S. 585 (1958) [SHS], in folgender Form ergänzt und korrigiert: Kleine Änderungen der Meßwerte von μ und Q (Änderungen der letzten Stelle) wurden in Tabelle 3a direkt korrigiert; bei größeren Änderungen wurde der alte Wert — in runde Klammern gesetzt — angegeben, damit der Vergleich mit den Abb. 231, 234 und 236 möglich bleibt, und darunter der neue Wert von [SHS] hingeschrieben. — Für Tabelle 3b wurde die Tabelle der (u, u)-Kerne von Klinkenberg, Revs. Mod. Phys. **24**, S. 63 (1952), zugrunde gelegt, in der die Meßwerte von J, μ und Q nach [SHS] auf den neuesten Stand gebracht wurden.[1]

Im einzelnen enthalten die Tabellen 3a und 3b in den ersten vier Spalten die Grunddaten der Kerne (N, Z, A, Symbol). Ein an A hochgestellter Stern (z. B. an S 35*) bedeutet Instabilität des Grundzustandes gegen α- oder β-Zerfall, hochgestelltes m kennzeichnet angeregte metastabile (isomere) Zustände (s. o.). — In den nächsten 3 Spalten findet man die Meßwerte des Kernspins J in Einheiten von $\hbar$, des magnetischen Moments μ in Kernmagnetonen $\frac{e\hbar}{2Mc}$ und des Quadrupolmoments Q in 10^{-24} cm^2. Die Werte wurden auf drei Stellen hinter dem Komma abgerundet. Mehrere Meßwerte sind angegeben, wenn merklich verschiedene Meßwerte veröffentlicht wurden. Fälle, in denen nur obere Schranken der Meßwerte gefunden wurden, sind nicht mit erfaßt. — Die letzten Spalten geben in Kurzform (l_j) und ausführlich die Konfiguration nach dem Schalenmodell an, und zwar in Tabelle 3a nur die der ungeraden Teilchenart, in Tabelle 3b beider ungerader Teilchenarten.

Eckige Klammern und Fragezeichen bedeuten Unsicherheit der betreffenden Größe, runde Klammern dagegen beziehen sich auf die Korrektur nach [SHS] (s. oben).

[1] Da die in [SHS] angegebenen μ-Werte ohne diamagnetische Korrektur sind, muß bei einem Vergleich mit den hier angegebenen Werten die diamagnetische Korrektur berücksichtigt werden (vgl. auch Anhang II, Tabelle 1).

Tabelle 3 a

N	A	Z	J	μ	Q	l_j	n-Konfiguration			Bem.
							$1s_{1/2}$ (2)	$2p_{3/2}$ (4)	$2p_{1/2}$ (2)	
1	n 1*	0	$^1/_2$	— 1,913	—	$s_{1/2}$	1			
	He 3	2	$^1/_2$	— 2,128	—	$s_{1/2}$	1			
3										
5	Be 9	4	$^3/_2$	— 1,177	[+] 0,02	$p_{3/2}$	2	3		
7	C 13	6	$^1/_2$	+ 0,702	—	$p_{1/2}$	2	4	1	
8							2	4	2	
							$3d_{5/2}$ (6)	$2s_{1/2}$ (2)	$3d_{3/2}$ (4)	
9	O 17	8	$^5/_2$	— 1,894	(— 0,004) — 0,027	$d_{5/2}$	1			
11	Ne 21	10	$^3/_2$	(— 0,5) — 0,662	+ 0,093	$(d_{5/2})^3_{3/2}$?	3			deform. Kern?
13	Mg 25	12	$^5/_2$	— 0,855		$d_{5/2}$	5			
15	Si 29	14	$^1/_2$	— 0,555	—	$s_{1/2}$	6	1		
17	S 33	16	$^3/_2$	+ 0,643	— 0,064	$d_{3/2}$	6	2	1	
19	S 35*	16	$^3/_2$	[+] 1,0	(+ 0,035) + 0,045	$d_{3/2}$	6	2	3	
20						8	6	2	4	
							$4f_{7/2}$ (8)			
21										
23	Ca 43	20	$^7/_2$	—1,317		$f_{7/2}$	3			
25	Ti 47	22	$^5/_2$	— 0,788		$(f_{7/2})^5_{5/2}$?	5			deform. Kern?
27	Ti 49	22	$^7/_2$	— 1,104		$f_{7/2}$	7			
28						20	8			

Tabelle 3a

Z	*A*	*N*	*J*	*μ*	*Q*	l_j	*p*-Konfiguration			Bem.
							$1s_{1/2}$ (2)	$2p_{3/2}$ (4)	$2p_{1/2}$ (2)	
1	H 1	0	$^1/_2$	+ 2,793	—	$s_{1/2}$	1			
	H 3*	2	$^1/_2$	+ 2,979	—	$s_{1/2}$	1			
3	Li 7	4	$^3/_2$	+ 3,256	[— 0,012]	$p_{3/2}$	2	1		
5	B 11	6	$^3/_2$	+ 2,689	+ 0,036	$p_{3/2}$	2	3		
7	N 15	8	$^1/_2$	— 0,283	—	$p_{1/2}$	2	4	1	
8							2	4	2	
							$3d_{5/2}$ (6)	$2s_{1/2}$ (2)	$3d_{3/2}$ (4)	
9	F 17*	8	$^5/_2$			$d_{5/2}$	1			
	F 19	10	$^1/_2$	+ 2,629	—	$s_{1/2}$		1		
11	Na 23	12	$^3/_2$	+ 2,218	+ 0,10	$(d_{5/2})^3_{3/2}$?	3			deform. Kern?
13	Al 27	14	$^5/_2$	+ 3,641	+ 0,149	$d_{5/2}$	5			
15	P 31	16	$^1/_2$	+ 1,132	—	$s_{1/2}$	6	1		
17	Cl 35	18	$^3/_2$	+ 0,822	— 0,079	$d_{3/2}$	6	2	1	
	Cl 37	20	$^3/_2$	+ 0,684	— 0,062	$d_{3/2}$	6	2	1	
19	K 39	20	$^3/_2$	+0,391	+ 0,11 + 0,07	$d_{3/2}$	6	2	3	
	K 41	22	$^3/_2$	+ 0,215	[+] 0,13	$d_{3/2}$	6	2	3	
20						8	6	2	4	
							$4f_{7/2}$ (8)			
21	Sc 45	24	$^7/_2$	+ 4,756	— 0,31	$f_{7/2}$	1			
23	V 49*	26	$^7/_2$	4,46		$f_{7/2}$	3			
	V 51	28	$^7/_2$	+ 5,147	+ 0,28	$f_{7/2}$	3			
25	Mn 53*	28	$^7/_2$	5,050		$f_{7/2}$	5			
	Mn 55	30	$^5/_2$	+ 3,468	+ 0,4 + 0,3	$(f_{7/2})^{-3}_{5/2}$?	5			deform. Kern?
27	Co 57*	30	$^7/_2$	[+] 4,65		$f_{7/2}$	7			
	Co 59	32	$^7/_2$	+ 4,649	+ 0,5	$f_{7/2}$?	7			deform. Kern?
28						20	8			

Tabelle 3a

N	A	Z	J	μ	Q	l_j	n-Konfiguration				Bem.
							$3p_{3/2}$ (4)	$4f_{5/2}$ (6)	$3p_{1/2}$ (2)	$5g_{9/2}$ (10)	
29	Cr 53	24	$^3/_2$	$-0{,}474$		$p_{3/2}$	1				
31	Fe 57	26	$(^3/_2)\,^1/_2$	$[+0{,}05]$		$[p_{3/2}$	3]				
33	Ni 61	28	$[^3/_2]$	$[+0{,}10]$		$p_{3/2}$	3	2			
35											
37	Zn 67	30	$^5/_2$	$+0{,}876$	$+0{,}18$	$f_{5/2}$	4	5			
39	Zn 69*	30	$^1/_2$		—	$p_{1/2}$	4	6	1		
41	Ge 73	32	$^9/_2$	$-0{,}879$	$-0{,}22$	$g_{9/2}$	4	6	2	1	
	Se 75*	34	$^5/_2$		$+1{,}1$	$f_{5/2}$?	4	5	2	2	deform. Kern ?
43	Se 77	34	$^1/_2$	$+0{,}534$	—	$p_{1/2}$	4	6	1	4	
45	Se 79*	34	$^7/_2$	$-1{,}015$	$+0{,}9$ $+0{,}7$	$(g_{9/2})^{-3}_{7/2}$?	4	6		7	deform. Kern?
47	Kr 83	36	$^9/_2$	$-0{,}969$	$+0{,}15$ $+0{,}22$	$g_{9/2}$	4	6	2	7	
49	Kr 85*	36	$^9/_2$	$-1{,}001$	$+0{,}25$	$g_{9/2}$	4	6	2	9	
	Sr 87	38	$^9/_2$	$-1{,}093$		$g_{9/2}$	4	6	2	9	
50						28	4	6	2	10	

(Fortsetzung)

Z	A	N	J	μ	Q	l_j	p-Konfiguration				Bem.
							$3p_{3/2}$ (4)	$4f_{5/2}$ (6)	$3p_{1/2}$ (2)	$5g_{9/2}$ (10)	
29	Cu 61*	32	$^3/_2$				1				
	Cu 63	34	$^3/_2$	+ 2,226	— 0,16		1				
	Cu 65	36	$^3/_2$	+ 2,386	— 0,15		1				
31	Ga 67*	36	$^3/_2$	+ 1,84	+ 0,21		3				
	Ga 69	38	$^3/_2$	+ 2,016	+ 0,189		3				
	Ga 71	40	$^3/_2$	+ 2,562	(+ 0,146) + 0,119		3				
33	As 75	42	$^3/_2$	+ 1,439	+ 0,27		3	2			
35	Br 79	44	$^3/_2$	+ 2,106	+ 0,33		3	4			
	Br 81	46	$^3/_2$	+ 2,269	+ 0,28		3	4			
37	Rb 81*	44	$^3/_2$	+ 2,05			3	6			
	81^m		$^9/_2$				4	4		1	
	Rb 83*	46	$^5/_2$	+ 1,42			4	5			
	Rb 85	48	$^5/_2$	+ 1,353	+ 0,30 + 0,27		4	5			
	Rb 87*	50	$^3/_2$	+ 2,751	+ 0,14		3	6			
39	Y 89	50	$^1/_2$	— 0,137	—	$p_{1/2}$	4	6	1		
41	Nb 93	52	$^9/_2$	+ 6,167	— 0,2 — 0,4	$g_{9/2}$	4	6	2	1	
43	Tc 99*	56	$^9/_2$	+ 5,681	+ 0,3	$g_{9/2}$	4	6	2	3	
45	Rh 103	58	$^1/_2$	— 0,0885	—	$p_{1/2}$	4	6	1	6	
47	Ag 105*	58	$^1/_2$		—	$p_{1/2}$	4	6	1	8	
	Ag 107	60	$^1/_2$	— 0,114	—	$p_{1/2}$	4	6	1	8	
	Ag 109	62	$^1/_2$	— 0,131	—	$p_{1/2}$	4	6	1	8	
	Ag 111*	64	$^1/_2$	— 0,145	—	$p_{1/2}$	4	6	1	8	
49	In 111*	62	$^9/_2$			$g_{9/2}$	4	6	2	9	
	In 113	64	$^9/_2$	+ 5,523	1,14	$g_{9/2}$?	4	6	2	9	deform. Kern?
	113m		$^1/_2$	0,217	—	$p_{1/2}$	4	6	1	10	
	In 115*	66	$^9/_2$	+ 5,534	1,16	$g_{9/2}$?	4	6	2	9	deform. Kern?
50						28	4	6	2	10	

Tabelle 3a

N	*A*	*Z*	*J*	*μ*	*Q*	l_j	$4d_{5/2}$ (6)	$5g_{7/2}$ (8)	$3s_{1/2}$ (2)	$4d_{3/2}$ (4)	$6h_{11/2}$ (12)	Bem.
51	Zr 91	40	$^5/_2$	(— 1,9) — 1,303		$d_{5/2}$	1					
53	Mo 95	42	$^5/_2$	— 0,933		$d_{5/2}$	3					
55	Mo 97	42	$^5/_2$	— 0,952		$d_{5/2}$	5					
	Ru 99	44	$^5/_2$	— 0,63		$d_{5/2}$	5					
57	Ru 101	44	$^5/_2$	— 0,69		$d_{5/2}$	5	2				
59	Pd 105	46	$^5/_2$	— 0,57		$d_{5/2}$	5	4				
61	Sn 111*	50	$^7/_2$			$g_{7/2}$	6	5				
63	Cd 111	48	$^1/_2$	— 0,595	—	$s_{1/2}$	6	6	1			
	111^m		$^5/_2$	— 0,78		$d_{5/2}$	5	8				
65	Pd 111*	46	$^1/_2$		—	$s_{1/2}$	6	8	1			
	Cd 113	48	$^1/_2$	— 0,622	—	$s_{1/2}$	6	8	1			
	Sn 115	50	$^1/_2$	— 0,918	—	$s_{1/2}$	6	8	1			
67	Sn 117	50	$^1/_2$	— 0,999	—	$s_{1/2}$	6	8	1		2	
69	Sn 119	50	$^1/_2$	— 1,046	—	$s_{1/2}$	6	8	1		4	
71	Te 123	52	$^1/_2$	— 0,736	—	$s_{1/2}$	6	8	1		6	
73	Te 125	52	$^1/_2$	— 0,887	—	$s_{1/2}$	6	8	1		8	
75	Xe 129	54	$^1/_2$	— 0,777	—	$s_{1/2}$	6	8	1		10	

(Fortsetzung)

Z	A	N	J	μ	Q	l_j	p-Konfiguration					Bem.
							$5g_{7/2}$ (8)	$4d_{5/2}$ (6)	$6h_{11/2}$ (12)	$4d_{3/2}$ (4)	$3s_{1/2}$ (2)	
51	Sb 121	70	5/2	+ 3,359	— 0,53	$d_{5/2}$?		1				deform. Kern?
					— 0,8							
	Sb 123	72	7/2	+ 2,547	— 0,68	$g_{7/2}$?	1					
					— 1,0							
53	J 123*	70	5/2			$d_{5/2}$		3				
	J 125*	72	5/2	2,6	— 0,66	$d_{5/2}$?		3				deform. Kern!
	J 127	74	5/2	+ 2,809	— 0,69	$d_{5/2}$?		3				
					— 0,82							
	J 129*	76	7/2	+ 2,617	— 0,47	$g_{7/2}$?	3					
	J 131*	78	(3/2) 7/2	— 0,412 ?	(— 0,48)	$g_{7/2}$?	3					
					— 0,35							
55	Cs 127*	72	1/2	[+] 1,41	—							
	Cs 129*	74	1/2	[+] 1,47	—							
	Cs 131*	76	5/2	+ 3,48		$d_{5/2}$		5				
	Cs 133	78	7/2	+ 2,579	— 0,003	$g_{7/2}$	5					
	Cs 135*	80	7/2	+ 2,738		$g_{7/2}$	5					
	Cs 137*	82	7/2	+ 2,850		$g_{7/2}$	5					
57	La 139	82	7/2	+ 2,778	(+ 0,62)	$g_{7/2}$	7					
					+ 0,27							
59	Pr 141	82	5/2	+ 3,9	— 0,054	$d_{5/2}$	8	1				
61	Pm 147*	86	7/2			$g_{7/2}$	7	4				
63	Eu 151	88	5/2	+ 3,4	+ 1,2	deformierte Kerne						
	Eu 153	90	5/2	+ 1,5	+ 2,5							
65	Tb 159	94	3/2	+ 1,52								
67	Ho 165	98	7/2	3,31	2							
69	Tm 169	100	1/2	— 0,21	—							
71	Lu 175	104	7/2	+ 2,9	(+ 5,7)							
				+ 2,0	+ 5,6; + 5,9							
73	Ta 181	108	7/2	+ 2,4	(+ 4,3)							
					+ 3; + 6							
75	Re 185	110	5/2	+ 3,172	+ 2,8							
	Re 187*	112	5/2	+ 3,176	+ 2,6							

Tabelle 3a

N	*A*	*Z*	*J*	*μ*	*Q*	l_j	*n*-Konfiguration						Bem.
							$4d_{5/2}$ (6)	$5g_{7/2}$ (8)	$3s_{1/2}$ (2)	$4d_{3/2}$ (4)	$6h_{11/2}$ (12)		
77	Xe 131	54	$^3/_2$	$+0{,}691$	$-0{,}12$	$d_{3/2}$	6	8	2	1	10		
79	Ba 135	56	$^3/_2$	$+0{,}835$		$d_{3/2}$	6	8	2	1	12		
81	Ba 137	56	$^3/_2$	$+0{,}935$		$d_{3/2}$	6	8	2	3	12		
	Ce 139*	58		0,84									
82						50	6	8	2	4	12		
							$5f_{7/2}$ (8)	$6h_{9/2}$ (10)	$4p_{3/2}$ (4)	$5f_{5/2}$ (6)	$4p_{1/2}$ (2)	$7i_{13/2}$ (14)	
83	Ce 141*	58	$^7/_2$	0,89		$f_{7/2}$	1						
	Nd 143	60	$^7/_2$	$-1{,}03$	~ 1	$f_{7/2}$	1						
85	Nd 145	60	$^7/_2$	$-0{,}62$ $-0{,}69$	~ 1	$f_{7/2}$	3						
	Sm 147*	62	$^7/_2$	$-0{,}83$ $-0{,}76$		$f_{7/2}$	3						
87	Nd 147*	60	$^5/_2$	(0,22) 0,56									
	Sm 149	62	$^7/_2$	$-0{,}68$ $-0{,}64$		$f_{7/2}$	5						
89													
91	Gd 155	64	$^3/_2$	$-0{,}30$ $-0{,}24$	$+1{,}1$	deformierte Kerne							
93	Gd 157	64	$^3/_2$	$-0{,}37$ $-0{,}32$	$+1{,}0$	deformierte Kerne							
95	Dy 161	66	$(^7/_2)$, $^5/_2$, $^3/_2$	$-0{,}37$	$+1{,}1$	deformierte Kerne							
97	Dy 163	66	$(^7/_2)$, $^5/_2$, $^3/_2$	$+0{,}51$	$+1{,}3$	deformierte Kerne							
99	Er 167	68	$^7/_2$	[−] 0,50	[+] 10,2	deformierte Kerne							
101	Yb 171	70	$^1/_2$	$\sim +0{,}45$	—	deformierte Kerne							
103	Yb 173	70	$^5/_2$	$\sim -0{,}65$	~ 3	deformierte Kerne							
105	Yb 175*	70		$-0{,}15$		deformierte Kerne							
	Hf 177	72	$^7/_2$	$+0{,}61$	$+3$	deformierte Kerne							
107	Hf 179	72	$^9/_2$	$-0{,}47$	$+3$	deformierte Kerne							

(Fortsetzung)

Z	A	N	J	μ	Q	l_j	p-Konfiguration					Bem.
							$5g_{7/2}$ (8)	$4d_{5/2}$ (6)	$6h_{11/2}$ (12)	$4d_{3/2}$ (4)	$3s_{1/2}$ (2)	
77	Ir 191	114	$^3/_2$	+ 0,2	+ 1,2	deformierte Kerne						
				+ 0,16	+ 1,5							
	Ir 193	116	$^3/_2$	+ 0,17	+ 1,0							
				+ 0,2	+ 1,5							
79	Au 191*	112	$^3/_2$	∼ + 0,14		$d_{3/2}$	8	6	12	3		
	Au 193*	114	$^3/_2$	∼ + 0,14		$d_{3/2}$	8	6	12	3		
	Au 197	118	$^3/_2$	+ 0,136	+ 0,56	$d_{3/2}$	8	6	12	3		
	Au 199*	120	$^3/_2$	0,24		$d_{3/2}$	8	6	12	3		
81	Tl 197*	116	$^1/_2$		—	$s_{1/2}$	8	6	12	4	1	
	Tl 199*	118	$^1/_2$		—	$s_{1/2}$	8	6	12	4	1	
	Tl 201*	120	$^1/_2$		—	$s_{1/2}$	8	6	12	4	1	
	Tl 203	122	$^1/_2$	+ 1,611	—	$s_{1/2}$	8	6	12	4	1	
	Tl 205	124	$^1/_2$	+ 1,627	—	$s_{1/2}$	8	6	12	4	1	
82						50	8	6	12	4	2	
							$6h_{9/2}$ (10)	$5f_{7/2}$ (8)	. . .			
83	Bi 203*	120	$^9/_2$			$h_{9/2}$	1					
	Bi 209(*)	126	$^9/_2$	+ 4,080	— 0,4	$h_{9/2}$	1					
85	At											
87	Fr											
89	Ac 227*	138	$^3/_2$	+ 1,1	— 1,7	deformierte Kerne						
91	Pa 231*	140	$^3/_2$									
93	Np 237*	144	$^5/_2$	∼ 6	(∼ 15)							
	Np 239*	146	$^1/_2$, $^5/_2$									
95	Am 241*	146	$^5/_2$	+ 1,4	+ 4,9							
	Am 243*	148	$^5/_2$	+ 1,4	+ 4,9							
97	Bk											
99	Es											
101	Md											

Tabelle 3a (Fortsetzung)

N	A	Z	J	μ	Q	l_j	n-Konfiguration						Bem.
							$5f_{7/2}$ (8)	$6h_{9/2}$ (10)	$4p_{3/2}$ (4)	$5f_{5/2}$ (6)	$4p_{1/2}$ (2)	$7i_{13/2}$ (14)	
109	W 183	74	$^1/_2$	+ 0,118	—	$p_{1/2}$	8	10	4	4	1		
111	Os 187	76	$^1/_2$	+ 0,12	—	$p_{1/2}$	8	10	4	6	1		
113	Os 189	76	$^3/_2$	+ 0,656	(+ 2,0) + 0,6	$p_{3/2}$	8	10	3	6	2	2	
115													
117	Pt 195	78	$^1/_2$	+ 0,606	—	$p_{1/2}$	8	10	4	6	1	6	
	Hg 197*	80	$^1/_2$	+ 0,52	—	$p_{1/2}$	8	10	4	6	1	6	
119	Hg 199	80	$^1/_2$	+ 0,504	—	$p_{1/2}$	8	10	4	6	1	8	
121	Hg 201	80	$^3/_2$	— 0,613	+ 0,42 + 0,50; + 0,6	$p_{3/2}$	8	10	3	6		12	
123													
125	Pb 207	82	$^1/_2$	+ 0,589	—	$p_{1/2}$	8	10	4	6	1	14	
	Po 209*	84	$^1/_2$		—	$p_{1/2}$	8	10	4	6	1	14	
126						82	8	10	4	6	2	14	
							$6g_{9/2}$ (10)	$5d_{5/2}$ (6)	$7i_{11/2}$ (12)	$6g_{7/2}$ (9)	…		
127													
129													
131													
133													
135													
137													
139													
141	U 233*	92	$^5/_2$	(0,63) 0,51	3,4								
143	U 235*	92	$^7/_2$	0,34	4,0		deformierte Kerne						
145	Pu 239*	94	$^1/_2$	~ 0,4 ~ 0,02	—								
147	Pu 241*	94	$^5/_2$	~ 1,4									

Tabelle 3b

N	Z	A	J	μ	Q	$(l_j^n, l_j^p)_{J_0}$	$1s_{1/2}$ (2)	$2p_{3/2}$ (4)	$2p_{1/2}$ (2)	$3d_{5/2}$ (6)	$2s_{1/2}$ (2)	$3d_{3/2}$ (4)	$4f_{7/2}$ (8)	$3p_{3/2}$ (4)	$4f_{5/2}$ (6)	$3p_{1/2}$ (2)	$5g_{9/2}$ (10)	Bem.
1	1	H 2	1	+ 0,857	+ 0,00274	$(s_{1/2}, s_{1/2})_1$	1 1											
3	3	Li 6	1	+ 0,822	[+]0,00046	$(p_{3/2}, p_{3/2})_1$	2	1 1										
5	5	B 10	3	+ 1,801	+ 0,074	$(p_{3/2}, p_{3/2})_3$	2	3 3										
7	7	N 14	1	+ 0,404	+ 0,02	$(p_{1/2}, p_{1/2})_1$	2	4 4	1 1									
11	11	Na 22*	3	+ 1,746		$(d_{5/2}, d_{5/2})_3$	8			1 1	2 2							
13	11	Na 24*	4	+ 1,69		$(d_{5/2}, d_{5/2})_4$	8			3 1	2 2							
19	17	Cl 36*	2	+ 1,32	0,017	$(d_{3/2}, d_{3/2})_2$	8			6 6	2 2	3 1						
21	19	K 40*	4	— 1,298		$(f_{7/2}, d_{3/2})_4$	8			6 6	2 2	4 3	1					
27	23	V 50	6	+ 3,347		$(f_{7/2}, f_{7/2})_6$	20						7 3					
49	37	Rb 86*	2	— 1,69		$(g_{9/2}, f_{5/2})_2$	20						8 8	4 4	6 5	2	9	

N	Z	A	J	μ	Q	$(l_j^n, l_j^p)_{J_0}$	28	$3p_{3/2}$ (4)	$4f_{5/2}$ (6)	$3p_{1/2}$ (2)	$5g_{9/2}$ (10)	$5g_{7/2}$ (8)	$4d_{5/2}$ (6)	$6h_{11/2}$ (12)	$4d_{3/2}$ (4)	$3s_{1/2}$ (2)	$6h_{9/2}$ (10)	$5f_{7/2}$ (8)	$5f_{5/2}$ (6)	$7i_{13/2}$ (14)	Bem.
81	57	La 138*	5	+ 3,685		$(d_{3/2}, g_{7/2})_5$		50				8 7	6	12	3	2					
105	71	Lu 176*	6	+ 2,8	+ 8,0	deformierter Kern															

Die Tabelle 4 (Nilssonsches Schema) erscheint als Beilage 2 am Ende des Buches.

Tabelle 5. Übersicht über die Elementarteilchen [1]) (zu Kapitel VII)

Teilchen		Symbol	Spin	Ruhemasse: Energieäquivalent der Ruhemasse [MeV]	Ruhemasse: bezogen auf die Ruhemasse des Elektrons	Mittlere Lebensdauer [sec]	Zerfallsarten	Verzweigungsverhältnis
Photon		γ	1	0	0	∞	—	—
Leptonen		ν $e^{\pm}$ $\mu^{\pm}$	$^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$	0 $0{,}510\,985 \pm 7$ $105{,}70 \pm 0{,}06$	0 1 $206{,}86 \pm 0{,}11$	∞ ∞ $(2{,}22 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-6}$	— — $e^{\pm} + \nu + \bar{\nu}$	— — —
Mesonen	π-Mesonen	π^0	0	$135{,}04 \pm 0{,}16$	$264{,}27 \pm 0{,}31$	$< 4 \cdot 10^{-16}$	$\gamma + \gamma$ $e^+ + e^- + \gamma$ $2e^+ + 2e^-$ $e^+ + e^-$	98,8 1,2 (0,004) [2]) (10^{-5}) [2])
		$\pi^{\pm}$	0	$139{,}63 \pm 0{,}06$	$273{,}27 \pm 0{,}11$	$(2{,}56 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-8}$	$\mu^{\pm} + \nu$ $e^{\pm} + \nu$ $\pi^0 + e^{\pm} + \nu$	~ 100 $(1{,}2 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-2}$ ($1 \cdot 10^{-6}$) [2])
	K-Mesonen	K^+	0	$494{,}0 \pm 0{,}2$	$966{,}76 \pm 0{,}4$	$(1{,}224 \pm 0{,}013) \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ $\pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ $\pi^+ + \pi^0$ $\mu^+ + \pi^0 + \nu$ $\mu^+ + \nu$ $e^+ + (\pi^0) + \nu$	$6{,}1 \pm 0{,}3$ $2{,}2 \pm 0{,}3$ 27 ± 2 $1{,}9 \pm 0{,}4$ 59 ± 4 $3{,}3 \pm 1$
		K^-	0	$493{,}4 \pm 0{,}6$	$965{,}6 \pm 1{,}2$	$(1{,}25 \pm 0{,}11) \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^- + \pi^-$ $\pi^- + \pi^0$ $\mu^- + \nu$ $e^- + (\pi^0) + \nu$	
		K_1^0	0	$497{,}9 \pm 0{,}6$	$974{,}4 \pm 1{,}2$	$(1{,}00 \pm 0{,}38) \cdot 10^{-10}$	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^0 + \pi^0$	85 ± 6 15 ± 6
		K_2^0				$\left(6{,}1^{+1{,}6}_{-1{,}1}\right) \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ $\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ $\mu^{\pm} + \pi^{\mp} + \nu$ $e^{\pm} + \pi^{\mp} + \nu$	$0{,}03 \div 0{,}2$? ? ?

Nukle-onen	p	$^1/_2$	$938{,}213 \pm 0{,}01$	$1836{,}118 \pm 0{,}02$	∞	—	—
	n	$^1/_2$	$939{,}506 \pm 0{,}01$	$1838{,}645 \pm 0{,}02$	$(1{,}04 \pm 0{,}13) \cdot 10^3$	$e^- + p + \bar{\nu}$	—
Hyperonen	Λ^0	$^1/_2$	$1115{,}45 \pm 0{,}12$	$2182{,}9 \pm 0{,}2$	$(2{,}505 \pm 0{,}086) \cdot 10^{-10}$	$p + \pi^-$	63 ± 3
						$n + \pi^0$	37 ± 3
	Σ^+	$^1/_2$	$1189{,}55 \pm 0{,}21$	$2328{,}0 \pm 0{,}4$	$(0{,}83 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-10}$	$p + \pi^0$	50
						$n + \pi^+$	50
	Σ^-	$^1/_2$	$1196{,}39 \pm 0{,}34$	$2341{,}3 \pm 0{,}7$	$\left(1{,}59^{+0{,}1}_{-0{,}09}\right) \cdot 10^{-10}$	$n + \pi^-$	—
	Σ^0	$^1/_2$	$1191{,}94 \pm 0{,}53$	$2332{,}6 \pm 1{,}0$	$< 10^{-11}$; $\sim 10^{-19}$ [2])	$\Lambda^0 + \gamma$	—
	Ξ^-	?	$1319{,}1 \pm 0{,}5$	2581 ± 1	$\left(1{,}9^{+0{,}6}_{-0{,}4}\right) \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^-$	—
	Ξ^0	?	1311 ± 8	2579 ± 16	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$ (1 Ereignis)	$\Lambda^0 + \pi^0$	—

[1]) Die in der Tabelle angegebenen Daten entsprechen dem Stand der Untersuchungen vom Juli 1959. Für die nicht aufgeführten Antiteilchen wurde angenommen, daß sie die gleichen Massen, Spins und mittleren Lebensdauern besitzen wie die entsprechenden Teilchen. Im Jahre 1958 wurden in den USA das Anti-Lambda-Hyperon und im Jahre 1960 in der UdSSR das Anti-Sigma-Hyperon entdeckt. Die in Kapitel VII, § 80, noch als unbeantwortet behandelte Frage, ob verschiedene K-Mesonen zu den unterschiedlichen Zerfallsarten gehören oder ob es sich um ein Teilchen handelt, ist, wie aus der Tabelle hervorgeht, zugunsten der letzteren Möglichkeit entschieden. (Ausgehend von dieser Feststellung wurde die Nichterhaltung der Parität bei den schwachen Wechselwirkungen, d. h. bei den Zerfällen der instabilen Teilchen, entdeckt.)

[2]) Theoretischer Erwartungswert.

ANHANG II

Die Tabellen 1 und 2 stellen eine ausführliche Zusammenstellung der wichtigsten Daten aller stabilen und instabilen Atomkerne dar, soweit sie bisher bekannt sind.[1]) In Tabelle 3 sind in der Atomphysik auftretende wichtige Konstanten, in Tabelle 4 einige Umrechnungsfaktoren und Äquivalenzbeziehungen zusammengestellt. Tabelle 5 enthält die chemischen Atomgewichte und Tabelle 6 das Periodische System der Elemente.
Bei den Zahlenangaben (Massenwert, Häufigkeit, Kernmoment, Halbwertszeit und Energie der Strahlung) wird in der Regel nur *ein* Wert bzw. *eine Gruppe* von Werten angegeben. Diese Werte sollten die z. Z. geltenden Bestwerte sein.[1]) Die Angaben wurden nach Möglichkeit den Originalarbeiten entnommen. Die Entscheidung, welcher Wert unter mehreren, von verschiedenen Autoren veröffentlichten Ergebnissen der *wahrscheinlichste* Wert ist, kann jedoch nicht immer getroffen werden.[2]) Es erscheinen deshalb in einigen Fällen *zwei* Werte (bzw. *zwei Wertegruppen*), die jeweils durch a) und b) unterschieden werden. Im allgemeinen werden jeweils nur so viel Stellen angegeben, daß der Fehler höchstens $\pm$ 9 Einheiten der letzten Dezimalen beträgt (gemäß den Fehlerangaben der betreffenden Arbeit). In einigen Fällen wird eine noch höhere Fehlerangabe zugelassen, jedoch bis höchstens $\pm$ 15 Einheiten der letzten Dezimalen; dann erscheint die letzte Ziffer im Kleindruck. In der Tabelle der Atomkonstanten erschien es angebracht, die jeweiligen Fehlergrenzen aus den Originalarbeiten wiederzugeben.

Tabelle 1. Massenwerte, Häufigkeiten und Kernmomente der stabilen und einiger langlebiger instabiler Atomkerne

In Tabelle 1 findet man den Massenwert, die relative natürliche Häufigkeit, den Spin, das magnetische Dipolmoment und das elektrische Quadrupolmoment aller stabilen Atomkerne sowie einiger langlebiger instabiler Kerne und des Neutrons.

Die **Spalte 1** enthält das *chemische Symbol* und die *Kernladungszahl Z* (Zahl der Protonen im Kern).

Die **Spalte 2** enthält die *Massenzahl A* (Anzahl der Nukleonen im Kern) und die **Spalte 3** die Zahl *der Neutronen N*. Ein Stern hinter der Massenzahl bedeutet, daß der betreffende Kern instabil ist; jedoch werden Atomkerne, bei denen ein etwaiger radioaktiver Zerfall zwar

---

[1]) Stand vom Sommer 1959.
[2]) Weitere Meßwerte der Größen findet man z. B. in folgenden Tabellen:
STROMINGER, D., J. M. HOLLANDER und G. T. SEABORG, Revs. Mod. Phys. **30**, 585 bis 904 (1958)
KUNZ, W., und J. SCHINTLMEISTER, Tabellen der Atomkerne, Teil I, Bd. 1 und 2, Berlin 1958 und 1959. (Teil II ist in Vorbereitung.)

vermutet wird, aber noch nicht experimentell gesichert ist (z. B. doppelter β-Zerfall, s. Tabelle 2 und Kerntafel), als *stabile* Kerne angesehen.

In **Spalte** 4 findet man den *Massenwert* in Atommasseneinheiten (AME) der physikalischen Massenwertskala[1]). Die Angaben stellen die Atommassen der neutralen Atome dar. Da Meßergebnisse, die nach verschiedenen Methoden gewonnen werden, zum Teil noch erheblich voneinander abweichen (im Verhältnis zu den von den Autoren angegebenen Meßungenauigkeiten), enthält diese Spalte bevorzugt solche Meßergebnisse, die mit Hilfe der Massenspektroskopie gewonnen wurden. Massenwerte, die aus den Q-Werten von Kernreaktionen oder aus der Zerfallsenergie radioaktiver Umwandlungen stammen, werden nur dann angeführt, wenn für den betreffenden Kern keine zuverlässigen massenspektroskopischen Meßergebnisse gefunden wurden; diese Massenwerte werden durch ein Kreuz (†) besonders gekennzeichnet. Einige Angaben sind durch Mittelwertbildung entstanden.
In der Regel werden massenspektrographische Präzisionsmessungen nach der sog. Dublettmethode durchgeführt, wobei man das Isotop von unbekanntem Massenwert mit dem Massenwert einer Verbindung gleicher Massenzahl vergleicht. Für die Berechnung der Massenwerte aus den gemessenen Massendifferenzen sind in dieser Tabelle nach Möglichkeit überall die gleichen sekundären Massenstandards zugrunde gelegt worden. Für die am häufigsten auftretenden sekundären Massenstandards H^1, C^{12} und S^{32} werden die von QUISENBERRY, GIESE und BENSON [Q 3] bestimmten Werte eingesetzt:

$$H^1 \quad (1{,}008\,145\,1 \pm 0{,}000\,000\,2)\ \text{AME},$$
$$C^{12} \quad (12{,}003\,815\,6 \pm 0{,}000\,000\,4)\ \text{AME},$$
$$S^{32} \quad (31{,}982\,238\,8 \pm 0{,}000\,000\,9)\ \text{AME}.$$

Die in den Arbeiten [B 1] und [G 1] veröffentlichten Massenwerte sind bereits nach diesen Massenstandards berechnet; für die aus den Arbeiten [C 2], [J 1], [Q 2] und [S 2] stammenden Massenwerte wurde jedoch eine Neuberechnung gemäß [Q 3] vorgenommen. Für einen großen Teil der Massenwerte — vorwiegend im Bereich höherer Massenzahlen — wurden die Zusammenstellungen von DUCKWORTH [D 2], [D 3] und [D 4] verwendet; die von DUCKWORTH in [D 4] zugrunde gelegten Werte der sekundären Massenstandards für H^1, C^{12} und S^{32} weichen zwar etwas von den oben genannten ab, die Abweichungen dürften jedoch auf die berechneten Massenwerte der schweren Isotope wegen der geringeren Anzahl der angegebenen Stellen keinen feststellbaren Einfluß ausüben. Die Massenwerte für Gd^{155}, Gd^{157}, Dy^{161}, Dy^{163}, Er^{166}, Er^{167}, Hf^{177}, Hf^{179}, Os^{186}, Os^{187} wurden aus von JOHNSON und BHANOT [J 2] bestimmten Massendifferenzen unter Berücksichtigung der von DUCKWORTH [D 4] angegebenen Massenwerte für Gd^{154}, Gd^{156}, Gd^{158}, Dy^{160}, Dy^{162}, Dy^{164}, Er^{168}, Hf^{176}, Hf^{178}, Hf^{180} und Os^{188} berechnet, wobei in einigen Fällen Mittelwerte gebildet wurden. Massenwerte, die mit dem Massensynchrometer bestimmt wurden, konnten in der vorliegenden Tabelle noch nicht berücksichtigt werden, da die Zahl der Kerne, deren Massenwerte mit einer derartigen Apparatur bisher gemessen wurden, noch verhältnismäßig gering ist [S 2], [F 1], [F 2]. Die Literatur wird angeführt, da die Genauigkeit dieser Methode — gemäß den von den Autoren angegebenen Fehlergrenzen — die der z. Z. besten doppelfokussierenden Apparate etwas übertrifft.

In **Spalte 5** ist angegeben, wie groß die *relative natürliche Häufigkeit* (in $^0/_0$) des betreffenden Kernes dieses Elementes ist, wobei jedoch zu beachten ist, daß diese Werte in verschiedenen natürlichen Vorkommen erhebliche Variationen aufweisen können (Näheres s. Bd. III). In

[1]) Bezogen auf den Massenwert des Sauerstoff-Isotops O^{16} ($M = 16{,}000\ldots$). In der International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) wird erwogen, die physikalische Massenwertskala in Zukunft auf das Kohlenstoff-Isotop C^{12} ($M = 12{,}000\ldots$) zu beziehen. Um die Massenwerte in der neuen Skala zu erhalten, müßten die hier angegebenen Werte mit 0,999 682 134 4 multipliziert werden; siehe J. MATTAUCH, Z. Naturf. **13a**, 572 (1958).

der vorliegenden Tabelle wird in den Fällen, bei denen Variationen durch in der Natur ablaufende physikalisch-chemische Vorgänge (Isotopie-Effekte) bekannt sind bzw. angenommen werden können, in der Nebenspalte durch den Buchstaben v auf diese Variationen hingewiesen; es handelt sich dabei vornehmlich um die leichten Elemente. Bei den Elementen Wasserstoff, Helium und Sauerstoff sind die Variationen in der relativen Häufigkeit ihrer Isotope so groß, daß die Angaben der unteren und oberen Grenzen ohne nähere Erläuterungen sinnlos wären. Die in der Tabelle aufgenommenen Werte gelten für spezielle, aber weit verbreitete natürliche Vorkommen von großer Konstanz der isotopen Zusammensetzung, die als allgemein zugängliche Standards dienen können[1]). In den Fällen, in denen ein weit verbreitetes Vorkommen des Elementes mit großer Konstanz der isotopen Zusammensetzung in der Natur fehlt, werden die untere und die obere Grenze der natürlichen Variation angegeben.
In der Nebenspalte wird außerdem durch den Buchstaben *r* (radiogenes stabiles Isotop) darauf hingewiesen, daß der betreffende Kern auch durch in der Natur ablaufende radioaktive Prozesse gebildet werden kann, wodurch die isotope Zusammensetzung des betreffenden Elementes in den verschiedenen Vorkommen variiert erscheint.

Die **Spalte 6** enthält die *Quantenzahl des Eigendrehimpulses* des Kernes im Grundzustand, die man in der Regel kurz (aber nicht ganz korrekt) mit Spin I bezeichnet. Für den Betrag des Eigendrehimpulses gilt

$$|\mathfrak{J}| = +\sqrt{I(I+1)}\,\frac{h}{2\pi}\,.$$

In **Spalte 7** findet man das *magnetische Dipolmoment* μ des Kernes (Grundzustand) in Kernmagneton-Einheiten. Je nachdem, ob von dem jeweiligen Autor eine Korrektur für den Diamagnetismus der Elektronenhülle vorgenommen wurde, ist der Zusatz m. K. (mit Korrektur) oder o. K. (ohne Korrektur) zu finden; außerdem stehen die nicht korrigierten Werte — der Deutlichkeit halber — in Klammern. Wenn bei einem Kern der korrigierte und der unkorrigierte Wert angegeben ist, müssen nicht beide Werte von demselben Autor stammen.
Die von verschiedenen Autoren veröffentlichten Werte des Kerndipolmomentes für einen bestimmten Kern weichen mitunter beträchtlich voneinander ab. Die Ursachen dafür liegen nicht allein in der Meßungenauigkeit, mit der eine Einzelmessung behaftet ist, sondern auch darin, daß bei Messungen mittels der Kerninduktionsmethode für die Berücksichtigung der erforderlichen Korrekturen unterschiedliche Annahmen gemacht werden, da eine exakte Behandlung vorläufig nicht möglich ist (Korrektur für den Diamagnetismus der Elektronenhülle im Atom- oder Molekülverband, für die inner- und zwischenmolekularen Wechselwirkungen der Kernspins und für die endliche Ausdehnung des Kernes). Für das Aufsuchen der Originalarbeiten sei z. B. auf die ausführlichen Tabellen von KUNZ, SCHINTLMEISTER[2]), LAUKIEN[3]) und LÖSCHE[4]) verwiesen.

Schließlich enthält die **Spalte 8** die Werte für das *elektrische Quadrupolmoment* q in Einheiten 10^{-24} cm².
Bei einigen Kernen kann nur eine Angabe über den Höchstwert eines eventuell vorhandenen Kernquadrupolmomentes gemacht werden, z. B. $|< 4 \cdot 10^{-3}|$, womit $0 \leqq |q| < 4 \cdot 10^{-3}$ gemeint ist.

---

[1]) Diese sind der Wasserstoff des frischen Oberflächensüßwassers (Flußwasser, Leitungswasser), das atmosphärische Helium, der atmosphärische Stickstoff und der atmosphärische Sauerstoff.
[2]) KUNZ, W., und J. SCHINTLMEISTER, Tabellen der Atomkerne, Teil I, Bd. 1 und 2, Berlin 1958 und 1959.
[3]) LAUKIEN, G., Kernmomenten-Bericht, in S. FLÜGGE, Hdb. der Physik, Bd. 38/1, S. 366, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
[4]) LÖSCHE, A., Kerninduktion, Berlin 1957.

Literaturverzeichnis zu Spalte 4: Massenwerte

[B 1] Benson, J. L., Damerow, R. A., und R. R. Ries, Phys. Rev. **113**, 1105 (1959)
[C 1] Collins, T. L., Mass Spectroscopy in Physics Research, Nat. Bur. Standards Circ. No. 522 (1953), s. [D 2]
[C 2] Collins, T. L., Johnson, W. H. jr., und A. O. Nier, Phys. Rev. **94**, 398 (1954)
[D 1] Drummond, J. E., Phys. Rev. **97**, 1004 (1955)
[D 2] Duckworth, H. E., Hogg, B. G., und E. M. Pennington, Revs. Mod. Phys. **26**, 463 (1954)
[D 3] Duckworth, H. E., Revs. Mod. Phys. **29**, 767 (1957)
[D 4] Duckworth, H. E., Progress in Nuclear Physics, Vol. **6**, 138; London-New York-Paris: Pergamon Press 1957
[F 1] Friedman, L., und L. G. Smith, Phys. Rev. **109**, 2214 (1958)
[F 2] Friedman, L., Henkes, W., und D. Christman, Phys. Rev. **115**, 166 (1959)
[G 1] Giese, C. F., und J. L. Benson, Phys. Rev. **110**, 712 (1958)
[H 1] Hogg, B. G., und H. E. Duckworth, Canad. J. Phys. **32**, 65 (1954), s. [D 2]
[H 2] Huizenga, J. R., Physica **21**, 410 (1955)
[J 1] Johnson, W. H. jr., und A. O. Nier, Phys. Rev. **105**, 1014 (1957)
[J 2] Johnson, W. H. jr., und V. B. Bhanot, Phys. Rev. **107**, 1669 (1957)
[K 1] Kunz, W., Kernphysikalische Daten aus der UdSSR, Atompraxis, 4. Jg., 97 (1958)
[M 1] Mattauch, J., Waldmann, L., u. a., Z. Naturforsch. **11a**, 525 (1956)
[M 2] Mattauch, J., und F. Everling, Progress in Nuclear Physics, Vol. **6**, 233; London-New York-Paris: Pergamon Press 1957
[Q 1] Quisenberry, K. S., Scolman, T. T., und A. O. Nier, Phys. Rev. **102**, 1071 (1956)
[Q 2] Quisenberry, K. S., Scolman, T. T., und A. O. Nier, Phys. Rev. **104**, 461 (1956)
[Q 3] Quisenberry, K. S., Giese, C. F., und J. L. Benson, Phys. Rev. **107**, 1664 (1957)
[S 1] Scolman, T. T., Quisenberry, K. S., und A. O. Nier, Phys. Rev. **102**, 1076 (1956)
[S 2] Smith, L. G., Phys. Rev. **111**, 1606 (1958)
[W1] Wapstra, A. H., Physica **21**, 367 (1955)
[W2] Wapstra, A. H., Physica **21**, 385 (1955)

Von während der Drucklegung erschienenen Arbeiten sei besonders hingewiesen auf die Zusammenstellung von F. Everling, L. A. König, J. H. E. Mattauch und A. H. Wapstra, Nucl. Phys. **15**, 342 (1960).

Symbol und Z	A	N	Massenwert M [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%]		Spin I	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment q [10^{-24} cm^2]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_0$n	1*	1	1,008 983 0†	M 2	—		$^1/_2$	— 1,913 14		—
			1,008 986 1†	W 1						
$_1$H	1	0	1,008 145 1	Q 3	99,9851	v	$^1/_2$	a) + 2,792 81	m. K.	—
								b) + 2,792 76	m. K.	
$_1$D	2	1	2,014 742 5	Q 1	0,0149	v	1	+ 0,857 407	m. K.	+0,002738
$_1$T	3*	2	3,016 998 †	M 2	$< 10^{-10}$	v	$^1/_2$	a) + 2,978 84	m. K.	—
			3,017 000 †	D 1				b) + 2,978 64	m. K.	
$_2$He	3	1	3,016 979 †	M 2	0,000 13	v, r	$^1/_2$	— 2,127 544	m. K.	—
			3,016 970	K 1						
	4	2	4,003 873 †	M 2	99,999 87	v, r	0	—		—
			4,003 874 2†	D 1						
$_3$Li	6	3	6,017 028 †	M 2	7,18	v	1	+ 0,822 01	m. K.	± 0,000 46
					···7,52			(+ 0,821 93)	o. K.	
	7	4	7,018 222 †	M 2	92,82	v	$^3/_2$	+ 3,256 31	m. K.	— 0,012 ?
					···92,48			(+ 3,256 0)	o. K.	
$_4$Be	9	5	9,015 041 †	M 2	100		$^3/_2$	— 1,177 46	m. K.	± 0,02
$_5$B	10	5	10,016 121	S 1	18,45	v	3	+ 1,800 66	m. K.	+ 0,074 0
					···19,58					
	11	6	11,012 802	S 1	81,55	v	$^3/_2$	+ 2,688 52	m. K.	+ 0,035 5
					···80,42					
$_6$C	12	6	12,003 815 6	Q 3	98,88	v	0	—		—
					···98,95					
	13	7	13,007 490 0	S 1	1,12	v	$^1/_2$	+ 0,702 381	m. K.	—
					···1,05			(+ 0,702 198)	o. K.	
$_7$N	14	7	14,007 525 8	S 1	99,635	v	1	+ 0,403 71	m. K.	a) +0,0071
								(+ 0,403 57)	o. K.	b) +0,02
	15	8	15,004 882 0	S 1	0,365 [1]	v	$^1/_2$	— 0,283 12	m. K.	—
$_8$O	16	8	**16**		99,7587	v	0	—		—
	17	9	17,004 537 4	S 1	0,0374	v	$^5/_2$	— 1,893 70	m. K.	a) — 0,004
										b) — 0,027
	18	10	18,004 885 4	S 1	0,2039	v	0	—		$\|< 4 \cdot 10^{-3}\|$
$_9$F	19	10	19,004 445 3	S 1	100		$^1/_2$	a) + 2,628 50	m. K.	—
								b) + 2,628 95	m. K.	
$_{10}$Ne	20	10	19,998 798 2	S 1	90,92		0			
	21	11	21,000 524 8	S 1	0,257		$^3/_2$	— 0,661 758		+ 0,093
	22	12	21,998 377 1	S 1	8,82		0			
$_{11}$Na	23	12	22,997 091	S 1	100		$^3/_2$	+ 2,217 53	m. K.	+ 0,10
								(+ 2,216 12)	o. K.	

[1]) Im organischen Stickstoff kann die relative Häufigkeit des N^{15} bis 0,375 betragen.

Symbol und *Z*	*A*	*N*	Massenwert *M* [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit *H* [%]		Spin *I*	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment *q* [10^{-24} cm²]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_{12}$Mg	24	12	23,992 669	S 1	78,60 ···78,98	v	0			
	25	13	24,993 781 9	S 1	10,11 ···10,05	v	5/2	— 0,855 32 (— 0,854 71)	m. K. o. K.	
	26	14	25,990 853 8	S 1	11,29 ···10,97	v	0			
$_{13}$Al	27	14	26,990 113	S 1	100		5/2	+ 3,641 42 (+ 3,638 36)	m. K. o. K.	a) + 0,149 b) + 0,156
$_{14}$Si	28	14	27,985 819	S 1	92,16 ···92,41	v	0			
	29	15	28,985 700	S 1	4,71 ···4,57	v	1/2	— 0,555 25 a) (— 0,55476) b) (— 0,55492)	m. K. o. K. o. K.	$\lvert < 10^{-4} \rvert$
	30	16	29,983 283	S 1	3,13 ···3,01	v	0			
$_{15}$P	31	16	30,983 612 6	G 1	100		1/2	+ 1,131 65 (+ 1,130 50)	m. K. o. K.	—
$_{16}$S	32	16	31,982 238 8	Q 3	95,0 [1])	v	0	—		—
	33	17	32,981 947	G 1	0,75	v	3/2	+ 0,643 42 (+ 0,642 74)	m. K. o. K.	— 0,064
	34	18	33,978 664	G 1	4,2 [1])	v	0	—		$\lvert < 2 \cdot 10^{-3} \rvert$
	36	20	35,978 525	G 1	0,017	v	0	—		$\lvert < 0{,}01 \rvert$
$_{17}$Cl	35	18	34,979 972	G 1	75,5		3/2	+ 0,821 81 (+ 0,820 91)	m. K. o. K.	a) — 0,0789 b) — 0,0843
	37	20	36,977 657	G 1	24,5		3/2	+ 0,684 09 (+ 0,683 3)	m. K. o. K.	a) — 0,0621 b) — 0,0664
$_{18}$Ar	36	18	35,978 983	G 1	0,337	v	0			
	38	20	37,974 802	G 1	0,063	v	0			
	40	22	39,975 093	G 1	99,6	v, r	0			
$_{19}$K	39	20	38,976 100	G 1	93,08 ···93,58	v	3/2	+ 0,391 46 (+ 0,390 87)	m. K. o. K.	a) + 0,07 b) + 0,11
	40*	21	39,976 709	G 1	0,0119	v	4	— 1,298 1 (— 1,296 4)	m. K. o. K.	
	41	22	40,974 856	G 1	6,91 ···6,41	v	3/2	+ 0,215 17 (+ 0,214 53)	m. K. o. K.	± 0,13
$_{20}$Ca	40	20	39,975 293	G 1	96,92 ···96,97	v, r	0			
	42	22	41,971 967	G 1	0,64	v	0			
	43	23	42,972 444	G 1	0,132 ···0,145	v	7/2	— 1,317 20 (— 1,315 3)	m. K. o. K.	
	44	24	43,969 471	G 1	2,13 ···2,06	v	0			
	46	26	45,968 298	G 1	0,0032 ···0,0033	v	0			
	48	28	47,967 777	G 1	0,179 ···0,185	v	0			

[1]) S^{32}/S^{34} = 21,60···23,05.

Symbol und Z	A	N	Massenwert M [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%]		Spin I	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupol-moment q [10^{-24} cm^2]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_{21}$Sc	45	24	44,970 212	G 1	100		$^7/_2$	+ 4,756 11	m. K.	— 0,31
								(+ 4,749 0)	o. K.	
$_{22}$Ti	46	24	45,967 242	G 1	7,99		0			
	47	25	46,966 686	G 1	7,32		$^5/_2$	— 0,788 13	m. K.	
								(— 0,787 06)	o. K.	
	48	26	47,963 191	G 1	73,99		0			
	49	27	48,963 429	G 1	5,46		$^7/_2$	— 1,103 77	m. K.	+ 0,34 ?
								(— 1,102 3)	o. K.	
	50	28	49,960 669	G 1	5,25	r	0			
$_{23}$V	50*	27	49,963 045	G 1	0,25		6	+ 3,347 0	m. K.	
								(+ 3,341 3)	o. K.	
	51	28	50,960 175	G 1	99,75		$^7/_2$	a) + 5,147 0	m. K.	+ 0,28
								b) + 5,145 0	m. K.	
$_{24}$Cr	50	26	49,961 931	G 1	4,31		0			
	52	28	51,957 026	G 1	83,76		0			
	53	29	52,957 482	G 1	9,55		$^3/_2$	— 0,474 39	m. K.	— 0,09 ?
								(— 0,473 54)	o. K.	
	54	30	53,956 023	G 1	2,38		0			
$_{25}$Mn	55	30	54,955 523	G 1	100		$^5/_2$	+ 3,467 66	m. K.	+ 0,3
								(+ 3,461 4)	o. K.	
$_{26}$Fe	54	28	53,956 759	Q 2	5,81 [1]	v	0			
	56	30	55,952 725	Q 2	91,6	v	0			
	57	31	56,953 513	Q 2	2,21 [1]	v	$^1/_2$	+ 0,05		+ 0,1 ?
	58	32	57,951 736	Q 2	0,34	v	0			
$_{27}$Co	59	32	58,951 920	Q 2	100		$^7/_2$	+ 4,648 8	m. K.	+ 0,5
								(+ 4,639 9)	o. K.	
$_{28}$Ni	58	30	57,953 772	Q 2	67,8		0			
	60	32	59,949 825	Q 2	26,2		0			
	61	33	60,950 463	Q 2	1,25		$^3/_2$	~ + 0,1		
	62	34	61,948 029	Q 2	3,66		0			
	64	36	63,948 338	Q 2	1,16		0			
$_{29}$Cu	63	34	62,949 604	Q 2	69,1		$^3/_2$	a) + 2,226 28	m. K.	— 0,16
								b) + 2,226 6	m. K.	
								(+ 2,220 59)	o. K.	
	65	36	64,948 427	Q 2	30,9		$^3/_2$	a) + 2,385 94	m. K.	— 0,15
								+ 2,384 7	m. K.	
								(+ 2,378 97)	o. K.	

[1]) Fe^{54}/Fe^{57} = 2,60 · · · 2,86.

Symbol und *Z*	*A*	*N*	Massenwert *M* [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit *H* [%]		Spin *I*	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupol-moment *q* [10^{-24} cm²]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_{30}$Zn	64	34	63,949 472	Q 2	48,9 [1])	v	0			
	66	36	65,947 014	Q 2	27,8	v	0			
	67	37	66,948 419	Q 2	4,11	v	$^5/_2$	+ 0,875 71 (+ 0,873 53)	m. K. o. K.	+ 0,18
	68	38	67,946 458	Q 2	18,6 [1])	v	0			
	70	40	69,947 576	Q 2	0,62	v	0			
$_{31}$Ga	69	38	68,947 63	C 2	60,5		$^3/_2$	+ 2,016 1 (+ 2,010 8)	m. K. o. K.	a) + 0,232 b) + 0,189
	71	40	70,947 37	C 2	39,5		$^3/_2$	+ 2,561 6 (+ 2,554 9)	m. K. o. K.	a) + 0,146 b) + 0,119
$_{32}$Ge	70	38	69,946 23	C 2	20,38 ···20,64	v	0	—		|< 0,007|
	72	40	71,944 47	C 2	27,37 ···27,50	v	0	—		|< 0,007|
	73	41	72,946 53	C 2	7,78 ···7,72	v	$^9/_2$	— 0,879 14 (— 0,876 77)	m. K. o. K.	— 0,22
	74	42	73,944 50	C 2	36,65 ···36,43	v	0	—		|< 0,007|
	76	44	75,945 42	C 2	7,82 ···7,71	v	0	—		|< 0,007|
$_{33}$As	75	42	74,945 54	C 2	100		$^3/_2$	+ 1,438 93 (+ 1,434 9)	m. K. o. K.	+ 0,27
$_{34}$Se	74	40	73,946 04	C 2	0,87		0	—		
	76	42	75,943 41	C 2	9,02		0	—		|< 0,002|
	77	43	76,944 54	D 4	7,58		$^1/_2$	+ 0,534 06 (+ 0,533 26)	m. K. o. K.	|< 0,002|
	78	44	77,942 16 †	D 4	23,52		0	—		
	79*	45	78,943 58 †	W 2	(< 0,01)		$^7/_2$	— 1,018		a) + 0,9 b) + 0,7
	80	46	79,941 88	C 2	49,82		0	—		|< 0,002|
	82	48	81,942 68	C 2	9,19		0			
$_{35}$Br	79	44	78,943 49	C 2	50,54		$^3/_2$	+ 2,105 74 (+ 2,099 2)	m. K. o. K.	+ 0,33
	81	46	80,942 15	C 2	49,46		$^3/_2$	+ 2,269 47 (+ 2,262 5)	m. K. o. K.	+ 0,28
$_{36}$Kr	78	42	77,944 96	C 2	0,354		0			
	80	44	79,942 27	C 1	2,27		0			
	82	46	81,939 51	C [illegible]	11,56		0			
	83	47	82,940 42	C 2	11,55		$^9/_2$	— 0,969 (— 0,967 06)	m. K. o. K.	a) + 0,22 b) + 0,15
	84	48	83,938 19	C 2	56,90		0			
	86	50	85,938 11	C 2	17,37		0	—		

[1]) Zn^{64}/Zn^{68} = 2,61 ··· 2,65.

Symbol und Z 1	A 2	N 3	Massenwert M [AME] 4	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%] 5		Spin I 6	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K] 7	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment q [10^{-24} cm^2] 8
$_{37}$Rb	85	48	84,939 03	C 2	72,15		$^5/_2$	+ 1,352 68 (+ 1,348 22)	m. K. o. K.	+ 0,30
	87*	50	86,936 94	C 2	27,85		$^3/_2$	+ 2,750 53 (+ 2,741 45)	m. K. o. K.	+ 0,14
$_{38}$Sr	84	46	83,939 93	C 2	0,56	v	0			
	86	48	85,936 68	C 2	9,86 [1])	v	0	—		
	87	49	86,936 62	C 2	7,02	v, r	$^9/_2$	— 1,093 02 (— 1,089 2)	m. K. o. K.	
	88	50	87,933 96	C 2	82,56 [1])	v	0			
$_{39}$Y	89	50	88,933 99	C 2	100		$^1/_2$	— 0,137 31 (— 0,136 83)	m. K. o. K.	—
$_{40}$Zr	90	50	89,932 9	C 2	51,46		0			
	91	51	90,934 7	H 1	11,23		$^5/_2$	— 1,302 84 (— 1,298 03)	m. K. o. K.	
	92	52	91,933 8 †	W 2	17,11		0			
	94	54	93,937 0	D 4	17,40		0			
	96	56	95,939 1	D 4	2,80		0			
$_{41}$Nb	93	52	92,935 21	C 2	100		$^9/_2$	+ 6,167 1 (+ 6,143 7)	m. K. o. K.	a) — 0,2 b) — 0,4
$_{42}$Mo	92	50	91,935 2 †	W 2	15,86		0			
	94	52	93,935 8	D 4	9,12		0			
	95	53	94,935 7 †	W 2	15,70		$^5/_2$	a) — 0,932 70 b) — 0,913 5	m. K. m. K.	
	96	54	95,935 4	D 4	16,50		0			
	97	55	96,937 2 †	D 4	9,45		$^5/_2$	a) — 0,952 29 b) — 0,932 7	m. K. m. K.	
	98	56	97,937 2 †	D 4	23,75		0	—		
	100	58	99,938 2	D 4	9,62		0	—		
$_{43}$Tc	99*	56	98,938 5 †	W 2	—		$^9/_2$	+ 5,680 5 (+ 5,657 2)	m. K. o. K.	+ 0,3
$_{44}$Ru	96	52	95,938 4	D 4	a) 5,50 b) 5,57		0			
	98	54	97,937 1 †	W 2	a) 1,91 b) 1,86		0			
	99	55	98,938 2 †	W 2	a) 12,70 b) 12,7		$^5/_2$	— 0,63		
	100	56			a) 12,69 b) 12,6		0			
	101	57			a) 17,01 b) 17,1		$^5/_2$	— 0,69		
	102	58	101,935 6	D 4	a) 31,52 b) 31,6		0			
	104	60	103,937 5	D 4	a) 18,67 b) 18,5		0			

[1]) Sr^{86}/Sr^{88} = 0,1140 ··· 0,122 0.

Symbol und Z	A	N	Massenwert M [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%]		Spin I	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment q [10^{-24} cm^2]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_{45}$Rh	103	58	102,937 2	D 4	100		1/2	— 0,088 51 (— 0,087 90)	m. K.	
$_{46}$Pd	102	56	101,937 28	D 4	0,96		0			
	104	58	103,936 31	D 4	10,97		0			
	105	59	104,938 18	D 4	22,23		5/2	— 0,57		
	106	60	105,936 5	D 4	27,33		0			
	108	62	107,937 77	D 4	26,71		0			
	110	64	109,939 47	D 4	11,81		0			
$_{47}$Ag	107	60	106,938 9 †	W 2	a) 51,35 b) 51,92		1/2	— 0,113 55 (— 0,113 01)	m. K. o. K.	
	109	62	108,939 3 †	W 2	a) 48,65 b) 48,08		1/2	— 0,130 53 (— 0,129 92)	m. K. o. K.	
$_{48}$Cd	106	58	105,939 63	D 4	1,215		0			
	108	60	107,938 38	D 4	0,875		0			
	110	62	109,938 40	D 4	12,39		0			
	111	63	110,939 55	D 4	12,75		1/2	— 0,594 99 (— 0,592 16)	m. K. o. K.	—
	112	64	111,938 62	D 4	24,07		0			
	113	65	112,940 38	D 4	12,26		1/2	— 0,622 43 (— 0,619 47)	m. K. o. K.	—
	114	66	113,939 77	D 4	28,86		0			
	116	68	115,941 97	D 4	7,58		0			
$_{49}$In	113	64	112,940 22	D 4	4,33		9/2	+ 5,523 2	m. K.	a) + 1,14 b) + 1,18
	115*	66	114,940 16	D 4	95,67		9/2	+ 5,534 4	m. K.	a) + 1,16 b) + 1,20
$_{50}$Sn	112	62	111,940 3 †	W 2	0,95		0			
	114	64	113,939 5 †	W 2	0,65		0			
	115	65	114,939 9	D 4	0,34	r	1/2	— 0,917 80 (— 0,913 20)	m. K. o. K.	
	116	66	115,939 05	D 4	14,24		0			
	117	67	116,940 28	D 4	7,57		1/2	— 0,999 0 (— 0,994 9)	m. K. o. K.	
	118	68	117,939 54	D 4	24,01		0			
	119	69	118,940 97	D 4	8,58		1/2	— 1,046 1 (— 1,040 9)	m. K. o. K.	
	120	70	119,940 33	D 4	32,97		0			
	122	72	121,942 24	D 4	4,71		0			
	124	74	123,944 64	D 4	5,98		0			
$_{51}$Sb	121	70	120,942 0 †	W 2	57,25		5/2	+ 3,358 9 (+ 3,341 8)	m. K. o. K.	— 0,53
	123	72	122,943 1 †	W 2	42,75		7/2	+ 2,546 53 (+ 2,533 3)	m. K. o. K.	— 0,68

Symbol und Z	A	N	Massenwert M [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%]		Spin I	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment q [10^{-24} cm^2]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_{52}$Te	120	68	119,942 63	D 4	0,089		0			
	122	70	121,941 68	D 4	2,46		0			
	123	71	122,943 4	D 4	0,87		$^1/_2$	— 0,735 9 (— 0,731 88)	m. K. o. K.	
	124	72	123,942 52	D 4	4,61		0			
	125	73	124,944 3	D 4	6,99		$^1/_2$	— 0,887 2 (— 0,882 35)	m. K. o. K.	
	126	74	125,943 91	D 4	18,71		0			
	128	76	127,946 2	D 4	31,79		0			
	130	78	129,948 27	D 4	34,49		0			
$_{53}$J	127	74	126,945 02	D 4	100		$^5/_2$	+ 2,809 0 (+ 2,793 5)	m. K. o. K.	a) — 0,69 b) — 0,82
	129*	76	128,945 8 †	W 2	< 0,002		$^7/_2$	+ 2,617 27 (+ 2,603 0)	m. K. o. K.	— 0,47
$_{54}$Xe	124	70	123,945 52	D 4	0,096		0			
	126	72	125,944 49	D 4	0,090		0			
	128	74	127,944 19	D 4	1,919		0			
	129	75	128,945 70	D 4	26,44		$^1/_2$	— 0,776 79 (— 0,772 55)	m. K. o. K.	
	130	76	129,944 81	J 1	4,08		0			
	131	77	130,946 70	J 1	21,18		$^3/_2$	+ 0,690 64 (+ 0,686 80)	m. K. o. K.	— 0,12
	132	78	131,946 11	J 1	26,89		0			
	134	80	133,947 99	J 1	10,44		0			
	136	82	135,950 42	J 1	8,87		0			
$_{55}$Cs	133	78	132,947 38	J 1	100		$^7/_2$	+ 2,578 9 (+ 2,564 2)	m. K. o. K.	— 0,003
	135*	80			< 0,002		$^7/_2$	+ 2,738 (+ 2,713 4)	m. K. o. K.	
$_{56}$Ba	130	74	129,948 1	J 1	a) 0,101 b) 0,13		0			
	132	76	131,947 06	J 1	a) 0,097 b) 0,19		0			
	134	78	133,946 83	J 1	a) 2,41 b) 2,60		0			
	135	79	134,948 48	J 1	a) 6,59 b) 6,73		$^3/_2$	+ 0,835 (+ 0,832 29)	m. K. o. K.	+ 0,51 ?
	136	80	135,947 59	J 1	a) 7,81 b) 8,07		0			
	137	81	136,949 07	J 1	a) 11,32 b) 11,9		$^3/_2$	+ 0,935 (+ 0,931 07)	m. K. o. K.	+ 0,51 ?
	138	82	137,948 74	J 1	a) 71,66 b) 70,4	r	0			

Symbol und Z	A	N	Massenwert M [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%]		Spin I	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment q [10^{-24} cm²]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_{57}$La	138*	81	137,950 6	J 1	0,089		5	+ 3,685	m. K.	a) + 0,7 ? b) + 0,21
	139	82	138,950 21	J 1	99,911		$^7/_2$	+ 2,778 1 (+ 2,761)	m. K. o. K.	a) + 0,62 b) + 0,27
$_{58}$Ce	136	78	135,950 3	J 1	0,193		0			
	138	80	137,949 9	J 1	0,250	r	0			
	140	82	139,949 77	J 1	88,48	r	0			
	142*	84	141,954 42	J 1	11,07		0			
$_{59}$Pr	141	82	140,952 28	J 1	100		$^5/_2$	+ 3,9		— 0,054
$_{60}$Nd	142	82	141,952 61	J 1	a) 27,09 b) 27,3		0			
	143	83	142,955 02	J 1	a) 12,14 b) 12,32	r	$^7/_2$	— 1,03		~ 1
	144*	84	143,955 56	J 1	a) 23,83 b) 23,8		0			
	145	85	144,958 1	J 1	a) 8,29 b) 8,29		$^7/_2$	a) — 0,62 b) — 0,69		~ 1
	146	86	145,959 09	J 1	a) 17,26 b) 17,10		0			
	148	88	147,963 51	J 1	a) 5,74 b) 5,67		0			
	150	90	149,968 49	J 1	a) 5,63 b) 5,56		0			
$_{62}$Sm	144	82	143,957 41	J 1	a) 3,16 b) 3,15		0			
	147*	85	146,961 20	J 1	a) 15,07 b) 15,09		$^7/_2$	a) — 0,76 b) ± 0,83		|≦ 0,72|
	148	86	147,961 5	J 1	a) 11,27 b) 11,35	r	0			
	149	87	148,964 2	J 1	a) 13,84 b) 13,96		$^7/_2$	a) — 0,64 b) ± 0,68		|≦ 0,72|
	150	88	149,964 56	J 1	a) 7,47 b) 7,47		0			
	152	90	151,967 66	J 1	a) 26,6 b) 26,6		0			
	154	92	153,970 87	J 1	a) 22,5 b) 22,4		0			
$_{63}$Eu	151	88	150,967 53	J 1	a) 47,86 b) 47,77		$^5/_2$	+ 3,4		+ 1,2
	153	90	152,969 2	J 1	a) 52,14 b) 52,23		$^5/_2$	+ 1,5		+ 2,5
$_{64}$Gd	152*	88			a) 0,205 b) 0,20		0			
	154	90	153,969 9	D 4	a) 2,23 b) 2,15		0			
	155	91	154,972 0 154,970 9 †	J 2 W 2	a) 15,10 b) 14,73		$^3/_2$	— 0,30		+ 1,1

Symbol und Z 1	A 2	N 3	Massenwert M [AME] 4	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%] 5	Spin I 6	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K] 7	diam. Korr.	elektrisches Quadrupol-moment q [10^{-24} cm²] 8
$_{64}$Gd	156	92	155,971 7	D 4	a) 20,6 b) 20,47	0			
	157	93	156,972 5 156,971 2 †	J 2 W 2	a) 15,7 b) 15,68	$^3/_2$	— 0,37		+ 1,0
	158	94	157,973 5	D 4	a) 24,5 b) 24,87	0			
	160	96	159,978 1	D 4	a) 21,6 b) 21,90	0			
$_{65}$**Tb**	159	94			100	$^3/_2$	+ 1,52		— 0,42 ?
$_{66}$**Dy**	156	90			a) 0,0524 b) 0,057	0			
	158	92			a) 0,0902 b) 0,100	0			
	160	94	159,974 8	D 4	a) 2,294 b) 2,35	0			
	161	95	160,976 9	J 2	a) 18,88 b) 19,0	$^5/_2$ ($^3/_2$ od. $^7/_2$)	— 0,37		+ 1,1
	162	96	161,977 1	D 4	a) 25,53 b) 25,5	0			
	163	97	162,979 6	J 2	a) 24,97 b) 24,9	$^5/_2$ ($^3/_2$ od. $^7/_2$)	+ 0,51		+ 1,3
	164	98	163,980 6	D 4	a) 28,18 b) 28,1	0			
$_{67}$**Ho**	165	98	164,981 3	D 4	100	$^7/_2$	+ 3,31		+ 2
$_{68}$**Er**	162	94			0,136	0			
	164	96	163,981 9	D 4	1,56	0			
	166	98	165,981 5	J 2	33,4	0			
	167	99	166,983 6	J 2	22,9	$^7/_2$	± 0,5		+ 10,2
	168	100	167,984 2	D 4	27,1	0			
	170	102	169,989 6	D 4	14,9	0			
$_{69}$**Tm**	169	100			100	$^1/_2$	— 0,21		
$_{70}$**Yb**	168	98			a) 0,135 b) 0,140	0			
	170	100			a) 3,14 r b) 3,03	0			
	171	101			a) 14,40 b) 14,31	$^1/_2$	~ + 0,45		
	172	102	171,984 †	W 2	a) 21,9 b) 21,82	0			
	173	103			a) 16,2 b) 16,13	$^5/_2$	~ — 0,65		a) + 2,4 b) + 3,9
	174	104	173,981 †	W 2	a) 31,6 b) 31,84	0			
	176	106			a) 12,60 b) 12,73	0			

Symbol und Z 1	A 2	N 3	Massenwert M [AME] 4	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%] 5	Spin I 6	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K] 7	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment q [10^{-24} cm²] 8
$_{71}$**Lu**	175	104			97,412	$^7/_2$	a) + 2,9 b) + 2,0		+ 5,6
	176*	105	175,997 †	W 2	2,588	6 od. 7?	a) + 2,8 b) + 4,2		+ 8,0
$_{72}$**Hf**	174*	102			a) 0,163 b) 0,18	0			
	176	104	175,996 0	D 4	a) 5,21 r b) 5,15	0			
	177	105	176,998 5	J 2	a) 18,56 b) 18,39	$^7/_2$	+ 0,61		+ 3,0
	178	106	177,999 6	D 4	a) 27,10 b) 27,1	0			
	179	107	179,002 3	J 2	a) 13,75 b) 13,78	$^9/_2$	− 0,47		+ 3,0
	180	108	180,003 8	D 4	a) 35,22 r b) 35,44	0			
$_{73}$**Ta**	180*	107	180,003 3 †	D 4	0,0123				
	181	108	181,004 3 †	D 4	99,9877	$^7/_2$	+ 2,4		a) + 2,7 b) + 4,3
$_{74}$**W**	180	106	180,002 8 †	D 4	a) 0,16 r b) 0,135	0			
	182	108	182,004 9	D 4	a) 26,35 b) 26,4	0			
	183	109	183,006 8	D 4	a) 14,32 b) 14,4	$^1/_2$	+ 0,118 46 (+ 0,115)	m. K. o. K.	
	184	110	184,008 3	D 4	a) 30,68 b) 30,6	0			
	186	112	186,012 0	D 4	a) 28,49 b) 28,4	0			
$_{75}$**Re**	185	110			37,07	$^5/_2$	+ 3,171 6 (+ 3,143 7)	m. K. o. K.	+ 2,8
	187*	112	187,010 2		62,93	$^5/_2$	+ 3,175 9	K.?	+ 2,6
$_{76}$**Os**	184	108			0,018	0			
	186	110	186,012 9	J 2	1,59 r	0			
	187	111	187,015 1	J 2	1,64 r	$^1/_2$	+ 0,12		
	188	112	188,015 4	D 4	13,27 r	0			
	189	113	189,018 6	D 4	16,14	$^3/_2$	+ 0,655 91 (+ 0,650 66)	m. K. o. K.	+ 0,6
	190	114	190,018 5	D 4	26,4	0			
	192	116	192,022 0	D 4	41,0	0			
$_{77}$**Ir**	191	114	191,021 †	W 2	38,5	$^3/_2$	+ 0,16		a) + 1,5 b) + 1,2
	193	116	193,025 †	W 2	61,5	$^3/_2$	+ 0,17		a) + 1,5 b) + 1,0

Symbol und Z	A	N	Massenwert M [AME]	Zitat	natürliche Häufigkeit H [%]		Spin I	magnetisches Dipolmoment μ [μ_K]	diam. Korr.	elektrisches Quadrupolmoment q [10^{-24} cm²]
1	2	3	4		5		6	7		8
$_{78}$**Pt**	190*	112			0,0127		0			
	192	114	192,023 †	W 2	0,78		0			
	194	116	194,025 3	D 4	32,9		0			
	195	117	195,025 5	D 4	33,8		1/2	+ 0,606 0	m. K.	
								(+ 0,600 4)	o. K.	
	196	118	196,029 7 ?	D 4	25,2		0			
			196,026 9	W 2						
	198	120	198,027 9	D 4	7,19		0			
$_{79}$**Au**	197	118	197,028 0 †	D 4	100		3/2	+ 0,136		+ 0,56
$_{80}$**Hg**	196	116	196,028 136	B 1	0,146		0			
	198	118	198,029 692	B 1	10,02		0			
	199	119	199,031 487	B 1	16,84		1/2	+ 0,504 12	m. K.	
								(+ 0,499 3)	o. K.	
	200	120	200,031 911	B 1	23,13	r	0			
	201	121	201,034 192	B 1	13,22		3/2	— 0,613	m. K.	+ 0,42
								(— 0,607)	o. K.	
	202	122	202,034 845	B 1	29,80		0			
	204	124	204,038 328	B 1	6,85		0			
$_{81}$**Tl**	203	122	203,035 0 †	D 4	a) 29,50		1/2	+ 1,611 4	m. K.	
					b) 29,46			(+ 1,596 0)	o. K.	
	205	124	205,037 5 †	D 4	a) 70,50		1/2	+ 1,627 3	m. K.	
					b) 70,54			(+ 1,611 7)	o. K.	
$_{82}$**Pb**	204*	122	204,037 935	B 1	1,55		0			
	206	124	206,039 928	B 1	22,51	r	0			
	207	125	207,041 695	B 1	22,60	r	1/2	+ 0,589 43	m. K.	
								(+ 0,583 67)	o. K.	
	208	126	208,042 779	B 1	53,34	r	0			
$_{83}$**Bi**	209	126	209,044 9 †	D 4	100		9/2	+ 4,079 7	m. K.	— 0,4
								(+ 4,038 8)	o. K.	
$_{90}$**Th**	232*	142	232,109 8 †	D 4	100		0			
$_{91}$**Pa**	231*	140	231,108 27 †	H 2	—		3/2			
$_{92}$**U**	234*	142	234,113 1 †	D 4	a) 0,0056		0			
					b) 0,0058					
	235*	143	235,116 6 †	D 4	a) 0,718		7/2	a) ± 0,34		a) ± 4,0
					b) 0,720			b) — 0,8		b) ∼ + 8
	238*	146	238,124 3 †	D 4	a) 99,276		0			
					b) 99,274					

Tabelle 2. Instabile Atomkerne

Die Tabelle 2 enthält die Halbwertszeit, die Art der Umwandlung, die Energie der Teilchen- und Gammastrahlungen sowie die Erzeugungsreaktionen aller z. Z. (Sommer 1959) mit Sicherheit bekannten instabilen Atomkerne. Außerdem sind Daten von einigen Kernen angeführt, bei denen die Zuordnung der Kernladungszahl oder Massenzahl sowie die Meßergebnisse über ihren Zerfall noch wenig gesichert erscheinen. Diese Kerne werden in der ersten Spalte durch drei Punkte (⁝) markiert und auf der Kerntafel (auf der 3. Einbandseite) — wenn sie überhaupt eingetragen sind — durch Graudruck von den übrigen Kernen unterschieden.[1])
In der Tabelle 2 sind auch jene Atomkerne enthalten, bei denen mit einer gewissen (sehr kleinen) Wahrscheinlichkeit eine doppelte β-Emission erfolgen könnte. Es sind dies Kerne mit gerader Kernladungszahl und gerader Massenzahl, bei denen eine einzelne β-Emission nur unter Energieaufwand möglich wäre, hingegen würde bei gleichzeitiger Emission von zwei β-Teilchen Energie frei werden (doppelter β-Zerfall, s. S. 79). Indessen ist dieser Vorgang bei der Mehrzahl der in Frage kommenden Kerne experimentell noch nicht gesichert; die theoretisch berechneten Halbwertszeiten sind im Vergleich zum Alter der Erde sehr groß (10^{14} bis 10^{21} Jahre), so daß sich diese Kerne in der Praxis wie stabile Kerne verhalten.
Für die Zahlenangaben (Halbwertszeit, Energiewerte) und Fehlergrenzen gilt das auf S. 788 Gesagte. Über einige Atomkerne sind besonders zahlreiche Arbeiten veröffentlicht worden, deren Meßergebnisse naturgemäß streuen; in diesen Fällen wird ein Mittelwert angegeben. Die Mittelwerte werden durch einen Strich über der letzten Stelle oder den beiden letzten Stellen gekennzeichnet. Die meisten übrigen Zahlenangaben sind Werte aus Originalarbeiten, wobei in der Regel nur so viel Stellen angegeben werden, daß der Fehler höchstens ± 9 (bzw. ± 15) Einheiten in der letzten Dezimalen beträgt.
Die **Spalte 1** enthält das *chemische Symbol* und die *Kernladungszahl Z* (Zahl der Protonen im Kern). Die beiden Angaben sind fett gedruckt und stehen stets bei dem ersten, d. h. leichtesten Isotop eines Elementes; bei Beginn einer neuen Seite werden sie in Normaldruck wiederholt, falls weitere Angaben für dasselbe Element folgen. — In der gleichen Spalte werden auch die älteren Symbole jener Kerne angeführt, die Glieder in den natürlichen radioaktiven Zerfallsreihen sind (z. B. *UI*, *AcU*, UX_2, . . .); diese sind kursiv gesetzt.
Die **Spalte 2** enthält die *Massenzahl A*, also die Anzahl der Nukleonen, und die **Spalte 3** die Zahl der *Neutronen N*. Kerne in angeregten Zuständen werden vom Grundzustand durch ein m rechts oben neben der Massenzahl unterschieden („metastabiler" oder „isomerer" Zustand). Der metastabile Zustand wird angeführt, wenn seine mittlere Lebensdauer einer Halbwertszeit von mehr als 10^{-7} sec entspricht; Energieniveaus, deren mittlere Lebensdauer kürzer ist, werden nicht berücksichtigt. Sind bei einem Kern mehrere angeregte Zustände bekannt, so werden diese durch Indizes unterschieden, z. B. $_{51}Sb^{124m_1}$: erster angeregter Zustand; $_{51}Sb^{124m_2}$: zweiter angeregter Zustand.
Wenn die Zuordnung, welcher Kern der Grundzustand bzw. welcher Kern der angeregte Zustand ist, noch nicht möglich ist, wird die Kennzeichnung durch das hochgestellte m unterlassen.
Die Angabe der Massenzahl (bzw. Neutronenzahl) ist nicht bei allen Aktivitäten mit Sicherheit möglich. In einigen Fällen kommen nur zwei Massenzahlen in Betracht, dann sind beide angeführt und mit einer Klammer verbunden (z. B. $_{100}Fm\,{}^{248}_{249}\}$); in anderen Fällen wird ein

[1]) Die Angaben der Kerntafel (3. Einbandseite) weichen bei einigen Kernen etwas von den Daten der Tabelle 2 ab; die Ursache dafür ist, daß in den Tabellen nachträgliche Ergänzungen während der Drucklegung vorgenommen werden konnten, was hingegen bei der Kerntafel aus drucktechnischen Gründen nicht möglich war.

größeres Intervall angegeben (z. B. $_{79}Au^{183\cdots187}$); meistens werden jedoch in unsicheren Fällen obere oder untere Grenzen angeführt (z. B. $_{83}Bi \leqq 197$).

In **Spalte** 4 findet man die *Halbwertszeit* $T_{1/2}$, die bei Kernen mit mehreren Zerfallsmöglichkeiten die Gesamthalbwertszeit darstellt; die partiellen Halbwertszeiten können erheblich abweichen (z. B. $_{94}Pu^{235}$, Gesamthalbwertszeit $T_{1/2} = 26$ min, partielle Halbwertszeit für α-Zerfall $T_{1/2,\alpha} = 1{,}7$ a). Lediglich für die spontane Spaltung, die nur bei schweren Kernen auftritt ($A \geqq 230$), wurde zusätzlich die partielle Halbwertszeit $T_{1/2}$ für $\varnothing_s$ (in Klammern) angegeben.

Die **Spalte 5** enthält die *Art der Umwandlung*, die bei dem betreffenden Kern beobachtet wird; dabei werden die unten angeführten Symbole verwendet. Kann die Umwandlung auf mehrere Arten erfolgen, so stehen die einzelnen Symbole — durch Kommata getrennt — in der Reihenfolge der Häufigkeit. Tritt bei einem Kern eine Zerfallsart sehr selten auf im Vergleich zu einer anderen Zerfallsart, so wird die seltene Umwandlung in (runde) Klammern gesetzt, z. B. $_{64}Gd^{149}$ ε, (α); die Häufigkeit des α-Zerfalls beträgt in diesem Beispiel $7 \cdot 10^{-4}$%.

Verzögerte Alphaemission oder Neutronenemission wird ebenfalls durch Klammern gekennzeichnet, aber nicht durch Komma von der vorangehenden Betastrahlung getrennt; z. B. $_7N^{12}$ β^+ (α) oder $_7N^{17}$ β^- (n).

Wenn sich die Zerfallsart theoretisch ergibt, aber experimentell noch nicht bestätigt werden konnte, steht sie in [eckiger] Klammer. Zusätze wie: kein β^+, kein β^-, kein Is, deuten an, daß man nach diesen Umwandlungen gesucht hat, da sie im Bereich der Möglichkeit liegen würden, daß dabei jedoch ein negatives Ergebnis herausgekommen ist. Über doppelten β-Zerfall s. S. 79 und S. 803, Symbol $\beta\beta^+$ bzw. $\beta\beta^-$.

Die **Spalte** 6 enthält die *Energien* (in MeV) *der emittierten Teilchen* (jedoch nicht der Konversionselektronen). Bei β-Strahlungen sind die angeführten Energiewerte die oberen Grenzen der jeweiligen kontinuierlichen Spektren. Bei komplexem Zerfall werden die verschiedenen Energiemaxima angegeben, wenn die Zahl der Komponenten nicht höher als acht ist. Ist die Anzahl der Komponenten größer, findet man jeweils die Komponenten höchster und niedrigster Energie; dahinter steht in ⟨spitzer⟩ Klammer die Gesamtzahl der bei der betreffenden Umwandlung beobachteten Einzelenergien; eine Zeile tiefer werden die Energien der häufigsten Übergänge des Gesamtspektrums hinzugefügt. Ein Fragezeichen hinter einer Energieangabe bedeutet, daß dieser Wert nicht gut gesichert ist; die Strahlung kann z. B. von einer Verunreinigung herrühren oder durch andere, im Energiespektrum eng benachbarte Strahlungen überdeckt werden. Übergangsenergien geringer Häufigkeit stehen in (runder) Klammer; Energiewerte, die berechnet wurden, ohne daß eine Energiemessung vorliegt, stehen in [eckiger] Klammer, z. B. $_{88}Ra^{226}$, α 4.777, [4.591].

In **Spalte 7** sind die *Energien der γ-Strahlungen* (ebenfalls in MeV) enthalten. Wenngleich die γ-Strahlung vom Tochterkern emittiert wird, pflegt man diese in Tabellen jeweils beim Ausgangskern anzuführen; diese Zuordnung ist sinnvoll wegen der Zusammengehörigkeit, die sich bei der Untersuchung von $\beta\gamma$-Koinzidenzen ergibt, und wegen der gleichen Halbwertszeit, mit der die Ausgangssubstanz zerfällt und die Intensität der γ-Strahlung abnimmt.

Bezüglich der Energieangaben bei komplexem Zerfall gilt das gleiche wie bei den Angaben der Teilchenenergien (Spalte 6). Wenn sich ein Kern auf verschiedene Weise umwandeln kann, wird die γ-Strahlung getrennt nach der Zerfallsart aufgeführt, soweit die Zuordnung gut gesichert ist und der zur Verfügung stehende Raum differenzierte Angaben zuläßt. Diese Zuordnung erfolgt durch Hinweise wie: m. ε (mit Elektroneneinfang), m. β^+ (mit Positronenemission), m. Is (mit Isomerenübergang).

Bei einigen Kernen wird auch die kontinuierliche innere Bremsstrahlung mit der Grenzenergie E_{max} angeführt; dies erfolgt, wenn die Bremsstrahlung für den betreffenden Kern besonders charakteristisch und infolgedessen genauer untersucht worden ist. — Der Vermerk

„γ vorh." soll darauf hinweisen, daß bei dem betreffenden Zerfall eine γ-Strahlung beobachtet wurde, aber noch keine genaue Bestimmung der Energie möglich war.
Ebenfalls in Spalte 7, jedoch durch eine Punktreihe getrennt, wird auf *konvertierte γ-Strahlung* aufmerksam gemacht; das Symbol für innere Konversionselektronen ist e^-. Bei den komplexen γ-Spektren können jedoch wegen Platzmangels keine Angaben gemacht werden, bei welchen Quantenübergängen die Konversionselektronen auftreten.

Die **Spalte** 8 enthält die *Kernreaktionen*, durch die der in den Spalten 1 und 2 gekennzeichnete Kern erzeugt werden kann. Es wird die übliche, von BOTHE und FLEISCHMANN eingeführte Kurzschreibweise benutzt, wobei jedoch die wiederholte Angabe des entstandenen Kernes wegen Platzersparnis unterbleibt (Bedeutung der Symbole s. u.). Wenn der betrachtete Kern durch radioaktiven Zerfall erzeugt werden kann, wird dies durch einen Pfeil mit dem entsprechenden Symbol der Umwandlung gekennzeichnet (z. B. Sc^{49} entsteht durch $Ca^{49} \rightarrow \beta^-$; Fe^{57m} entsteht entweder durch β^+-Zerfall oder Elektroneneinfang des Co^{57}, dargestellt durch $Co^{57} \rightleftarrows \beta^+, \varepsilon$). Falls es sich um einen in der Natur stattfindenden radioaktiven Zerfall handelt, also z. B. um Glieder der „natürlichen" radioaktiven Zerfallsreihen, so ist hinter der Angabe der Umwandlung der Zusatz „natürl. Zerf." (natürlicher Zerfall) zu finden; dieser Zusatz bezieht sich auf alle Umwandlungen, die bei dem betreffenden Kern vorher aufgeführt sind. Diejenigen Umwandlungen, bei denen die Ausgangskerne künstlich erzeugt werden, stehen stets nach den in der Natur stattfindenden Prozessen.
Bei einigen Kernen — es handelt sich vorwiegend um leichte Kerne — ist die Zahl der Erzeugungsmöglichkeiten so groß, daß aus Raumgründen nicht alle bekannten Erzeugungsreaktionen angeführt werden können. In diesen Fällen wurden diejenigen Reaktionen bevorzugt, bei denen leichte Teilchen als Einschußteilchen verwendet werden, also insbesondere Protonen, Deuteronen, Alphateilchen, Neutronen und Gammaquanten.
Die Abspaltung einer größeren Anzahl Nukleonen wird Spallation (Kernsplitterung, Symbol ♂) genannt. Bei der Erzeugung durch diese, meistens durch Protonen oder Deuteronen ausgelösten Spallationen kann naturgemäß eine ganze Reihe verschiedener Kerne entstehen. Da infolgedessen die Zahl der Erzeugungsmöglichkeiten durch Spallationen sehr groß ist, können diese nicht vollständig angegeben werden.

Verwendete Abkürzungen und Symbole

Bei Angabe der Halbwertszeit $T_{1/2}$:

s	Sekunden	a	Jahre
m	Minuten	$T_{1/2}$ für $\varnothing_s$	partielle Halbwertszeit für spontane Spaltung (Angabe erst ab S. 872)
h	Stunden		
d	Tage		

Bei Angabe der Umwandlungen und der Erzeugungsreaktionen:

p	Proton	e^-	in der Spalte der Gammaenergien: Konversionselektron; bei den Erzeugungsreaktionen: (negatives) Elektron
d	Deuteron		
t	Triton (Kern des $_1H^3$)		
α	Alphateilchen		
β^+	Positron	ε	Elektroneneinfang
β^-	(negatives) Elektron (zur Kennzeichnung des β^--Zerfalls)	Is	isomerer Übergang
		♂	Spallation
$\beta\beta^+$	doppelter β^+-Zerfall	$\varnothing$	Spaltung
$\beta\beta^-$	doppelter β^--Zerfall	$\varnothing_s$	spontane Spaltung
γ	Gammaquant		

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung	Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7	8
$_0$n	1	1	a) 12,7 m b) 11,7 m	β^-	0.782		Zahlreiche Reaktionen: (p, n); (d, n); (α, n); (γ, n); am häufigsten: $Be^9 (\alpha, n) C^{12}$; $D^2 (\gamma, n) H^1$; $Be^9 (\gamma, n) Be^8$
$_1$H (T)	3	2	a) 12,262 a b) 12,43 a	β^-	0.01861	kein γ	$H^2 (d, p)$; $H^2 (n, \gamma)$; $He^3 (n, p)$; $Li^6 (n, \alpha)$; $B (n, t)$; $N (n, t)$
$_2$He	5	3	$\sim 6 \cdot 10^{-20}$ s	$n + \alpha$			$Li^7 (d, \alpha)$; $He^4 (d, p)$; $Li^6 (t, \alpha)$
	6	4	0,82 s	β^-	3.50	kein γ	$Li^6 (n, p)$; $Li^7 (\gamma, p)$; $Li^7 (n, d)$; $Be^9 (n, \alpha)$
$_3$Li	5	2	$\sim 10^{-21}$ s	$p + \alpha$			
	8	5	0,841 s	$\beta^-(2\alpha)$	β^-: ~ 13, ~ 6?, ~ 3?; α: ~ 7		$Li^7 (d, p)$; $Li^7 (n, \gamma)$; $Be^9 (\gamma, p)$; $B^{11} (n, \alpha)$; C, N, Ne, Ar, Kr, Xe (p, ♂)
	9	6	0,168 s	$\beta^-(n)$	β^-: ~ 8		$Be^9 (d, 2p)$; $B^{11} (p, 3p)$; $B^{11} (d, n\,3p)$; $B^{11} (\gamma, 2p)$; $C^{12} (p, 4p)$; $C^{12} (d, n\,4p)$; $B^{10} (p, 2p)$; $C^{12} (\gamma, 3p)$; U^{235} (∅)
$_4$Be	7	3	53,6 d	ε kein β^+		0.477 e^-	$Li^7 (p,n)$; $Li^6 (d,n)$; $Li^6 (p,\gamma)$; $B^{10} (p,\alpha)$; $Be^9 (p, t)$; $B^{10} (d, \alpha n)$; C, Al (p, ♂)
	8	4	$> 1{,}4 \cdot 10^{-16}$ s, $< 4 \cdot 10^{-15}$ s	$\alpha + \alpha$	0.0473		$Be^9 (p, d)$; $Be^9 (d, t)$; $Be^9 (\gamma, n)$; $Li^7 (p, \gamma)$; $Li^7 (d, n)$; $B^{11} (p, \alpha)$
	10	6	$2{,}7 \cdot 10^6$ a	β^-	0.555	kein γ	$Be^9 (d, p)$; $Be^9 (n, \gamma)$; $C^{13} (n, \alpha)$; $B^{10} (n, p)$
	11	7	13,57 s	β^-	11.48, 9.32, 4.65, 3.6	2.121, 4.64, 5.86, 6.76, 7.97	$B^{11} (n, p)$
$_5$B	8	3	0,78 s	$\beta^+(2\alpha)$	14.04		$B^{10} (p, t)$; $B^{10} (\gamma, 2n)$; $B^{11} (\gamma, 3n)$; $Be^9 (p, 2n)$; $C^{12} (p, \alpha n)$; $C^{12} (\gamma, p\,3n)$
	9	4	$\sim 10^{-21}$ s	$p + 2\alpha$			$Be^9 (p, n)$; $Li^6 (\alpha, n)$; $B^{10} (\gamma, n)$
	12	7	a) 0,021 s b) 0,019 s	$\beta^-(\alpha)$	β^-: 13.38, ~ 9.0, ~ 5.7; α: 1.5, 0.195		$B^{11} (d, p)$; $C^{14} (d, \alpha)$; $C^{12} (n, p)$; $C^{13} (\gamma, p)$; $N^{15} (n, \alpha)$; U^{235} (n, ∅)
	13	8	0,035 s	β^-	[13.43]		$Li^7 (Li^7, p)$

$_6$C	10	4	19,1 s	β^+	2.1, 1.06	0.72, 1.03	$B^{10}(p, n)$; $C^{12}(\gamma, 2n)$
	11	5	a) 20,42 m b) 20,11 m	β^+	0.968	kein γ	$B^{11}(p, n)$; $B^{10}(p, \gamma)$; $B^{10}(d, n)$; $Be^9(\alpha, 2n)$; $C^{12}(p, pn)$; $C^{12}(d, dn)$; $C^{12}(n, 2n)$; $C^{12}(\gamma, n)$; $N^{14}(p, \alpha)$; $O^{16}(\gamma, \alpha n)$; u. a.
	14	8	$55\overline{70}$ a	β^-	a) 0.156 b) 0.158	kein γ	$C^{13}(d, p)$; $B^{11}(\alpha, p)$; $N^{14}(n, p)$; $O^{17}(n, \alpha)$; $C^{13}(n, \gamma)$
	15	9	2,25 s	β^-	9.5, 4.5	5.3	$C^{14}(d, p)$; $Be^9(Li^7, p)$; ⟨nicht: $C^{14}(n, \gamma)$⟩
$_7$N	12	5	0,0125 s	β^+, $\beta^+(3\alpha)$	β^+: 16.6; E_{ges} f. 3α: ~ 4		$C^{12}(p, n)$; $N^{14}(\gamma, 2n)$
	13	6	a) 9,96 m b) 10,05 m	β^+	1.190	kein γ	$C^{13}(p, n)$; $C^{12}(p, \gamma)$; $C^{12}(d, n)$; $B^{10}(\alpha, n)$; $N^{14}(d, t)$; $N^{14}(n, 2n)$; $N^{14}(\gamma, n)$; $O^{16}(p, \alpha)$; $O^{16}(n, p\,3n)$; Al (p, ♂)
	16	9	7,38 s	β^-	10.40, (4.34), 4.26, 3.30, 1.53	1.72, 1.90, 2.75, 6.14, 6.91, 7.11, 8.87	$N^{15}(d, p)$; $N^{15}(n, \gamma)$; $O^{16}(n, p)$; $F^{19}(n, \alpha)$
	16^m	9	$5{,}43 \cdot 10^{-6}$ s	Is		m. Is.: 0.119	$N^{15}(d, p)$
	17	10	4,14 s	$\beta^-(n)$	β^-: 3.7; n: 1.8, 1.0		$C^{14}(\alpha, p)$; $F^{19}(d, n3p)$; $O^{17}(n, p)$; $O^{18}(\gamma, p)$; Na, Mg, Al, Si, P, S, Cl, K (d, ♂)
$_8$O	14	6	72,1 s	β^+	4.1, 1.84	2.31	$N^{14}(p, n)$; $C^{12}(He^3, n)$; $O^{16}(\gamma, 2n)$
	15	7	2,07 m	β^+	1.733	kein γ	$N^{14}(p, \gamma)$; $N^{14}(d, n)$; $C^{12}(\alpha, n)$; $O^{16}(n, 2n)$; $O^{16}(\gamma, n)$; $O^{16}(He^3, \alpha)$
	19	11	a) 27,0 s b) 29,4 s	β^-	4.5, 2.9	0.112, 0.200, 1.366	$O^{18}(n, \gamma)$; $F^{19}(n, p)$
$_9$F	17	8	66,6 s	β^+	1.748	kein γ	$O^{16}(p, \gamma)$; $O^{16}(d, n)$; $N^{14}(\alpha, n)$; $F^{19}(n, 3n)$; $F^{19}(\gamma, 2n)$
	18	9	1,87 h	β^+, ε	0.649	kein γ	$O^{18}(p, n)$; $O^{17}(d, n)$; $O^{16}(t, n)$; $O^{16}(\alpha, pn)$; $F^{19}(p, pn)$; $F^{19}(d, t)$: $F^{19}(n, 2n)$; $F^{19}(\gamma, n)$; $Ne^{20}(d, \alpha)$; $Na^{23}(\gamma, \alpha n)$; Al, Cl, Co, Cu (p, ♂)
	20	11	a) 11,4 s b) 10,7 s	β^-	5.42	1.627	$F^{19}(d, p)$; $F^{19}(n, \gamma)$; $Na^{23}(n, \alpha)$; $Ne^{22}(d, \alpha)$; $O^{18}(t, n)$
⋮	21	12	100 s — 200 s				$F^{19}(t, p)$
⋮	21^m	12	5 s	β^-	5.73		$F^{19}(t, p)$

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	Energie der Strahlung [MeV] γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{10}$Ne	18	8	1,6 s	β^+	3.2			F^{19} (p, 2n); O^{16} (He^3, n)
	19	9	a) 17,7 s b) 18,5 s	β^+	a) 2.23 b) 2.18	kein γ		F^{19} (p, n)
	23	13	a) 37,6 s b) 38,0 s	β^-	4.39, 3.95, 2.4	0.436, 1.65 u. a. ?		Ne^{22} (d, p); Ne^{22} (n, γ); Na^{23} (d, 2p); Na^{23} (n, p); Mg^{26} (n, α)
	24	14	3,38 m	β^-	1.98, 1.10	0.472, 0.878		Ne^{22} (t, p)
$_{11}$Na	20	9	a) 0,385 s b) 0,23 s	$\beta^+(\alpha)$	β^+: ∼ 5.9 ?, [7.3…3.5]; α: > 2			Ne^{20} (p, n); Na^{23} (γ, 3n)
	21	10	23,0 s	β^+	2.50	kein γ		Ne^{20} (p, γ); Ne^{20} (d, n); Ne^{21} (p, n); Mg^{24} (p, α)
	22	11	2,58 a	β^+, ε	1.82, 0.542	1.275	e^-	Ne^{21} (p, γ); Ne^{21} (d, n); Ne^{22} (p, n); Ne^{20} (t, n); F^{19} (α, n); Mg^{24} (d, α); Na^{23} (n, 2n); Al, Fe, Cu (p, ♂)
	24	13	15,0 h	β^-	(4.17), 1.394	1.368, 2.754, (4.12)	e^-	Mg^{26} (d, α); Na^{23} (d, p); Na^{23} (n, γ); Mg^{24} (n, p); Mg^{25} (γ, p); Mg^{26} (γ, pn); Al^{27} (n, α); Al^{27} (γ, n 2p); Al, Cu (♂)
	24^m	13	0,027 s	Is, β^-	∼ 6,0	m. Is: 0.475		Ne^{24} → β^-
	25	14	60 s	β^-	4.0, 3.4, ∼3.0, ∼2.4, ∼ 2.0	0.380, 0.46 ?, 0.580, 0.978, 1.60 ?, (1.96) ?		Ne^{22} (α, p); Mg^{25} (n, p); Mg^{26} (γ, p); Al^{27} (γ, 2p)
	26	15	1,04 s	β^-	> 5			Mg^{26} (n, p)
$_{12}$Mg	23	11	a) 11,9 s b) 10,7 s	β^+	2.95			Na^{23} (p, n); Mg^{24} (γ, n)
	27	15	9,45 m	β^-	1.75, 1.59	0.175, 0.834, 1.015		Mg^{26} (d, p); Mg^{26} (n, γ); Al^{27} (d, 2p); Al^{27} (n, p); V, Co (p, ♂)
	28	16	a) 21,3 h b) 21,8 h	β^-	a) 0.418 b) 0.459	0.0319, 0.400, 0.949, 1.346		Mg^{26} (α, 2p); Mg^{26} (t, p); Si^{30} (p, 3p); Si^{30} (γ, 2p); Cl, Cu (p, ♂)

$_{13}$Al	24	11	2,10 s	$\beta^+(\alpha)$	β^+: ~ 8.5; α: ~ 2	1.39, 2.73, 4.22, 5.35, 7.12	Mg^{24} (p, n)
	25	12	a) 7,24 s b) 7,62 s	β^+	3.24	1.58 ?	Mg^{25} (p, n); Mg^{24} (p, γ)
	26	13	$7,4 \cdot 10^5$ a	β^+, ε	1.16	1.12, 1.83, 2.96	Mg^{25} (d, n)
	26m	13	a) 6,28 s b) 6,68 s	β^+ kein Is	3.23	kein γ	Mg^{26} (p, n); Mg^{25} (d, n); Mg^{25} (p, γ); Na^{23} (α, n); Al^{27} (γ, n)
	28	15	a) 2,31 m b) 2,27 m	β^-	2.85	1.77	Mg^{25} (α, p); Al^{27} (d, p); Al^{27} (n, γ); Si^{28} (n, p); Si^{29} (γ, p); P^{31} (n, α); Si^{29} $(p, 2p)$; $Mg^{28} \to \beta^-$; Cl $(p, ♂)$
	29	16	6,56 m	β^-	2.65, 1.55	1.28, 2.43	Mg^{26} (α, p); Al^{27} $(\alpha, 2p)$; Al^{27} (t, p); Si^{29} (n, p); Si^{30} (γ, p); P^{31} $(\gamma, 2p)$
$_{14}$Si	26	12	1,7 s				Al^{27} $(p, 2n)$
	27	13	a) 4,14 s b) 4,7 s	β^+	3.82		Mg^{24} (α, n); Al^{27} (p, n); Si^{28} (γ, n)
	31	17	2,62 h	β^-	1.48, 0.22	1.26	Si^{30} (d, p); Si^{30} (n, γ); P^{31} (n, p); S^{34} (n, α); Si^{30} $(He^3, 2p)$; Cl, V, Mn, Fe, Co $(p, ♂)$
	32	18	$\sim$ 710 a	β^-	$\sim$ 0.1		Si^{31} $(n\ \gamma)$; Cl^{37} $(p, ♂)$
$_{15}$P	28	13	0,28 s	β^+	10.6	1.79, (2.6), 4.44, (4.93), 6.1, 6.7, 7.0, 7.6	Si^{28} (p, n)
	29	14	4,45 s	β^+	3.95, 2.67, 1.92, 1.52	(1.15), 1.28, 2.03 ?, 2.43	Si^{29} (p, n); Si^{28} (d, n); P^{31} $(\gamma, 2n)$
	30	15	a) 2,55 m b) 2,52 m	β^+	3.24	a) 2.24 b) kein γ	P^{31} (p, pn); P^{31} $(n, 2n)$; P^{31} (γ, n); Si^{30} (p, n); Al^{27} (α, n); S^{32} (d, α); u. a.
	32	17	14,30 d	β^-	1.707	innere Bremsstrahlung	P^{31} (d, p); P^{31} (n, γ); Si^{29} (α, p); S^{34} (d, α); S^{32} (n, p); Cl^{35} (n, α); u. a.
	33	18	25,0 d	β^-	0.250	kein γ	Cl^{35} $(\gamma, 2p)$; S^{33} (n, p); S^{34} (γ, p); P^{32} (n, γ); Cl^{37} (γ, α); Co, Cu $(p, ♂)$
	34	19	12,4 s	β^-	5.1, 3.2	(2.1), (4.0)	S^{34} (n, p); Cl^{37} (n, α)

Symbol und *Z*	*A*	*N*	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{16}$S	31	15	2,$\bar{6}$ s	β^+	4.42			P^{31} (*p*, *n*); Si^{28} (α, *n*); S^{32} (γ, *n*)
	35	19	87,1 d	β^-	0.167			S^{34} (*d*, *p*); S^{34} (*n*, γ); Cl^{37} (*d*, α); Cl^{35} (*n*, *p*); V, Fe, Cu (*p*, ♂)
	37	21	5,04 m	β^-	4.3, 1.6	3.09		S^{36} (*n*, γ); Cl^{37} (*n*, *p*); Ar^{40} (*n*, α)
	38	22	2,87 h	β^-	3.0, 1.1	1.88		Cl^{37} (α, 3*p*)
$_{17}$Cl	32	15	0,31 s	β^+(α)	β^+: 9.5, 7.5; α: 2 bis 3	2.21, 3.79 ?, 4.27, 4.77		S^{32} (*p*, *n*)
	33	16	2,52 s	β^+	4.13	2.9		S^{33} (*p*, *n*); S^{32} (*d*, *n*): Cl^{35} (γ, 2*n*)
	34	17	1,53 s	β^+	4.45			Cl^{35} (γ, *n*)
	34^m	17	32,40 m	β^+, Is	4.50, 2.48, 1.3	m. β^+: 1.16, 2.10, 3.22, 4.0: m. Is: 0.145	e^-	P^{31} (α, *n*); S^{34} (*p*, *n*); S^{33} (*d*, *n*); S^{32} (α, *pn*); S^{32} (*t*, *n*); Al^{27} (C^{12}, α*n*); Cl^{35} (*p*, *pn*); Cl^{35} (*n*, 2*n*); Cl^{35} (γ, *n*)
	36	19	3,1 · 10^5 a	β^-, ε kein β^+	0.714	kein γ		Cl^{35} (*d*, *p*); Cl^{35} (*n*, γ)
	38	21	37,29 m	β^-	4.81, 2.77, 1.11	1.60, 2.15		Cl^{37} (*d*, *p*); Cl^{37} (*n*, γ); Ar^{40} (*d*, α); K^{41} (*n*, α); Fe, Co, Cu (*p*, ♂)
	38^m	21	1,5 s	Is		m. Is: 0.663		Cl^{37} (*n*, γ)
	39	22	55,5 m	β^-	3.45, 2.18, 1.91	0.246, 1.27, 1.52		Ar^{40} (α, α*p*); Ar^{40} (γ, *p*); S^{36} (α, *p*); Mn, Fe, Co, Cu (*p*, ♂)
	40	23	1,4 m	β^-	∼ 7.5, ∼ 3.2	1.46, 2.75, 6.0		Ar^{40} (*n*, *p*)
$_{18}$Ar	35	17	1,83 s	β^+	4.96	1.19, 1.73		Cl^{35} (*p*, *n*); S^{32} (α, *n*)
	37	19	35,0 d	ε		innere Bremsstr., E_{max}: 0.82		S^{34} (α, *n*); Cl^{37} (*p*, *n*); Cl^{37} (*d*, 2*n*); K^{39} (*d*, α); Ca^{40} (*n*, α); Ar^{36} (*d*, *p*)
	39	21	∼ 265 a	β^-	0.565			K^{39} (*n*, *p*); Ar^{38} (*d*, *p*); Ar^{38} (*n*, γ); Cl^{39} → β^-
	41	23	1,83 h	β^-	2.48, 1.199	1.29	e^-	Ar^{40} (*d*, *p*); Ar^{40} (*n*, γ); K^{41} (*n*, *p*); V (*p*, ♂)
	42	24	≧ 3,5 a	β^-				Ar^{41} (*n*, γ)

$_{19}$K	37	18	1,23 s	β^+	5.10			C^{40} (p, α); K^{39} $(\gamma, 2n)$
	38	19	0,94 s	β^+	4.57			K^{39} (γ, n); $Ca^{38} \to \beta^+$
	38m ?	19	7,7 m	β^+	2.68	2.16		K^{39} (p, pn); K^{39} $(n, 2n)$; K^{39} (γ, n); Cl^{35} (α, n); Ca^{40} (d, α); Ca^{40} (γ, np)
	40	21	$1,47 \cdot 10^9$ a	β^-, ε kein β^+	1.35	1.47		(in der Natur); K^{39} (d, p); K^{39} (n, γ); Ar^{40} (p, n)
	42	23	12,46 h	β^-	3.55, 1.99, $\sim$ 0.5 ?	0.39, (0.9), 1.52, (1.94), (2.42)		K^{41} (d, p); K^{41} (n, γ); Ar^{40} (α, pn); Ca^{42} (n, p); Sc^{45} (n, α); Co, Cu $(p, ♂)$
	43	24	22,4 h	β^-	1.81, 1.444, 1.224, 0.825, 0.47	0.220, 0.371, 0.388, 0.394, 0.591, 0.614, 1.01	e^-	Ar^{40} (α, p); Mn, V, Fe, Co, Cu $(p, ♂)$
	44	25	22,0 m	β^-	4.9, 1.5	1.13, 2.07, 2.48, (3.6) ?		Ca^{44} (n, p); V $(p, ♂)$
	45	26	34 m					V $(p, ♂)$
$_{20}$Ca	38	18	0,66 s	β^+		3.5		Ca^{40} $(\gamma, 2n)$
	39	19	0,88 s	β^+	5.49			Ca^{40} (γ, n)
	41	21	$1,1 \cdot 10^5$ a	ε				K^{41} (p, n); Ca^{40} (d, p); Ca^{40} (n, γ)
	45	25	a) 164 d b) 153 d	β^-	a) 0.254 b) 0.261			Ca^{44} (d, p); Ca^{44} (n, γ); Sc^{45} $(d, 2p)$; Sc^{45} (n, p); Ti^{48} (n, α); Bi^{209} $(d, \varnothing)$
	47	27	4,7 d	β^-	1.94, 0.66	0.48, 0.83, 1.31		Ca^{46} (d, p); Ca^{48} (p, pn); Ca^{46} (n, γ); V, Mn, Fe, Cu, Co $(p, ♂)$
	48	28	$\geqq 1,6 \cdot 10^{17}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	49	29	8,8 m	β^-	1.95, 0.9	3.10, 4.05, 4.68		Ca^{48} (n, γ)
$_{21}$Sc	40	19	0,22 s	β^+	9.0	3.75		Ca^{40} (p, n)
	41	20	0,873 s	β^+	4.94			Ca^{40} (p, γ); Ca^{40} (d, n)
	42	21	0,68 s	β^+	a) 4.8 b) 5.7			Ca^{42} (p, n); K^{39} (α, n)
	43	22	3,92 h	β^+	1.20, 0.82, 0.39 ?	0.25, 0.369, 0.627, (0.84) ?, 1.05		Ca^{43} (p, n); Ca^{42} (d, n); Ca^{40} (α, p): Fe, Co, Cu $(p, ♂)$

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{21}$Sc	44	23	3,92 h	β^+, ε	1.471	1.159, (2.54)		K^{41} (α, n); Ca^{44} (p, n); Ca^{43} (d, n); Sc^{45} (n, $2n$); Sc^{45} (γ, n); Br, Co (p, ♂)
	44m	23	2,44 d	Is		m. Is: 0.271	e^-	K^{41} (α, n); Ca^{44} (p, n); Ca^{43} (d, n); Sc^{45} (n, $2n$); Sc^{45} (γ, n); Ti^{46} (d, α)
	46	25	83,9 d	β^-	1.475, 0.357	0.892, 1.118	e^-	Sc^{45} (d, p); Sc^{45} (n, γ); Ca^{43} (α, p); Ti^{48} (d, α); Ti^{46} (n, p); Fe, Cu (p, ♂)
	46m	25	19,5 s	Is		m. Is: 0.142	e^-	Sc^{45} (n, γ); Cu (p, ♂)
	47	26	a) 3,40 d b) 3,44 d	β^-	0.600, 0.439	0.159		Ca^{46} (p, γ); Ca^{46} (d, n); Ca^{44} (α, p); Ti^{49} (d, α); Ti^{47} (n, p); Ti^{48} (γ, p)
	48	27	44 h	β^-	0.654	0.986, 1.040, 1.314, 2.25		Ca^{48} (p, n); Ca^{48} (d, $2n$); Ti^{50} (d, α); Ti^{48} (n, p); V^{51} (d, αp); Fe, Co (p, ♂)
	49	28	57,2 m	β^-	2.05	kein γ		Ca^{48} (d, n); Ti^{49} (n, p); Ti^{50} (γ, p); $Ca^{49} \to \beta^-$
	50	29	1,74 m	β^-	$\sim$ 3.5	1.17, 1.59		Ti^{50} (n, p)
$_{22}$Ti	43	21	0,58 s	β^+ ?	5.4 ?			Ca^{40} (α, n)
	44	22	$\sim 10^3$ a	ε		0.068, 0.076, 0.16		Sc^{45} (p, $2n$); Sc^{45} (d, $3n$)
	45	23	3,09 h	β^+, ε	1.022, 0.57 ?	0.45 ?, 0.82 ?		Ca^{42} (α, n); Sc^{45} (p, n); Sc^{45} (d, $2n$); Ti^{46} (n, $2n$); Ti^{46} (γ, n); Mn, Fe, Cu (p, ♂)
	51	29	5,80 m	β^-	2.13, 1.50	0.323, 0.605, 0.928		Ti^{50} (d, p); Ti^{50} (n, γ); Ca^{48} (α, n); V^{51} (n, p); Cr^{54} (n, α)
$_{23}$V	46	23	0,40 s	β^+	6.3			Ti^{46} (p, n)
	47	24	31,1 m	β^+	1.89			Ti^{47} (p, n); Ti^{46} (p, γ); Ti^{46} (d, n); Fe, Co, Cu (p, ♂)
	48	25	16,2 d	β^+, ε	0.698	0.986, 1.314, 2.253	e^-	Ti^{48} (p, n); Ti^{47} (d, n); Cr^{50} (d, α); Sc^{45} (α, n); Fe, Co, Cu (p, ♂)
	49	26	a) 327 d b) 334 d	ε		innere Bremsstr., E_{max}: 0.616		Ti^{48} (d, n); V^{50} (n, $2n$): $Cr^{49} \to \beta^+$; Co, Cu (p, ♂)
	50	27	$4{,}8 \cdot 10^{14}$ a	ε				(in der Natur)

	52	29	3,76 m	β^-	2.47	1.45		V^{51} (n, γ)
⋮	52m	29	¹) 2,6 m			0.539, 0.739, 0.85, 1.00, 1.40, 1.76, 2.33, 3.20		V^{51} (d, p); V^{51} (n, γ); Cr^{54} (d, α); Cr^{52} (n, p); Cr^{53} (γ, p); Mn^{55} (n, α)
	53	30	a) 2,0 m b) 1,7 m	β^-	2.53	1.00, (1.29)		Cr^{53} (n, p)
	54	31	55 s	β^-	3.3	0.835, 0.99, 2.21		Cr^{54} (n, p)
$_{24}$**Cr**	48	24	23 h	ε kein β^+		0.116, 0.305	e^-	Ti^{46} $(\alpha, 2n)$; Fe, Ni $(p, ♂)$
	49	25	41,7 m	β^+	1.54, 1.45, 1.39, 0.73	0.063, 0.089, 0.150	e^-	Ti^{46} (α, n); Ti^{47} $(\alpha, 2n)$; Ti^{48} $(\alpha, 3n)$; Cr^{50} $(n, 2n)$; Cr^{50} (γ, n); Fe, Co, Cu, As $(♂)$
	51	27	27,8 d	ε kein β^+		innere Bremsstr., E_{max}: 0.73; γ: 0.320, 0.325, 0.645		Cr^{50} (d, p); Cr^{52} $(n, 2n)$; Cr^{50} (n, γ); V^{51} (p, n); Ti^{48} (α, n); $Mn^{51} \rightarrow \beta^+$
	54	30	$> 6 \cdot 10^{15}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	55	31	a) 3,52 m b) 3,6 m	β^-	2.85	kein γ		Mn^{55} $(d, 2p)$; Mn^{55} (n, p); Cr^{54} (n, γ)
$_{25}$**Mn**	50	25	0,28 s	β^+	6.7			Cr^{50} (p, n); Cr^{51} $(p, 2n)$
	51	26	45,2 m	β^+	2.16	kein γ		Cr^{50} (p, γ); Cr^{50} (d, n); Fe^{54} $(\gamma, p\,2n)$; Fe, Co, Cu $(p, ♂)$
	52	27	5,69 d	ε, β^+	0.575	0.734, 0.940, 1.46		Cr^{52} (p, n); Cr^{52} $(d, 2n)$; Fe^{54} (d, α); Cr^{50} (α, pn); Fe, Co, Cu $(p, ♂)$
	52m	27	21,1 m	β^+, Is	2.631	m. Is: 0.392; m. β^+: 1.46	e^-	Cr^{52} (p, n); Fe^{54} (d, α); Fe^{54} (γ, pn); $Fe^{52} \rightarrow \beta^+$; Co, Cu $(p, ♂)$
	53	28	$\sim$ 140 a	ε		kein γ		Cr^{53} (p, n); $Fe^{53} \rightarrow \beta^+$
	54	29	291 d	ε, β^- ?		innere Bremsstr., E_{max}: 0.53; γ: 0.840		Cr^{54} (p, n); Cr^{53} (d, n); Fe^{56} (d, α); V^{51} (α, n); Mn^{55} (γ, n); Co, Cu $(p, ♂)$
	56	31	2,58 h	β^-	2.86, 1.05, 0.73, 0.37	0.85, 1.81, 2.10, 2.52, 2.66, 2.95, 3.37	e^-	Mn^{55} (d, p); Mn^{55} (n, γ); Cr^{53} (α, p); Fe^{58} (d, α); Fe^{56} (n, p); Fe^{57} (γ, p)
	57	32	1,7 m	β^-	2.6	0.117, 0.134, (0.220), (0.350), (0.690)		Fe^{57} (n, p); Mn^{55} $(\alpha, 2p)$; Cr^{54} (α, p)

¹) Die von G. A. RENARD, Ann. phys. (Paris) 5, 385 (1950), angegebene 2,6 m-Aktivität $_{23}V^{52m}$ konnte von anderer Seite — G. WEBER, Z. Naturforsch. 9 a, 115 (1954), sowie J. M. LE BLANC, J. M. CORK und S. B. BURSON, Phys. Rev. 93, 916 A (1954) — nicht bestätigt werden.

Symbol und Z 1	A 2	N 3	Halbwertszeit $T_{1/2}$ 4	Umwandlung 5	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen 6	Energie der Strahlung [MeV] γ-Strahlung 7		Erzeugungsreaktionen 8
$_{26}$Fe	52	26	8,2 h	β^+, ε	0.804	0.165		Cr^{50} $(\alpha, 2n)$; Fe^{54} $(\gamma, 2n)$; Co, Cu $(p, ♂)$
	53	27	8,9 m	β^+	2.84, 2.38, 1.57	0.380, 0.910 ?, 1.29 ?		Cr^{50} (α, n); Fe^{54} $(n, 2n)$; Fe^{54} (γ, n); Fe^{56} $(\gamma, 3n)$; Co, Cu $(p, ♂)$
	55	29	a) 2,60 a b) 2,94 a	ε kein β^+		innere Bremsstr., E_{max}: 0.22		Mn^{55} (p, n); Mn^{55} $(d, 2n)$; Fe^{54} (d, p); Fe^{54} (n, γ); Cr^{52} (α, n); $Co^{55} \rightarrow \beta^+$; Co, Cu $(p, ♂)$
	57m	31	$1,1 \cdot 10^{-7}$ s	Is		0.0144		$Co^{57} \rightleftarrows \beta^+, \varepsilon$
	58	32	$> 3 \cdot 10^{14}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	59	33	a) 45,1 d b) 46,3 d	β^-	1.560, 0.462, 0.271	0,140, 0.190, 0.340 1.098, 1.289	e^-	Fe^{58} (d, p); Fe^{58} (n, γ); Co^{59} $(d, 2p)$; Co^{59} (n, p); Cu, As $(♂)$; Ta, Bi, U $(p, \varnothing)$
	60	34	$\sim 3 \cdot 10^5$ a	β^-				Fe^{58} $(2n, \gamma)$; Ni (p); Cu (p)
	60	34	8,4 h	β^-	~ 1.5			U $(n\ \varnothing)$
	61	35	5,5 m	β^-		γ vorh.		Ni^{64} (n, α); Ni^{64} $(d, \alpha p)$; Cu^{65} $(n, \alpha p)$
$_{27}$Co	54	27	0,18 s	β^+	7.8			Fe^{54} (p, n); Ni (p)
	55	28	18,2 h	β^+, ε	a) 1.50, 1.03, 0.53, 0.26 b) 1.51, 1.04, 0.790	(0.253), 0.477, 0.935, 1.41, (1.84), (2.17)		Fe^{54} (p, γ); Fe^{56} $(p, 2n)$; Fe^{54} (d, n); Ni^{58} $(\gamma, p\,2n)$; Co, Cu, As $(♂)$
	56	29	77,3 d	ε, β^+	1.496, 0.971, 0.318, (0.195)	0.845…3.47 $\langle\sim 15\rangle$ 0.845, 1.238, 1.749		Fe^{56} $(d, 2n)$; Fe^{54} (α, np); Co^{59} $(p, p\,3n)$; Ni^{58} (d, α); Ni^{58} (γ, pn); $Ni^{56} \leftarrow \varepsilon$
	57	30	270 d	ε		innere Bremsstr., E_{max}: 0.43; γ: 0.0144, 0.123, 0.137, 0.708	e^-	Fe^{56} (p, γ); Fe^{56} (d, n); Mn^{55} $(\alpha, 2n)$; Ni^{58} $(p, 2p)$; Co^{59} $(p, p\,2n)$
	58	31	71,3 d	ε, β^+	(1.3), 0.472	0.810, 0.814, 1.62	e^-	Fe^{58} (p, n); Fe^{57} (p, γ); Fe^{57} (d, n); Fe^{56} (α, np); Mn^{55} (α, n); Ni^{58} (n, p); Ni^{60} (d, α); Cu, As $(d, ♂)$
	58m	31	9,2 h	Is kein β^+		m. Is: 0.0249	e^-	Fe^{58} (p, n); Mn^{55} (α, n); Ni^{58} $(d, 2p)$; Ni^{58} (n, p); Co^{59} $(d, p\,2n)$; Co^{59} $(n, 2n)$; Co^{59} (γ, n)

	60	33	5,24 a	β^-	1.478, 0.312	1.173, 1.332, (2.158)	e^-	Co^{59} (d, p); Co^{59} (n, γ); Ni^{62} (d, α); Ni^{60} (n, p); Cu^{63} (n, α); Bi $(n, \varnothing)$
	60m	33	10,47 m	Is, β^-	(2.9), 1.56	m. Is: 0.0589	e^-	Co^{59} (d, p); Co^{59} (n, γ); Ni^{62} (d, α); Ni^{60} (n, p)
	61	34	99,0 m	β^-	1.22	a) 0.072 b) 0.069	e^-	Ni^{64} (p, α); Ni^{64} $(d, \alpha n)$; Ni^{61} (n, p); Ni^{62} (γ, p); Cu^{65} $(n, \alpha n)$; Cu^{65} (γ, α); Cu^{63} $(\gamma, 2p)$; Co^{59} (t, p); Cu, As $(d, ♂)$
	62	35	13,9 m	β^-	2.88, 0.88	1.17, 1.47, 1.74, 2.03, (~ 2.5)		Ni^{62} (n, p); Cu^{65} (n, α); Cu^{65} $(d, \alpha p)$; Ni^{64} (d, α)
	62	35	1,6 m	β^-		γ vorh.		Ni^{62} (n, p); Ni^{64} (d, α)
⋮	64	37	[1]) $\sim$ 5 m					Ni^{64} $(n, p\,?)$
$_{28}$Ni	56	28	a) 6,4 d b) 6,0 d	ε		0.17, 0.28, 0.48, 0.81, 0.96, 1.33, 1.58, 1.75		Fe^{54} $(\alpha, 2n)$; Co^{59} $(p, 4n)$; Zn $(p, ♂)$
	57	29	36 h	β^+, ε	0.849, 0.722, 0.326	0.127, 0.40 ?, 1.37, 1.89		Fe^{54} (α, n); Co^{59} $(p, 3n)$; Ni^{58} $(n, 2n)$; Ni^{58} (γ, n); Cu, As $(d, ♂)$
	59	31	$7{,}5 \cdot 10^4$ a	ε kein β^+		innere Bremsstr., $E_{\max}$: 1.07		Fe^{56} (α, n); Co^{59} $(d, 2n)$; Ni^{58} (d, p); Ni^{58} (n, γ)
	63	35	a) 125 a b) 85 a	β^-	a) 0.067 b) 0.062	kein γ		Ni^{62} (n, γ)
	64	36	$> 3 \cdot 10^{15}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	65	37	2,564 h	β^-	2.10, 1.01, 0.60	0.37, 1.12, 1.49		Ni^{64} (d, p); Ni^{64} (n, γ); Cu^{65} $(d, 2p)$; Cu^{65} (n, p); Zn^{68} (n, α); Zn, Ga, As $(\gamma, ♂)$
	66	38	54,8 h	β^-	0.20	kein γ		Zn, Ga, As $(\gamma, ♂)$; Ho, Ta, Re, Au, Th, U $(p, \varnothing)$
$_{29}$Cu ⋮	57	28	0,18 s					Ni^{58} $(p, 2n\,?)$
	58	29	a) 9,5 m b) 7,9 m	β^+				Ni^{58} (p, n); Ni^{58} $(d, 2n)$
	58	29	3,04 s	β^+	8.4			Ni^{58} (p, n)
	59	30	81,5 s	β^+	3.74, 1.85	0.343, 0.463, 0.872, 1.305, 1.70		Ni^{58} (p, γ); Ni^{58} (d, n)

[1]) Diese Zuordnung ist wahrscheinlich falsch; vgl. $_{26}$Fe^{61} (5,5 m).

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{29}$Cu	60	31	23,4 m	β^+, ε	3.92, 3.00, 2.00	0.85···4.0 ⟨9⟩ 0.85, 1.33, 1.76		Ni^{60} (p, n); Ni^{60} $(d, 2n)$; Ni^{58} (α, pn); Ni^{58} (He^3, p); Cu, As $(d, ♂)$
	61	32	3,33 h	β^+, ε	1.22, 0.94, 0.56, 0.27, 0.19	0.070, 0.282, 0.38, 0.58, 0.659, 0.94, 1.15, 1.192		Ni^{61} (p, n); Ni^{60} (p, γ); Ni^{60} (d, n); Ni^{58} (α, p); Cu^{63} $(\gamma, 2n)$; Zn^{64} $(\gamma, p\,2n)$
	62	33	a) 10,1 m b) 9,73 m	β^+	2.91, [1.74, 0.86, 0.61]	0.69 ?, 0.88, 1.13, 1.17		Ni^{62} (p, n); Ni^{60} (α, pn); Cu^{63} (p, pn); Cu^{63} $(n, 2n)$; Cu^{63} (γ, n); Cu^{63} (d, t)
	64	35	a) 12,88 h b) 12,80 h	ε, β^-, β^+	β^+: a) 0.657; b)0.665 β^-: a)0.571; b)0.580	a) 1.35; b) 1.317		Cu^{65} (p, pn); Cu^{63} (d, p); Cu^{63} (t, d); Cu^{65} $(n, 2n)$; Cu^{63} (n, γ); Cu^{65} (γ, n); Ni^{64} (p, n); Zn^{64} (n, p); Cu, As $(d, ♂)$
	66	37	5,10 m	β^-	2.63, 1.64	0.83, 1.04		Cu^{65} (d, p); Cu^{65} (n, γ); $Ni^{66} \rightarrow \beta^-$; nicht: Zn^{66} (n, p); Ga^{69} (n, α)
	67	38	58,6 h	β^-	0.577, 0.484, 0.395, 0.189	0.090, 0.092, 0.182, 0.205 ?, 0.296, 0.388	e^-	Ni^{64} (α, p); Zn^{67} (n, p); Zn^{68} (γ, p); Zn^{67} $(d, 2p)$; Cu^{65} $(\alpha, 2p)$; As $(\gamma, ♂)$; Ho, Ta, Re, Au, Bi, Th, U $(p, \varnothing)$
	68	39	32 s	β^-	3.0	γ vorh.		Zn^{68} (n, p); Ga^{71} (n, α)
$_{30}$**Zn**	60	30	2,1 m	β^+		γ vorh.	e^-	Ni^{58} $(\alpha, 2n)$; Ni^{58} (He^3, n)
	61	31	88,5 s	β^+	4.38	0.48, 0.69 ?, 0.98, 1.64		Ni^{58} (α, n); Ni^{60} $(\alpha, 3n)$
	62	32	9,3 h	ε, β^+	0.69, 0.65	0.0415, 0.25, 0.26, 0.40, 0.51, 0.595	e^-	Cu^{63} $(p, 2n)$; Cu^{63} $(d, 3n)$; Ni^{60} $(\alpha, 2n)$; Zn^{64} $(\gamma, 2n)$; Zn, As $(\gamma, ♂)$
	63	33	38,3 m	β^+, ε	2.36, 1.40, 0.485	0.960, 1.89, 2.60	e^-	Cu^{63} (p, n); Cu^{63} $(d, 2n)$; Ni^{60} (α, n); Zn^{64} (γ, n); Zn $(\gamma, ♂)$; As $(d, ♂)$
	65	35	245 d	ε, β^+	0.325	1.118	e^-	Cu^{65} (p, n); Cu^{65} $(d, 2n)$; Zn^{64} (d, p); Zn^{64} (n, γ); $Ga^{65} \rightarrow \beta^+$; As^{75} $(d, ♂)$
	69	39	52 m	β^-	a) 0.897 b) 0.903	kein γ		Zn^{68} (d, p); Zn^{68} (n, γ); Zn^{70} (γ, n); Ga^{71} (d, α); Ga^{69} (n, p); As $(♂)$
	69^m	39	13.8 h	Is		0.438	e^-	Zn^{68} (d, p); Zn^{68} (n, γ); Ga^{71} (d, α); Ga^{69} (n, p); As $(d, ♂)$
	70	40	$> 10^{15}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)

	71	41	2,2 m	β^-	2.4	0.12, 0.51, 0.90, 1.09		Zn^{70} (n, γ); Ge^{74} (n, α)
	71^m	41	3 h	β^-	1.5	0.38, 0.49, 0.61		Zn^{70} (n, γ)
	72	42	49,0 h	β^-	~ 1.6, ~ 0.3	γ vorh.		As^{75} $(p, 4p)$; Bi^{209} $(d, \varnothing)$; U $(p, \varnothing)$; Th^{232} $(\alpha, \varnothing)$
$_{31}Ga$	64	33	2,6 m	β^+	6.09, 2.81	0.98, 1.30, 2.25, 3.25		Zn^{64} (p, n); Zn^{64} $(d, 2n)$; Cu^{63} $(\alpha, 3n)$
	65	34	[1]) 15,2 m	β^+, ε	2.24, 2.11, 1.39, 0.820	0.053, 0.118, 0.738, 0.906, 1.38, 1.86		Zn^{64} (p, γ); Zn^{64} (d, n); Cu^{63} (He^3, n); Cu^{63} $(\alpha, 2n)$; $Ge^{65} \to \beta^+$
	66	35	9,45 h	β^+, ε	4.14, 3.10 ?, 1.74, 1.39, 0.90, 0.73, 0.36, 0.02	0.83…4.83 ⟨14⟩ 1.044, 2.75		Zn^{66} (p, n); Zn^{66} $(d, 2n)$; Cu^{63} (α, n); As $(\gamma$, ♂); Sn $(p$, ♂)
	67	36	77,9 h	ε kein β^+		0.090…0.87 ⟨12⟩ 0.0933, 0.184, 0.296	e^-	Zn^{67} (p, n); Zn^{66} (d, n); Zn^{64} (α, p); Cu^{65} $(\alpha, 2n)$; $Ge^{67} \to \beta^+$; As $(d$, ♂)
	68	37	68 m	β^+, ε	1.88, 0.77	0.81, 1.07, 1.24, 1.88		Zn^{68} (p, n); Zn^{67} (p, γ); Zn^{67} (d, n); Ga^{69} $(n, 2n)$; Ga^{69} (γ, n); Cu^{65} (α, n)
	70	39	21,1 m	β^-	1.65, 0.61, 0.44	0.173, 1.042, (1.215)		Zn^{70} (p, n); Zn^{67} (α, p); Ga^{71} $(n, 2n)$; Ga^{69} (n, γ); Ga^{71} (γ, n); Ge^{72} (d, α)
	72	41	$14,\bar{2}$ h	β^-	3.166, 2.529, 1.508, 0.959, 0.637	0.32…3.34 ⟨$\sim$ 30⟩ 0.63, 0.835, 2.20, 2.51		Ga^{71} (d, p); Ga^{71} (n, γ); Ge^{72} (n, p); As^{75} $(d, \alpha p)$; $Zn^{72} \to \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	73	42	4,9 h	β^-	a) (1.6), 1.3, 0.55 b) 1.19, 0.4	a) 0.310, 0.74 b) 0.295, 0.745, 1.04; in Ge^{73m}: 0.0135, 0.0539		Ge^{73} (n, p); Ge^{74} (γ, p); U $(n, \varnothing)$; Bi^{209} $(d, \varnothing)$
	74	43	7,8 m	β^-	4.3, 2.65, 2.0, 1.1	0.495…3.61 ⟨18⟩ 0.60, 2.35		Ge^{74} (n, p); Ge^{76} (d, α)
$_{32}Ge$	65	33	1,5 m	β^+	3.7	0.67, 1.72		Zn^{64} $(\alpha, 3n)$
	66	34	$\sim$ 2,5 h	β^+		0.045, 0.070, 0.114, 0.186		Ge^{70} $(d, p\,5n)$; As $(d$, ♂); Bi $(p, \varnothing)$
	67	35	18,7 m	β^+	3.14, 2.3, 1.6	0.170…3.39 ⟨18⟩ 0.170, 0.92, 1.48		Ge^{70} $(d, p\,4n)$; Zn^{64} (α, n); Zn^{66} $(\alpha, 3n)$; As $(d$, ♂)
	68	36	275 d	ε				Zn^{66} $(\alpha, 2n)$; Ge^{70} $(\gamma, 2n)$; As $(d$, ♂)

[1]) Die von B. CRASEMANN, Phys. Rev. 93, 1034 (1954), angegebene 8,0 m-Aktivität $_{31}Ga^{65}$ konnte von D. L. MORRISON und N. T. PORILE, Phys. Rev. 113, 289 (1959) nicht bestätigt werden.

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	Energie der Strahlung [MeV] γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{32}$Ge	69	37	40,4 h	ε, β^+	1.215, 0.610, 0.220	0.090…2.00 ⟨∼ 15⟩ 0.576, 0.88, 1.12		Ga^{69} (p, n); Ga^{69} $(d, 2n)$; Zn^{66} (α, n); Ge^{70} $(n, 2n)$; Ge^{70} (γ, n); $As^{69} \to \beta^+$; As $(d, ♂)$
	71	39	12 d	ε kein β^+		innere Bremsstr., E_{max}: 0.226		Ga^{71} (p, n); Ga^{71} $(d, 2n)$; Ge^{70} (d, p); Ge^{70} (n, γ); $As^{71} \rightleftarrows \varepsilon, \beta^+$; As $(d, ♂)$
	72^m	40	$2{,}9 \cdot 10^{-7}$ s	Is		0.7	e^-	$Ga^{72} \to \beta^-$; $As^{72} \rightleftarrows \varepsilon, \beta^+$
	73^{m_1}	41	$4{,}6 \cdot 10^{-6}$ s	Is		m. Is: 0.0135		$Ge^{7\,m_2} \to$ Is
	73^{m_2}	41	0,53 s	Is		m. Is: 0.0539; (in $Ge^{7\,m_1}$: 0.0135)		$As^{73} \leftarrow \varepsilon$
	75	43	82 m	β^-	1.19, 0.98, 0.92, 0.72, 0.55	0.066, (0.136), 0.199, 0.265, (0.401), 0.420, 0.470, 0.620		Ge^{74} (d, p); Ge^{74} (n, γ); Ge^{76} $(n, 2n)$; Ge^{76} (γ, n); As^{75} (n, p); Se^{78} (n, α)
	75^m	43	49 s	Is		m. Is: 0.139	e^-	Ge^{74} (n, γ); As^{75} (n, p)
	76	44	$> 2 \cdot 10^{16}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	77	45	11,3 h	β^-	2.196, 1.379, 0.71	0.153…2.32 ⟨19⟩ 0.368, 0.416, 0.563, 1.08	e^-	Ge^{76} (d, p); Ge^{76} (n, γ); Se^{80} (n, α); Y $(p, ♂)$; Bi $(\gamma, \varnothing)$; Th $(p, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	77^m	45	53,6 s	β^-, Is	2.9, 2.7	m. β^-: 0.215; m. Is: 0.159		Ge^{76} (n, γ)
	78	46	a) 2,1 h b) 86 m	β^-	0.9			Br^{81} $(\gamma, 3p)$; U $(n, \varnothing)$
$_{33}$As:	68	35	∼ 7 m					Ge^{70} $(p, 3n)$
	69	36	15 m	β^+	2.9	0.23		Ge^{70} $(p, 2n)$; Ge^{70} $(d, 3n)$
	70	37	a) 52 m b) 47 m	β^+	2.45, 1.35	0.18, 1.07, 1.36, 1.74, 2.10, 2.75, 3.15		Ge^{70} (p, n); As^{75} $(d, p\,6n)$; $Se^{70} \to \beta^+$
	71	38	a) 60 h b) 62 h	ε, β^+	0.815	0.023, 0.175	e^-	Ge^{70} (d, n); Ga^{69} $(\alpha, 2n)$; As^{75} $(d, p\,5n)$; Y $(p, ♂)$
	72	39	26 h	ε, β^+	3.34, 2.50, 1.84, 0.67, 0.27	0.63…3.74 ⟨21⟩ 0.63, 0.835, 1.46		Ge^{72} (p, n); Ga^{69} (α, n); As^{75} $(d, p\,4n)$; Se^{74} (d, α); $Se^{73} \leftarrow \varepsilon$; Y $(p, ♂)$

	73	40	76 d	ε kein β^+		(in Ge^{73m_2}: 0.0539; in Ge^{73m_1}: 0.0135)	e^-	Ge^{72} (d, n); Ge^{70} (α, p); As^{75} (d, p 3n); Se^{76} (p, α)
	74	41	17,8 d	β^-, β^+, ε	β^-: 1.36, 0.69; β^+: 1.53, 0.92, 0.34	m. β^-: 0.635; m. β^+: 0.596, 0.60, 1.19; m. ε: 2.20, 1.84?, 1.61, 1.00, 0.88		Ge^{74} (p, n); Ge^{73} (d, n); Ga^{71} (α, n); As^{75} (d, p 2n); As^{75} (n, 2n); Bi^{209} (d, ∅)
	75m	42	0,017 s	Is		m. Is: 0.305; γ: 0.280, [0.025]		Ge^{74} (p, γ); As^{75} (γ, γ′)
	76	43	26,8 h	β^-, β^+?	β^-: 2.97, 2.41, 1.76, 0.36; β^+: 0.67	0.555, 0.648, 1.21, 1.41, 2.06		As^{75} (d, p), As^{75} (n, γ); Ge^{76} (p, n); Se^{78} (d, α); Se^{76} (n, p); Br^{79} (n, α)
	77	44	38,7 h	β^-	0.68	0.023, 0.028, 0.086, 0.160, (0.186), 0.246, (0.283), 0.524		Br^{81} (γ, α); Ge^{77} → β^-; Bi^{209} (d, ∅); Bi^{209} (α, ∅); U (d, ∅); Th^{232} (α, ∅)
	78	45	91,0 m	β^-	4.1, 1.4	0.615, 0.700, 1.32, 2.65		Se^{78} (n, p); Br^{81} (n, α); Br^{81} (γ, He^3); Ge^{78} → β^-; U (n, ∅)
	79	46	9,0 m	β^-	2.3			Se^{80} (γ, p); Se^{80} (n, pn); Se^{82} (d, αn); U^{235} (n, ∅)
	80	47	∼ 36 s					Se (n)
$_{34}$Se	70	36	44 m	β^+	1.7			As^{75} (d, 7n)
	71	37	4,5 m	β^+	3.4	0.16		Ge^{70} (α, 3n)
	72	38	8,40 d	ε		0.0460		As^{75} (p, 4n); As^{75} (d, 5n); Ge^{70} (α, 2n)
	73	39	7,1 h	β^+, ε	a) 1.65, 1.29 b) 1.68, 1.318, 0.75, 0.25	a) 0.0658, 0.359 b) 0.0671, 0.361, 0.860	e^-	Ge^{70} (α, n); As^{75} (p, 3n); As^{75} (d, 4n)
	73 ?	39 ?	44 m	β^+	1.7			Ge^{70} (α, n) ?
	75	41	a) 127 d b) 121 d	ε kein β^+		0.025…0.402 ⟨11⟩ 0.136, 0.265, 0.280	e^-	As^{75} (p, n); As^{75} (d, 2n); Ge^{72} (α, n); Se^{74} (n, γ); Br^{75} ⇄ ε, β^+
	77m	43	17,4 s	Is		0.162	e^-	Se^{76} (n, γ); Se^{77} (γ, γ′); Br^{77} ⇄ ε, β^+
	79	45	6,5 · 10^4 a	β^-	0.160			U (n, ∅)
	79m	45	3,91 m	Is		0.0959	e^-	Se^{78} (n, γ); Se^{80} (n, 2n); Br^{79} (n, p); U (n, ∅)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{34}$Se	81	47	18,2 m	β^-	1.38 u. 3 andere	0.282, 0.565, 0.820		Se^{80} (d, p); Se^{80} (n, γ); Se^{82} (γ, n); Br^{81} (n, p); U (n, ∅); Bi^{209} (d, ∅)
	81m	47	56,8 m	Is		m. Is: 0.103	e^-	Se^{80} (d, p); Se^{80} (n, γ); Se^{82} (γ, n); Br^{81} (n, p); U (n, ∅)
	83	49	26 m	β^-	1.7, 1.0, 0.45	0.225…2.29 ⟨9⟩ 0.358, 0.524, 0.833		Se^{82} (d, p); Se^{82} (n, γ); U (n, ∅); Th^{232} (n, ∅)
	83m	49	69 s	β^-	3.75, 1.75	0.350, 0.650, 1.01, 2.02		Se^{82} (n, γ); U (n, ∅)
	84	50	3,3 m	β^-				U (n, ∅)
	85	51	40 s	[β^-]				U (n, ∅)
	86 } 87 }	52 } 53 }	17 s	[β^-]				U (n, ∅)
$_{35}$Br	74	39	a) 42 m b) 36 m	β^+, ε		0.640		Cu^{65} (C^{12}, 3n); Cu (N^{14}, ♂); Cu (O^{16}, ♂)
	75	40	95 m	β^+, ε	1.70, 0.80, 0.58, 0.33	0.285		Se^{74} (p, γ); Se^{74} (d, n); Cu^{65} (C^{12}, 2n); Cu (N^{14}, ♂); Cu (O^{16}, ♂)
	76	41	17,2 h	β^+	3.57, 1.66, 1.13, 0.80, 0.63	0.25, 0.33, 0.37, 0.42, 0.68, 0.75, 0.96, 1.2		Se^{76} (p, n), As^{75} (α, 3n); Cu (N^{14}, ♂); Cu (O^{16}, ♂)
	77	42	57 h	ε, β^+	0.336	0.160, 0.237, 0.284, 0.298, 0.520, 0.641, 0.813	e^-	Se^{76} (d, n); Se^{74} (α, p); As^{75} (α, 2n); Se^{76} (p, γ)
	78	43	[< 6 m]	β^+	2.40			[Br^{78m} → Is]
	78m?	43	6,4 m	Is		0.0458, 0.106	e^-	Se^{78} (p, n); Se^{77} (d, n); As^{75} (α, n); Br^{79} (n, 2n); Br^{79} (n, γ)
	80	45	17,6 m	β^-, β^+, ε	β^-: 2.04, 1.38; β^+: 0.862	0.620		Se^{80} (p, n); Br^{79} (d, p); Br^{81} (n, 2n); Br^{79} (n, γ); Br^{81} (γ, n)
	80m	45	4,38 h	Is		0.0366, 0.0486	e^-	Se^{80} (p, n); Se^{80} (d, 2n); Se^{77} (α, p); Br^{79} (d, p); Br^{81} (n, 2n); Br^{79} (n, γ)

	82	47	35,87 h	β^-	0.444	0.545, 0.610, 0.688, 0.766, 0.817, 1.029, 1.305, 1.469		Se^{82} (p, n); Se^{82} $(d, 2n)$; Br^{81} (d, p); Br^{81} (n, γ); Rb^{85} (n, α); Bi^{209} $(d, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	83	48	2,37 h	β^-	0.940	0.051		Se^{82} (d, n); Rb^{87} (γ, α); $Se^{83} \rightarrow \beta^-$; Bi $(d, \varnothing)$; Th $(n, \varnothing)$; U $(p, \varnothing)$
	84	49	31,8 m	β^-	4.71, 3.83, 2.80, 1.81, 1.39, 0.83	0.27 ⋯ 3.93 ⟨22⟩ 0.879, 1.01, 1.90, 3.93		Rb^{87} (n, α); $Se^{84} \rightarrow \beta^-$; Bi^{209} $(\gamma, \varnothing)$; Th $(n, \varnothing)$, U $(n, \varnothing)$
	84	49	6,0 m	β^-	3.2, 1.9, 0.8	0.44, 0.88, 1.46, 1.89		Rb^{87} (n, α); U $(n, \varnothing)$
	85	50	3,00 m	β^-	2.5	kein γ		U $(n, \varnothing)$
	87	52	a) 55,6 s b) 56,1 s	$\beta^-(n)$	β^-: 8.0, 2.6; n: 0.25	5.4, ∼ 3		U^{235} $(n, \varnothing)$
	88	53	15,5 s	$\beta^-(n)$				U $(n, \varnothing)$
	89	54	4,51 s	$\beta^-(n)$	n: a) 0.43; b) 0.65			U $(n, \varnothing)$
	90	55	1,4 s	n				
$_{36}$Kr	76	40	9,7 h	[ε]		0.028, 0.093, 0.267, 0.316, 0.400		Br^{79} $(p, 4n)$; Y $(p, ♂)$
	77	41	1,2 h	ε, β^+	1.86, 1.67, 0.85	0.0242 ⋯ 0.87 ⟨9⟩ 0.108, 0.131, 0.149		Se^{74} (α, n); Br^{79} $(p, 3n)$; Y $(p, ♂)$
	79	43	34,5 h	ε, β^+	0.598, 0.33	0.0445 ⋯ 0.833 ⟨15⟩ 0.0445, 0.261	e^-	Br^{79} (p, n); Br^{79} $(d, 2n)$; Se^{76} (α, n); Kr^{78} (d, p); Kr^{78} (n, γ); Y $(p, ♂)$
	79m	43	55 s	Is kein β^+		0.127	e^-	Br^{79} (p, n); Se^{76} (α, n)
	81	45	2,1 · 10^5 a	ε				Kr^{80} (n, γ)
	81m	45	13 s	Is kein β^+		0.193		Br^{81} (p, n); $Rb^{81} \rightleftarrows \varepsilon, \beta^+$
	83m	47	1,86 h	Is		m. Is: 0.0325; γ: 0.0093	e^-	Kr^{82} (d, p); Kr^{82} (n, γ); Se^{80} (α, n); $Br^{83} \rightarrow \beta^-$; $Rb^{83} \leftarrow \varepsilon$; Th, U $(n, \varnothing)$
	85	49	10,3 a	β^-	0.672, 0.159	0.517		Kr^{84} (n, γ); U $(n, \varnothing)$
	85m	49	4,36 h	β^-, Is	0.824	m. Is: 0.305, m. β^-: 0.1495	e^-	Kr^{84} (d, p); Kr^{84} (n, γ); Se^{82} (α, n); Rb^{85} (n, p); Sr^{88} (n, α); $Br^{85} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{36}$Kr	87	51	78 m	β^-	3.8, 3.3, 1.25	0.403, 0.847, 1.75 ?, 2.05, 2.57		Kr^{86} (d, p); Kr^{86} (n, γ); Rb^{87} (n, p); Br^{87} → β^-; U (n, ∅)
	88	52	2,77 h	β^-	2.82, 0.90, 0.52	0.028, 0.166, 0.191, 0.36, 0.85, 1.55, 2.19, 2.40		Br^{88} → β^-; Th (n, ∅); U (n, ∅)
	89	53	3,18 m	β^-	4.0, 2.0			U (n, ∅); Pu^{239} (n, ∅)
	90	54	33 s	β^-	3.2			U (n, ∅); Pu^{239} (n, ∅)
	91	55	9,8 s	β^-	∼ 3.6			U (n, ∅); Pu^{239} (n, ∅)
	92	56	3,0 s	β^-				Th^{232} (n, ∅); U (n, ∅); Pu^{239} (n, ∅)
	93	57	2,0 s	β^-				U (n, ∅); Pu^{239} (n, ∅)
	94	58	1,4 s	β^-				U (n, ∅)
⋮	95	59	kurz	β^-				U (n, ∅)
	97	61	∼ 1 s	β^-				U (n, ∅); Pu^{239} (n, ∅)
$_{37}$**Rb**	79	42	24 m	β^+		0.150		Cu (O^{16}, ♂); Cu (Ne^{20}, ♂); Ga (N^{14}, ♂)
	81	44	4,7 h	ε, β^+	1.05, 0.58, 0.33	0.253, 0.450, 1.10; (m. Is in Kr^{81m}: 0.19)		Br^{79} (α, 2n); Br^{81} (α, 4n); Y (p, ♂)
	82	45	1,25 m	β^+	3.15	kein γ		Br^{79} (α, n); Sr^{82} ← ε
	82m	45	6,3 h	ε, β^+	0.775, 0.175	0.188 ?…1.464 ⟨14 ?⟩ m. β^+: 0.610, 0.768	e^-	Kr^{82} (d, 2n); Br^{79} (α, n); Br^{81} (α, 3n)
	83	46	83 d	ε kein β^+		0.525; (m. Is in Kr^{83m}: 0.0325, 0.0093)		Br^{81} (α, 2n); Sr^{83} ⇄ ε, β^+
	84	47	33,0 d	ε, β^+, β^-	β^+: 1.67, 0.80, 0.373; β^-: 0.91, 0.44	0.879, 1.01, 1.90		Sr^{86} (d, α); Kr^{84} (d, 2n); Kr^{82} (α, pn); Br^{81} (α, n); Rb^{85} (n, 2n); Bi^{209} (d, ∅)
	84m	47	a) 23 m b) 21 m	Is, ε		m. Is: 0.216, 0.250, 0.464; m. ε: 0.890		Br^{81} (α, n); Rb^{85} (n, 2n)

	85m	48	$9{,}0 \cdot 10^{-7}$ s	Is		m. Is: 0.515; (vgl. Sr^{85} u. Kr^{85})		$Sr^{85} \leftarrow \varepsilon$; $Kr^{85} \rightarrow \beta^-$
	86	49	18,66 d	β^- kein β^+	1.79, 0.71, 0.23 ?	1.079		Sr^{88} (d, α); Rb^{85} (n, γ); Rb^{87} (γ, n); Bi^{209} $(d, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	86m	49	1,02 m	Is		0.56		Rb^{85} (n, γ); Rb^{87} $(n, 2n)$
	87	50	$5{,}0 \cdot 10^{10}$ a	β^-	0.275	kein γ		(in der Natur)
	88	51	17,8 m	β^-	5.13, 3.29, 2.04	0.908…4.87 ⟨10⟩ 0.908, 1.39, 1.85, 2.68		Rb^{87} (n, γ); $Kr^{88} \rightarrow \beta^-$; Th $(n, \varnothing)$; Pa^{231} $(n, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	89	52	14,9 m	β^-	3.92, 2.87	0.663, 1.05, 1.26, 1.55, 2.20, 2.59, 2.75, 3.52		$Kr^{89} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	90	53	2,74 m	β^-	5.7	γ vorh.		$Kr^{90} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	91	54	1,67 m	β^-	4.6	γ vorh.		$Kr^{91} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	91m?	54	14 m	β^-	3.0	γ vorh.		$Kr^{91} \rightarrow \beta^-$
	92	55	80 s	β^-				$Kr^{92} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	93	56	2 s	β^-				$Kr^{93} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	94	57	1 s	β^-				$Kr^{94} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
⋮	95	58	kurz	$[\beta^-]$				$Kr^{95} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
⋮	97	60	~ 1 s	$[\beta^-]$				$Kr^{97} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$; Pu^{239} $(n, \varnothing)$
$_{38}$Sr	81	43	29 m	ε, β^+		γ vorh.	e^-	Rb $(p, ♂)$
	82	44	25,5 d	ε kein β^+	(nach ε in Rb^{82}: β^+ 3.15)	0.15, 0.40, 0.95		$Y^{82} \rightarrow \beta^+$; Rb, Y, Ag $(p, ♂)$; Ho, Re, Au, Bi $(p, \varnothing)$
	83	45	33 h	ε, β^+	1.15	0.040, 0.074, 0.101, 0.151, 0.165		$Y^{83} \rightarrow \beta^+$?; Rb, Y, Ag $(p, ♂)$
	85	47	65,0 d	ε kein β^+		0.513	e^-	Rb^{85} (p, n); Rb^{85} $(d, 2n)$; Y $(p, ♂)$
	85m	47	70 m	Is, ε		m. Is: 0.0075, 0.225, 0.233; m. ε: 0.150		Rb^{85} (p, n); Rb^{85} $(d, 2n)$; Sr^{84} (n, γ)

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{38}$Sr	87m	49	2,90 h	Is, ε		m. Is: 0.388	e^-	Rb^{87} (p, n); Sr^{86} (d, p); Sr^{86} (n, γ); Sr^{87} (n, n); Zr^{90} (n, α); Y^{87} ← ε
	89	51	50,5 d	β^-	1.463	kein γ; (m. Is in Y^{89m}: 0.913)		Sr^{88} (d, p); Sr^{88} (n, γ): Y^{89} (n, p); Zr^{92} (n, α); Rb^{89} → β^-; Bi^{209} (d, ∅); Bi^{209} (α, ∅); Th, U, Pu (n, ∅)
	90	52	a) 27,7 a b) 29,3 a	β^-	0.545	kein γ		Rb^{90} → β^-; U (n, ∅); Bi^{209} (d, ∅)
	91	53	9,67 h	β^-	2.67, 2.03, 1.36, 1.09, 0.62	0.551, 0.645, 0.748, 0.93, 1.025, 1.413		Zr^{94} (n, α); Rb^{91} → β^-; Bi^{209} (α, ∅); Bi^{209} (γ, ∅); Th, U, Pu (n, ∅)
	92	54	2,60 h	β^-	1.5, 0.545	0.23, 0.44, 1.37		Rb^{92} → β^-; Bi^{209} (γ, ∅); Th, U (n, ∅)
	93	55	8,2 m	β^-				Rb^{93} → β^-; U (n, ∅)
	94	56	1,3 m	β^-				Rb^{94} → β^-; U (n, ∅)
	95	57	~ 0,7 m	β^-				U (n, ∅)
⋮	97	59	kurz	β^-				Rb^{97} → β^-; U (n, ∅)
$_{39}$Y	82	43	70 m					Y (p, ♂)
	83	44	3,5 h					Y (p, ♂)
	84	45	3,7 h	β^+, ε	2.0	γ vorh.		Sr^{84} (p, n); Sr^{84} (d, 2n); Y (p, ♂)
	85	46	5 h					Y (p, ♂)
	86	47	14,6 h	β^+	1.80, 1.19	0.180, 0.635, 1.08, 1.93		Sr^{86} (p, 3n); Zr^{86} ← ε; Y (p, ♂); Nb (d, ♂)
	87	48	80,0 h	ε, β^+	0.7	0.388, 0.485	e^-	Sr^{87} (p, n); Sr^{86} (d, n); Sr^{84} (α, p); Rb^{85} (α, 2n); Sb (d, ♂)
	87m	48	14 h	Is kein β^+		0.381		Sr^{87} (p, n); Sr^{86} (d, n); Sr^{84} (α, p); Y (p, ♂)
	88	49	104 d	ε, β^+	0.58	0.908, 1.853, 2.76		Sr^{88} (p, n); Sr^{88} (d, 2n); Rb^{85} (α, n); Y^{89} (n, 2n)
	88m	49	$3 \cdot 10^{-4}$ s	Is		m. Is: 0.394		Y^{89} (γ, n); Zr^{88} ← ε

	89m	50	16,1 s	Is		0.913		Y^{89} (n, n); Zr^{89} ⇄ ε, β^+
	90	51	64,3 h	β^-	2.26, 0.51	1.734	e^-	Y^{89} (d, p); Y^{89} (n, γ); Zr^{92} (d, α); Zr^{90} (n, p); Nb^{93} (n, α); $Sr^{90} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	91	52	58,3 d	β^-	1.56, 0.36	1.19		Zr^{91} (n, p); $Sr^{91} \rightarrow \beta^-$; Bi^{209} $(d, \varnothing)$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	91m	52	50,3 m	Is		m. Is: 0.551		Zr^{91} (n, p); $Sr^{91} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	92	53	3,60 h	β^-	3.60, 2.7, 1.3	0.21, 0.475, 0.94, 1.45, 1.9, 2.4		Zr^{94} (d, α); Zr^{92} (n, p); $Sr^{92} \rightarrow \beta^-$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	93	54	10,4 h	β^-	2.88	0.265, 0.455, 0.68, 0.94, 1.15, 1.40, 1.88, 2.14		$Sr^{93} \rightarrow \beta^-$; Bi^{209} $(d, \varnothing)$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	94	55	16,5 m	β^-	5.4	1.4		Zr^{96} (d, α); Zr^{94} (n, p); $Sr^{94} \rightarrow \beta^-$; U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	95	56	10,5 m	β^-				Zr^{96} (γ, p)
⋮	97	58	kurz	β^-				$Sr^{97} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
$_{40}$Zr	86	46	17 h	ε		0.241		Nb^{93} $(p, ♂)$
	87	47	94 m	β^+, ε	2.10	0.35, 0.65; (vgl. γ in Y^{87})		Sr^{84} (α, n); Mo^{92} $(\gamma, \alpha n)$; Mo^{94} $(\gamma, \alpha\, 3n)$
	88	48	85 d	ε		m. Is in $Y^{8\,m}$: 0.394		Nb^{93} $(p, ♂)$
	89	49	79,3 h	ε, β^+	0.90	0.027 ?, 0.396 ?, 1.27 ?; m. Is in $Y^{8\,m}$: 0.913	e^-	Y^{89} (p, n); Y^{69} $(d, 2n)$; Zr^{90} $(n, 2n)$; Zr^{90} (γ, n); Mo^{92} (n, α)
	89m	49	4,4 m	Is, ε, β^+	2.43, ~ 0.85	m. Is: 0.588; m. ε: 1.53	e^-	Y^{89} (p, n); Zr^{90} $(n, 2n)$; Zr^{90} (γ, n)
	90m	50	0,83 s	Is		2.30		Zr^{90} (n, n)
	93	53	$1,1 \cdot 10^6$ a	β^-	0.056	m. Is in Nb^{93m}: 0.0304		$Y^{93} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	95	55	65,0 d	β^-	1.13, 0.90, 0.404, 0.364, 0.25	0.724, 0.760; m. Is in Nb^{95m}: 0.231	e^-	Zr^{94} (d, p); Zr^{94} (n, γ); Zr^{96} $(n, 2n)$; Mo^{98} (n, α); $Y^{95} \rightarrow \beta^-$; Bi^{209} $(d, \varnothing)$; Th^{232} $(p, \varnothing)$; U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	96	56	$\geqq 3,6 \cdot 10^{17}$ a	$\beta\beta^-$	3.8 ?			(in der Natur)

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{40}$Zr	97	57	17,0 h	β^-	1.91, 0.45	1.35, 1.62, 2.20, 2.58; (m. Is in Nb^{97m}: 0.747)		Zr^{96} (n, γ); Mo^{100} (n, α); $Y^{97} \rightarrow \beta^-$; Bi^{209} $(\gamma, \varnothing)$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	99	59	30 s	β^-				
$_{41}$Nb	89	48	1,9 h	β^+	2.85	kein γ		Zr^{90} $(p, 2n)$; Y^{89} $(\alpha, 4n)$; Br^{81} $(C^{12}, 4n)$
	89m	48	a) 0,8 h b) $\sim$ 2 h	β^+		m. Is in Zr^{89m}: 0.588		Zr^{90} $(p, 2n)$; Br^{81} $(C^{12}, 4n)$
	90	49	14,56 h	β^+, ε	a) 1.505, 0.655 b) 1.50, 0.87, 0.55	0.133…2.32 ⟨13⟩ 0.142, 1.13, 2.32		Zr^{90} (p, n); Zr^{90} $(d, 2n)$; Mo^{92} (d, α); Mo^{92} (γ, pn)
	90m$_1$	49	24 s	Is		m. Is: 0.120	e^-	$Mo^{90} \rightarrow \beta^+$
	90m$_2$	49	0,010 s	Is		m. Is: 0.250; (m. Is in Nb^{90m_1}: 0.120)	e^-	$Mo^{90} \rightarrow \beta^+$
	91	50	$\sim$ 8 a	ε ?				$Nb^{91m} \rightarrow$ Is ?
	91m	50	62 d	Is, ε		m. Is: 0.105; m. ε: 1.21		Zr^{90} (d, n); Mo^{94} $(d, \alpha n)$; Y^{89} $(\alpha, 2n)$; Nb^{93} $(\gamma, 2n)$
	92	51	10,15 d	ε, (β^+)		$\sim$ 0.90, 0.934, 1.82	e^-	Zr^{92} (p, n); Nb^{93} $(d, p\,2n)$; Nb^{93} $(n, 2n)$; Nb^{93} (γ, n); Y^{89} (α, n); Mo^{94} (d, α); Mo^{92} (n, p)
	92m$_1$	51	13 h	ε kein β^+ kein Is		2.35		Nb^{93} (p, pn)
	92m$_2$	51	5,9 · 10^{-6} s	Is		0.088	e^-	Nb^{93} (γ, n)
	93m	52	a) 12 a b) 3,65 a	Is		m. Is: a) 0.0304 b) 0.0292	e^-	Nb^{93} (n, n); $Zr^{93} \rightarrow \beta^-$
	94	53	a) 2,2 · 10^4a b) 1,8 · 10^4a	β^-	a) 0.61 b) 0.50	a) 0.726, 0.903, 1.65 b) 0.70, 0.87, 1.57		Nb^{93} (n, γ)
	94m	53	6,6 m	Is, β^-	1.3	m. Is: 0.0415; m. β^-: 0.874	e^-	Nb^{93} (d, p); Nb^{93} (n, γ)

	95	54	35 d	β^-	0.93, $0.15\overline{8}$	a) 0.764 b) 0.770	e^-	Mo^{97} (d, α); Zr^{95} → β^-; Bi^{209} (d, ∅); Th (p, ∅); U (n, ∅)
	95m	54	a) 90 h b) 84 h	Is		m. Is: a) 0.235 b) 0.231	e^-	Zr^{94} (p, γ); Mo^{97} (d, α); Zr^{95} → β^-; U (∅)
	96	55	23,35 h	β^-	a) 0.750, 0.37 b) 0,686, 0.37	0.216…1.187 ⟨9⟩ 0.560, 0.770, 1.078	e^-	Zr^{96} (p, n); Zr^{96} (d, $2n$); Bi^{209} (d, ∅); U (n, ∅)
	97	56	72,1 m	β^-	1.267	0.665, 1.02	e^-	Mo^{97} (n, p); Mo^{98} (γ, p); Th, U, Pu^{239} (n, ∅)
	97m	56	60 s	Is		m. Is.: 0.747	e^-	Mo^{98} (γ, p); Zr^{97} → β^-
	98	57	26 m	β^-				Mo^{100} (d, α)
	99	58	3,8 m	β^-	3.2			Mo^{100} (γ, p); Zr^{99} → β^-
$_{42}$Mo	90	48	a) 5,7 h b) 6,4 h ?	ε, β^+	1.15	0.120, 0.250	e^-	Nb^{93} (p, $4n$); Ag (α, ♂)
	91	49	15,5 m	β^+, ε ?	3.44	kein γ		Mo^{92} (n, $2n$); Mo^{92} (γ, n)
	91m	49	64 s	Is, β^+, ε	3.99, 2.78, 2.48	m. β^+: 1.21, 1.54; m. Is: 0.658; (m. Is in Nb^{91m}: 0.105)		Mo^{92} (γ, n)
	92	50	$> 4 \cdot 10^{18}$ a	$\beta\beta^+$				(in der Natur)
	93	51	> 2 a	ε				Mo^{92} (n, γ)
	93m	51	6,95 h	Is		m. Is: 0.264; γ: 0.685, 1.479		Nb^{93} (p, n); Nb^{93} (d, $2n$); Zr^{90} (α, n); Mo^{94} (n, $2n$); Tc^{93} ← ε
	99	57	66,0 h	β^-	1.18, 0.80, 0.41	0.040, 0.140, 0.142, 0.181, 0.372, 0.741, 0.780, 0.85 ?	e^-	Mo^{98} (d, p); Mo^{100} (n, $2n$); Mo^{100} (γ, n); Zr^{96} (α, n); Sb (n, ♂); Ho, Re, Ta, Au (p, ∅); Bi^{209} (d, ∅); Th, U, Pu (n, ∅)
	99m	57	$1{,}63 \cdot 10^{-5}$ s	Is		m. Is: 0.098		Mo^{100} (γ, n)
	100	58	$\geqq 3 \cdot 10^{17}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	101	59	14,61 m	β^-	2.2, 1.6, 1.2, 0.8, 0.7, 0.6	0.080…2.08 ⟨∼ 15⟩ 0.191, 0.960		Mo^{100} (n, γ); U (n, ∅)
	102	60	11,5 m	β^-	1.0			U (n, ∅)
	105	63	a) < 2 m b) ~ 5 m	β^-				U (n, ∅)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{43}$Tc	92	49	4,3 m	β^+, ε	4.1	1.3		Mo^{92} (p, n); Mo^{92} $(d, 2n)$; Nb^{93} $(\alpha, 5n)$
	93	50	2,75 h	ε, β^+	0.82, 0.64	1.35, 1.50, 2.00		Mo^{92} (p, γ); Mo^{92} (d, n)
	93m	50	43,5 m	Is, ε		m. Is: 0.390; m. ε: 2.7	e^-	Mo^{92} (p, γ); Mo^{92} (d, n); Nb^{93} $(\alpha, 4n)$
	94	51	52,5 m	β^+, ε	2.41	0.874, 1.85, 2.73, 3.27	e^-	Mo^{94} (p, n); Mo^{94} $(d, 2n)$
	95	52	20,0 h	ε kein β^+		0.762, 0.932 ?, 1.071	e^-	Mo^{95} (p, n); Mo^{95} $(d, 2n)$; Mo^{92} (α, p); Ru^{95} $\rightleftarrows$ ε, β^+
	95m	52	60 d	ε, Is, β^+	0.68 0.46	m. Is: 0.0390; γ: 0.204, 0.584, 0.768, 0.788, 0.838, 1.04	e^-	Mo^{95} (p, n); Mo^{95} $(d, 2n)$; Mo^{94} (d, n); Mo^{92} (α, p)
	96	53	a) 4,33 d b) 4,20 d	ε kein β^+		0.312, 0.771, 0.806, 0.842, 1.119, (1.65), (1.89), (2.39)	e^-	Mo^{96} (p, n); Mo^{95} (d, n); Mo^{96} $(d, 2n)$; Nb^{93} (α, n)
	96m	53	51,5 m	Is, (β^+)		m. Is: 0.0344	e^-	Mo^{96} (p, n); Mo^{96} $(d, 2n)$; Nb^{93} (α, n)
	97	54	$2{,}6 \cdot 10^6$ a	ε				Mo^{97} (p, n); Mo^{97} $(d, 2n)$; Ru^{97} $\leftarrow$ ε; Tc^{97m} $\rightarrow$ Is
	97m	54	91 d	Is		m. Is: 0.0965	e^-	Mo^{97} (p, n); Mo^{96} (d, n); Mo^{97} $(d, 2n)$; Ru^{97} $\leftarrow$ ε
	98	55	$1{,}5 \cdot 10^6$ a	β^-	0.30	0.669, 0.769		Mo^{98} (p, n); Mo^{98} $(d, 2n)$
	99	56	$2{,}12 \cdot 10^5$ a	β^-	0.292	kein γ		Mo^{98} (d, n); Mo^{99} $\rightarrow$ β^-; U $(n, \varnothing)$
	99m	56	6,04 h	Is		0.0021, 0.1403, 0.142	e^-	Mo^{98} (d, n); Ru^{99} (n, p); Mo^{99} $\rightarrow$ β^-; Th, U $(n, \varnothing)$
	100	57	15,8 s	β^-	3.38, 2.88, ~ 2.2	0.542…1.8 ⟨10⟩ 0.542, 0.60		Mo^{100} (p, n); Mo^{100} $(d, 2n)$; Tc^{99} (n, γ)
	101	58	14,3 m	β^-	1.32, 1.07	0.127…0.94 ⟨13⟩ 0.130, 0.186, 0.307, 0.545		Mo^{100} (d, n); Ru^{102} (n, pn); Ru^{102} (γ, p); Rh^{103} $(\gamma, 2p)$; Mo^{101} $\rightarrow$ β^-; U $(n, \varnothing)$

	102	59	4,5 m	β^-	~ 2	0.473		Ru^{102} (n, p); Ru^{102} $(d, 2p)$
	102	59	5 s	β^-	4.2			$Mo^{102} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	103	60	1,2 m					Ru^{104} (n, pn)
	104	61	18 m	β^-	~ 3.0	~ 2.5 ?, ~ 1.5 ?		Ru^{104} (n, p); U $(d, \varnothing)$
	105	62	10 m	β^-				$Mo^{105} \rightarrow \beta^-$; U $(d, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
⋮	107	64	< 1,5 m	$[\beta^-]$				U $(n, \varnothing)$
$_{44}$Ru	≦ 93	≦ 49	$\sim$ 52 s	β^+ ?				Mo (α)
	94	50	57 m	ε, β^+?				Mo^{92} $(\alpha, 2n)$; Mo^{94} $(\alpha, 4n)$
	95	51	1,65 h	ε, β^+	1.2	0.145, 0.340, 0.640, 1.11		Mo^{92} (α, n); Ru^{96} $(n, 2n)$; Ru^{96} (γ, n); Ag $(p, ♂)$; Cs $(p, ♂)$
	97	53	a) 2,88 d b) 2,44 d ?	ε kein β^+		0.109, 0.216, 0.325, 0.570		Ru^{96} (d, p); Mo^{94} (α, n); Mo^{95} $(\alpha, 2n)$; Ru^{98} $(n, 2n)$; Ru^{98} (γ, n); Sb $(d, ♂)$; Sb $(\alpha, ♂)$; Cs $(p, ♂)$
	103	59	39,8 d	β^-	a) 0,702, 0.37, 0.227, 0.119 b) 0.680, 0.205, 0.140	0.055, 0.297, 0.323, 0.366, 0.498, 0.610	e^-	Ru^{102} (d, p); Ru^{102} (n, γ); Ru^{104} (γ, n); Mo^{100} (α, n); Sb $(d, ♂)$; Bi $(d, \varnothing)$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	105	61	4,5 h	β^-	1.150	0.265…0.96 ⟨8⟩ ? 0,728; (m. Is in Rh^{105m}: 0.130)		Ru^{104} (d, p); Ru^{104} (n, γ); $Tc^{105} \rightarrow \beta^-$; Sb $(d, ♂)$; Bi $(d, \varnothing)$; Th, U $(\varnothing)$
	106	62	367 d	β^-	0.0392	kein γ		Sb $(d, ♂)$; Bi $(d, \varnothing)$; Bi $(\alpha, \varnothing)$; Th, U $(\varnothing)$; Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	107	63	4,8 m	β^-	2.4	0.22		Pd^{110} (n, α); U $(d, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	108	64	4,4 m	β^-		0.43		U $(d, \varnothing)$
$_{45}$Rh	96	51	$\sim$ 11 m					Ru^{96} (p, n); $Pd^{96} \rightleftarrows \beta^-$ od. ε
	97	52	35 m	β^+	1.65 ?	γ vorh.		Ru (p), Ru (d)
	98	53	8,7 m	β^+	a) 2.5 b) 3.3	0.65		Ru (d); Ru (p); $Pd^{98} \rightarrow \beta^+$
	99	54	4,7 h	ε, β^+	0.74	0.286, 0.34, 0.62, (0.89), 1.26, (1.41)	e^-	Ru^{99} (p, n); Ru^{98} (d, n); Ru^{96} (α, p); $Pd^{99} \rightarrow \beta^+$
	99?	54	15,0 d	β^+		0.089, 0.353		Ru^{99} (p, n)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{45}$Rh	100	55	20,8 h	ε, β^+	2.62, 2.07, 1.26, 0.54, 0.15	0.301…2.379 ⟨11⟩ 0.442, 0.535, 0.823	e^-	Ru^{99} (d, n); $Pd^{100} \leftarrow \varepsilon$
	101	56	4,7 d	ε kein β^+		0.312	e^-	Ru^{101} (p, n); Ru^{100} (d, n); $Pd^{101} \rightleftarrows \varepsilon, \beta^+$
	101m ?	56	5 a	ε		a) 0.125, 0.190 b) 0.127, 0.198		Ru^{101} (p, n)
	102	57	210 d	ε, β^-, β^+	β^+: 1.24, 0.76, 0.40; β^-: 1.15	0.123…1.72 ⟨9⟩ 0.195, 0.479, 0.633		Ru^{102} (p, n); Ru^{101} (d, n); Rh^{103} $(n, 2n)$; Rh^{103} (γ, n)
	103m	58	57 m	Is		0.040	e^-	Rh^{103} (p, p); Rh^{103} (d, pn); Rh^{103} (n, n); Rh^{103} (e^-, e^-); $Ru^{103} \rightarrow \beta^-$; $Pd^{103} \leftarrow \varepsilon$; U $(n, \varnothing)$
	104	59	44 s	β^-	2.44, 1.88, 0.64	0.556, 1.24		Ru^{104} (p, n); Rh^{103} (n, γ); Pd^{105} (γ, p)
	104m	59	4,34 m	Is, β^-	[0.48, 0.30]	m. Is: 0.0772; γ 0.0511; m. β^-: 0.556, 0.745, 0.78, 0.92, 1.34, 1.53	e^-	Ru^{104} (p, n); Rh^{103} (n, γ); Pd^{105} (γ, p)
	105	60	36,5 h	β^-	a) 0.575, 0.255 b) 0.560, 0.247	a) 0.157, 0.322 b) 0.164 ?; 0.320		Ru^{104} (d, n); Rh^{103} (t, p); Pd^{106} (γ, p); $Ru^{105} \rightarrow \beta^-$; Bi $(d, \varnothing)$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	105m	60	45 s	Is		m. Is: 0.130	e^-	$Ru^{105} \rightarrow \beta^-$
	106	61	30 s	β^-	3.53, 3.1, 2.44, 2.0	0.513…2.66 ⟨11⟩ 0.513, 0.624, 1.045	e^-	$Ru^{106} \rightarrow \beta^-$; Th $(p, \varnothing)$; U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	106m ?	61	a) 130 m b) 117 m	β^-	0.95 ?, 0.7	0.220…2.26 ⟨15⟩ 0.435, 0.515, 0.820		Pd^{108} (d, α); Pd^{108} (n, p); Ag^{109} (n, α)
	107	62	$\bar{2}4$ m	β^-	1.15, ($\sim$ 2)	0.095, 0.145, 0.305, 0.385, 0.570, 0.680		Pd^{108} (γ, p); $Ru^{107} \rightarrow \beta^-$; Ta $(p, \varnothing)$; U $(\varnothing)$
	108	63	17,5 s	β^-	4 bis 5	γ vorh.		$Ru^{108} \rightarrow \beta^-$; U $(d, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
⋮	109	64	57 m	β^-	4 bis 5			U $(n, \varnothing)$

$_{46}$Pd	98	52	17.5 m	β^+?		0.132 ?		Ru^{96} (α, 2n); Ru^{98} (α, 4n)
	99	53	21,6 m	β^+, ε?	2.0	0.140, 0.275, 0.420, 0.670		Ru^{96} (α, n); Ag (p, ♂)
	100	54	4,0 d	ε		0.0807, 1.8 ?		Rh^{103} (d, 5n); Ag, Cs (p, ♂); Sb (d, ♂)
	101	55	8,5 h	ε, β^+	0.58	0.288, 0.59, 0.72, 1.19, 1.28		Rh^{103} (d, 4n); Ru^{98} (α, n); Sb (d, ♂)
	103	57	17,0 d	ε		innere Bremsstr., $E_{\max}$: 0.51; γ: 0.0402, 0.053, 0.065, 0.298, 0.324, 0.362, 0.498		Rh^{103} (p, n); Rh^{103} (d, 2n); Rh^{103} (α, p 3n); Pd^{102} (d, p); Sb (d, ♂), Sb (α, ♂)
	105^{m}	59	$3{,}7 \cdot 10^{-5}$ s	Is		0.189, 0.306		Pd^{106} (γ, n)
	107	61	$7 \cdot 10^{6}$ a	β^-	0.04			U (n, ∅)
	107^{m}	61	21,3 s	Is		m. Is: a) 0.210 b) 0.216	e^-	Pd^{106} (n, γ); Pd^{108} (n, 2n)
	109	63	13,5 h	β^-	1.03	0.307⋯0.77 ⟨9⟩ 0.412, 0.64, 0.77; m. Is in Ag$^{109\mathrm{m}}$: 0.0877		Pd^{108} (d, p); Pd^{108} (n, γ); Pd^{110} (γ, n); Ag^{109} (d, 2p); Ag^{109} (t, He^3); Ag^{109} (n, p); Sb (d, ♂); Bi, Th (p, ∅); U, Pu^{239} (n, ∅)
	109^{m}	63	4,75 m	Is		0.188	e^-	Pd^{110} (n, 2n); Pd^{108} (n, γ)
	111	65	22 m	β^-	2.13	0.38, 0.56, 0.65, 0.73		Pd^{110} (d, p); Pd^{110} (n, γ); Sb (d, ♂); Bi (d, ∅); Th, U (n, ∅)
	111^{m}	65	5,5 h	Is, β^-		m. Is: 0.17; m. β^-: 1.77 ?		Pd^{110} (d, p)
	112	66	21 h	β^-	0.28	0.0185		Pd^{110} (α, 2p); In^{115} (p, 4p); Sb (d, ♂); Bi^{209} (d, ∅); Th, U, Pu^{239} (n, ∅)
	113	67	1,4 m	[β^-]				U^{238} (d, ∅)
	114	68	2,4 m	[β^-]		kein γ		U (d, ∅)
	115	69	45 s	[β^-]				U (d, ∅)
$_{47}$Ag	102	55	16 m					Pd^{102} (p, n)
	103	56	a) 66 m b) 59 m	β^+, ε	1.3	0.554, 0.764	e^-	Pd (p); Pd (d); Ag (p); Cd (d)
	104	57	27 m	β^+	2.70	0.118, 0.556		Cd^{106} (d, α); Cd^{104} ← ε

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV]			Erzeugungsreaktionen
					Teilchen	γ-Strahlung		
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{47}Ag$	105	58	40 d	ε		$0.064 \cdots 1.09 \langle 11 \rangle$ 0.064, 0.281, 0.345, 0.654		$Pd^{105}(p, n)$; $Pd^{104}(d, n)$; $Pd^{105}(d, 2n)$; $Pd^{102}(\alpha, p)$; $Rh^{103}(\alpha, 2n)$; Sb $(d, ♂)$
	106	59	24,0 m	β^+, ε, β^-?	β^+: 1.95, 1.45; (β^-: 0.45 od. 0.36)	0.512; vgl. (8.3 d)-Ag^{106}	e^-	$Pd^{106}(p, n)$; $Pd^{105}(p, \gamma)$; $Pd^{105}(d, n)$; $Rh^{103}(\alpha, n)$; $Ag^{107}(d, p\, 2n)$; $Ag^{107}(n, 2n)$
	106	59	8,3 d	ε kein β^+		$0.225 \cdots 2.63 \langle 16 \rangle$ 0.513, 1.045, 1.53		$Pd^{106}(p, n)$; $Pd^{105}(d, n)$; $Rh^{103}(\alpha, n)$; $Cd^{106}(n, p)$; $Ag^{107}(n, 2n)$; Sb $(d, ♂)$
	107^m	60	44,3 s	Is		m. Is: 0.093	e^-	$Cd^{107} \leftarrow \varepsilon$; $Ag^{107}(n, n)$; $Ag^{107}(e^-, e^-)$; $Ag^{107}(\gamma, \gamma')$
	108	61	2,3 m	β^-, ε, β^+	β^-: 1.77, 1.15; β^+: 0.78	m. β^-: 0.62; m. ε: 0.43, 0.60		$Pd^{108}(p, n)$; $Ag^{107}(d, p)$; $Ag^{109}(n, 2n)$; $Ag^{107}(n, \gamma)$; $Ag^{109}(e^-, e^- n)$; $Ag^{109}(\gamma, n)$; $Cd^{108}(n, p)$
	109^m	62	39,2 s	Is		m. Is: 0.0877	e^-	$Ag^{109}(n, n)$; $Ag^{109}(e^-, e^-)$; $Ag^{109}(\gamma, \gamma')$; $Pd^{109} \rightarrow \beta^-$; $Cd^{109} \leftarrow \varepsilon$
	110	63	24,2 s	β^-	2.876, 2.220	0.656		$Ag^{109}(n, \gamma)$; $Cd^{110}(n, p)$; $Cd^{111}(\gamma, p)$
	110^m	63	253 d	β^-, Is	0.530, 0.0875	m. Is: 0.1167; m. β^-: $0.447 \cdots 1.56 \langle 15 \rangle$ 0.657, 0.884, 1.383	e^-	$Pd^{110}(d, 2n)$; $Ag^{109}(d, p)$; $Ag^{109}(n, \gamma)$; Sb $(d, ♂)$
	111	64	7,5 d	β^-	1.04, 0.79, 0.69	0.247, 0.340		$Pd^{110}(d, n)$; $Pd^{108}(\alpha, p)$; $Ag^{109}(\alpha, 2p)$; $Ag^{109}(t, p)$; $Cd^{111}(n, p)$; $Cd^{112}(\gamma, p)$; $Pd^{111} \rightarrow \beta$; Sb $(d, ♂)$; Bi $(p, \varnothing)$; Th, U $(\varnothing)$; $Pu^{239}(n, \varnothing)$
	111^m	64	74 s	Is		[m. Is: 0.087]	e^-	$Pd^{110}(d, n)$
	112	65	3,2 h	β^-	4.1, 3.5, 2.7, ~ 1	0.618, 1.10, 1.39, 1.62, 1.83, 2.11, 2.51, 2.79		$Cd^{112}(n, p)$; $Cd^{113}(\gamma, p)$; $In^{115}(n, \alpha)$; $Pd^{112} \rightarrow \beta$; Sb $(d, ♂)$; Bi $(d, \varnothing)$; Th, U $(\varnothing)$
	113	66	5,3 h	β^-	2.2	(0.31)		$Cd^{114}(\gamma, p)$; Bi, Th $(p, \varnothing)$; U $(\varnothing)$
	113^m	66	1,2 m	β^-	< 2.0	0.14, 0.31, 0.39, 0.56, 0.70		$Pd^{113} \rightarrow \beta^-$; U $(d, \varnothing)$

	114	67	2 m	β^-				Cd^{114} (n, p)
	114	67	5 s	β^-	4.6	0.57		U $(d, \varnothing)$
	115	68	21,1 m	β^-	2.9	0.138, 0.227		Cd^{115} (n, p); Cd^{116} (γ, p); U $(n, \varnothing)$
	115^m	68	~20 s	[β^-]				$Pd^{115} \rightarrow \beta^-$; U $(d, \varnothing)$
	116	69	2,5 m	β^-	5.0	0.52, 0.70		U $(d, \varnothing)$
	117	70	1,1 m	[β^-]				U $(d, \varnothing)$
$_{48}Cd$	104	56	59 m	ε kein β^+		0.0667, 0.0835, 0.124, 0.134		Ag^{107} $(p, 4n)$
	105	57	54,7 m	ε, β^+	1.691, ~0.80	0.0255…2.32 ⟨20⟩ 0.308, 0.321, 0.347, 0.433		Ag^{107} $(p, 3n)$; Pd^{102} (α, n); Cd^{106} $(n, 2n)$
	106	58	$\geqq 6 \cdot 10^{16}$ a	$\beta\beta^+$				(in der Natur)
	107	59	6,7 h	ε, β^+	0.32	0.846; m. Is in Ag^{107m}: 0.093	e^-	Ag^{107} (p, n); Ag^{107} $(d, 2n)$; Ag^{107} $(\alpha, p\,3n)$; Cd^{106} (n, γ); Sb $(d, ♂)$
	109	61	470 d	ε kein β^+		m. Is in Ag^{109m}: 0.0875	e^-	Ag^{109} $(d, 2n)$; Ag^{107} (α, pn); Ag^{109} $(\alpha, p\,3n)$; Pd^{106} (α, n); Cd^{106} (n, γ); Sb $(d, ♂)$
	111^{m_1}	63	a) $0{,}84 \cdot 10^{-7}$ s b) $1{,}22 \cdot 10^{-7}$ s	Is		m. Is: 0.247		$Ag^{111} \rightarrow \beta^-$; $In^{111} \leftarrow \varepsilon$; $Cd^{111m_2} \rightarrow$ Is
	111^{m_2}	63	48,6 m	Is		m. Is: 0.150; m. Is in Cd^{111m_1}: 0.247	e^-	Pd^{108} (α, n); Ag^{109} (α, pn); Cd^{111} (n, n); Cd^{112} $(n, 2n)$; Cd^{110} (n, γ); Cd^{111} (e^-, e^-); Cd^{111} (γ, γ'); U $(n, \varnothing)$
	113^m	65	a) 3,5 a b) 5,1 a	β^-	0.58	m. Is: 0.265		Cd^{112} (d, p); Cd^{112} (n, γ); U^{235} $(n, \varnothing)$
	115	67	53 h	β^-	1.11, 0.86, 0.63, 0.59	0.230, 0.260, 0.263, 0.335, 0.490, 0.523	e^-	Cd^{114} (d, p); Cd^{114} (n, γ); Cd^{116} $(n, 2n)$; Cd^{116} (γ, n); In^{115} (n, p); $Ag^{115} \rightarrow \beta^-$; Sb $(d, ♂)$; Bi, Th $(p, \varnothing)$; U $(\varnothing)$
	115^m	67	42,6 d	β^-	1.61, 0.68, 0.31, 0.19	0.49, 0.94, 1.30; [m. Is: 0.18]		Cd^{114} (d, p); Cd^{114} (n, γ); In^{115} (n, p); Sb $(d, ♂)$; Bi, Th $(p, \varnothing)$; U $(\varnothing)$; Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	116	68	$\geqq 6 \cdot 10^{16}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{48}$Cd	117	69	∼ 50 m	β^-	∼ 1.8	Cd^{117} und Cd^{117m}: 0.267, 0.281, 0.43, 0.84, 1.27, 1.55, 2.00;		Cd^{116} (d, p); Cd^{116} (n, γ); U $(n, \varnothing)$
	117m	69	3,0 h	Is		(m. Is in In^{117m}: 0.311)		Cd^{116} (d, p); Cd^{116} (n, γ); Th $(p, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	118	70	50 m	β^-				U $(n, \varnothing)$
	119	71	∼ 10 m	β^-				Sn^{122} $(d, \alpha p)$; U $(d, \varnothing)$
	119	71	2,9 m	β^-				
⋮	121	73	3,5 m	[β^-]				Sn^{124} $(d, \alpha p)$; Sn^{124} (n, α); U $(d, \varnothing)$
$_{49}$In	107	58	30 m	β^+	2	0.22		Cd^{106} (p, γ); Cd^{106} (d, n)
	108	59	40 m	β^+	3.5	0.637		Ag^{107} $(\alpha, 3n)$
	108m	59	55 m	β^+, Is	2.31, 1.4	m. β^+: 0.330, 0.637, 0.878, 1.050; m. Is: 0.246		Cd^{108} $(d, 2n)$; Ag^{107} $(\alpha, 3n)$; Sn^{108} ← ε; Cs $(p, ♂)$
	109	60	4,30 h	ε, β^+	0.80, ∼ 0.3 ?	0.058…1.15 ⟨∼ 15⟩ 0.205, 0.227, 0.347, 0.427		Cd^{108} (p, γ); Cd^{108} (d, n); Cd^{106} (α, p); Ag^{107} $(\alpha, 2n)$
	109m	60	< 2 m	Is		0.658		Sn^{109} ⇄ ε, β^+
	110	61	66 m	β^+, ε	2.25	0.657		Cd^{110} (p, n); Cd^{110} $(d, 2n)$; Ag^{107} (α, n); Ag^{109} $(\alpha, 3n)$; Sn^{110} ← ε
	110m	61	4,9 h	ε, Is		m. Is: 0.121; m. ε: 0.657, 0.884, 0.937	e^-	Ag^{107} (α, n); Ag^{109} $(\alpha, 3n)$
	111	62	2,81 d	ε kein β^+		0.172, 0.247	e^-	Cd^{111} (p, n); Cd^{110} (d, n); Cd^{108} (α, p); Ag^{109} $(\alpha, 2n)$; Ag^{107} (α, γ); In^{113} $(n, 3n)$; Sb $(d, ♂)$
	112	63	14,5 m	β^-, β^+, ε	β^-: 0.656; β^+: 1.52	0.617, 0.710		Ag^{109} (α, n); In^{113} $(n, 2n)$; In^{112m} → Is
	112m	63	20,7 m	Is		m. Is: 0.155	e^-	Cd^{112} (p, n); Cd^{111} (d, n); Ag^{109} (α, n); In^{113} $(n, 2n)$

	113m	64	1,73 h	Is		0.393	e^-	Cd^{113} (p, n); Cd^{112} (d, n); In^{113} (n, n); In^{113} (γ, γ'); Sn^{113} ← ε
	114	65	72 s	β^-, ε, β^+	β^-: 1.984, 0.71; β^+: (1.2), 0.40	m. β^-: 1.299		Cd^{114} (p, n); In^{115} (n, 2n); In^{113} (n, γ); In^{115} (γ, n); Sb (d, ♂); Sb (α, ♂)
	$114m_1$	65	49 d	Is, ε		m. Is: 0.191; m. ε: 0.556, 0.723, 0.128?; (m. β^- in In^{114}: 1.299)	e^-	Cd^{114} (p, n); Cd^{113} (d, n); In^{113} (d, p); In^{115} (n, 2n); In^{113} (n, γ); In^{115} (γ, n)
	$114m_2$	65	0,042 s	Is		0.311		In^{115} (γ, n)
	115	66	$6 \cdot 10^{14}$ a	β^-	0.63			(in der Natur)
	115m	66	4,50 h	Is, β^-	0.83	0.335	e^-	Cd^{114} (d, n); In^{115} (p, p); In^{115} (α, α); In^{115} (n, n); In^{115} (e^-, e^-); In^{115} (γ, γ'); Cd^{115} → β^-; Th, U (n, ∅)
	116	67	13 s	β^-	3.29	kein γ		Cd^{116} (p, n); In^{115} (d, p); In^{115} (n, γ); Sn^{117} (γ, p)
	116m	67	53,99 m	β^-	1.00, 0.87, 0.60	0.135, 0.410, 0.82, 1.10, 1.30, 1.51, 1.77; 2.12		Cd^{116} (p, n); In^{115} (d, p); In^{115} (n, γ)
	117	68	1,1 h	β^-	0.740	0.161, 0.565	e^-	Cd^{117} → β^-; U (n, ∅)
	117m	68	1,90 h	β^-, Is	1.772, 1.616	m. β^-: 0.161; m. Is: 0.311	e^-	Cd^{116} (d, n); Sn^{118} (γ, p); Cd^{117} → β^-; Th (p, ∅); U, Pu^{239} (n, ∅)
	118	69	4,5 m	β^-	1.5	γ vorh.		Sn^{119} (γ, p)
	118	69	5,5 s	β^-	4.4			Cd^{118} → β^-
	119	70	17,5 m	β^-	2.7	0.4		Sn^{120} (γ, p); Cd^{119} (∼ 10 m) → β^-; Cd^{119} (2.9 m) → β^-
⋮	120m?	71	∼ 55 s	[β^-]		∼ 1		Sn^{120} (n, p)
⋮	121	72	32 m	[β^-]	0.52			Cd^{121} → β^-
⋮	121	72	11,5 m	[β^-]	0.85			Cd^{121} → β^-

Symbol und Z 1	A 2	N 3	Halbwertszeit $T_{1/2}$ 4	Umwandlung 5	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen 6	γ-Strahlung 7	Erzeugungsreaktionen 8
$_{50}Sn$	108	58	9 m	[ε]			Cd^{106} (α, 2n)
	109	59	18,1 m	ε, β^+	∼ 1.6	0.335, 0.521, 0.658, 0.887, 1.12	Cd^{106} (α, n)
	110	60	4,0 h	ε		0.283 e^-	Cd^{108} (α, 2n)
	111	61	35,0 m	ε, β^+	1.51		Cd^{108} (α, n); Cd^{110} (α, 3n)
	113	63	a) 112 d b) 119 d	ε kein β^+		innere Bremsstr., E_{max}: 0.10; m. Is in In^{113m}: 0.39$\bar{2}$; γ: 0.257, (0.605)	In^{113} (p, n); In^{113} (d, 2n); Cd^{110} (α, n); Sn^{112} (d, p); Sn^{112} (n, γ); Sn^{114} (γ, n); Sb (d, ♂)
	117m	67	14,0 d	Is		0.159, 0.162, 0.321 e^-	Sn^{116} (d, p); Sn^{118} (n, 2n); Sn^{117} (n, n); Sn^{116} (n, γ); Cd^{114} (α, n); Sb (d, ♂)
	119m	69	275 d	Is		0.0242, 0.0653 e^-	Sn^{118} (n, γ)
	121	71	27,5 h	β^-	0.383	kein γ	Sn^{120} (d, p); Sn^{122} (n, 2n); Sn^{120} (n, γ); Sb^{123} (d, α); Th, U (α, $\varnothing$)
	121m	71	> 400 d	β^-	0.42		Sn^{120} (n, γ)
	123	73	39,5 d	β^-	1.26	0.153	Sn^{122} (d, p); Sn^{124} (d, t); Sn^{124} (n, 2n); Sn^{122} (n, γ); Sn^{124} (γ, n)
	123	73	∼ 130 d	β^-	1.42	kein γ	Sn^{122} (d, p); Sn^{124} (d, t); Sn^{124} (n, 2n); Sn^{122} (n, γ); Th (α, $\varnothing$); U (n, $\varnothing$)
	124	74	1,5 · 10^{17} a	$\beta\beta^-$	a) 1.0…1.5 b) [2.4]		(in der Natur)
	125	75	9,7 d	β^-	2.35, 1.28, 0.94 ?, 0.47, 0.38	0.342, 0.468, 0.811, 0.904, 1.068, 1.41, 1.97	Sn^{124} (d, p); Sn^{124} (n, γ); Th^{232} (d, $\varnothing$); U (n, $\varnothing$)
	125	75	9,5 m	β^-	a) 2.04, 1.17, 0.51 ? b) 2.04, 1.31, 0.660	0.326, 0.64, 1.07, 1.39	Sn^{124} (d, p); Sn^{124} (n, γ)
	126	76	∼ 50 m	β^-			U^{235} (n, $\varnothing$)
	127	77	2,1 h	β^-			U^{235} (n, $\varnothing$); Te^{130} (n, α)
	128	78	57 m	β^-			U (n, $\varnothing$)
	130	80	2,6 m	β^-			U (n, $\varnothing$)

	131	81	3,4 m	β^-				U (n, ∅)
	132	82	2,2 m	β^-				U (n, ∅)
	?		30 m	ε		1.3 ?		
	?		4,0 h	ε		0.25		
$_{51}$Sb	115	64	60 m	β^+	1.10, 0.75	0.060, 0.090		
	116	65	15,5 m	β^+	2.3, 1.5	0.90, 1.31, 2.22		In^{115} (α, $3n$); Sn (p)
	116^{m}	65	60 m	β^+, e	1.45	0.41, 0.95, 1.31		In^{115} (α, $3n$)
	117	66	2,8 h	ε, β^+	0.61	0.161		Sn^{117} (p, n); Sn^{116} (d, n); In^{115} (α, $2n$); Sb (d, ♂); Sb (α, ♂)
	118	67	5,1 h	ε, β^+ ?	0.7 ?	0.040, 0.256, 1.03, 1.22		Sn^{117} (d, n); In^{115} (α, n); Sb (d, ♂); Sb (α, ♂)
	118^{m}	67	3,5 m	β^+, Is?	3.10	0.108, 1.22		Sn^{118} (p, n); In^{115} (α, n); Te^{118} ← ε
	119	68	38,0 h	ε		innere Bremsstr., E_{max}: 0.53; γ: 0.0238	e^-	Sn^{119} (p, n); Sn^{118} (d, n); Sn^{120} (d, $3n$); Te^{119} ← ε; Sb (d, ♂)
	120	69	16,4 m	β^+, ε	2.4 ?, 1.70	a) 1.18 b) 0.90, 1.30, 2.20		Sn^{120} (p, n); Sn^{119} (d, n); Sn^{120} (d, $2n$); Sb^{121} (p, pn); Sb^{121} (d, $p2n$); Sb^{121} (n, $2n$); Sb^{121} (γ, n)
	120^{m}	69	5,8 d	ε kein β^+ kein Is		0.089, 0.199, 1.04, 1.18		Sb^{121} (d, p $2n$); Sn^{120} (d, $2n$); Bi^{209} (d, ∅)
	122	71	[1]) 65 h	β^-, ε, β^+ ?	β^-: 1.970, 1.40, 0.74; β^+: 0.57 ?	m. ε: 1.137; m. β^-: 0.566, 0.686, 1.258	e^-	Sn^{122} (p, n); Sn^{122} (d, $2n$); Sb^{121} (d, p); Sb^{121} (n, γ); Sb^{123} (γ, n); Sb (d, ♂); Bi^{209} (d, ∅); Bi^{209} (α, ∅)
	122^{m}	71	3,5 m	Is		0.0607, 0.0753	e^-	Sb^{121} (n, γ)
	124	73	60,9 d	β^-	2.30, 1.602, 0.966, 0.61, 0.24	0.605 … 2.28 ⟨~ 15⟩ 0.605, 0.723, 1.695	e^-	Sn^{124} (p, n); Sn^{124} (d, $2n$); Sb^{123} (d, p); Sb^{123} (n, γ); Te^{126} (d, α); J^{127} (n, α); Sb (α, ♂); Bi^{209} (d, ∅)
	124^{m_1}	73	1,3 m	Is, β^-	3.2	0.012		Sb^{123} (n, γ)
	124^{m_2}	73	21 m	Is, β^-		0.0185		Sb^{123} (n, γ)

[1]) Die von M. J. GLAUBMAN, Phys. Rev. 98, 645 (1955), und Phys. Rev. 99, 659 A (1955), angegebene β^+-Strahlung (0.565 MeV) konnte von B. FARRELLY, L. KOERTS u. a., Phys. Rev. 99, 1440 (1955), nicht bestätigt werden; letztere geben für eine etwaige β^+-Strahlung, die theoretisch möglich ist, eine obere Grenze von $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ für I_{β^+}/I_{β^-} an.

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{51}$Sb	125	74	a) 2,0 a b) 2,7 a	β^-	a) 0.612, 0.444, 0.300, 0.13 b) 0.616, 0.299, 0.128	0.113…0.637 (11) 0.427, 0.463, 0.595	e^-	Sn^{124} (d, n); $Sn^{125} \rightarrow \beta^-$; U (n, ∅)
	126	75	18,8 m	β^-		0.420, 0.650		Te^{128} (d, α); Te^{126} (n, p); U (d, ∅)
	126	75	9 h	β^-	∼ 1	∼ 0.4, 0.90		U^{235} (n, ∅)
	127	76	a) 88 h b) 93 h	β^-	1.57, [1.11, 0.86]	0.058, 0.185, 0.240, 0.417, 0.456, 0.563, 0.674, 0.764		$Sn^{127} \rightarrow \beta^-$; U, Pu (∅)
	128	77	9,6 h	β^-		0.32, 0.75		Te^{128} (n, p); Te^{130} (d, α)
	128	77	10,3 m	β^-	2.9	0.32, 0.75		Te^{128} (n, p); Te^{130} (d, α); $Sn^{128} \rightarrow \beta^-$
	129	78	a) 4,2 h b) 4,6 h	β^-	1.87	0.165, 0.308, 0.534, 0.788		U, Pu (∅)
	130	79	33 m	β^-				U (∅)
	130	79	7,1 m	β^-	2.9			U (∅); $Sn^{130} \rightarrow \beta^-$
	131	80	23,1 m	β^-				U (∅)
	132	81	2,1 m	β^-				U (∅)
	133	82	4,4 m	β^-				Th, U (∅)
	134	83	45 s	β^-				Th, U (∅)
$_{52}$Te	117 ?	65	2,5 h	β^+	2.5			Sb (d, ♂); Sb (α, ♂)
	118	66	6,0 d	ε		kein γ		Sb^{121} (d, 5n); Bi^{209} (d, ∅)
	119	67	4,5 d	ε		1.6	e^-	Sb^{121} (d, 4n); Bi^{209} (d, ∅); Bi^{209} (α, ∅)
	121	69	17 d	ε		0.070, 0.506, 0.575, 1.13		Sb^{121} (p, n); Sb^{121} (d, 2n); $J^{121} \rightarrow \beta^+$
	121^m	69	154 d	Is		m. Is: 0.0818; γ: 0.214	e^-	Sb^{121} (p, n); Sb^{121} (d, 2n); Sn^{118} (α, n); Te^{120} (n, γ); Bi^{209} (d, ∅)

	123m	71	a) 104 d b) 121 d	Is		m. Is: 0.0887; γ: 0.159	e^-	Sb^{123} $(d, 2n)$; Te^{122} (n, γ)
	125m	73	58 d	Is		m. Is: 0.110; γ: 0.0355	e^-	Te^{124} (n, γ); $Sb^{125} \rightarrow \beta^-$
	127	75	9,4 h	β^-	0.695, (0.492), (0.325), 0.277	0.0585, 0.145, 0.203, 0.215, 0.360, 0.418		Te^{126} (d, p); Te^{126} (n, γ); Te^{128} $(n, 2n)$; J^{127} (n, p); $Sb^{127} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	127m	75	113 d	Is, β^-	0.726, (0.119)	m. Is: 0.089; m. β^-: 0.059, 0.665	e^-	Te^{126} (d, p); Te^{126} (n, γ); J^{127} (n, p); $Sb^{127} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	129	77	74 m	β^-	1.453, 0.989, 0.69, 0.29	0.027, 0.212, 0.475, 0.725, 1.12		Te^{128} (d, p); Te^{128} (n, γ); Te^{130} $(n, 2n)$; Te^{130} (γ, n); $Sb^{129} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	129m	77	a) 41 d b) 33,5 d	Is, β^- ?	1.53 ?	m. Is: 0.106	e^-	Te^{128} (d, p); Te^{128} (n, γ); Te^{130} $(n, 2n)$; Te^{130} (γ, n); U $(n, \varnothing)$
	130	78	$\sim 10^{21}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	131	79	24,8 m	β^-	2.14, 1.69, 1.35	0.145, 0.450, 0.595, 0.950, 1.14		Te^{130} (d, p); Te^{130} (n, γ); $Sb^{131} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	131m	79	30 h	β^-, Is	2.46, 0.98, 0.57, 0.42	m. Is: 0.180; m. β^-: 0.051 ··· 1.63 ⟨12⟩ 0.147, 0.331, 0.446	e^-	Te^{130} (d, p); Te^{130} (n, γ); $Sb^{131} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	132	80	77,7 h	β^-	0.22	0.053, 0.231		Te^{130} $(\alpha, 2p)$; $Sb^{132} \rightarrow \beta^-$; Th, U $(n, \varnothing)$
	133	81	2 m	β^-	2.4, 1.3	0.6, 1.0		Th, U $(n, \varnothing)$
	133m	81	63 m	β^-, Is		0.334		$Sb^{133} \rightarrow \beta^-$; U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	134	82	44 m	β^-				Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	135	83	< 2 m	β^-				Th, U $(n, \varnothing)$
$_{53}$J ⋮	118	65	~ 10 m					
	119	66	19 m	β^+	4.0			Sb^{121} $(\alpha, 6n)$; Pd^{110} $(N^{14}, 5n)$
	120	67	1,4 h	ε		γ vorh.		Sb^{121} $(\alpha, 5n)$
	121	68	1,6 h	β^+, ε	1.13	0.213		Sb^{121} $(\alpha, 4n)$; $Xe^{121} \rightarrow \beta^+$ (od. ε ?)
	122	69	3,5 m	β^+	3.12	kein γ		Te^{122} (p, n); Sb^{121} $(\alpha, 3n)$; $Xe^{122} \leftarrow \varepsilon$

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{53}$J	123	70	a) 13,0 h b) 13,5 h	ε kein β^+		0.159	e^-	Sb^{121} (α, 2n); Xe^{123} ⇄ β^+, ε
	124	71	4,1 d	ε, β^+	a) 2.20, 1.50, 0.67 b) 2.13, 1.53, 0.79	0.605 ··· 2.745 ⟨15⟩ 0.605, 0.73, 1.695		Te^{124} (p, n); Sb^{121} (α, n); Sb^{123} (α, 3n); Bi^{209} (∅)
	125	72	60,0 d	ε kein β^+		0.035		Te^{124} (d, n); Sb^{123} (α, 2n); Bi^{209} (∅)
	126	73	13,1 d	ε, β^-, β^+	β^-: 1.25, 0.865, 0.385; β^+: 1.11, 0.46	m. β^-: 0.386, 0.480, 0.86; m. β^+: 0.65, 0.75, (1.42)		Te^{126} (p, n); Te^{126} (d, 2n); Sb^{123} (α, n); J^{127} (n, 2n); J^{127} (γ, n); Bi^{209} (∅)
	128	75	24,99 m	β^-, ε	2.12, 1.67, 1.13	m. β^-: 0.445, 0.530, 0.975; m. ε: 0.740		Te^{128} (p, n); Te^{128} (d, 2n); J^{127} (n, γ)
	129	76	1,72 · 10^7 a	β^-	0.150	0.038	e^-	Te^{129} → β^-; U (n, ∅)
	130	77	12,5 h	β^-	1.020, 0.597	0.416, 0.536, 0.670, 0.740, 1.15	e^-	Te^{130} (p, n); Te^{130} (d, 2n); J^{129} (n, γ); Cs^{133} (n, α)
	131	78	8,07 d	β^-	0.812, 0.608, 0.335, 0.250	0.0801, 0.163, 0.284, 0.364, 0.637, 0.722	e^-	Te^{130} (d, n); Te^{131} → β^-; Th, U, Pu^{239} (n, ∅)
	132	79	2,30 h	β^-	2.12, 1.53, 1.16, 0.9	0.528, 0.624, 0.673, 0.777, 0.96, 1.16, 1.40, 1.96, 2.2		Te^{132} → β^-; Th, U (n, ∅)
	133	80	20,8 h	β^-	1.25, 0.4	0.53, 0.85, 1.4		Te^{133} → β^-; Th, U, Pu^{239} (n, ∅)
	134	81	52,5 m	β^-	2.5, 1.5	0.86, 1.10, 1.78		Te^{134} → β^-; Th, U, Pu^{239} (n, ∅)
	135	82	6,68 h	β^-	1.40, 1.00, 0.47	0.42, 0.86, 1.04, 1.14, 1.28, 1.46, 1.72, 1.80; (m. Is in Xe^{135m}: 0.53)		Te^{135} → β^-; Th, U, Pu^{239} (n, ∅)
	136	83	82,8 s	β^-	7.00, 5.62, 4.23, 2.73	0.20···3.18 ⟨16⟩ 0.27, 0.39, 1.321		U, Pu^{239} (n, ∅)

	137	84	a) 24,4 s b) 22,0 s	$\beta^-(n)$	n: 0.56			U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	138	85	a) 6.3 s b) 5,9 s	$\beta^-(n)$				U $(n, \varnothing)$
	139	86	a) 2,0 s b) 2,7 s	$\beta^-(n)$				U $(n, \varnothing)$
$_{54}$Xe	121	67	40 m	β^+		0.096		J^{127} $(p, 7n)$
	122	68	19,5 h	ε		0.182, 0.235		J^{127} $(p, 6n)$
	123	69	1,8 h	β^+, ε	1.7	0.148		J^{127} $(p, 5n)$
	125	71	18,0 h	ε kein β^+		0.055, 0.096, 0.106, 0.187, 0.243, 0.46		Te^{122} (α, n); Xe^{124} (n, γ)
	125m	71	55 s	Is		0.075, 0.110		Xe^{124} (n, γ); Cs^{125} $\rightleftarrows$ β^+, ε
	127	73	36,4 d	ε kein β^+		0.058, 0.1465, 0.1730, 0.2045, 0.3775		J^{127} (p, n); J^{127} $(d, 2n)$; Te^{124} (α, n); Xe^{126} (n, γ); Cs^{127} $\rightleftarrows$ ε, β^+
	127m	73	75 s	Is		0.125, 0.175	e⁻	J^{127} (p, n)
	129m	75	8,0 d	Is		0.040, 0.196	e⁻	Xe^{128} (n, γ)
	131m	77	12,0 d	Is		m. Is: a) 0.164 b) [0.084], 0.080	e⁻	Xe^{131} (n, n); J^{131} $\to \beta^-$; Cs^{131} $\leftarrow \varepsilon$?
	133	79	5,27 d	β^-	0.347	0.081	e⁻	Xe^{132} (d, p); Xe^{132} (n, γ); Xe^{134} $(n, 2n)$; Te^{130} (α, n); Cs^{133} (n, p); Ba^{136} (n, α); J^{133} $\to \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	133m	79	2,3 d	Is		0.234	e⁻	Xe^{132} (n, γ); J^{133} $\to \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	135	81	9,13 h	β^-	0.910, 0.548	0.250, 0.370, 0.61	e⁻	Xe^{134} (d, p); Xe^{134} (n, γ); Xe^{136} $(n, 2n)$; Ba^{138} (n, α); J^{135} $\to \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	135m	81	15,6 m	Is		0.53	e⁻	Xe^{134} (n, γ); Xe^{136} $(n, 2n)$; Ba^{138} (n, α); J^{135} $\to \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	137	83	3,8 m	β^-	3.5	0.26, 0.45		Xe^{136} (n, γ); J^{137} $\to \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	138	84	17 m	β^-	2.4	0.42, 0.51, 1.78, 2.01		J^{138} $\to \beta^-$; Th $(n, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	139	85	41 s	β^-				J^{139} $\to \beta^-$; Th $(n, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{54}$Xe	140	86	a) 16,0 s b) 9,8 s	β^-				Th $(n, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	141	87	a) 1,7 s b) 3 s	β^-				U $(n, \varnothing)$
	143	89	1,0 s	β^-				U $(n, \varnothing)$
	144	90	$\sim$ 1 s	β^-				U $(n, \varnothing)$
$_{55}$Cs	123	68	6 m	β^+				J^{127} $(\alpha, 8n)$
	125	70	45 m	β^+, ε	2.05	0.112		J^{127} $(\alpha, 6n)$
	126	71	1,6 m	β^+, ε	3.8	0.385		J^{127} $(\alpha, 5n)$
	127	72	6,25 h	ε, β^+	1.063, 0.685	0.124, 0.287, 0.411, (0.44), andere?		J^{127} $(\alpha, 4n)$; $Ba^{127} \to \beta^+$
	128	73	3,8 m	β^+, ε	3.0, 2.5, 1.5	0.44, 0.98		$Ba^{128} \leftarrow \varepsilon$
	129	74	30,7 h	ε kein β^+		0.040...0.585 ⟨9⟩ 0.371, 0.411, 0.545		J^{127} $(\alpha, 2n)$; $Ba^{129} \to \beta^+$
	130	75	30 m	β^+, ε, β^-	β^+: 1.97; β^-: 0.442	kein γ		J^{127} (α, n)
	131	76	9,6 d	ε kein β^+		innere Bremsstr., E_{max}: 0.33; kein γ		J^{127} (α, γ); $Ba^{131} \leftarrow \varepsilon$
	132	77	6,2 d	ε		0.669, 1.08, 1.20, 1.30	e^-	Cs^{133} (p, pn), Cs^{133} $(n, 2n)$
	134	79	2,1 a	β^-	0.683, 0.655, 0.31, 0.215, 0.083, (0.030)	0.202...2.03 ⟨$\sim$ 15⟩ 0.569, 0.605, 0.796	e^-	Cs^{133} (d, p); Cs^{133} (n, γ); Ba^{136} (d, α)
	134m	79	3,15 h	Is, β^-	0.55	m. Is: 0.127, 0.137; γ: 0.0105	e^-	Cs^{133} (d, p); Cs^{133} (n, γ)
	135	80	$3{,}0 \cdot 10^6$ a	β^-	0.21	kein γ		$Xe^{135} \to \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	136	81	12,9 d	β^-	0.657, 0.341	0.067, 0.153, 0.162, 0.265, 0.335, 0.822, 1.04, 1.24		Ba^{138} (d, α); La^{139} (n, α); Th, U, Pu $(n, \varnothing)$

	137	82	a) 26,6 a b) 30,0 a	β^-	1.17, 0.514	(m. Is in Ba^{137m}: 0.662)	e^-	$Xe^{137} \to \beta^-$; Th, U, Pu (n, ∅)
	138	83	32,1 m	β^-	3.40, [2.94, 2.62, 2.53, 2.39, 2.20, 1.49]	0.139…3.34 ⟨12⟩ 0.463, 1.010, 1.426		Ba^{138} (n, p); $Xe^{138} \to \beta^-$; Th, Pa, U (n, ∅)
	139	84	9,5 m	β^-	3.17			$Xe^{139} \to \beta^-$; Th, U (n, ∅)
	140	85	66 s	β^-				$Xe^{140} \to \beta^-$; U (n, ∅)
	141	86	kurz	[β^-]				$Xe^{141} \to \beta^-$; U (n, ∅)
	142	87	∼ 1 m	β^-				U (n, ∅)
	143	88	kurz	[β^-]		0.12, 0.29		$Xe^{143} \to \beta^-$; U (n, ∅)
⋮	144	89	kurz	[β^-]				$Xe^{144} \to \beta^-$; U (n, ∅)
$_{56}$Ba	126	70	97 m	ε		0.23, 0.70, ∼ 0.9 ?		In^{115} (N^{14}, $3n$)
	127	71	12 m	β^+				Cs^{133} (d, $8n$); Cs^{133} (p, $7n$)
	128	72	2,4 d	ε		0.270		Cs^{133} (d, $7n$); Cs^{133} (p, $6n$)
	129	73	2,45 h	β^+, ε	1.6	0.127, 0.182, 0.210, 1.45		Cs^{133} (p, $5n$); Ba^{130} (n, $2n$)
	131	75	11,5 d	ε kein β^+		0.083…1.03 ⟨9⟩ 0.122, 0.214, 0.372, 0.496	e^-	Ba^{130} (d, p); Ba^{130} (n, γ); Cs^{133} (p, $3n$); Bi^{209} (d, ∅)
	133	77	a) 9,5 a b) 7,2 a	ε kein β^+		0.053…0.436 ⟨10⟩ 0.081, 0.302, 0.355		Ba^{132} (n, γ); Cs^{133} (d, $2n$)
	133m	77	38,8 h	Is		m. Is: 0.276; γ: 0.0117	e^-	Cs^{133} (p, n); Cs^{133} (d, $2n$); Ba^{134} (n, $2n$); Ba^{134} (γ, n); Bi^{209} (d, ∅)
	135m	79	28,7 h	Is		m. Is: 0.265	e^-	Ba^{134} (d, p); Ba^{135} (n, n); Ba^{136} (n, $2n$); Ba^{134} (n, γ)
	137m	81	2,60 m	Is		m. Is: 0.662	e^-	Ba^{138} (n, $2n$); Ba^{137} (n, n); $Cs^{137} \to \beta^-$
	138	82	$> 10^{15}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	139	83	85,0 m	β^-	2.380, 2.227, 0.822	0.163, 1.43	e^-	Ba^{138} (d, p); Ba^{138} (n, γ); La^{139} (n, p); Ce^{142} (n, α); $Cs^{139} \to \beta^-$; Th, U, Pu (n, ∅)
	140	84	a) 12,8 d b) 13,4 d	β^-	1.022, 0.480	0.0296, 0.119 ?, 0.132, 0.162, 0.304, 0.422 ?, 0.436, 0.537		Ba^{139} (n, γ); $Cs^{140} \to \beta^-$; U (d, ∅); Th, U, Pu (n, ∅)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{56}$Ba	141	85	18 m	β^-	2.8	0.120, 0.190, 0.29, 0.35, 0.460, 0.64, 0.74		$Cs^{141} \rightarrow \beta^-$; Th, U $(n, \varnothing)$
	142	86	11 m	β^-	∼ 4	0.080, 0.26, 0.890, 0.97, 1.08, 1.20, 1.36, 1.68		$Cs^{142} \rightarrow \beta^-$; Th, U $(n, \varnothing)$
	143	87	< 30 s	β^-				$Cs^{143} \rightarrow \beta^-$; Th, U $(n, \varnothing)$
⋮	144	88	kurz	β^-				$Cs^{144} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
$_{57}$La	131	74	58 m	β^+	1.6			Ba (p, ♂)
	132	75	4,5 h	β^+	3.8	1.0		Ba (p, ♂)
	133	76	4,0 h	ε, β^+	1.2	0.8	e^-	Cs^{133} $(\alpha, 4n)$; $Ce^{133} \rightleftarrows \varepsilon, \beta^+$
	134	77	6,5 m	ε, β^+	2.7	kein γ		$Ce^{134} \leftarrow \varepsilon$
	135	78	19,8 h	$\varepsilon, (\beta^+)$		0.104 ··· 0.862 ⟨9⟩ 0.481, 0.588, 0.862	e^-	Ba^{135} (p, n); Ba^{134} (d, n); Cs^{133} $(\alpha, 2n)$; $Ce^{135} \leftarrow \varepsilon$
	136	79	9,5 m	ε, β^+	2.1			Ba^{135} (d, n); Ba^{136} $(d, 2n)$; Cs^{133} (α, n)
	137	80	$6 \cdot 10^4$ a	ε		kein γ		$Ce^{137} \leftarrow \varepsilon$
	138	81	$1,1 \cdot 10^{11}$ a	ε, β^-	0.21	0.81, 1.44		(in der Natur)
	140	83	40,2 h	β^-	2.20, 1.62, 1.36, 1.15, 0.86, 0.42	0.110 ··· 2.53 ⟨∼ 12⟩ 0.486, 0.816, 1.60	e^-	La^{139} (d, p); La^{139} (n, γ); Ce^{140} (n, p); $Ba^{140} \rightarrow \beta^-$; Th, U, Pu $(n, \varnothing)$
	141	84	3,85 h	β^-	a) 2.5 b) 2.43, 0.91	1.37		La^{140} (n, γ); $Ba^{141} \rightarrow \beta^-$; Th, U $(n, \varnothing)$
	142	85	85 m	β^-	∼ 4.4	0.64 ··· 3.65 ⟨14⟩ 0.640, 0.900, 2.40		$Ba^{142} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	143	86	19 m	β^-				$Ba^{143} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
⋮	144	87	kurz	$[\beta^-]$				$Ba^{144} \rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
$_{58}$Ce	131	73	30 m	β^+	4.2			Ce^{142} (p, ♂)
	132	74	4,2 h	β^+				Ce^{142} (p, ♂)
	133	75	6,3 h	ε, β^+	1.3	1.8		La^{139} $(p, 7n)$

	134	76	72.0 h	ε		kein γ		La^{139} $(p, 6n)$
	135	77	22 h	ε, β^+	0.81			La^{139} $(p, 5n)$; La^{139} $(d, 6n)$; $Pr^{135} \rightleftarrows \beta^+, \varepsilon$
	137	79	8,7 h	ε		0.010, 0.445	e^-	Ce^{136} (n, γ); Ba (α, xn)
	137m	79	34,6 h	Is, ε		m. Is: 0.255	e^-	La^{139} $(p, 3n)$; La^{139} $(d, 4n)$; Ce^{136} (n, γ)
	139	81	140 d	ε		0.166, 0.275 ?	e^-	La^{139} $(d, 2n)$; La^{139} (p, n); Ba^{136} (α, n); Ce^{138} (n, γ); $Pr^{139} \rightleftarrows \varepsilon, \beta^+$; Bi^{209} $(d, \varnothing)$
	139m	81	55 s	Is		m. Is: 0.74	e^-	Ce^{140} $(n, 2n)$; Ce^{140} (γ, n)
	141	83	32,5 d	β^-	a) 0.591, 0.447 b) 0.574, 0.432	a) 0.145 b) 0.142	e^-	Ce^{140} (d, p); Ce^{140} (n, γ); Ce^{142} $(n, 2n)$; Ba^{138} (α, n); Pr^{141} (n, p); Bi^{209} $(d, \varnothing)$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	142	84	$5 \cdot 10^{15}$ a	α	1.5			(in der Natur)
	143	85	33,4 h	β^-	1.40, 1.13, 0.74, 0.50, 0.22	0.0574···1.10 ⟨10⟩ 0.0574, 0.294, 0.668		Ce^{142} (d, p); Ce^{142} (n, γ); $La^{143} \rightarrow \beta^-$; Th, U, Pu^{239} $(\varnothing)$
	144	86	282 d	β^-	0.320, 0.245, 0.184	0.0334, 0.0408, 0.0532, 0.0590, 0.0799, 0.0950, 0.1335, 0.1452	e^-	$La^{144} \rightarrow \beta^-$; Th, U, Pu^{239} $(\varnothing)$
	145	87	3,0 m	β^-	2.0	γ vorh.		U $(n, \varnothing)$
	146	88	13,9 m	β^-	0.7	(0.05), 0.110, 0.142, 0.22, (0.25), 0.27, 0.32		U $(n, \varnothing)$
$_{59}$Pr	135	76	22 m	β^+, ε	2.5	0.08, 0.22, 0.30		Ce^{136} $(p, 2n)$
	136	77	70 m	β^+	2.0	0.17, (0.80) ?, (1.1) ?		Ce^{136} (p, n)
	137	78	1,4 h ?	ε, β^+	1.8	kein γ		Ce^{140} $(p, 4n)$
	138	79	2,0 h	ε, β^+	1.4	0.3, 0.8, 1.05, $\sim$ 1.4 ?, $\sim$ 1.7 ?	e^-	Ce^{140} $(p, 3n)$
	139	80	4,5 h	ε, β^+	1.0	1.3, 1.6		Ce^{140} $(p, 2n)$; Nd^{142} (p, α)
	140	81	3,4 m	β^+, ε	2.23	kein γ		Ce^{140} (p, n); Pr^{141} $(n, 2n)$; Pr^{141} (γ, n); $Nd^{140} \leftarrow \varepsilon$
	142	83	19,2 h	β^-	2.166, 0.586	1.572		Pr^{141} (d, p); Pr^{141} (n, γ); Ce^{142} (p, n); Ce^{142} $(d, 2n)$; La^{139} (α, n); Nd^{143} (n, p)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{59}$Pr	143	84	13,7 d	β^-	0.93	kein γ		Ce^{142} (d, n); Ce^{143} $\rightarrow \beta^-$; U $(d, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	144	85	17,27 m	β^-	2.996, 2.299 0.807	0.0603 ?, 0.697, 1.49, 2.185	e^-	Ce^{144} $\rightarrow \beta^-$; Th, U, Pu^{239} $(n, \varnothing)$
	145	86	5,95 h	β^-	1.7	kein γ		Ce^{145} $\rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
	146	87	24,4 m	β^-	3.7, 2.3	0.46, 0.59 ?, 0.75, 1.49		Ce^{146} $\rightarrow \beta^-$; U $(n, \varnothing)$
$_{60}$Nd	138	78	22 m	β^+	2.4			Pr^{141} $(p, 4n)$
	139	79	5,50 h	ε, β^+	3.1	1.3	e^-	Pr^{141} $(p, 3n)$
	140	80	3,3 d	ε				Pr^{141} $(p, 2n)$; Pr^{141} $(d, 3n)$
	141	81	2,42 h	ε, β^+	0.78	m. ε: 0.038; m. β^+: 1.14, 1.30		Pr^{141} (p, n); Pr^{141} $(d, 2n)$; Nd^{142} $(n, 2n)$; Nd^{142} $(d, p\,2n)$; Nd^{142} (γ, n)
	144	84	$5 \cdot 10^{15}$ a	α	1.9			(in der Natur)
	147	87	a) 11,6 d b) 11,1 d	β^-	0.815, 0.53, 0.37, 0.22	0.0913…0.688 ⟨9⟩ 0.0913, 0.321, 0.533	e^-	Nd^{146} (d, p); Nd^{146} (n, γ); U $(d, \varnothing)$; U $(n, \varnothing)$
	149	89	1,8 h	β^-	1.5, 1.1, 0.95	0.0295…0.650 ⟨14⟩ 0.114, 0.211, 0.240	e^-	Nd^{148} (d, p); Nd^{148} (n, γ); Nd^{150} $(n, 2n)$; Sm^{152} (n, α)
	150	90	$> 2 \cdot 10^{18}$ a	$\beta\beta^-$ od. β^-				(in der Natur)
	151	91	a) 17 m b) 12 m	β^-	2.06, 1.82, 1.65, 1.19, (0.54), (0.24)	0.0854…2.17 ⟨27⟩ 0.1172, 0.1706, 0.2558	e^-	Nd^{150} (n, γ); Sm^{154} (n, α)
$_{61}$Pm	141	80	22 m	β^+, ε	2.6	0.195		Nd^{142} $(p, 2n)$; Pr^{141} $(\alpha, 4n)$
	142	81	40 s	β^+, ε	3.78			Nd^{142} (p, n); Pr^{140} $(\alpha, 2n)$
	143	82	270 d	ε		a) 0.740 b) 0.95	e^-	Nd^{143} (p, n); Nd^{142} (d, n); Pr^{141} $(\alpha, 2n)$

	144	83	200—400 d	ε		a) 0.475, 0.610, 0.695 b) 0.17, 0.44, 0.65	e^-	Nd^{144} (p, n); Pr^{141} (α, n)
	145	84	18 a	ε		0.067, 0.072	e^-	Sm^{145} ← ε
:	145	84	~ 16 d	β^+	0.45			Nd^{145} (p, n)
	146	85	~ 2 a	β^-	0.75			Nd^{146} (p, n)
	147	86	2,64 a	β^-	0.223	(0.121)		Nd^{147} → β^-; U (n, ∅)
	148	87	46 d	β^-	2.33, 1.14, 0.74, 0.42, 0.21, 0.125	0.105···1.200 ⟨10⟩ 0.560, 0.630		Nd^{148} (p, n); Nd^{148} (d, 2n); U (p, ∅)
	148	87	4,2 d	β^-	1.9, 1.0	0.560, 0.900, 1.460		Nd^{148} (p, n); Nd^{148} (d, 2n); Nd^{145} (α, p); Pm^{147} (n, γ)
	149	88	54 h	β^-	a) 1.05 b) [0.97]	0.285, (~ 1.3)		Nd^{150} (p, 2n); Nd^{148} (d, n); Sm^{149} (n, p); Sm^{150} (γ, p); Nd^{149} → β^-; U, Pu^{239} (n, ∅)
	150	89	2,7 h	β^-	3.00, 2.01	0.34···2.75 ⟨~ 10⟩ 0.34, 0.82, 1.17, 1.33		Nd^{150} (p, n); Nd^{150} (d, 2n)
	151	90	27,5 h	β^-	1.1	0.0647···1.50 ⟨~ 15⟩ 0.100, 0.340, 0.440		Nd^{151} → β^-; U (n, ∅)
	152	91	6,5 m	β^-		0.122, 0.245, ~ 1		Sm^{152} (n, p)
	153	92	< 5 m	β^-				U (n, ∅)
	154	93	2,5 m					Sm^{154} (n, p)
	156	95	< 5 m	β^-				U (n, ∅)
$_{62}Sm$	142	80	73 m	ε, β^+ ?		0.150···0.350 ⟨mehrere, sehr schwach⟩		Nd^{142} (α, 4n)
	143	81	8,6 m	β^+, ε	a) 2.3 b) 2.6	kein γ		Nd^{142} (α, 3n); Sm^{144} (n, 2n); Sm^{144} (γ, n)
	145	83	340 d	ε		innere Bremsstr., E_{max}: 0.53; γ: 0.0613, (0.485)	e^-	Sm^{144} (n, γ); Bi, Th, U (p, ∅)
	146	84	$5 \cdot 10^7$ a	α	2.55			Nd^{144} (α, 2n)
	147	85	$1,28 \cdot 10^{11}$ a	α	2.18			(in der Natur)
	151	89	a) 93 a b) 73 a	β^-	0.0759, [0.0542]	0.0217	e^-	Sm^{150} (n, γ); U (n, ∅)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{62}$Sm	153	91	47,1 h	β^-	0.82, 0.72, 0.65, 0.13 ?	0.070, 0.097, 0.103, 0.172, 0.540, 0.605	e^-	Sm^{152} (d, p); Sm^{152} (n, γ); Nd^{150} (α, n); Sm^{154} $(n, 2n)$; Sm^{154} (γ, n); U (∅)
	155	93	23,5 m	β^-	1.65, 1.50	0.105, 0.141, 0.246		Sm^{154} (d, p); Sm^{154} (n, γ); U, Pu $(n, ∅)$
	156	94	9,0 h	β^-	∼ 0,9			U $(n, ∅)$
$_{63}$Eu	144	81	18 m ?	β^+	2.4			Sm^{144} (p, n)
	145	82	5 d	ε		0.63, 0.66, 0.73, 0.89		Sm^{147} $(p, 3n)$; $Tb^{149} \rightarrow \alpha$
	146	83	38 h	ε		0.125, 0.570		Sm^{144} (α, pn); Sm^{147} $(d, 3n)$
	147	84	24 d	ε, (α) kein β^+	α: 2.9	0.080, 0.124, 0.200, 0.570	e^-	Sm^{147} (p, n); Sm^{147} $(d, 2n)$; Sm^{148} $(d, 3n)$; $Gd^{147} \leftarrow \varepsilon$
	148	85	54 d	ε kein β^+		0.58	e^-	Sm^{148} (p, n); Sm^{147} (d, n)
	149	86	120 d	ε ?		0.30 ?, 0.57 ?		Sm^{149} (p, n); Sm^{148} (d, n); $Gd^{149} \leftarrow \varepsilon$
	150	87	a) 13,7 h b) 15,0 h	β^-, β^+ ?	β^-: 1.07	kein γ		Sm^{150} (p, n); Eu^{151} $(n, 2n)$; Eu^{151} (γ, n)
	152	89	12,7 a	ε, β^-, β^+	β^-: 1.459, 1.050, 0.680, 0.36, 0.22; β^+: 0.715, 0.47	m. β^-: 0.345, 0.412, 0.690, 0.782, (1.10), (1.24); m. ε od. β^+: 0.122…1.413 ⟨∼ 15⟩, 0.122, 0.245		Eu^{151} (d, p); Eu^{151} (n, γ); Eu^{153} $(n, 2n)$
	152m	89	9,2 h	ε, β^-, β^+	β^-: 1.855, 1.511, [0.552], [0.146]; β^+: 0.895, 0.77	m. β^-: 0.344, 0.983, 1.315, 1.389; m. ε od. β^+: 0.1218, 0.842, 0.963, 1.41		Eu^{151} (d, p); Eu^{151} (n, γ); Eu^{153} $(n, 2n)$
	154	91	16 a	β^-	1.84, 1.60, 0.83, 0.55, 0.25, 0.15	0.123…1.6 ⟨12⟩ 0.123, 0.725, 1.277		Eu^{153} (d, p); Eu^{153} (n, γ); Pu $(n, ∅)$
	155	92	1,7 a	β^-	a) 0.240, 0.152 b) 0.252, 0.152	0.0189, 0.0265 ?, 0.0453, 0.0599, 0.0859, 0.0865, 0.105, 0.131		Sm^{154} (d, n); Eu^{154} (n, γ); $Sm^{155} \rightarrow \beta^-$; U $(n, ∅)$

	156	93	15,4 d	β^-	2.46, 0.45	0.0890, 0.199, 1.84, 1.94, 2.05, 2.14		Eu^{155} (n, γ); $Sm^{156} \rightarrow \beta^-$; U (∅) Pu^{239} (n, ∅)
	157	94	15,4 h	β^-	~ 1.7, ~ 1.0	0.2, 0.6		Th, U, Pu^{239} (∅)
	158	95	60 m	β^-	2.6	γ vorh.		U (n, ∅)
⋮	159	96	20 m					Gd^{160} (γ, p) ?
$_{64}$Gd	144 } 145 }	80 } 81 }	24 m	ε, β^+	2.5	0.780		Sm^{144} $(\alpha, 4n)$ od. $(\alpha, 3n)$
	146	82	7 h	α		0.22, 0.34, 0.55, 0.72		Sm (α)
	147	83	29 h	ε kein β^+		0.136···1.298 ⟨23⟩ 0.230, 0.370, 0.396	e^-	Sm^{147} $(\alpha, 4n)$; Sm^{144} (α, n)
	148	84	140 a	α	3.2			Eu^{151} $(p, 4n)$; Sm^{147} $(\alpha, 3n)$
	149	85	9,3 d	ε, (α)	3.10	0.107···0.937 ⟨18⟩ 0.150, 0.299, 0.347	e^-	Eu^{151} $(p, 3n)$; Sm^{147} $(\alpha, 2n)$
	150	86	> 10^5 a	α	2.8			Eu^{151} $(d, 3n)$
	151	87	150 d	ε kein β^+		0.0216, 0.080 ?, 0.154, 0.175, 0.244, 0.308		Eu^{151} $(d, 2n)$
	151^m	87	$5,8 \cdot 10^{-5}$ s	Is		0.175		
	152	88	$9,5 \cdot 10^{14}$ a	α	1.7			(in der Natur)
	153	89	236 d	ε		0.0698, 0.0833, 0.0973, 0.1031	e^-	Eu^{153} $(d, 2n)$; Gd^{152} (n, γ)
	159	95	18,0 h	β^-	0.94, 0.88, 0.58	0.056, 0.080, 0.136, 0.225, 0.305, 0.361	e^-	Gd^{158} (d, p); Gd^{158} (n, γ); Gd^{160} $(n, 2n)$; Gd^{160} (γ, n); U (d, ∅)
	161	97	3,73 m	β^-	1.60, 1.54, 1.44	0.0566···0.531 ⟨14⟩ 0.1024, 0.3153, 0.361	e^-	Gd^{160} (n, γ)
$_{65}$Tb	149	84	4,1 h	ε, α kein β^+	4.0			Eu^{151} $(\alpha, 6n)$; $Dy^{149} \leftarrow \varepsilon$; Gd, Tb, Dy (♂)
	151	86	20 h	ε, (α)	3.5	0.108, 0.180, 0.192, 0.252, 0.288	e	Eu^{151} $(\alpha, 4n)$; Gd, Tb, Dy (♂)
	152	87	18,5 h	ε		0.180, 0.265, 0.3441		Eu^{151} $(\alpha, 3n)$
	152	87	4.0 m	ε, β^+, α		0.140, 0.235		Gd^{152} (p, n); Eu^{151} $(\alpha, 3n)$

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{65}$Tb	153	88	a) 62 h b) 5,1 d ?	[ε]		0.04168···0.2497 ⟨12⟩ 0.08761, 0.1099, 0.2123	e^-	Eu^{151} (α, 2n); Eu^{153} (α, 4n)
	154	89	17,5 h	ε, β^+	2.75, 1.66	0.1232, 0.2481, 0.3471, 0.6918, 1.35 ? (vgl. 7.5 h-Tb^{154})	e^-	Eu^{151} (α, n); Eu^{153} (α, 3n); Gd^{154} (p, n); Gd^{155} (p, 2n)
	154	89	7,5 h	ε, β^+		0.123, 0.248, 0.347 ? (vgl. 17.5 h-Tb^{154})		Gd^{154} (p, n); Gd^{155} (p, 2n)
	155	90	5,6 d	[ε]		0.0188···0.368 ⟨19⟩ 0.0867, 0.105, 0.180	e^-	Eu^{153} (α, 2n)
	156	91	5,35 d	ε kein β^+		0.0891···2.06 ⟨~25⟩ 0.1994, 0.534, 1.216,		Eu^{153} (α, n); Gd^{156} (p, n); Gd^{157} (p, 2n); Tb^{159} (γ, 3n)
	156m	91	5,5 h	Is, ε, β^+, β^-	β^-: 0.14	0.0884	e^-	Eu^{153} (α, n); Gd^{156} (p, n); Gd^{157} (p, 2n); Tb^{159} (γ, 3n)
	157	92	[1]) 4,7 d	ε ?		1.4		Gd^{157} (p, n); Gd^{156} (d, n)
	158m	93	[2]) 11 s	Is		0.111		Tb^{159} (γ, n)
	160	95	72,3 d	β^- kein β^+	1.77, 0.87, 0.58, 0.46	0.064··· 1.447 ⟨29⟩ 0.087, 0.30, 0.88, 0.97	e^-	Tb^{159} (n, γ); Gd^{160} (d, 2n)
	161	96	a) 6,88 d b) 7,15 d	β^-	a) 0.61, 0.52, 0.46 b) 0.531, 0.447, 0.405	0.0257···0.132 ⟨11⟩ 0.0491, 0.0574, 0.0747	e^-	Gd^{160} (d, n); Gd^{161} → β^-
	162} 163}	97} 98}	14 m					Dy^{164} (γ, p)
	163	98	6,5 h					
	164	99	23 h					
$_{66}$Dy	149	83	8 m	ε od. β^+?				Pr^{141} (N^{14}, 6n)
	150	84	7 m	α	4.21			Nd (♂)
	151	85	19 m	α	4.06			Tb, Dy (♂)
	152	86	2,3 h	α	3.66			Gd^{152} (α, 4n); Nd (♂)
	153	87	5,0 h	α	3.48			Gd^{152} (α, 3n)
	154	88	13 h	α	3.37			Gd^{154} (α, 4n)

	155	89	10 h	ε		0.0654, 0.0904, 0.1154, 0.1558, 0.1614, 0.2057, 0.2270, 0.2714		Gd^{155} $(\alpha, 4n)$; Gd^{154} $(\alpha, 3n)$; Dy^{156} (p, pn)
	157	91	8,2 h	ε		0.0608, 0.0830, 0.144, 0.183, 0.266, 0.327	e^-	Tb^{159} $(p, 3n)$
	159	93	134 d	ε kein β^+		0.0580		Tb^{159} (p, n); Tb^{159} $(d, 2n)$; Dy^{158} (n, γ)
	165	99	2,32 h	β^-	1.31, 1.22, 0.305	0.0948, 0.275, 0.356, 0.555, 0.630, 0.708, 0.985		Dy^{164} (n, γ)
	165m	99	75 s	Is, (β^-)	(0.8)	m. Is: 0.108; m. β^-: 0.160, 0.360, 0.517	e^-	Dy^{164} (n, γ)
	166	100	82 h	β^-	0.22	< 0,05 ?		Dy^{165} (n, γ); U $(p, \varnothing)$
$_{67}$Ho	156	89	~ 1 h	ε od. β^+		0.138	e^-	Dy (p, xn)
	< 157	< 90	4 m	α	4.2			Dy (p)
	159	92	33 m	ε		0.125, 0.180, 0.250, 0.305		
	160	93	28 m	ε, β^+	1.3	0.0874···1.719 ⟨~ 30⟩ 0.0874, 0.1977, 0.298	e^-	Tb^{159} $(\alpha, 3n)$
	160m	93	5,0 h	Is		m. Is: 0.0601	e^-	Er^{160} ← ε
	161	94	2,5 h	ε		0.0257···0.1756 ⟨9⟩ 0.0257, 0.0775, 0.1032	e^-	Dy^{161} (p, n); Dy^{160} (d, n); Tb^{159} $(\alpha, 2n)$; Er^{161} ⇄ ε, β^+
	162	95	[3]) 67 m	[ε]	(β^+: 1.3 ?); (β^-: 0.8 ?)	0.0382, 0.0577, 0.0808, 0.185, 0.283		Dy (p)

[1]) Die von G. WILKINSON und H. G. HICKS, Phys. Rev. **79**, 815 (1950), angegebene 4,7 d-Aktivität $_{65}Tb^{157}$ konnte von T. H. HANDLEY und W. S. LYON, Phys. Rev. **99**, 1415 (1955), nicht bestätigt werden.

[2]) Die 11 s-Aktivität $_{65}Tb^{158m}$ mit Is wurde von C. L. HAMMER und M. G. STEWART, Phys. Rev. **106**, 1001 (1957), gefunden; T. H. HANDLEY und W. S. LYON, Phys. Rev. **99**, 1415 (1955), konnten für $_{65}Tb^{158}$ keine Aktivität zwischen 10 m und 5 a feststellen.

[3]) Die 67 m-Aktivität $_{67}Ho^{162}$ wurde von J. W. MIHELICH, B. HARMATZ und T. H. HANDLEY, Phys. Rev. **108**, 989 (1957), festgestellt; eine von G. WILKINSON und H. G. HICKS, Phys. Rev. **79**, 815 (1950), angegebene 65 d-Aktivität konnte von T. H. HANDLEY, Phys. Rev. **94**, 945 (1954), nicht bestätigt werden.

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{67}$Ho	163^m	96	[1]) 0,8 s			a) 0.299; b) 0.305		Ho^{165} (γ, 2n)
	164	97	36,7 m	ε, $β^-$ kein $β^+$	0.99	m. ε: 0.0730: m. $β^-$: 0.0913	e^-	Dy^{164} (p, n); Er^{167} (p, α); Ho^{165} (n, 2n); Ho^{165} (γ, n); Ho^{165} (p, pn)
	166	99	27,3 h	$β^-$	1.839, 1.756, 0.86 , 0.41, 0.23	0.0803, 0.970, 1.377, 1.540, 1.620	e	Ho^{165} (n, γ); Dy^{166} → $β^-$; U (∅)
	166^m	99	> 30 a	$β^-$	1.45, 1.00, 0.28, 0.18	0.0803, 0.105, 0.182, 0.275, 0.280, 0.409, 0.532, 0.700, 0.817		Ho^{165} (n, γ)
	167	100	3,0 h	$β^-$	0.96, 0..	0.35, 0.70		Er^{170} (p, α); Er^{167} (n, p)
⋮	169	102	96 m					Er^{170} (γ, p)
$_{68}$Er	160	92	29 h	ε kein $β^+$		kein γ		Ta (p, ∅); Ho^{160} ← ε
	161	93	a) 3,1 h b) 3,6 h	ε, $β^+$	1.2	0.065, 0.195 ?, 0.824, 1.12		Tm^{161} ← ε; U (∅)
	163	95	75 m	ε kein $β^+$		0.43, 1.10		Ho^{165} (p, 3n); U (∅)
	165	97	10,0 h	ε		1.1 ?		Ho^{165} (p, n); Ho^{165} (d, 2n); Dy^{164} (α, 3n)
	167^m	99	2,5 s	Is		0.208	e^-	Er^{166} (n, γ); Er^{168} (γ, n); Tm^{167} ← ε
	169	101	a) 9 d b) 9,4 d	$β^-$	0.33	0.0084 ?		Er^{168} (n, γ); Er^{170} (γ, n); U (n, ∅)
	171	103	a) 7,8 h b) 7,52 h	$β^-$	1.49, 1.05, 0.89, 0.55	0.0051···0.92 ⟨~ 20⟩ 0.1116, 0.296, 0.308		Er^{170} (n, γ)
	172	104	49,8 h	[$β^-$]				Er^{171} (n, γ)
$_{69}$Tm	161	92	~ 30 m	[ε]		0,0844, 0.1439, 0.1468, 0.1721	e^-	Er^{162} (p, 2n)
	163	94	2,0 h	[ε]		0.0222···0.656 ⟨20⟩ 0.0839, 0.1044, 0.2415	e^-	Er^{164} (p, 2n)
	165	96	a) 29 h b) 24,5 h	ε kein $β^+$		0.0155···1.381 ⟨~ 60⟩ 0.0545, 0.0772, 0.2433	e^-	Er^{166} (p, 2n)

	166	97	7,7 h	ε, β^+	2.1	0.0807, 0.1546, 0.1847, 0.1948, 0.2154, 0.69, 0.78, 1.32	e^-	Er^{166} (p, n); Ho^{165} $(\alpha, 3n)$; $Yb^{166} \leftarrow \varepsilon$; Ta, U $(p, \varnothing)$
	167	98	9,6 d	ε kein β^+		0.0571, 0.2082, 0.5322, 0.515?, 0.720 ?	e^-	Er^{167} (p, n); Ho^{165} $(\alpha, 2n)$; Ta^{181} $(d, \varnothing)$; $Yb^{167} \leftarrow \varepsilon$
	168	99	a) 87 d b) 85 d	ε, β^-?	0.5 ?	0.0799, 0.0999, 0.1846, 0.1987, 0.247, 0.448, 0.72, 0.82		Er^{168} (p, n); Ho^{165} (α, n); Tm^{169} $(n, 2n)$
	169m	100	$6{,}4 \cdot 10^{-7}$ s	Is		m. Is: 0.316		$Yb^{169} \leftarrow \varepsilon$
	170	101	129 d	β^-, ε	0.968. 0.884	0.0842	e^-	Tm^{169} (d, p); Tm^{169} (n, γ); Bi, U $(p, \varnothing)$
	171	102	680 d	β^-	a) 0.097, ~ 0.030 b) 0.103	0.0667	e^-	$Er^{171} \rightarrow \beta^-$
	171m	102	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$ s	Is		0.005, 0.012, 0.112, 0.117, 0.124, 0.296, 0.308		$Er^{171} \rightarrow \beta^-$
	172	103	63,6 h	β^-	1.5	0.076, (0.18), (0.40), 1.09, 1.44, 1.79		Yb^{173} (γ, p)?; $Er^{172} \rightarrow \beta^-$; U $(p, \varnothing)$
$_{70}Yb$	166	96	54 h	ε		0.112, 0.140		Ta (p, [illegible]); Bi, U $(p, \varnothing)$
	167	97	74 m	β^+				Ta (p, [illegible])
	167	97	18,5 m	ε kein β^+		0.0258···0.1762 ⟨9⟩ 0.0629, 0.1061, 0.1133		Tm^{169} $(p, 3n)$; $Lu^{167} \leftarrow \varepsilon$
	169	99	30,6 d	ε		0.0084···0.308 ⟨12⟩ 0.0631, 0.177, 0.198	e^-	Tm^{169} $(d, 2n)$; Yb^{168} (n, γ); Ta (p, [illegible]); U $(p, \varnothing)$
	171m	101	kurz	Is		m. Is: 0.0758	e^-	
	175	105	4,2 d	β^-	0.468, 0.355, 0.072	0.1138, 0.1377, 0.1449, 0.2513, 0.2826, 0.3961	e^-	Yb^{174} (n, γ); Yb^{176} (γ, n); Bi, U $(p, \varnothing)$
	177	107	1,9 h	β^-	1.40, 1.28, 1.25, 0.16	0.118, 0.140, 0.147, 0.95, 1.09, 1.12, 1.24		Yb^{176} (n, γ)

[1]) Die 0.8 s-Aktivität $_{67}Ho^{163m}$ wurde von C L. HAMMER und M. G. STEWART, Phys. Rev. 106, 1001 (1957), festgestellt; eine von G. WILKINSON und H. G. HICKS, Phys. Rev. 79, 815 (1950), angegebene 5,2 d-Aktivität $_{67}Ho^{163}$ konnte von T. H. HANDLEY, Phys. Rev. 94, 945 (1954), nicht bestätigt werden.

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{71}$**Lu**	167	96	54 m	[ε]		0.0297···0.401 ⟨13⟩ 0.1232, 0.2130, 0.2391	e^-	Yb^{168} (p, 2n)
	169	98	1,5 d	[ε]		0.02423···1.593 ⟨63⟩ 0.0628, 0.0709, 0.0874	e^-	Yb (p); Ta (p, ♂)
	170	99	a) 1,9 d b) 1,7 d	ε		0.084, 0.193, 0.245, 2.04	e^-	Tm^{169} (α, 3n); $Hf^{170} \rightarrow \beta^+$; Ta (d, ♂)
	171	100	∼ 1,6 a	ε		∼ 1	e^-	Tm^{169} (α, 2n); Yb^{171} (p, n); Ta (d, ♂)
	171	100	8,1 d	ε		0.0193···0.854 ⟨30⟩ 0.0557, 0.0667; m. Is in Yb^{171m}: 0.0758	e^-	Yb^{171} (p, n); Tm^{169} (α, 2n); $Hf^{171} \leftarrow \varepsilon$
	172	101	6,70 d	ε		0.0787···1.09 ⟨∼ 12⟩ 0.0787, 0.113, 0.182	e^-	Yb^{172} (p, n); Tm^{169} (α, n); $Hf^{172} \leftarrow \varepsilon$
	172m	101	4,0 h	β^+, ε ?	1.2			Yb^{172} (p, n); Tm^{169} (α, n)
	173	102	1,4 a	ε		0.0787...0.637 ⟨10⟩ 0.0787, 0.1007, 0.2724	e^-	Lu^{175} (p, p 2n); Yb^{173} (p, n); $Hf^{173} \leftarrow \varepsilon$
	174	103	165 d	ε, β^-	0.6	0.077, 0.084, 0.113, 0.176, 0.23, 0.275, 0.99, 1.245	e^-	Lu^{175} (p, pn); Lu^{175} (n, 2n); Hf^{176} (d, α)
	176	105	2,2 · 10^{10} a	β^-, ε ?	0.43	0.089, 0.203, 0.306		(in der Natur)
	176m	105	3,71 h	β^- kein Is	1.2	0.089		Lu^{175} (d, p); Lu^{175} (n, γ); Lu^{176} (γ, γ′)
	177	106	6,75 d	β^-	0.497, 0.384, 0.176	0.0716, 0.113, 0.208, 0.250, 0.321	e^-	Lu^{176} (d, p); Lu^{176} (n, γ)
	177m	106	1,2 · 10^{-7} s	Is		m. Is: 0.147	e^-	$Yb^{177} \rightarrow \beta^-$
	178 ?	107	18,7 m			0.342, 0.445		Ta^{181} (n, α); Hf^{179} (γ, p)
$_{72}$**Hf**	170	98	1,9 h	β^+	2.4	kein γ		Lu^{175} (p, 6n); Yb^{170} (α, 4n)
	171	99	16,0 h	ε		a) 0.18, 1.4 b) 0.63, 1.02	e^-	Lu^{175} (p, 5n); Yb^{170} (α, 3n)

	172	100	~ 5 a	ε		~ 0.28, 0.8	e^-	Lu^{175} $(p, 4n)$; Yb^{170} $(\alpha, 2n)$; Yb^{171} $(\alpha, 3n)$; Ta (♂)
	173	101	23,6 h	ε		0.0780···1.781 ⟨36⟩ 0.1238, 0.1350, 0.1398	e^-	Lu^{175} $(p, 3n)$; Yb^{170} (α, n); Yb^{171} $(\alpha, 2n)$; Yb^{172} $(\alpha, 3n)$
	174	102	4,3 · 10^{15} a	α	2.5			(in der Natur)
	175	103	70 d	ε		0.0894, 0.1138, 0.1613, 0.230, 0.319, 0.343, 0.433	e^-	Lu^{175} (p, n); Lu^{175} $(d, 2n)$; Hf^{174} (n, γ)
	179m	107	18,6 s	Is		m. Is: 0.161; γ: 0.217	e^-	Hf^{178} (n, γ)
	180m	108	5,5 h	Is		0.0576, 0.0933, 0.216, 0.332, 0.444, 0.501		Hf^{179} (n, γ)
	181	109	44,6 d	β^-	0.405	0.0039, 0.1330, 0.1363, 0.1369, 0.346, 0.476, 0.482, 0.616	e^-	Hf^{180} (n, γ); Ta^{181} (n, p)
	183	111	64 m	β^-	~ 1.4	γ vorh.		W^{186} (n, α)
$_{73}$Ta	176	103	8,0 h	ε kein β^+		0.0883, 0.202	e^-	Lu^{175} $(\alpha, 3n)$; Ta^{181} $(d, p\,6n)$; W^{176} ⇄ ε, β^+
	177	104	53 h	ε, (β^+)		0.113···1.07 ⟨9⟩ 0.113, 0.208, 0.321	e^-	Lu^{175} $(\alpha, 2n)$; Lu^{176} $(\alpha, 3n)$; Ta^{181} $(d, p\,5n)$; Hf^{177} (p, n); W^{177} ← ε
	178	105	2,5 h	ε, β^+	~ 1.0	0.091, 0.215, 0.325, 0.415	e^-	Hf^{178} (p, n); Lu^{175} (α, n); Ta^{181} $(p, p\,3n)$; Ta^{181} $(\gamma, 3n)$
	178^m	105	a) 9,35 m b) 9,5 m	ε, β^+	1.65	0.095, 1.160, 1.390, 1.480	e^-	Hf^{178} (p, n); Ta^{181} $(\gamma, 3n)$; W^{178} ← ε
	179	106	~ 600 d	ε			e^-	Hf^{179} (p, n); Ta^{181} $(p, p\,2n)$; Ta^{181} $(\gamma, 2n)$; Lu^{176} (α, n); W^{179} ← ε
	180	107	~ 2,0 · 10^{13}a	ε, β^-				(in der Natur)
	180m	107	8,15 h	ε, β^- kein β^+	0.705, 0.605	0.093, 0.102, (0.2), (0.4)	e^-	Ta^{181} (p, pn); Ta^{181} $(n, 2n)$; Ta^{181} (γ, n)
	181^{m_1}	108	1,1 · 10^{-6} s	Is		0.136, 0.346, 0.482		Ta^{181m_2} → Is
	181^{m_2}	108	1,9 · 10^{-5} s	Is		0.133, 0.615	e^-	Hf^{181} → β^-; Ta^{181} (γ, γ')

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{73}$Ta	182	109	115,1 d	β^-	0.512, 0.443, 0.36, 0.18	0.0334…1.454 ⟨27⟩ 0.0677, 1.122, 1.222	e^-	Ta^{181} (d, p); Ta^{181} (n, γ); W^{184} (d, α); W^{182} (n, p)
	182m	109	16,5 m	Is, β^-	0.6	0.180		Ta^{181} (n, γ)
	183	110	5,2 d	β^-	0.615	0.0410…0.407 ⟨29⟩ 0.108, 0.246, 0.354	e^-	W^{183} (n, p); W^{184} (γ, p)
	184	111	8,7 h	β^-	1.26, 0.15	0.110…1.18 ⟨9⟩ 0.24, 0.41, 0.89		W^{184} (n, p)
	185	112	48 m	β^-	1.72, 0.15	0.125, 0.175, 0.235	e^- ?	W^{186} (n, pn); W^{186} (γ, p)
	186	113	10,5 m	β^-	2.2	0.125…1.2 ⟨9⟩ 0.20, 0.51, 0.61, 0.73		W^{186} (n, p)
$_{74}$W	176	102	80 m	ε, β^+	∼ 2	∼ 1.3	e^-	Ta^{181} $(p, 6n)$
	177	103	2,17 h	ε		∼ 0.5, 1.2	e^-	Ta^{181} $(p, 5n)$; Ta^{181} $(d, 6n)$
	178	104	21,5 d	ε		0.057		Ta^{181} $(p, 4n)$
	179	105	30 m	ε		0.030		Ta^{181} $(p, 3n)$
	179m	105	5,2 m	ε, Is		0.22 ?		Ta^{181} $(p, 3n)$
	181	107	145 d	ε kein β^+		0.057 ?, 0.137, 0.153	e^-	Ta^{181} (p, n); Ta^{181} $(d, 2n)$; W^{180} (n, γ)
	181m	107	$1,47 \cdot 10^{-5}$ s	Is		0.368		W^{182} (γ, n)
	183m	109	5,5 s	Is		0.105, 0.155	e^-	W^{182} (n, γ); W^{184} (γ, n)
	185	111	75,8 d	β^-	0.435, 0.37 ?	a) kein γ b) 0.125 ?		W^{184} (d, p); W^{186} $(n, 2n)$; W^{184} (n, γ); Re^{187} (d, α)
	185m	111	a) 1,62 m b) 1,85 m	Is		0.130, 0.165	e^-	W^{186} (γ, n)
	186	112	$> 6 \cdot 10^{15}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	187	113	24,0 h	β^-	1.33, 0.63, 0.34	0.0721…0.866 ⟨14⟩ 0.136, 0.482, 0.686	e^-	W^{186} (d, p); W^{186} (n, γ); U $(\alpha, ♂)$
	188	114	69,5 d	β^-				W^{187} (n, γ)

$_{75}$Re	177	102	17 m	β^+	~ 2			W^{180} $(p, 4n)$; Re^{185} $(p, 9n)$
	178	103	15 m	β^+	3.1			W^{180} $(p, 3n)$; Re^{185} $(p, 8n)$
	180	105	20 h	β^+	1.9			W^{180} (p, n); Re^{185} $(p, 6n)$
	180^m	105	18 m	[ε]		0.227, 0.282		
	180^m	105	2,42 m	ε, β^+	1.1	0.10[illegible], 0.88		W^{182} $(p, 3n)$
	181	106	20 h	ε		0.0474···0.954 ⟨14⟩ 0.3655		Ta^{181} $(\alpha, 4n)$
	182	107	a) 64,0 h b) 60 h	ε		0.0199···1.454 ⟨~ 65⟩ 0.100, 1.122, 1.222	e^-	W^{182} (p, n); W^{182} $(d, 2n)$; Ta^{181} $(\alpha, 3n)$
	182	107	12,7 h	ε		0.0657···1.289 ⟨14⟩ 0.100, 1.122, 1.222	e^-	W^{182} (p, n); W^{182} $(d, 2n)$; Ta^{181} $(\alpha, 3n)$; $Os^{182} \leftarrow \varepsilon$
	183	108	a) 71 d b) 68 d	ε		0.0410···0.407 ⟨~ 25⟩ 0.0829, 0.162, 0.246	e^-	W^{183} (p, n); W^{182} (d, n); Ta^{181} $(\alpha, 2n)$; $Os^{183} \leftarrow \varepsilon$
	184	109	50 d	ε		0.0973···0.904 ⟨14⟩ 0.1112, 0.793, 0.904		W^{184} (p, n); W^{183} (d, n); W^{182} (α, pn); Ta^{181} (α, n)
	184^m	109	2,2 d	Is od. ε		0.043, 0.159	e^-	W^{184} (p, n); Ta^{181} (α, n)
	186	111	88,9 h	β^-, ε kein β^+	1.072, 0.934, 0.307	m. β^-: 0.137, 0.627, 0.764; m. ε: 0.1228		W^{186} (p, n); W^{186} $(d, 2n)$; Re^{185} (d, p); Re^{185} (n, γ); Re^{187} $(n, 2n)$; Re^{187} (γ, n)
	187	112	$4 \cdot 10^{12}$ a	β^-	< 0.008			(in der Natur)
	187^m	112	$5{,}3 \cdot 10^{-7}$ s	Is		0.072, 0.136, 0.206	e^-	$W^{187} \rightarrow \beta^-$
	188	113	16,7 h	β^-	2.13, 1.97	0.155···1.959 ⟨13⟩ 0.155, 0.478, 0.633	e^-	Re^{187} (d, p); Re^{187} (n, γ); U $(\alpha$, ♂$)$; $W^{188} \rightarrow \beta^-$
	188^m	113	a) 18,7 m b) 22 m	Is		0.0635, 0.105	e^-	Re^{187} (n, γ); Os^{189} (γ, p) ?
	189	114	a) 150 d b) ~ 280 d	β^-	0.2 ?	1.0 ?		W^{186} (α, p)
	190	115	2,8 m	β^-	1.7	0.191, 0.392, 0.569, 0,830		Os^{190} (n, p); Os^{192} (d, α)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{76}$**Os**	181	105	23 m	[ε]		0.166, 0.174		
	182	106	21,9 h	ε kein β^+		0.0276 ?, 0.0555, 0.180, 0.510		Re^{185} $(p, 4n)$
	183	107	a) 15,4 h b) 13,5 h	ε		0.114···0.890 ⟨13⟩ 0.114, 0.168, 0.382	e^-	Re^{185} $(p, 3n)$
	183m	107	10 h	Is, ε		m. Is: 0.171; m. ε: 0.0673, 0.486, 0.846, 1.036, 1.103, 1.109		Re (p, xn)
	185	109	93,6 d	ε kein β^+		0.075···0.878 ⟨10⟩ 0.643, 0.870, 0.878	e^-	Re^{185} (p, n); Re^{185} $(d, 2n)$; Os^{184} (d, p); Os^{184} (n, γ); W^{182} (α, n)
	189m	113	5,7 h	Is		0.0309		$Ir^{189} \leftarrow \varepsilon$
	190m	114	9,5 m	Is		m. Is: 0.0384: γ: 0.187, 0.359, 0.500, 0.614		Ir^{190} (3.2 h) $\rightarrow \beta^+$
	191	115	16,0 d	β^-	0.142	m. Is in Ir^{191m}: 0.0417; γ (Ir^{191}): 0.129	e^-	Os^{190} (d, p); Os^{190} (n, γ); Os^{192} $(n, 2n)$; Ir^{193} (d, α)
	191m	115	14 h	Is		0.0742	e^-	Os^{190} (n, γ); Os^{192} (γ, n)
	192	116	$> 10^{14}$ a	$\beta\beta^-$				(in der Natur)
	193	117	a) 31,5 h b) 30,6 h	β^-	1.14, 1.06, 1.00, 0.86, 0.68	0.0731···0.558 ⟨9⟩ 0.0731, 0.281, 0.558	e^-	Os^{192} (d, p); Os^{192} (n, γ); Ir^{193} $(d, 2p)$; U $(\alpha, \mathfrak{F})$
	194	118	~ 2 a	β^-				Os^{193} (n, γ)
	195	119	6,5 m	β^-	2			Pt^{198} (n, α)
$_{77}$**Ir**	185	108	15 h	ε		0.0374, 0.0599, 0.0973, 0.1008, 0.1044, 0.2544		Re^{185} $(\alpha, 4n)$
	186	109	a) 16 h b) 15 h	ε, β^+		0.137, 0.297, 0.435, 0.631, 0.773, 0.923 ?		Re^{185} $(\alpha, 3n)$
	187	110	13 h	ε, (β^+)	(2.2)	0.0255···0.990 ⟨15⟩ 0.113, 0.314, 0.442	e^-	Re^{185} $(\alpha, 2n)$; Os^{188} $(d, 3n)$

	188	111	41,5 h	ε, β^+	2.0	0.155…2.18 ⟨15⟩ 0.155, 0.479, 0.634	e^-	Re^{185} (α, n); Re^{187} $(\alpha, 3n)$; Os^{188} $(d, 2n)$; Os^{189} $(d, 3n)$; $Pt^{188} \leftarrow \varepsilon$
	189	112	11 d	ε		0.0308, 0.0362, 0.0590, 0.0695, 0.0952, 0.245		Os^{188} (d, n); Re (α, xn); $Pt^{189} \leftarrow \varepsilon$
	190	113	11 d	ε		0.1867, 0.361, 0.371, 0.407, ~ 0.53, 0.558, 0.568, ~ 0.61,	e^-	Os^{189} (d, n); Re^{187} (α, n); Ir^{191} $(n, 2n)$; Ir^{191} (γ, n)
	190	113	3,2 h	ε, β^+	a) 2.04 b) 1.7	0.186, 0.36, 0.56, 0.62	e^-	Os^{189} (d, n); Os^{190} $(d, 2n)$; Re^{187} (α, n)
	191m	114	4,9 s	Is		m. Is: 0.0417; γ: 0.129	e^-	Ir^{191} (p, p); Ir^{193} $(p, p\,2n)$
	192	115	74,4 d	β^-, ε	0.67	0.136…1.157 ⟨22⟩ m. ε: 0.2057, 0.4848; m. β^-: 0.3165, 0.4678	e^-	Ir^{191} (d, p); Ir^{191} (n, γ); Ir^{193} $(n, 2n)$; Os^{192} $(d, 2n)$; Pt^{194} (d, α); Pt^{194} (γ, pn)
	192m	115	1,42 m	Is, β^-		0.0574	e^-	Ir^{191} (n, γ)
	193m	116	11,9 d	Is		0.0802		$Os^{193} \rightarrow \beta^-$
	194	117	19,0 h	β^-	2.236, 1.905, 0.975, 0.430	0.293…2.048 ⟨16⟩ 0.293, 0.328, 0.643		Ir^{193} (d, p); Ir^{193} (n, γ); Pt^{195} (γ, p); Pt^{196} (γ, pn)
	195	118	2,3 h	β^-	2.1, 1.3	0.42, 0.66, 0.88, > 1.0		Pt^{196} (γ, p) ?; Pt^{195} (n, p)
	196 ?	119 ?	[1]) 9,7 d	β^-	0.08	0.58, 0.76, ~ 1		Pt^{196} (n, p) ?
	197	120	7 m	β^-	1.6	1.8		Pt^{198} (γ, p); Pt^{198} (n, pn) ?
	198	121	50 s	β^-	3.6	0.78		Pt^{198} (n, p)
$_{78}Pt$	186} 187}	108} 109}	2,5 h [2])	[ε]				$Au^{186} \leftarrow \varepsilon$ od. $Au^{187} \leftarrow \varepsilon$
	188	110	10,0 d	ε		0.195, 0.275, 0.4		Ir^{191} $(p, 4n)$
	189	111	10,5 h	[ε]		0.140, 0.55 ?, 0.7 ?		$Au^{189} \leftarrow \varepsilon$?
	190	112	$5{,}9 \cdot 10^{11}$ a	α	3.30			(in der Natur)
	191	113	3,0 d	ε		0.042…0.626 ⟨19⟩ 0.082, 0.097, 0.172	e^-	Ir^{191} (p, n); Ir^{193} $(p, 3n)$; Pt^{192} $(n, 2n)$; $Au^{191} \leftarrow \varepsilon$
	192	114	~ 10^{15} a	α	2.6			(in der Natur)

[1]) D. G. GARDNER und W. W. MEINKE, Phys. Rev. **114**, 822 (1959), nehmen an, daß diese von F. D. S. BUTEMENT und A. J. POË, Phil. Mag. **45**, 31 (1954), angegebenen Werte irrtümlich sind.

[2]) Vgl. Fußnote auf S. 861.

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung	Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7	8
$_{78}$Pt	193	115	< 500 a	ε		kein γ	
	193m	115	a) 3,5 d b) 4,3 d	Is		m. Is: 0.1355; γ: 0,0127 e^-	Pt^{192} (*d*, *p*); Pt^{192} (*n*, γ); Pt^{194} (*n*, 2*n*); Ir^{193} (*d*, 2*n*); Ir^{191} (α, *pn*); $Au^{193} \leftarrow \varepsilon$
	195m	117	3,8 d	Is		0.0311, 0.0991, 0.130 e^-	Pt^{194} (*d*, *p*); Pt^{194} (*n*, γ); Pt^{196} (γ, *n*); Pt^{195} (*n*, *n*); $Au^{195} \leftarrow \varepsilon$
	197	119	a) 18 h b) 17,4 h	β^-	0.670, 0.479, 0.468	0.0776, 0.191, 0.279	Pt^{196} (*d*, *p*); Pt^{196} (*n*, γ); Pt^{198} (*n*, 2*n*); Pt^{198} (γ, *n*); Hg^{200} (*n*, α)
	197m	119	78 m	Is		0.337 e^-	Pt^{196} (*d*, *p*); Pt^{198} (*n*, 2*n*); Pt^{198} (γ, *n*); Hg^{200} (*n*, α); Au^{197} (*n*, *p*)
	198	120	> 10^{15} a	$\beta\beta^-$			(in der Natur)
	199	121	30 m	β^-	1.7, 1.3, 1.1, 0.8	0.074…0.96 ⟨9⟩ 0.197, 0.318, 0.475	Pt^{198} (*d*, *p*); Pt^{198} (*n*, γ); Hg^{202} (*n*, α)
	199m	121	14,1 s	Is		m. Is: 0.393; γ: 0.032 e^-	Pt^{198} (*n*, γ)
	200	122	11,5 h	β^-			Pt^{199} (*n*, γ)
$_{79}$Au	183…187	104…108	4,3 m	ε, β^+, α	α: 5.07		Pt (*p*); Au (*d*)
	186, 187	107, 108	[1]) ~ 15 m	[ε]			Pt (*p*, *xn*)
	188	109	4,5 m	[ε]			Au (*p*, ♂); Au (*d*, ♂); Pt (*p*, *xn*)
	189	110	42 m	ε od. β^+		0.135, 0.29	$Hg^{189} \leftarrow \varepsilon$?
	191	112	3,0 h	ε		0.0482…0.405 ⟨~ 15⟩ 0.0911, 0.1300, 0.1588	Pt^{192} (*d*, 3*n*); Ir^{191} (α, 4*n*); $Hg^{191} \leftarrow \varepsilon$
	192	113	a) 4,1 h b) 4,7 h	ε, β^+	1.9	0.0451…0.466 ⟨15⟩ 0.137, 0.295, 0.316	Pt^{192} (*d*, 2*n*); Ir^{191} (α, 3*n*); $Hg^{192} \rightleftarrows \varepsilon, \beta^+$
	193	114	15,8 h	ε kein β^+		0.0127…0.490 ⟨~ 28⟩ 0.1861, 0.2556, 0.2682	Pt^{192} (*d*, *n*); Pt^{194} (*d*, 3*n*); Ir^{191} (α, 2*n*); $Hg^{193} \leftarrow \varepsilon$

	193m	114	3,9 s	Is, ε		m. Is: 0.0319; γ: 0.258, 0.291		Pt^{194} $(p, 2n)$; Pt^{195} $(p, 3n)$
	194	115	39,5 h	ε, β^+	1.55, 1.21	0.095···2.360 ⟨36⟩ 0.291, 0.327, 0.642	e^-	Pt^{194} (p, n); Pt^{194} $(d, 2n)$; Ir^{193} $(\alpha, 3n)$
	195	116	a) 185 d b) 180 d	ε		0.0308, 0.0985, 0.129	e^-	Pt^{195} (p, n); Pt^{194} (d, n); Pt^{196} $(d, 2n)$; Ir^{193} $(\alpha, 2n)$; $Hg^{195m} \leftarrow \varepsilon$
	195m	116	30,6 s	Is		0.0565, 0.262, 0.318	e^-	Pt^{195} (p, n); Pt^{196} $(p, 2n)$; $Hg^{195m} \leftarrow \varepsilon$
	196	117	5,55 d	ε, β^-	0.27	m. ε: 0.331, 0.354; m. β^-: 0.426	e^-	Au^{197} (p, d); Au^{197} $(n, 2n)$; Au^{197} (γ, n); Pt^{196} (p, n); Pt^{195} (d, n)
	196m	117	a) 10,0 h b) 14,0 h	Is		m. Is: 0.176; γ: 0.084, 0.149, 0.186	e^-	Au^{197} $(n, 2n)$
	197m	118	7,2 s	Is		0.130, 0.277, (0.407)	e^-	Au^{197} (p, p); Au^{197} (γ, γ'); $Hg^{197} \leftarrow \varepsilon$
	198	119	2,697 d	β^-	1.371, 0.963, 0.290	0.4118, 0.6765, 1.089	e^-	Pt^{198} (p, n); Pt^{198} $(d, 2n)$; Au^{197} (d, p); Au^{197} (n, γ); Hg^{198} (n, p); U $(\alpha, ♂)$
	199	120	3,14 d	β^-	0.460, 0.302, 0.251	0.0497, 0.1583, 0.2080	e^-	Pt^{198} (d, n); Au^{198} (n, γ); Hg^{199} (n, p); $Pt^{199} \rightarrow \beta^-$
	200	121	48 m	β^-	2.18, 0.6	0.367, 1.23, 1.36		Hg^{200} (n, p); Hg^{201} (γ, p); Tl^{203} (n, α)
	201	122	26 m	β^-	1.5	0.55		Hg^{201} (n, p); Hg^{202} (γ, p); Tl^{205} $(n, \alpha p)$
	203	124	55 s	β^-	1.9	0.69		Hg^{204} (n, pn); Hg^{204} (γ, p)
$_{80}Hg$	189	109	23 m	[ε]		0.0286		Au^{197} $(p, ♂)$
	191	111	56 m	[ε]		0.253, 0.274	e^-	Au^{197} $(p, ♂)$
	192	112	5,7 h	ε, β^+	1.18	0.0313, 0.114, 0.142, 0.146, 0.157, 0.275		Au^{197} $(p, ♂)$
	193	113	$\sim$ 5 h	ε		0.0382, 0.186, 0.576, 0.762, 0.854, 1.040, 1.078		Au^{197} $(p, 5n)$
	193m	113	11,1 h	ε, Is, (β^+)	2.22, 1.17, $\sim$ 0.42	m. Is: 0.0395, 0.1015; m. ε: 0.0322···1.646 ⟨44⟩		Au^{197} $(p, 5n)$
	194	114	$\sim$ 130 d	ε		0.290 ?, 0.330 ?		Au^{197} $(p, 4n)$
	194	114	0,4 s	Is ?		0.048, 0.134	e^-	Au^{197} $(p, 4n)$; Hg (p, xn)

[1]) In der Originalarbeit von W. G. SMITH und J. M. HOLLANDER, Phys. Rev. **95**, 1258 (1955), wird die 15 m-Aktivität dem Au^{187} zugeschrieben, in der Isotopentabelle von D. STROMINGER, J. M. HOLLANDER und G. T. SEABORG, Revs. Mod. Phys. **30**, 585 (1958), hingegen dem Au^{186}; Entsprechendes gilt für die 2,5 h-Aktivität Pt^{186}.

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{80}$Hg	195	115	9,5 h	ε		0.0567···1.172 ⟨16⟩ 0.0614, 0.180, 0.600	e^-	Au^{197} $(p, 3n)$; $Tl^{195} \leftarrow \varepsilon$
	195m	115	38 h	ε, Is		m. Is: 0.0371, 0.123; m. ε: 0.0567···1.242 ⟨16⟩	e^-	Au^{197} $(p, 3n)$; Au^{197} $(d, 4n)$
	197	117	66,4 h	ε		0.0774, 0.1916	e^-	Au^{197} (p, n); Au^{197} $(d, 2n)$; Hg^{196} (d, p); Hg^{196} (n, γ); Hg^{198} $(n, 2n)$; $Tl^{197} \leftarrow \varepsilon$
	197m	117	24 h	Is, ε		m. Is: 0.134, 0.165; m. ε: 0.130, 0.277, 0.407	e^-	Au^{197} (p, n); Au^{197} $(d, 2n)$; Hg^{196} (d, p); Hg^{196} (n, γ); Hg^{198} $(n, 2n)$; Pt^{194} (α, n)
	199^{m_1}	119	$2{,}4 \cdot 10^{-9}$ s	Is		m. Is: 0.159		$Au^{199} \rightarrow \beta^-$
	199^{m_2}	119	a) 42 m b) 44,4 m	Is		m. Is: 0.368; m. Is in Hg^{199m_1}: 0.159	e^-	Hg^{198} (d, p); Hg^{199} (n, n); Hg^{200} $(n, 2n)$; Hg^{200} (γ, n); Hg^{199} (γ, γ'); Pt^{196} (α, n)
	203	123	46,9 d	β^-	a) 0.212 b) 0.208	0.279	e^-	Hg^{202} (d, p); Hg^{204} $(n, 2n)$; Hg^{202} (n, γ); Tl^{203} (n, p)
	205	125	5,6 m	β^-	1.75	0.203		Hg^{204} (d, p); Hg^{204} (n, γ)
$_{81}$Tl	195	114	1,2 h	ε		0.0370		Hg^{196} $(d, 3n)$
	195m	114	3,5 s	Is		0.0991, 0.383, 0.393		Hg^{196} $(d, 3n)$; $Pb^{195} \leftarrow \varepsilon$
	196	115	1,8 h	ε		0.426		$Pb^{196} \leftarrow \varepsilon$
	197	116	2,7 h	ε		0.1335, 0.152, 0.173	e^-	Hg^{198} $(d, 3n)$; Au^{197} $(\alpha, 4n)$
	197m	116	0,6 s	Is		0.2225, 0.385, 0.387	e^-	Hg^{198} $(d, 3n)$
	198	117	5,3 h	ε		0.194, 0.227 ?, 0.283, 0.412, 0.675, ~ 1.075, ~ 1.23, ~ 1.44		Au^{197} $(\alpha, 3n)$
	198m	117	1,75 h	ε, Is		m. Is: 0.261; γ: 0.282; m. ε: 0.0478	e^-	Hg^{198} $(d, 2n)$; $Pb^{198} \leftarrow \varepsilon$
	199	118	a) 7,4 h b) 6,5 h	ε kein β^+		0.050, 0.158, 0.208, 0.247, 0.334, 0.455, 0.491	e^-	Hg^{199} $(d, 2n)$; Au^{197} $(\alpha, 2n)$; $Pb^{199} \leftarrow \varepsilon$

	200	119	26,1 h	ε, (β^+)	1.436, 1.052, 0.46	0.116…2.10 ⟨19⟩ 0.368, 0.579, 0.628, 0.828, 1.206, 1.363	e^-	Hg^{200} $(d, 2n)$; Au^{197} (α, n); $Pb^{200} \leftarrow \varepsilon$
	201	120	72 h	ε		0.0306, 0.0321, 0.135, 0.1672	e^-	Hg^{201} $(d, 2n)$; Au^{197} (α, γ); $Pb^{201} \leftarrow \varepsilon$
	202	121	12,0 d	ε kein β^+ kein β^-		0.440, 0.523, 0.965	e^-	Hg^{202} $(d, 2n)$; Tl^{203} $(n, 2n)$
	202m	121	a) $5{,}9 \cdot 10^{-4}$ s b) $4{,}8 \cdot 10^{-4}$ s	Is		a) 0.48 b) 0.51	e^-	Tl^{203} (γ, n)
	204	123	a) 3,78 a b) 3,97 a	β^-, ε	0.764	innere Bremsstr., E_{max}: 0.29; kein γ		Tl^{203} (d, p); Tl^{203} (n, γ); Tl^{205} (γ, n)
RaE''	206	125	4,19 m	β^-	1.51	kein γ		$Bi^{210m} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.); Tl^{205} (d, p); Tl^{205} (n, γ); Pb^{208} (γ, pn)
AcC''	207	126	4,79 m	β^-	1.442	0.870		$Bi^{211} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.); Pb^{207} (n, p); Pb^{208} (γ, p)
ThC''	208	127	3,10 m	β^-	2.38, 1.79, 1.52, 1.28, 1.03	0.211…2.62 ⟨∼ 15⟩ 0.511, 0.583, 0.860		$Bi^{212} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
	209	128	2,20 m	β^-	1.99	0.12, 0.45, 1.56		$Bi^{213} \rightarrow \alpha$
RaC''	210	129	1,32 m	β^-	1.96	0.30, 0.78, (∼ 1.1), (∼ 1.3), 2.36		$Bi^{214} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
$_{82}$**Pb**	195	113	17 m	ε				Tl (p, xn)
	196	114	37 m	ε		0.167, 0.253		Tl (p, xn)
⋮	197	115	kurz	ε ?		0.2219, 0.3848, 0.3867		$Pb^{197m} \rightarrow$ Is
	197m	115	42 m	ε, Is		m. Is: 0.234; (vgl. Tl^{197m})		Tl (p, xn); Bi (♂)
	198	116	2,3 h	ε		0.117, 0.173, 0.259, 0.290, 0.366, 0.398		Tl (p, xn); $Bi^{198} \leftarrow \varepsilon$; $Po^{202} \rightarrow \alpha$
⋮	198	116	[1]) 25 m ?	ε				Tl^{203} $(p, 6n)$; $Bi^{198} \leftarrow \varepsilon$

[1]) Die 25-m-Aktivität Pb^{198} konnte von G. ANDERSSON, E. ARBMAN und B. JUNG, Ark. Fysik 11, 297 (1957), nicht bestätigt werden.

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung	Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7	8
$_{82}$Pb	199	117	90 m	ε, (β^+)	2.8	0.353, 0.367, 0.721 e^-	$Bi^{199} \leftarrow \varepsilon$
	199^m	117	12,2 m	Is		m. Is: 0.424 e^-	Tl (p, xn)
	200	118	a) 21,5 h b) 18 h	ε		0.0328···0.450 ⟨10⟩ 0.142, 0.148, 0.235	$Bi^{200} \leftarrow \varepsilon$; $Po^{204} \rightarrow \alpha$
	201	119	a) 8,4 h b) 9,4 h	ε, (β^+)	~ 2.5, 0.55	0.1291···1.099 ⟨15⟩ 0.330, 0.361, 0.585	Tl^{203} ($d, 4n$); $Bi^{201} \leftarrow \varepsilon$
	201^m	119	60,1 s	Is		m. Is: 0.629 e^-	Tl^{203} ($p, 3n$)
	202	120	~ 3 · 10^5 a	ε			Tl^{203} ($d, 3n$); $Bi^{202} \leftarrow \varepsilon$; $Po^{203} \rightarrow \alpha$
	202^m	120	3,62 h	Is, ε		m. Is: 0.129, 0.240, 0.422, 0.961 u. 3 and.; m. ε: 0.149, 0.241. 0.336, 0.390, 0.460, 0.490 e^-	Tl^{203} ($p, 2n$)
	203	121	52,1 h	ε		0.279, 0.404, 0.678 e^-	Tl^{203} (p, n); Tl^{203} ($d, 2n$); Pb^{204} ($n, 2n$); Pb^{204} (γ, n); $Bi^{203} \leftarrow \varepsilon$
	203^m	121	a) 6,1 s b) 6,7 s	Is		m. Is: 0.825 e^-	Tl^{203} (p, n); Tl^{205} ($p, 3n$); $Bi^{203} \leftarrow \varepsilon$
	204	122	~1,4 · 10^{17} a	α	2.6		(in der Natur)
	204^{m_1}	122	2,7 · 10^{-7} s	Is		0.899, 0.375	$Bi^{204} \leftarrow \varepsilon$; $Pb^{204m_2} \rightarrow$ Is
	204^{m_2}	122	a) 66.9 m b) 67,5 m	Is		0.289, 0.622, 0.912; (vgl. Pb^{204m_1})	Tl^{203} (d, n); Tl^{205} ($d, 3n$); Pb^{204} (n, n); Pb^{204} (γ, γ'); Pb^{206} ($\gamma, 2n$); $Bi^{204} \leftarrow \varepsilon$
	205	123	5 · 10^7 a	ε			Pb^{204} (n, γ); Pb^{206} (γ, n); $Bi^{205} \leftarrow \varepsilon$
	207^m	125	a) 0.80 s b) 0.84 s	Is		0.570, 1.064 e^-	$Tl^{207} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.); Pb^{206} (d, p); Pb^{206} (n, γ); Pb^{208} (γ, n); $Bi^{207} \leftarrow \varepsilon$
	209	127	3,30 h	β^-	0.63		Pb^{208} (d, p); Pb^{208} (n, γ); Bi^{209} ($d, 2p$); Bi^{209} (n, p); $Po^{213} \rightarrow \alpha$; $Tl^{209} \rightarrow \beta^-$

RaD	210	128	19,4 a	β^-	0.061, 0.017	0.0465		$Tl^{210} \to \beta^-$; $Po^{214} \to \alpha$ (natürl. Zerf.)
AcB	211	129	36,1 m	β^-	1.39, $\sim$ 0.5	0.0652, 0.0829, 0.404, 0.426, 0.487, 0.764, 0.830		$Po^{215} \to \alpha$ (natürl. Zerf.)
ThB	212	130	10,64 h	β^-	0.589, 0.34	0.1151, 0.1767, 0.2386, 0.3001, 0.4152	e^-	$Po^{216} \to \alpha$ (natürl. Zerf.)
RaB	214	132	26,8 m	β^-	1.03, 0.65, 0.59	0.0532, 0.2419, 0.258, 0.2952, 0.3520		$Po^{218} \to \alpha$ (natürl. Zerf.)
$_{83}$**Bi**	$\leqq$ 197	$\leqq$ 114	1,7 m	α	6.2			Pb (*d*, ♂)
	198	115	7 m	ε, α	5.83			Pb (*d*, ♂)
	199	116	25 m	ε, α	5.47			Pb (*d*, ♂)
	200	117	35 m	ε				Pb (*p*, ♂)
	201	118	62 m	ε, (α)	(5.15)			Pb (*p*, ♂); Pb (*d*, ♂)
	201m	118	1,85 h	ε		(vgl. Pb^{201m})		Pb (*p*, ♂); Pb (*d*, ♂)
	202	119	95 m	ε		0.422, 0.961; (vgl. Pb^{202m})		$Po^{202} \leftarrow \varepsilon$
	203	120	12 h	ε, (β^+), (α)	α: (4.85); β^+: 1.35, 0.74	0.0603···1.896 ⟨20⟩ 0.1263, 0.1865		$Po^{203} \leftarrow \varepsilon$; Pb (*p*, ♂)
	204	121	11,6 h	ε kein β^+		0.0785···2.10 ⟨$\sim$ 45⟩ 0.375, 0.899	e^-	Pb^{204} (*d*, 2*n*); Tl^{203} (α, 3*n*); $Po^{204} \leftarrow \varepsilon$
	205	122	14,5 d	ε, (β^+)	(0.93)	0.115···2.60 ⟨34⟩ 0.703, 0.988, 1.766	e^-	$Po^{205} \leftarrow \varepsilon$; $At^{209} \to \alpha$; Pb^{206} (*d*, 3*n*)
	206	123	6,4 d	ε kein β^+		0.107···1.720 ⟨28⟩ 0.184, 0.538, 0.803	e^-	Pb^{206} (*d*, 2*n*); Pb^{207} (*d*, 3*n*); Tl^{205} (α, 3*n*); $Po^{206} \leftarrow \varepsilon$; $At^{210} \to \alpha$
	207	124	a) 8,0 a b) $\sim$ 27 a	ε		0.569, 0.894, 1.064, 1.43, 1.771	e^-	Pb^{208} (*d*, 3*n*); $At^{211} \to \alpha$
	208	125	$\sim 3 \cdot 10^4$ a	ε kein β^+		2.61		Pb^{208} (*d*, 2*n*); Bi^{209} (γ, *n*)
	208m	125	$2{,}7 \cdot 10^{-3}$ s	Is		0.51, 0.92		Bi^{209} (γ, *n*)
	209	126	$> 2 \cdot 10^{18}$ a	α ?	$\sim$ 3.15 ?			(in der Natur)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung	Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7	8
$_{83}$Bi	210	127	$2{,}6 \cdot 10^6$ a	α, β^-	α: 4.94; β^-: 1.14		Bi^{209} (n, γ)
RaE	210^m	127	5,013 d	β^-, (α)	α: 4.686, 4.649; β^-: 1.17	kein γ	$Pb^{210} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.); Bi^{209} (d, p); Bi^{209} (n, γ); Pb^{208} (d, γ); Pb^{208} (α, pn); $At^{214} \rightarrow \alpha$
AcC	211	128	2,16 m	α, β^-	α: 6.617, 6.273	0.351	$Pb^{211} \rightarrow \beta^-$; $At^{215} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
ThC	212	129	60,47 m	β^-, α	α: 6.086, 6.047, 5.765, 5.622, 5.603, 5.481; β^-: 2.27, 1.55. 0.93, 0.67, 0.45, 0.08	m. α: 0.0398…0.616 ⟨9⟩ 0.03985, 0.288; m. β^-: 0.20 ?, 0.73, 0.90, 1.34, 1.50, 1.60, 1.80, 2.20	$Pb^{212} \rightarrow \beta^-$; $At^{216} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
	213	130	47 m	β^-, α	α: 5.86; β^-: 1.39, 0.959	0.434	$At^{217} \rightarrow \alpha$
RaC	214	131	19,72 m	β^-, α	α: 5.52, 5.47, 5.33; β^-: 3.26, 2.65 ?, 1.88, 1.51, 1.02, 0.42	m. α: 0.0625, 0.191; m. β^-: 0.609…3.07 ⟨∼ 30⟩ 0.609, 1.120, 1.238, 1.378, 1.764, 2.204	$Pb^{214} \rightarrow \beta^-$; $At^{218} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
	215	132	8 m	β^-			$At^{219} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
$_{84}$Po	196	112	1,9 m	α	6.14		W (Ne^{20}, xn)
	197	113	∼ 4 m	α	6.040		Bi^{209} (p, $13n$); W (Ne^{20}, xn)
	198	114	∼ 6 m	α	5.935		Bi^{209} (p, $12n$); W (Ne^{20}, xn)
	199	115	∼ 11 m	α	5.846		Bi^{209} (p, $11n$); W (Ne^{20}, xn)
	200	116	a) ∼ 8 m b) 11 m	ε, α	a) 5.770 b) 5.84		Bi^{209} (p, $10n$); W (Ne^{20}, xn)
	201	117	∼ 17 m	ε, α	5.671		Bi^{209} (p, $9n$)
	202	118	a) 51 m b) 56 m	ε, α	5.575		Bi^{209} (p, $8n$); Pb (α, ♂)

	203	119	a) 42 m b) 47 m	ε				Bi^{209} $(p, 7n)$; Pb $(\alpha, ♂)$
	204	120	3,8 h	ε, α	5.37			Bi^{209} $(p, 6n)$; Pb $(\alpha, ♂)$
	205	121	a) 1,8 h b) 1,5 h	ε, α	5.21			Bi^{209} $(p, 5n)$; Pb^{204} $(\alpha, 3n)$
	206	122	8,8 d	ε, α	5.218	m. ε: 0.0599···1.320 ⟨26⟩ 0.287, 0.338, 0.511		Bi^{209} $(p, 4n)$; Pb^{204} $(\alpha, 2n)$
	207	123	5,7 h	ε, α, β^+	α: 5.10	0.0604···2.061 ⟨∼ 38⟩ 0.743, 0.993, 1.318		Bi^{209} $(p, 3n)$; Pb^{206} $(\alpha, 3n)$
	208	124	2,93 a	α, ε	5.108	m. ε: 0.285, 0.60		Bi^{209} $(p, 2n)$; Bi^{209} $(d, 3n)$; Pb^{207} $(\alpha, 3n)$; $Rn^{212} \rightarrow \alpha$; $At^{208} \leftarrow \varepsilon$
	209	125	103 a	α, ε	4.877	m. α: 0.260; m. ε: 0.91		Bi^{209} (p, n); Bi^{209} $(d, 2n)$; $At^{209} \leftarrow \varepsilon$
RaF	210	126	138,40 d	α	a) 5.305 b) 5.298	0.8033	e^-	$Bi^{210m} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.); Bi^{209} (p, γ); Bi^{209} (d, n); Pb^{208} $(\alpha, 2n)$; $At^{210} \leftarrow \varepsilon$
AcC'	211	127	0,52 s	α	7.442, 6.895, 6.569	0.562, 0.88		$Bi^{211} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.); $At^{211} \leftarrow \varepsilon$
	211^m	127	25 s	α	8.70, 7.85, 7.14	0.56, 1.06		Pb^{208} (α, n)
ThC'	212	128	$3{,}04 \cdot 10^{-7}$ s	α	8.78			$Bi^{212} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.); $Rn^{216} \rightarrow \alpha$
	213	129	$4{,}2 \cdot 10^{-6}$ s	α	a) 8.35 b) 8.336			$Rn^{217} \rightarrow \alpha$; $Bi^{213} \rightarrow \beta^-$
RaC'	214	130	$1{,}64 \cdot 10^{-4}$ s	α	α: 7.680 u. 12 weitreichende α-Str.			$Rn^{218} \rightarrow \alpha$; $Bi^{214} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.)
AcA	215	131	$1{,}83 \cdot 10^{-3}$ s	α, (β^-)	α: 7.365			$Rn^{219} \rightarrow \alpha$; $Bi^{215} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.)
ThA	216	132	0,158 s	α	6.774			$Rn^{220} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
	217	133	< 10 s	α	6.54			$Rn^{221} \rightarrow \alpha$
RaA	218	134	3,05 m	α, β^-	α: 5.998			$Rn^{222} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)

Symbol und Z	A	N	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$	Um-wand-lung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung	Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7	8
$_{85}$At	≦201	≦116	43 s	α, ε	6.50		Bi^{209} (α, ♂)
	≦202	≦117	1,7 m	α, ε	6.35		Bi^{209} (α, ♂)
	203	118	7,1 m	α, ε ?	6.09		Bi^{209} (α, 10n); Au^{197} (C^{12}, 6n)
	204	119	~ 25 m	ε, α ?			Bi^{209} (α, 9n)
	205	120	25 m	α, ε	5.90		Bi^{209} (α, 8n); Au^{197} (C^{12}, 4n)
	206	121	2,9 h	ε			Bi^{209} (α, 7n)
	207	122	1,8 h	ε, α	5.75		Bi^{209} (α, 6n)
	208	123	6,3 h	ε			Bi^{209} (α, 5n); Rn^{208} ← ε
	208m	123	1,6 h	ε, α	5.65	m. ε: 0.18, 0.25, 0.66; m. α: 0.12	Fr^{212} → α; Rn^{208} ← ε
	209	124	5,5 h	ε, α	5.642	0.0908, 0.195, 0.545, 0.780	Bi^{209} (α, 4n)
	210	125	8,3 h	ε, α	5.519, 5.437, 5.355	0.0465···1.598 ⟨11⟩ 0.245, 1.181, 1.436 e⁻	Bi^{209} (α, 3n)
	211	126	7,20 h	α, ε	5.862	(0.671)	Bi^{209} (α, 2n); Th (α, ♂); U (α, ♂)
	212	127	0,22 s	α			Bi^{209} (α, n)
	213	128	~ 10^{-6} s	α	9.2		Fr^{217} → α
	214	129	~ $2 \cdot 10^{-6}$ s	α	8.78		Fr^{218} → α
	215	130	~ 10^{-4} s	α	8.00		Po^{215} → $β^-$ (natürl. Zerf.); Fr^{219} → α
	216	131	~ $3 \cdot 10^{-4}$ s	α	7.79		Po^{216} → $β^-$ (natürl. Zerf.); Fr^{220} → α
	217	132	0,018 s	α	a) 7.05 b) 7.023		Fr^{221} → α
	218	133	~ 2 s	α, $β^-$	α: 6.63		Po^{218} → $β^-$ (natürl. Zerf.)
	219	134	0,9 m	α, $β^-$	α: 6.27		Fr^{223} → α (natürl. Zerf.)

$_{86}$Rn	204	118	3 m	α	6.28		Au^{197} (N^{14}, 7n)
	206	120	6,2 m	α, ε	6.25		Au^{197} (N^{14}, 5n)
	207	121	10 m	ε, α	a) 6.12 b) 6.09		Au^{197} (N^{14}, 4n)
	208	122	23 m	ε, α	6.141		Th^{232} (p, ♂)
	209	123	30 m	ε, α	6.037		Th^{232} (p, ♂); Pb (C, ♂); Ra^{213} → α
	210	124	2,7 h	α, ε	6.037		Th^{232} (p, ♂); Pb (C, ♂)
	211	125	16 h	ε, α	5.847, 5.778, 5.613	m. ε: 0.032···1.80 ⟨14⟩ 0.680, 1.13, 1.37; m. α: 0.0687, 0.169, 0.234	Th^{232} (p, ♂); Pb (C, ♂)
	212	126	23 m	α	6.264		Fr^{212} ← ε; Th^{232} (p, ♂)
	215	129	~ 10^{-6} s	α	8.6		Ra^{219} → α
	216	130	~ 10^{-4} s	α	8.01		Ra^{220} → α
	217	131	~ 10^{-3} s	α	7.74		Ra^{221} → α
	218	132	0,019 s	α	7.127, [6.52]	0.609	At^{218} → β^- (natürl. Zerf.); Ra^{222} → α
An	219	133	3,92 s	α	a) 6.813, 6.547, 6.419 b) 6.824, 6.559, 6.434	0.0679, 0.123, 0.198, 0.267, 0.321, 0.392, 0.589	Ra^{223} → α; At^{219} → β^- (natürl. Zerf.)
Tn	220	134	51,5 s	α	a) 6.278 b) 6.282, 5.747	0.542	Ra^{224} → α (natürl. Zerf.)
	221	135	25 m	β^-, α	α: 6.0		Th^{232} (p, ♂)
Rn	222	136	3,825 d	α	5.486	0.510	Ra^{226} → α (natürl. Zerf.)
$_{87}$Fr	212	125	19,3 m	ε, α	6.411, 6.387, 6.342		Th^{232} (p, ♂)
⋮	217	130	sehr kurz	α	8.3		Ac^{221} → α
	218	131	0,005 s	α	7.85		Ac^{222} → α

Symbol und Z 1	A 2	N 3	Halbwerts-zeit $T_{1/2}$ 4	Um-wand-lung 5	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen 6	 γ-Strahlung 7		Erzeugungsreaktionen 8
$_{87}$Fr	219	132	~ 0,02 s	α	7.30			$Ac^{223} \to \alpha$
	220	133	27,5 s	α	6.69			$Ac^{224} \to \alpha$
	221	134	4,8 m	α	6.33, 6.12	a) 0.220 b) 0.216		$Ac^{225} \to \alpha$; $Rn^{221} \to \beta^-$
	222	135	14,8 m	β^-, α	(6.0) ?			Th^{232} (p, ♂)
AcK	223	136	22 m	β^-, (α)	α: 5.34 β^-: 1.15	0.0498, 0.080, 0.215, (0.310)		$Ac^{227} \to \alpha$ (natürl. Zerf.)
$_{88}$Ra	213	125	2,7 m	α	6.90			Pb (C, ♂)
	219	131	[~ 10^{-3} s]	α	8.0			$Th^{223} \to \alpha$
	220	132	0,03 s	α	7.43			$Th^{224} \to \alpha$
	221	133	30 s	α	6.71			$Th^{225} \to \alpha$
	222	134	38,0 s	α	6.551, 6.22	0.3246, 0.325, 0.48, 0.52, 0.80	e^-	$Th^{226} \to \alpha$; $Fr^{222} \to \beta^-$
AcX	223	135	11,68 d	α	5.867…5.282 ⟨~ 12⟩ 5.712, 5.602, 5.534	0.0312…0.446 ⟨~ 13⟩ 0.1541, 0.2696, 0.338	e^-	$Th^{227} \to \alpha$; $Fr^{223} \to \beta^-$ (natürl. Zerf.); $Ac^{223} \leftarrow \varepsilon$; U (α, ♂)
ThX	224	136	3,64 d	α	5.681, 5.445, 5.194 ?	0.241, (0.29), (0.41), (0.65)	e^-	$Th^{228} \to \alpha$ (natürl. Zerf.); $Ac^{224} \leftarrow \varepsilon$; U (α, ♂)
	225	137	14,8 d	β^- kein α	0.32	0.040		$Th^{229} \to \alpha$; U (n, ♂)
Ra	226	138	a) 1617 a b) 1622 a	α	4.777, [4.591]	0.186, (0.26), (0.42), (0.61)	e^-	$Th^{230} \to \alpha$ (natürl. Zerf.)
	227	139	41,2 m	β^-	1.31	0.0275, 0.291, 0.498		Ra^{226} (n, γ); U (♂)

MsTh 1	228	140	6,7 a	β^- kein α	0.055		$Th^{232} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.)
⋮	229	141	kurz	β^-			Ra^{228} (n, γ)
	230	142	1 h	β^-	1.2		Th $(d, ♂)$
$_{89}$Ac ⋮	221	132	< 1 s ?	α	7.6		$Pa^{225} \rightarrow \alpha$?
	222	133	5,5 s	α	6.96		$Pa^{226} \rightarrow \alpha$
	223	134	2,2 m	α, ε	6.64		$Pa^{227} \rightarrow \alpha$
	224	135	2,9 h	ε, α	6.17	m. ε: 0.133, 0.217	$Pa^{228} \rightarrow \alpha$
	225	136	10,0 d	α	5.818, 5.782, 5.721, 5.713, 5.672, 5.627, 5.599, 5.570, 5.543	0.0366, 0.0384, 0.0628, 0.0873, 0.0994, 0.150, 0.187	$Pa^{229} \rightarrow \alpha$; $Ra^{225} \rightarrow \beta^-$; $Th^{225} \leftarrow \varepsilon$; Th, U $(d, ♂)$; Th, U $(n, ♂)$
	226	137	29 h	β^-, ε	1.17	m. β^-: 0.072, 0.158, 0.230; m. ε: 0.068, 0.185, 0.253	$Pa^{230} \rightarrow \alpha$
Ac	227	138	21,6 a	β^-, α	α: 4.942; β^-: 0.046		$Pa^{231} \rightarrow \alpha$ (natürl. Zerf.); $Ra^{227} \rightarrow \beta^-$
MsTh 2	228	139	6,13 h	β^-	2.18, 1.85, 1.72, 1.11, 0.66, 0.46	0.0568 ··· 1.64 ⟨∼ 20⟩ 0.098, 0.128, 1.59	$Ra^{228} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.)
	229	140	66 m	β^-			Ra^{226} (α, p); $Ra^{229} \rightarrow \beta^-$
⋮	230	141	< 1 m	β^-	2.2		$Ra^{230} \rightarrow \beta^-$
$_{90}$Th	223	133	∼ 0,1 s	α	7.55		$U^{227} \rightarrow \alpha$
	224	134	∼ 1 s	α	7.13		$U^{228} \rightarrow \alpha$
	225	135	8,0 m	α, ε	6.57		$U^{229} \rightarrow \alpha$
	226	136	30,9 m	α	6.33, 6.22, 6.095, 6.029	0.112, 0.131, 0.197, 0.242	$U^{230} \rightarrow \alpha$; $Ac^{226} \rightarrow \beta^-$
RdAc	227	137	18,17 d	α	6.036 ··· 5.667 ⟨15⟩ 6.036, 5.976, 5.755	0.0298 ··· 0.334 ⟨∼ 25⟩ 0.050, 0.236, 0.282	$Ac^{227} \rightarrow \beta^-$ (natürl. Zerf.); Th, U^{238} $(n, ♂)$; $Pa^{227} \leftarrow \varepsilon$

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$ ($T_{1/2}$ für $\varnothing_s$)	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{90}$Th								
RdTh	228	138	1,910 a	α	5.421, 5.338, 5.208, 5.173, [5.130]	0.0845, 0.137, 0.169, 0.205, 0.217		Ac^{228} → β^- (natürl. Zerf.); U^{232} → α; Pa^{228} ← ε
	229	139	7340 a	α	5.02, 4.94, 4.85	0.148, 0.200		U^{233} → α
Io	230	140	8,0 · 10^4 a (≧ 1,5 · 10^{17} a)	α, $\varnothing_s$	4.682, 4.615, 4.509 und andere	0.0678, 0.110, 0.142, 0.184, 0.206, 0.235, 0.253	e^-	U^{234} → α (natürl. Zerf.); Pa^{230} ← ε
UY	231	141	25,64 h	β^-	0.299, 0.218, 0.134, 0.090	0.0172…0.31 ⟨18⟩ 0.0257, 0.0842	e^-	U^{235} → α (natürl. Zerf.); Th^{232} (*n*, 2*n*)
Th	232	142	1,42 · 10^{10} a (> 10^{20} a)	α, $\varnothing_s$	4.01, 3.93	0.059	e^-	(in der Natur)
	233	143	22,4 m	β^-	1.245, 1.158, 1.073, 0.88, 0.79, 0.58	0.0292…0.895 ⟨12⟩ 0.0869, 0.171, 0.453		Th^{232} (*d*, *p*); Th^{232} (*n*, γ)
UX$_1$	234	144	24,10 d	β^-	0.193, 0.103	0.0292, 0.0628, 0.0914		U^{238} → α (natürl. Zerf.)
⋮	235	145	< 5 m	[β^-]				Th^{234} (*n*, γ)
$_{91}$Pa ⋮	225	134	2,0 s	α				Th^{232} (*d*, 9*n*)
	226	135	1,8 m	α	6.81			Th^{232} (*d*, 8*n*)
	227	136	38,3 m	α, ε	6.46			Th^{232} (*d*, 7*n*); U (α, ♂); Np^{231} → α
	228	137	22 h	ε, α	6.09, 5.85	m. ε: 0.0575…1.572 ⟨18⟩ 0.1286, 0.411, 0.968		Th^{232} (*d*, 6*n*); U^{228} ← ε
	229	138	1,5 d	ε, α	5.69			Th^{230} (*d*, 3*n*); Pa^{231} (*d*, *p* 3*n*); U^{229} ← ε
	230	139	a) 17,7 d b) 17,0 d	ε, β^-, β^+, (α)	β^+: 0.4; β^-: 0.41	0.0528…1.18 ⟨11⟩ 0.0528, 0.445, 0.953		Th^{232} (*d*, 4*n*); Th^{232} (α, *p* 5*n*); Pa^{231} (*d*, *p* 2*n*); Pa^{231} (α, α*n*); U^{233} (*d*, α*n*)

Pa	231	140	$3{,}43 \cdot 10^4$ a ($1{,}2 \cdot 10^{16}$ a)	α, $\varnothing_s$	5.046···4.666 ⟨10⟩ 5.018, 5.001, 4.938	0.0189···0.356 ⟨19 ?⟩ 0.0275, 0.103, 0.329		Th^{231} → β^- (natürl. Zerf.); Th^{232} $(d, 3n)$; U^{231} ← ε
	232	141	1,31 d	β^-	1.24, 0.715, 0.54, 0.37, 0.26	0.0472···1.153 ⟨15⟩ 0.109, 0.455, 1.085		Th^{232} $(d, 2n)$; Th^{232} $(\alpha, p\,3n)$; Pa^{231} (d, p); Pa^{231} (n, γ)
	233	142	27,0 d	β^-	0.568, 0.257, 0.150	0.0158···0.417 ⟨14⟩ 0.075, 0.301, 0.313, 0.341	e^-	Th^{232} (d, n); Th^{232} $(\alpha, p\,2n)$; Pa^{232} (n, γ); U^{235} (d, α); Np^{237} → α; Th^{233} → β^-
UZ	234	143	6,66 h	β^-	1.13, 0.53, 0.32, 0.155	0.043···1.680 ⟨16⟩ 0.043, 0.125, 0.924		Pa^{234m} → Is (natürl. Zerf.); Pa^{233} (n, γ)
UX_2	234m	143	70,5 s	β^-, Is	2.305, 1.500, 0.580	0.043···1.830 ⟨11⟩ 0.043, 0.770, 1.010		Th^{234} → β^- (natürl. Zerf.)
	235	144	23,7 m	β^-	1.4	kein γ		U^{238} (p, α); U^{238} $(d, \alpha n)$; Th^{235} → β^-
	237	146	10,5 m	β^-				U^{238} $(d, n\,2p)$
$_{92}$**U**	227	135	1,3 m	α	6.8			Th^{232} $(\alpha, 9n)$
	228	136	9,3 m	α, ε	6.67			Th^{232} $(\alpha, 8n)$; Pu^{232} → α
	229	137	58 m	ε, α	6.42			Th^{232} $(\alpha, 7n)$; Pa^{231} $(\alpha, p\,5n)$
	230	138	20,8 d	α	5.884, 5.813, 5.658	0.0721, 0.154, 0.158, 0.232		Pa^{231} $(d, 3n)$; Pa^{231} $(\alpha, p4n)$; Th^{232} $(\alpha, 6n)$; Pu^{234} → α; Pa^{230} → β^-
	231	139	4,3 d	ε, (α)	5.45	0.0181···0.22 ⟨9⟩ 0.0585, 0.0685, 0.0813		Pa^{231} $(d, 2n)$; Pa^{231} $(\alpha, p\,3n)$; Th^{232} $(\alpha, 5n)$
	232	140	73,6 a ($3{,}6 \cdot 10^{12}$ a)	α, $\varnothing_s$	5.318, 5.258, 5.128, 4.988	0.0579, 0.131, 0.268, 0.326	e^-	Pa^{231} (d, n); Pa^{231} $(\alpha, p\,2n)$; Th^{232} $(\alpha, 4n)$; Pu^{236} → α; Pa^{232} → β^-
	233	141	$1{,}62 \cdot 10^5$ a ($\geqq 3 \cdot 10^{17}$ a)	α, $\varnothing_s$?	4.816, 4.773, 4.717, 4.655, 4.582, 4.489	0.0405, 0.0523, 0.0921		Pa^{233} → β^-
U II	234	142	$2{,}52 \cdot 10^5$ a ($1{,}6 \cdot 10^{16}$ a)	α, $\varnothing_s$	4.768, 4.717, 4.593	0.018 ?, 0.053, 0.093 ?, 0.118		Pa^{234m} → β^- (natürl. Zerf.); Pa^{234} → β^- (natürl. Zerf.)
AcU	235	143	$6{,}84 \cdot 10^8$ a ($1{,}9 \cdot 10^{17}$ a)	α, $\varnothing_s$	4.559, 4.520, 4.370, 4.354, 4.333, 4.318, 4.117	0.095, 0.110, 0.143, ~ 0.165, 0.185, ~ 0.20		(in der Natur)
	235m	143	a) 26,2 m b) 26,6 m	Is		a) 0.000 075 b) 0.000 023		Pu^{239} → α

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$ ($T_{1/2}$ für $\varnothing_s$)	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{92}$U	236	144	$2{,}39 \cdot 10^{7}$ a ($2 \cdot 10^{16}$ a)	α, $\varnothing_s$	4.499	0.050	e^-	U^{235} (n, γ)
	237	145	6,75 d	β^-	0.249, 0.084	0.0264…0.371 ⟨14⟩ 0.0596, 0.208	e^-	U^{238} (d, p 2n); U^{238} (α, αn); U^{238} (n, 2n); U^{236} (n, γ); Pu^{241} → α
U I	238	146	$4{,}51 \cdot 10^{9}$ a ($8{,}0 \cdot 10^{15}$ a)	α, $\varnothing_s$	4.195	a) 0.0447 b) 0.048	e^-	(in der Natur)
	239	147	23,54 m	β^-	1.21	0.0736	e^-	U^{238} (d, p); U^{238} (n, γ)
	240	148	14,1 h	β^-	0.36	kein γ		U^{239} (n, γ)
$_{93}$Np	231	138	∼ 50 m	α, ε ?	6.28			U^{233} (d, 4n); U^{235} (d, 6n); U^{238} (d, 9n)
	232	139	∼ 13 m	ε		γ vorh.		U^{233} (d, 3n)
	233	140	35 m	ε, (α)	5.53			U^{233} (p, n); U^{233} (d, 2n); U^{235} (d, 4n)
	234	141	4,40 d	ε, β^+	∼ 0.8	0.043…1.57 ⟨14⟩ 0.449, 0.752, 0.813		U^{235} (p, 2n); U^{235} (d, 3n); U^{235} (α, p 4n); U^{233} (d, n); U^{233} (α, p 2n); U^{235} (d, 3n); Pa^{231} (α, n); Pu^{234} ← ε
	235	142	410 d	ε, (α)	5.06	m. ε: kein γ; m. α: 0.026, 0.085		U^{235} (d, 2n); U^{235} (α, p 3n); U^{233} (α, pn); U^{238} (d, 5n)
	236	143	> 5000 a	?				U^{238} (d, 4n)
	236m ?	143	22 h	β^-, ε	0.518, 0.475	m. ε: 0.0453; m. β^-: 0.0446	e^-	U^{235} (d, n); U^{238} (d, 4n); U^{235} (α, p 2n); U^{233} (α, p); Np^{237} (d, p 2n); Np^{237} (α, αn); Np^{237} (n, 2n)
	237	144	$2{,}20 \cdot 10^{6}$ a (≧ $4 \cdot 10^{16}$ a)	α, $\varnothing_s$?	4.872, 4.816, 4.787, 4.767, 4.713, 4.674, 4.644, 4.589, 4.52	0.020, 0.029, 0.0568, 0.0869, 0.145, 0.175, 0.20	e^-	Am^{241} → α; U^{237} → β^-
	238	145	2,10 d	β^-	1.24, 1.13 ?, 0.28, 0.25, 0.20 ?	0.0440…1.030 ⟨11⟩ 0.1017, 0.943, 0.986	e^-	Np^{237} (d, p); Np^{237} (n, γ); U^{238} (p, n); U^{238} (d, 2n); U^{235} (α, p); U^{238} (α, p 3n); Am^{242} → α

	239	146	2,346 d ($\geqq 5 \cdot 10^{12}$ a)	β^-, $\varnothing_s$?	0.715, 0.655, 0.441, 0.380, 0.329	0.0446···0.490 ⟨22⟩ 0.1064, 0.2282, 0.278	e^-	U^{238} (d, n); U^{238} $(x, p\,2n)$; $Am^{243} \to \alpha$; $U^{239} \to \beta^-$
	240	147	60 m	β^-	0.89	0.085, 0.160, 0.245, 0.44, 0.57, 0.60, 0.92, 1.00, 1.16		U^{238} (α, pn)
	240m?	147	7,3 m	β^- kein Is	2.156, 1.59, 1.26, 0.76	0.0429, 0.557, 0.600, ~0.85, ~1.5		$U^{240} \to \beta^-$
	241	148	16 m	β^-	1.36			U^{238} (α, p)
$_{94}Pu$	232	138	36 m	ε, α	6.58			U^{233} $(\alpha, 5n)$; U^{235} $(\alpha, 7n)$
	233	139	20 m	ε, α	6.30			U^{233} $(\alpha, 4n)$
	234	140	9,0 h	ε, α	6.19	kein γ		U^{233} $(\alpha, 3n)$; U^{235} $(\alpha, 5n)$; $Cm^{238} \to \alpha$
	235	141	26 m	ε, (α)	5.85			U^{233} $(\alpha, 2n)$; U^{235} $(\alpha, 4n)$
	236	142	2,85 a ($3{,}5 \cdot 10^9$ a)	α, $\varnothing_s$	5.763, 5.716, 5.610	0.047, 0.110, 0.165	e^-	Np^{237} $(d, 3n)$; Np^{237} $(\alpha, p\,4n)$; U^{233} (α, n); U^{235} $(\alpha, 3n)$; U^{238} $(\alpha, 6n)$; $Cm^{240} \to \alpha$; $Np^{236} \to \beta^-$
	237	143	a) 45,6 d b) 44 d	ε, α	5.65, 5.36	0.0264?, 0.0332, 0.0435, 0.0556?, 0.0596, 0.0764, 0.099?	e^-	U^{235} $(\alpha, 2n)$; U^{238} $(\alpha, 5n)$; Np^{237} (p, n); Np^{237} $(d, 2n)$
	237m	143	0,18 s	Is		0.145		$Cm^{241} \to \alpha$
	238	144	86,4 a ($4{,}9 \cdot 10^{10}$ a)	α, $\varnothing_s$	5.495, 5.452, 5.352	0.0438, 0.099, 0.150, 0.203, 0.760, 0.810, 0.875	e^-	Np^{237} (d, n); U^{235} (α, n); U^{238} $(\alpha, 4n)$; $Cm^{242} \to \alpha$; $Np^{238} \to \beta^-$
	239	145	24 360 a ($5{,}5 \cdot 10^{15}$ a)	α, $\varnothing_s$	5.147, 5.134, 5.096, 5.064, 4.999, 4.917	0.037, 0.052, 0.120, 0.207, 0.34, 0.384	e^-	U^{238} $(\alpha, 3n)$; Pu^{238} (n, γ); $Np^{239} \to \beta^-$
	240	146	6600 a ($1{,}2 \cdot 10^{11}$ a)	α, $\varnothing_s$	5.162, 5.118, 5.014, (4.851)	0.0456, 0.1040	e^-	U^{238} $(\alpha, 2n)$; Pu^{239} (n, γ)
	241	147	13,0 a	β^-, α	α: 4.893, 4.848; β^-: 0.0208	m. α: 0.100, 0.145		U^{238} (α, n); Pu^{240} (n, γ)
	242	148	$3{,}79 \cdot 10^5$ a ($7{,}06 \cdot 10^{10}$ a)	α, $\varnothing_s$	4.898, 4.854			Pu^{241} (n, γ); $Am^{242m} \leftarrow \varepsilon$
	243	149	4,98 h	β^-	0.579, 0.490	0.0422, 0.054, 0.084, 0.096, 0.381		Pu^{242} (n, γ)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$ ($T_{1/2}$ für $\varnothing_s$)	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung		Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7		8
$_{94}$Pu	244	150	$7{,}5 \cdot 10^7$ a ($2{,}5 \cdot 10^{10}$ a)	α, $\varnothing_s$	4.8?			Pu^{243} (n, γ); Am^{244} ← ε; Cm^{248} → α
	245	151	10,6 h	β^-				Pu^{244} (n, γ)
	246	152	10,85 d	β^-	0.33, 0.15	0.027, 0.047, ∼ 0.08, 0.099, 0.175, 0.215		Pu^{245} (n, γ)
$_{95}$Am	237	142	∼ 1,3 h	ε, (α)	6.01			Pu^{239} (p, 3n); Pu^{239} (d, 4n)
	238	143	1,86 h	ε		0.102, 0.58, 0.98	e⁻	Pu^{239} (p, 2n); Pu^{239} (d, 3n)
	239	144	12 h	ε, (α)	5.75	m. ε: 0.0447···0.278 ⟨9⟩ 0.0573, 0.228, 0.278; m. α: 0.048	e⁻	Pu^{239} (p, n); Pu^{239} (d, 2n); Pu^{239} (α, p 3n); Np^{237} (α, 2n); Bk^{243} → α
	240	145	51 h	ε kein α		0.429, 0.989, 1.02, 1.40	e⁻	Pu^{239} (d, n); Pu^{239} (α, p 2n); Np^{237} (α, n)
	241	146	458 a ($1{,}2 \cdot 10^{12}$ a)	α, $\varnothing_s$	5.534, 5.500, 5.477, 5.435, 5.378, 5.311	0.0263···0.430 ⟨16⟩ 0.0263, 0.0331, 0.0433, 0.0555, 0.0595, 0.0988	e⁻	Pu^{241} → β^-
	242	147	∼ 100 a	β^-, ε, α	α: 5.5; β^-: 0.585	m. ε: 0.0445; m. β^-: 0.0421		Am^{241} (n, γ)
	242m	147	16,01 h	β^-, ε, Is?	0.667, 0.625	m. β^-: 0.0421; m. ε: 0.0445; m. Is: 0.0441?		Am^{241} (n, γ)
	243	148	7950 a	α	5.339, 5.308, 5.266, 5.224, 5.169	0.0746		Am^{242} (n, γ); Pu^{243} → β^-
	244	149	26 m	β^-, (ε)	1.5	kein γ		Am^{243} (n, γ)
	245	150	2,07 h	β^-	0.88	0.036, 0.078?, 0.140, 0.153, 0.230, 0.255		Pu^{245} → β^-
	246	151	25,0 m	β^-	2.10, 1.60, 1.31	0.035, 0.245, 0.78, 1.06		Pu^{246} → β^-

$_{96}$Cm	238	142	2,5 h	ε, α	6.50			Pu^{239} (α, 5n)
	239	143	2,9 h	ε kein α		0.188		Pu^{239} (α, 4n)
	240	144	26,8 d (1,9 · 10^6 a)	α, $\varnothing_s$	6.25			Pu^{239} (α, 3n); Th^{232} (C^{12}, 4n)
	241	145	35 d	ε, α	5.90	0.472, 0.60; (m. Is in Pu^{237m}: 0.145)		Am^{241} (p, n); Pu^{239} (α, 2n)
	242	146	162,5 d (7,2 · 10^6 a)	α, $\varnothing_s$	6.110, 6.066, 5.964	0.0441, 0.102, 0.158	e^-	Am^{241} (d, n); Pu^{239} (α, n); Cf^{246} → α; Am^{242} → β^-
	243	147	35 a	α, ε	6.061 ··· 5.634 ⟨11⟩ 5.987, 5.780, 5.736	0.104, 0.226, 0.278		Cm^{242} (n, γ); Bk^{243} ← ε
	244	148	a) 17,9 a b) 19,2 a (1,4 · 10^7 a)	α, $\varnothing_s$	5.802, 5.759, 5.661	0.0429, 0.100, 0.150	e^-	Cm^{243} (n, γ); Am^{244} → β^-; Am^{241} (α, p)
	245	149	a) 0,8 · 10^4 a b) 1,2 · 10^4 a	α	5.45, 5.36, 5.30	∼ 0.13, 0.173		Bk^{245} ← ε
	246	150	6600 a (2,0 · 10^7 a)	α, $\varnothing_s$	5.37			Cm^{245} (n, γ); Am^{246} → β^-
	247	151	> 4 · 10^7 a	[α]				
	248	152	4,7 · 10^5 a (4,6 · 10^6 a)	α, $\varnothing_s$	5.05			Cf^{252} → α
	249	153	64 m	β^-	0.86			Cm^{248} (n, γ)
⋮	250	154	? (2 · 10^4 a)	α ?, $\varnothing_s$				H-Bomben-Produkt
$_{97}$Bk	243	146	4,5 h	ε, α	6.72, 6.55, 6.20	m. ε: 0.74, 0.84, 0.96; m. α: 0.042, 0.146, 0.187, 0.54		Cm^{242} (d, n); Am^{241} (α, 2n)
	244	147	4,4 h	ε, (α)	6.67	m. ε: 0.20, 0.90, 1.06, 1.16, 1.23, 1.37, 1.50, 1.72		Am^{241} (α, n)
	245	148	4,98 d	ε, α	6.37, 6.17, 5.89	m. ε: 0.250, 0.380; m. α: 0.164, 0.206, 0.480		Cm^{244} (d, n); Cm^{242} (α, p); Am^{243} (α, 2n)

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$ ($T_{1/2}$ für $\varnothing_s$)	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung	Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7	8
$_{97}$Bk	246	149	1,8 d	ε		0.80, 1.09	Am^{243} (α, n); U^{238} (N^{14}, $2p\ 4n$)
	247	150	~ 10^4 a	α kein ε	5.67, 5.51, 5.30	0.084, 0.27	Cm^{244} (α, n) $Cf^{247} \leftarrow \varepsilon$
	248	151	a) 16 h b) 23 h	β^-, ε	0.65		Bk^{247} (n, γ); $Es^{252} \rightarrow \alpha$
	249	152	314 d ($6 \cdot 10^8$ a)	β^-, α, $\varnothing_s$	α: 5.42, 5.03; β^-: 0.125	m. β^-: kein γ; m. α: 0.32	Bk^{248} (n, γ); $Cm^{249} \rightarrow \beta^-$; $Es^{253} \rightarrow \alpha$
	250	153	3,22 h	β^-	1.76, 0.725	0.0422, 0.0982, (0.890), (0.930), 0.990, 1.032 e^-	Bk^{249} (n, γ); $Es^{254} \rightarrow \alpha$
$_{98}$**Cf**	244	146	25 m	α, ε?	7.17		Cm^{242} (α, $2n$); U^{238} (C^{12}, $6n$)
	245	147	44 m	ε, α	7.11		Cm^{242} (α, n); Cm^{244} (α, $3n$)
	246	148	35,7 h (2100 a)	α, $\varnothing_s$	6.753, 6.711	0.042, 0.096, 0.146	Cm^{243} (α, n); Cm^{244} (α, $2n$); U^{238} (C^{12}, $4n$)
	247	149	2,5 h	ε		0.295, 0.417, 0.460	Cm^{244} (α, n); U^{238} (N^{14}, $p\ 4n$)
	248	150	a) 350 d b) 225 d ($7 \cdot 10^3$ a)	ε, α, $\varnothing_s$	6.26		Cm^{245} (α, n); U^{238} (N^{14}, $p\ 3n$)
	249	151	360 a ($1,5 \cdot 10^9$ a)	α, $\varnothing_s$	6.194…5.687 ⟨~ 10⟩ 5.806, 5.749	0.050 ?, 0.107 ?, 0.255, 0.340, 0.394	$Bk^{249} \rightarrow \beta^-$; $Es^{249} \leftarrow \varepsilon$; $Fm^{253} \rightarrow \alpha$
	250	152	10,9 a ($1,5 \cdot 10^4$ a)	α, $\varnothing_s$	6.024, 5.980	0.0429	$Bk^{250} \rightarrow \beta^-$; $Es^{250} \leftarrow \varepsilon$; $Fm^{254} \rightarrow \alpha$
	251	153	~ 800 a	α			$Fm^{255} \rightarrow \alpha$; $Es^{251} \leftarrow \varepsilon$
	252	154	a) 2,6 a b) 2,2 a (66 a)	α, $\varnothing_s$	6.112, 6.069	0.043, 0.10	
	253	155	17 d	β^-	0.27, 0.17 ?		
	254	156	(56,2 d)	$\varnothing_s$			$Es^{254m} \leftarrow \varepsilon$

$_{99}$Es	246	147	7,3 m	ε ?, α	7.35			U^{238} (N^{14}, 6*n*)
	248	149	25 m	ε, α	6.87			Cf^{249} (*d*, 3*n*)
	249	150	2 h	ε, α	6.76			Bk^{249} (α, 4*n*)
	250	151	8 h	ε				Bk^{249} (α, 3*n*)
	251	152	1,5 d	ε, α	6.48			Bk^{249} (α, 2*n*)
	252	153	~ 140 d	α	6.64			Bk^{249} (α, *n*)
	253	154	20,03 d (7 · 10^5 a)	α, $\varnothing_s$	6.633…6.176 ⟨10⟩ 6.633, 6.592	0.0417, 0.051, 0.385, 0.427		Cf^{253} → β^-; Fm^{253} ← ε
	254	155	a) 480 d b) 320 d	α	6.42	0.062		Es^{253} (*n*, γ)
	254^m	155	38,5 h	β^-, (ε)	1.04	0.66		Es^{253} (*n*, γ)
	255	156	a) 24 d b) 30 d	β^-				
⋮	256	157	kurz	[β^-]				Es^{255} (*n*, γ)
$_{100}$Fm ⋮	248 249	148 149	kurz	α				
	250	150	30 m	α, ε	7.43			U^{238} (O^{16}, 4*n*); $Cf^{249…252}$ (α, *xn*)
	251	151	7 h	ε, α	6.89			$Cf^{249…252}$ (α, *xn*)
	252	152	a) 22,7 h b) 30 h	α	7.05			$Cf^{249…252}$ (α, *xn*)
	253	153	~ 4,5 d	ε, α	6.94			$Cf^{249…252}$ (α, *xn*)
	254	154	3,24 h (246 d)	α, $\varnothing_s$	7.20	0.041, 0.098	e^-	Es^{254m} → β^-
	255	155	21,5 h (> 60 a)	α, $\varnothing_s$	a) 7.03 b) 7.08	~ 0.055, ~ 0.082		Es^{255} → β^-
	256	156	(2,7 h)	$\varnothing_s$				Es^{255} (*n*, γ) Es^{256} → β^-

Symbol und Z	A	N	Halbwertszeit $T_{1/2}$ ($T_{1/2}$ für $\varnothing_s$)	Umwandlung	Energie der Strahlung [MeV] Teilchen	γ-Strahlung	Erzeugungsreaktionen
1	2	3	4	5	6	7	8
$_{101}$**Md**	255	156	~ 30 m	ε, α	7.34 ?		Es^{253} (α, 2n)
	256	157	~ 1,5 h	[ε]			Es^{253} (α, n)
$_{102}$**No** :	251	149	[1]) 10 m	α	8.5		Cm^{244} (C^{13}, 6n)
	253	151	10 m				Cm^{244} (C^{13}, 4n)
	254	152	3 s	α			Cm^{246} (C^{12}, 4n)

[1]) Angaben über No^{251} nach P. R. Fields, A. M. Friedman u. a., Phys. Rev. **107**, 1460 (1957); A. Ghiorso, T. Sikkeland, Phys. Rev. Letters **1**, 17 (1958) konnten diese Ergebnisse nicht bestätigen.

Tabelle 3. Wichtige Konstanten der Atomphysik

Als Grundlage für die in dieser Tabelle aufgeführten Werte der Fundamentalkonstanten dienten die von E. R. COHEN und J. W. M. DUMOND mehrfach[1]) veröffentlichten Berechnungen der Fundamentalkonstanten, die über ein umfassendes Ausgleichsverfahren gewonnen wurden. Nach Abschluß der von COHEN und DU MOND durchgeführten Rechnungen stellte sich leider heraus, daß der (aus der Quantenelektrodynamik folgende) Korrekturfaktor $\frac{\mu_e}{\mu_B}$ für das magnetische Moment des Elektrons — infolge eines Rechenfehlers in einer Arbeit von KARPLUS und KROLL[2]) — mit einem etwas zu kleinen Wert eingesetzt wurde. Unter Berücksichtigung des berichtigten Wertes für $\frac{\mu_e}{\mu_B}$ wurden von COHEN und DUMOND nur für $e, m_e, h, \alpha, \Lambda$[3]), N_L und F neuberechnete Werte veröffentlicht[4]). Diese Werte werden in der vorliegenden Tabelle wiedergegeben. Die übrigen Werte der Tabelle sind größtenteils unter Berücksichtigung der acht angegebenen Werte neu berechnet worden, so daß sich die wichtigsten Beziehungen widerspruchsfrei ergeben; dabei wurden in der Regel die von COHEN und DU MOND angegebenen Fehlergrenzen (mittlere quadratische Fehler) beibehalten. Die Massenwerte M_H und M_D entstammen neueren Meßergebnissen, während die Werte für R_∞, R_H, R_D, σ, R_0 und V_0 der ursprünglichen Arbeit von COHEN und DU MOND entnommen sind. Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum wurde der Wert $c = 2{,}997\,929 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1} eingesetzt; dieser Wert wurde von E. BERGSTRAND auf dem internationalen Kongreß über die Fundamentalkonstanten, Turin 1956, als bester Wert angesehen.[5]) Von COHEN und DUMOND wurde $2{,}997\,930 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1} angenommen, während in einer jüngeren Arbeit von BEARDEN und THOMSEN[6]) der Wert $2{,}997\,928 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1} ermittelt wurde.

Für die angeführten Werte über das Alphateilchen wurde der Massenwert des neutralen Heliumatoms, $M_{He} = (4{,}003\,873\,0 \pm {}'10)$ AME, zugrunde gelegt; dieses ist der Mittelwert der Massenwertangaben von DRUMMOND, von MATTAUCH und EVERLING sowie von SMITH[7]).

Die Fehlerangaben beziehen sich auf Einheiten der letzten angegebenen Dezimalen, dabei soll der Apostroph auf die weggelassenen Nullen hinweisen; z. B. ist der o. a. Massenwert M_{He} folgendermaßen zu lesen: $(4{,}003\,873\,0 \pm 0{,}000\,001\,0)$ AME.

---

[1]) E. R. COHEN, J. W. M. DUMOND, TH. W. LAYTON und J. S. ROLLETT, Revs. Mod. Phys. **27**, 363 (1955); J. W. M. DU MOND, Suppl. Nuovo Chim. **6**, 68 (1957); E. R. COHEN und J. W. M. DU MOND in: S. FLÜGGE, Handb. der Physik, Bd. 35, S. 1, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957; E. R. COHEN, K. M. CROWE und J. W. M. DU MOND The Fundamental Constants of Physics. New York—London 1957.

[2]) M. KARPLUS und N. M. KROLL, Phys. Rev. **81**, 73 (1951).

[3]) Λ ist der Umrechnungsfaktor von der Siegbahnschen X-Einheit in mÅ (s. S. 887).

[4]) E. R. COHEN und J. W. M. DU MOND, Phys. Rev. Letters **1**, 291 (1958); dazu Druckfehlerberichtigung in Phys. Rev. Letters **1**, 382 (1958).

[5]) E. BERGSTRAND, Suppl. Nuovo Chim. **6**, 224 (1957).

[6]) J. A. BEARDEN und J. S. THOMSON, Am. J. Phys. **27**, 569 (1959).

[7]) Zitate [D 1], [M 2] und [S 2] auf S. 791

Konstante	Symbol	Zahlenwert und Fehlergrenzen	Zehnerpotenz und Einheiten im CGS-System (a) im MKSA-System (b)	
		Atomkonstanten		
Feinstrukturkonstante (Sommerfeld-Konstante)	$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$	7,297 19 ± '3	10^{-3}	(a)
	$= \frac{\mu_0 c e^2}{2h} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}$ [1]	7,297 19 ± '3	10^{-3}	(b)
	$\frac{1}{\alpha}$	137,0391 ± '6		
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	2,997 929 ± '2	10^{10} cm sec^{-1} 10^{8} m sec^{-1}	(a) (b)
Elementarladung	e	4,802 73 ± '9 1,602 02 ± '3	10^{-10} esL 10^{-19} Cb	(a) (b)
Gravitationskonstante	γ	6,670 ± '7	10^{-8} dyn cm^2 g^{-2} 10^{-11} N m^2 kg^{-2}	(a) (b)
Plancksche Konstante	h	6,624 91 ± '23	10^{-27} erg sec 10^{-34} J sec	(a) (b)
Quantenmech. Einheit des Drehimpulses	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	1,054 39 ± '4	10^{-27} erg sec 10^{-34} J sec	(a) (b)
Bohrsches Magneton	$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e c}$	9,272 7 ± '4	10^{-21} erg Gauß$^{-1}$	(a)
	$= \frac{eh}{4\pi m_e}$ [2]	9,272 7 ± '4	10^{-24} J m^2 Wb^{-1} oder A m^2	(b)
Kernmagneton	$\mu_K = \frac{eh}{4\pi m_p c}$	5,050 20 ± '20	10^{-24} erg Gauß$^{-1}$	(a)
	$= \frac{eh}{4\pi m_p}$ [2]	5,050 20 ± '20	10^{-27} J m^2 Wb^{-1} oder A m^2	(b)
Rydberg-Konstante für unendliche Masse (R_H und R_D s. u.)	R_∞	109 737,309 ± '12	cm^{-1} 10^{2} m^{-1}	(a) (b)

[1] μ_0 ist die magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Wb A^{-1}m^{-1} = 1,256 637 $\cdot 10^{-6}$ Wb A^{-1}m^{-1} (Definition);
ε_0 ist die elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ = (8,854 162 ± '12) $\cdot 10^{-12}$ A sec V^{-1} m^{-1}.

[2] Man kann das Bohrsche Magneton und das Kernmagneton im MKSA-System auch durch folgende Gleichungen definieren:

Bohrsches Magneton $\overline{\mu}_B = \frac{\mu_0 eh}{4\pi m_e}$ = (1,165 24 ± '4) $\cdot 10^{-29}$ Wb m,

Kernmagneton $\overline{\mu}_K = \frac{\mu_0 eh}{4\pi m_p}$ = (6,346 27 ± '20) $\cdot 10^{-33}$ Wb m .

Konstante	Symbol	Zahlenwert und Fehlergrenzen	Zehnerpotenz und Einheiten im CGS-System (a) im MKSA-System (b)
Elektron			
Ruhemasse (reduzierte Masse s. Wasserstoffatom)	m_e	9,108 2 ± '3	10^{-28} g (a) 10^{-31} kg (b)
Massenwert	M_e	5,487 71 ± '6	10^{-4} AME
Spezifische Ladung	$\frac{e}{m_e}$	5,272 97 ± '7 1,758 88 ± '2	10^{17} esL g^{-1} (a) 10^{11} Cb kg^{-1} (b)
Magnetisches Moment	μ_e	9,283 4 ± '2	10^{-21} erg $Gauß^{-1}$ (a) 10^{-24} J m^2 Wb^{-1} (b)
Verhältnis magnetisches Moment zu Bohrsches Magneton	$\frac{\mu_e}{\mu_B}$ [1]	1,001 159 613 0	
Radius (klassischer Elektronenradius)	$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ $= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c}$	2,817 74 ± '4 2,817 74 ± '4	10^{-13} cm (a) 10^{-15} m (b)
Compton-Wellenlänge	$\lambda_{C,e} = \frac{h}{m_e c}$	2,426 20 ± '5	10^{-10} cm (a) 10^{-12} m (b)
de Broglie-Wellenlänge (falls kin. Energie des Elektrons 1 eV)	$\lambda_{B,e}$	1,226 352 ± '10	10^{-7} cm (a) 10^{-9} m (b)
Proton			
Ruhemasse	m_p	1,672 353 ± '3	10^{-24} g (a) 10^{-27} kg (b)
Massenwert	M_p	1,007 596 3 ± '2	AME
Spezifische Ladung	$\frac{e}{m_p}$	2,871 84 ± '7 9,579 41 ± '2	10^{14} esL g^{-1} (a) 10^7 Cb kg^{-1} (b)
Magnetisches Moment	μ_p	1,410 40 ± '4 2,792 76 ± '3	10^{-23} erg $Gauß^{-1}$ (a) 10^{-26} J m^2 Wb^{-1} (b) μ_K
Verhältnis Protonenmasse zu Elektronenmasse	$\frac{m_p}{m_e}$	1836,10 ± '2	
Gyromagnetisches Verhältnis des Protons (mit diamagn. Korrektur)	$\gamma_p = \frac{\mu_p}{I\hbar}$	2,675 30 ± '3	10^4 sec^{-1} $Gauß^{-1}$ (a) 10^8 m^2 sec^{-1} Wb^{-1} (b)
Compton-Wellenlänge	$\lambda_{C,p} = \frac{h}{m_p c}$	1,321 39 ± '2	10^{-13} cm (a) 10^{-15} m (b)
de Broglie-Wellenlänge (falls kin. Energie des Protons 1 eV)	$\lambda_{B,p}$	2,861 99 ± '4	10^{-9} cm (a) 10^{-11} m (b)

[1]) Für das Verhältnis $\frac{\mu_e}{\mu_B}$ gilt die aus der Quantenelektrodynamik folgende Beziehung:

$$\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}328\,\frac{\alpha^2}{\pi^2}.$$

Konstante	Symbol	Zahlenwert und Fehlergrenzen	Zehnerpotenz und Einheiten im CGS-System (a) im MKSA-System (b)
Neutron			
Ruhemasse	m_n	1,674 66 ± '2	10^{-24} g (a) 10^{-27} kg (b)
Massenwert	M_n	1,008 983 0 ± '17	AME
Magnetisches Moment	μ_n	— 0,966 17 ± '4	10^{-23} erg Gauß$^{-1}$ (a) 10^{-26} J m^2 Wb^{-1} (b)
		— 1,913 14 ± '5	μ_K
Verhältnis Neutronenmasse zu Elektronenmasse	$\frac{m_n}{m_e}$	1838,62 ± '2	
Compton-Wellenlänge	$\lambda_{C,n} = \frac{h}{m_n c}$	1,319 57 ± '5	10^{-13} cm (a) 10^{-15} m (b)
de Broglie-Wellenlänge (falls kin. Energie des Neutrons 1 eV)	$\lambda_{B,n}$	2,860 02 ± '4	10^{-9} cm (a) 10^{-11} m (b)
Wasserstoffatom			
Masse	m_H	1,673 264 ± '3	10^{-24} g (a) 10^{-27} kg (b)
Massenwert	M_H	1,008 145 1 ± '2	AME
Radius der 1. Bohrschen Bahn	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$	5,291 65 ± '2	10^{-9} cm (a)
	$= \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$	5,291 65 ± '2	10^{-11} m (b)
Rydberg-Konstante des H-Atoms	R_H	109 677,576 ± '12	cm^{-1} (a) 10^2 m^{-1} (b)
Reduzierte Masse des Elektrons im H-Atom	$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$	9,103 2 ± '3	10^{-28} g (a) 10^{-31} kg (b)
Deuteron			
Ruhemasse	m_d	3,343 049 ± '9	10^{-24} g (a) 10^{-27} kg (b)
Massenwert	M_d	2,014 193 7 ± '6	AME
Spezifische Ladung	$\frac{e}{m_d}$	1,436 63 ± '4 4,792 08 ± '2	10^{14} esL g^{-1} (a) 10^7 Cb kg^{-1} (b)
Deuterium			
Masse	m_D	3,343 960 ± '9	10^{-24} g (a) 10^{-27} kg (b)
Massenwert	M_D	2,014 742 5 ± '6	AME
Rydberg-Konstante des Deuteriums	R_D	109 707,419 ± '12	cm^{-1} (a) 10^2 m^{-1} (b)
Alphateilchen			
Ruhemasse	m_α	6,643 59 ± '18	10^{-24} g (a) 10^{-27} kg (b)
Massenwert	M_α	4,002 775 5 ± '10	AME
Spezifische Ladung	$\frac{2e}{m_\alpha}$	1,445 82 ± '5 4,822 74 ± '16	10^{14} esL g^{-1} (a) 10^7 Cb kg^{-1} (b)

Konstante	Symbol	Zahlenwert und Fehlergrenzen	Zehnerpotenz und Einheiten im CGS-System (a) im MKSA-System (b)
		Strahlungskonstanten	
Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante	σ	5,668 7 ± '10	10^{-5} erg sec^{-1} cm^{-2} $grad^{-4}$ (a) 10^{-8} W m^{-2} $grad^{-4}$ (b)
Konstante des Wienschen Verschiebungsgesetzes	$\lambda_{max} T$	0,289 778 ± '13	cm grad (a) 10^{-2} m grad (b)
1. Konstante des Planckschen Strahlungsgesetzes	$c_1 = 8\pi hc$	4,991 6 ± '2	10^{-15} erg cm (a) 10^{-24} J m (b)
2. Konstante des Planckschen Strahlungsgesetzes	$c_2 = \frac{hc}{k}$	1,438 78 ± '7	cm grad (a) 10^{-2} m grad (b)
		Konstanten der Thermodynamik	
Avogadrosche Konstante[1])	$n^* = \frac{N_L}{V_0}$	2,687 26 ± '10	10^{19} cm^{-3} (a) 10^{25} m^{-3} (b)
Loschmidtsche Konstante[2])	N_L	6,025 02 ± '16 6,023 36 ± '20	10^{23} mol_{ph}^{-1} (a) 10^{26} $kmol_{ph}^{-1}$ (b) 10^{23} mol_{ch}^{-1} (a) 10^{26} $kmol_{ch}^{-1}$ (b)
Universelle Gaskonstante	R_0	8,316 96 ± '34 8,314 67 ± '40	10^{7} erg $grad^{-1}$ mol_{ph}^{-1} (a) 10^{3} J $grad^{-1}$ $kmol_{ph}^{-1}$ (b) 10^{7} erg $grad^{-1}$ mol_{ch}^{-1} (a) 10^{3} J $grad^{-1}$ $kmol_{ch}^{-1}$ (b)
Boltzmann-Konstante	$k = \frac{R_0}{N_L}$	1,380 40 ± '7	10^{-16} erg $grad^{-1}$ (a) 10^{-23} J $grad^{-1}$ (b)
Molvolumen eines idealen Gases unter Normalbedingungen	V_0	22 420,7 ± '6 22 414,5 ± '7	cm^3 mol_{ph}^{-1} (a) $10^{-3} m^3$ $kmol_{ph}^{-1}$ (b) cm^3 mol_{ch}^{-1} (a) 10^{-3} m^3 $kmol_{ch}^{-1}$ (b)
Physikalische Normalatmosphäre	p_0 [3])	1,013 250	10^{6} dyn cm^{-2} (a) 10^{5} Newton m^{-2} (b)
Schmelzpunkt des Eises unter Normalbedingungen	T_0 [4])	273,150 0 ± '2	°K
Faradaysche Konstante	F	2,893 66 ± '3 9,652 19 ± '11 2,892 86 ± '5 9,649 53 ± '16	10^{14} esL val_{ph}^{-1} (a) 10^{7} Cb $kval_{ph}^{-1}$ (b) 10^{14} esL val_{ch}^{-1} (a) 10^{7} Cb $kval_{ch}^{-1}$ (b)
Sackur-Tetrode-Konstante (Entropiekonstante)	S_0 [5])	— 4,635 23 ± '14 — 4,633 96 ± '16	10^{8} erg $grad^{-1}$ mol_{ph}^{-1} (a) 10^{4} J $grad^{-1}$ $kmol_{ph}^{-1}$ (b) 10^{8} erg $grad^{-1}$ mol_{ch}^{-1} (a) 10^{4} J $grad^{-1}$ $kmol_{ch}^{-1}$ (b)
Verhältnis $\frac{\text{physik. Massenwert}}{\text{chem.Atomgewicht}}$ (Smythe-Faktor)	k_A oder r [6])	1,000 275	

[1]) Diese Größe wird in der engl. Literatur Loschmidtsche Konstante $L = \frac{N}{V_0}$ genannt.

[2]) In der engl. Literatur wird die Größe N = 6,025 02 · 10^{23} mol^{-1} Avogadrosche Konstante genannt.

[3]) Konventionell festgelegt (9e Conférence Générale des Poids et Mesures, Paris 1948).

[4]) Berechnet aus dem konventionell festgelegten Tripelpunkt des Wassers: T_{tr} = 273,16 °K (10e Conf. Générale des Poids et Mesures, Paris 1954).

[5]) Definiert durch die Gleichung:

$$S_0 = R_0 \left[\ln \frac{(2\pi R_0)^{3/2}}{h^3 N_L^4} + \frac{5}{2} \right].$$

[6]) Konventionell festgelegt, da der genaue Wert von der Herkunft der Probe abhängig ist (Variationen etwa von 1,000 268 bis 1,000 278).

Tabelle 4. Umrechnungsfaktoren und Äquivalenzbeziehungen

Umrechnungsfaktoren für Energiewerte[1])

	erg	J	kWh	$kcal_{15}$
1 erg	1	10^{-7}	$2{,}777\,778 \cdot 10^{-14}$	$2{,}389\,20 \cdot 10^{-11}$
1 J = 1 Newton m	10^7	1	$2{,}777\,778 \cdot 10^{-7}$	$2{,}389\,20 \cdot 10^{-4}$
1 kWh	$3{,}600\,000 \cdot 10^{13}$	$3{,}600\,000 \cdot 10^{6}$	1	$0{,}860\,11 \cdot 10^{3}$
1 $kcal_{15}$	$4{,}185\,5 \cdot 10^{10}$	$4{,}185\,5 \cdot 10^{3}$	$1{,}162\,64 \cdot 10^{-3}$	1
1 cm^3 atm	$1{,}013\,250 \cdot 10^{6}$	$1{,}013\,250 \cdot 10^{-1}$	$2{,}814\,583 \cdot 10^{-8}$	$2{,}420\,86 \cdot 10^{-5}$
1 l at	$0{,}980\,692 \cdot 10^{9}$	$0{,}980\,692 \cdot 10^{2}$	$2{,}724\,146 \cdot 10^{-5}$	$2{,}343\,08 \cdot 10^{-2}$
1 m kp	$0{,}980\,665 \cdot 10^{8}$	$0{,}980\,665 \cdot 10$	$2{,}724\,069 \cdot 10^{-6}$	$2{,}343\,01 \cdot 10^{-3}$
1 $J_{int} = 1 V_{int} A_{int}$ sec	$1{,}000\,19 \cdot 10^{7}$	$1{,}000\,19$	$2{,}778\,31 \cdot 10^{-7}$	$2{,}389\,65 \cdot 10^{-4}$

	cm^3 atm	l at	m kp	J_{int}
1 erg	$0{,}986\,924 \cdot 10^{-6}$	$1{,}019\,688 \cdot 10^{-9}$	$1{,}019\,716 \cdot 10^{-8}$	$0{,}999\,81 \cdot 10^{-7}$
1 J	$0{,}986\,924 \cdot 10$	$1{,}019\,688 \cdot 10^{-2}$	$1{,}019\,716 \cdot 10^{-1}$	$0{,}999\,81$
1 kWh	$3{,}552\,923 \cdot 10^{7}$	$3{,}670\,875 \cdot 10^{4}$	$3{,}670\,978 \cdot 10^{5}$	$3{,}599\,32 \cdot 10^{6}$
1 $kcal_{15}$	$4{,}130\,8 \cdot 10^{4}$	$4{,}267\,9 \cdot 10$	$4{,}268\,0 \cdot 10^{2}$	$4{,}184\,7 \cdot 10^{3}$
1 cm^3 atm	1	$1{,}033\,199 \cdot 10^{-3}$	$1{,}033\,227 \cdot 10^{-2}$	$1{,}013\,06 \cdot 10^{-1}$
1 l at	$0{,}967\,868 \cdot 10^{3}$	1	$1{,}000\,028 \cdot 10$	$0{,}980\,51 \cdot 10^{2}$
1 m kp	$0{,}967\,841 \cdot 10^{2}$	$0{,}999\,972 \cdot 10^{-1}$	1	$0{,}980\,48 \cdot 10$
1 J_{int}	$0{,}987\,11 \cdot 10$	$1{,}019\,88 \cdot 10^{-2}$	$1{,}019\,91 \cdot 10^{-1}$	1

Umrechnungsfaktoren, die aus der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz folgen

	g	AME	erg	MeV
1 g	1	$6{,}025\,0_2 \cdot 10^{23}$	$8{,}987\,57_8 \cdot 10^{20}$	$5{,}610\,1_6 \cdot 10^{26}$
1 AME	$1{,}659\,75 \cdot 10^{-24}$	1	$1{,}491\,71 \cdot 10^{-3}$	931,14
1 erg	$1{,}112\,647 \cdot 10^{-21}$	$670{,}37_2$	1	$6{,}242\,1_3 \cdot 10^{5}$
1 MeV	$1{,}782\,48 \cdot 10^{-27}$	$1{,}073\,95 \cdot 10^{-3}$	$1{,}602\,02 \cdot 10^{-6}$	1

Für die Elektronenmasse m_e gilt:

$$1\, m_e \mathrel{\hat{=}} (0{,}510\,985 \pm {}'7)\ \text{MeV}$$

Licht der Wellenlänge λ besteht aus Lichtquanten der Energie $E = h\nu$; daraus erhält man die Frequenz $\nu = \frac{E}{h}$, die Wellenlänge $\lambda = \frac{hc}{E}$ und die Wellenzahl $\nu^* = \frac{E}{hc}$, die einem Lichtquant der Energie $E = 1$ eV zuzuordnen sind:

$$1\ \text{eV} \mathrel{\hat{=}} (2{,}418\,18 \pm {}'5) \cdot 10^{14}\ \text{sec}^{-1}$$
$$\mathrel{\hat{=}} (8\,066{,}16 \pm 0{,}14)\ \text{cm}^{-1}$$
$$\mathrel{\hat{=}} (12\,397{,}48 \pm 0{,}22)\ \text{Å}$$

[1]) Zahlenwerte nach U. STILLE, Messen und Rechnen in der Physik, Braunschweig 1955.

In der Thermodynamik, Statistik und Molekülphysik werden folgende Beziehungen benötigt:

$$1\ \text{erg/Molekül} \mathrel{\widehat{=}} (1{,}439\,50 \pm {}'15) \cdot 10^{16}\ \text{cal/mol}_{ph}$$
$$1\ \text{eV/Molekül} \mathrel{\widehat{=}} (23\,061{,}0 \pm 2{,}4)\ \text{cal/mol}_{ph}$$
$$1\ \text{cal/mol}_{ph} \mathrel{\widehat{=}} (6{,}946\,86 \pm {}'70) \cdot 10^{-17}\ \text{erg/Molekül}$$
$$\mathrel{\widehat{=}} (4{,}336\,32 \pm {}'45) \cdot 10^{-5}\ \text{eV/Molekül}$$

Beziehung zwischen der Siegbahnschen X-Einheit (Längeneinheit in der Röntgenspektrometrie), Ångström und Meter:

$$1\ \text{Siegb. X-Einh.} = 1{,}002\,031 \cdot 10^{-3}\ \text{Å} = (1{,}002\,031 \pm {}'14) \cdot 10^{-13}\ \text{m}$$
$$1\ \text{Å} = (1{,}000\,000\,0 \pm {}'5) \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

Tabelle 5. Die chemischen Atomgewichte (1957)

Die Tabelle enthält die Atomgewichte und die Symbole der chemischen Elemente, wie sie auf der 19. Konferenz der International Union of Pure and Applied Chemistry angenommen wurden; E. WICHERS, Report on Atomic Weights for 1956—1957, J. Am. Chem. Soc. **80**, 4121 (1958). Bei denjenigen radioaktiven Elementen, die nicht in der Natur als bestimmtes Isotopengemisch vorkommen, ist in eckiger Klammer die Massenzahl des Isotops mit der größten Halbwertszeit angegeben.

Infolge der natürlichen Variationen in der relativen Häufigkeit der einzelnen Isotopen eines Elementes sind die Atomgewichte der chemischen Skala mit einer prinzipiellen Unsicherheit behaftet, die bei einigen 10^{-5} liegt (vgl. Erläuterungen zu Tabelle 1, Spalte 5, S. 789). Beim Schwefel sind die Variationen so groß, daß der Schwankungsbereich ± 3 Einheiten in der letzten Dezimalen beträgt.

1	H	Wasserstoff	1,0080	52	Te	Tellur	127,61
2	He	Helium	4,003	53	J	Jod	126,91
3	Li	Lithium	6,940	54	Xe	Xenon	131,30
4	Be	Beryllium	9,013	55	Cs	Caesium	132,91
5	B	Bor	10,82	56	Ba	Barium	137,36
6	C	Kohlenstoff	12,011	57	La	Lanthan	138,92
7	N	Stickstoff	14,008	58	Ce	Cer	140,13
8	O	Sauerstoff	**16**	59	Pr	Praseodym	140,92
9	F	Fluor	19,00	60	Nd	Neodym	144,27
10	Ne	Neon	20,183	61	Pm	Promethium	[145]
11	Na	Natrium	22,991	62	Sm	Samarium	150,35
12	Mg	Magnesium	24,32	63	Eu	Europium	152,0
13	Al	Aluminium	26,98	64	Gd	Gadolinium	157,26
14	Si	Silicium	28,09	65	Tb	Terbium	158,93
15	P	Phosphor	30,975	66	Dy	Dysprosium	162,51
16	S	Schwefel	32,066[1])	67	Ho	Holmium	164,94
17	Cl	Chlor	35,457	68	Er	Erbium	167,27
18	Ar	Argon	39,944	69	Tm	Thulium	168,94
19	K	Kalium	39,100	70	Yb	Ytterbium	173,04
20	Ca	Calcium	40,08	71	Lu	Lutetium	174,99
21	Sc	Scandium	44,96	72	Hf	Hafnium	178,50
22	Ti	Titan	47,90	73	Ta	Tantal	180,95
23	V	Vanadin	50,95	74	W	Wolfram	183,86
24	Cr	Chrom	52,01	75	Re	Rhenium	186,22
25	Mn	Mangan	54,94	76	Os	Osmium	190,2
26	Fe	Eisen	55,85	77	Ir	Iridium	192,2
27	Co	Kobalt	58,94	78	Pt	Platin	195,09
28	Ni	Nickel	58,71	79	Au	Gold	197,0
29	Cu	Kupfer	63,54	80	Hg	Quecksilber	200,61
30	Zn	Zink	65,38	81	Tl	Thallium	204,39
31	Ga	Gallium	69,72	82	Pb	Blei	207,21
32	Ge	Germanium	72,60	83	Bi	Wismut	209,00
33	As	Arsen	74,91	84	Po	Polonium	[209]
34	Se	Selen	78,96	85	At	Astatin	[210]
35	Br	Brom	79,916	86	Rn	Radon	[222]
36	Kr	Krypton	83,80	87	Fr	Francium	[223]
37	Rb	Rubidium	85,48	88	Ra	Radium	[226]
38	Sr	Strontium	87,63	89	Ac	Actinium	[227]
39	Y	Yttrium	88,92	90	Th	Thorium	232,05
40	Zr	Zirkonium	91,22	91	Pa	Protactinium	[231]
41	Nb	Niob	92,91	92	U	Uran	238,07
42	Mo	Molybdän	95,95	93	Np	Neptunium	[237]
43	Tc	Technetium	[97]	94	Pu	Plutonium	[244]
44	Ru	Ruthenium	101,1	95	Am	Americium	[243]
45	Rh	Rhodium	102,91	96	Cm	Curium	[247]
46	Pd	Palladium	106,4	97	Bk	Berkelium	[247]
47	Ag	Silber	107,880	98	Cf	Californium	[251]
48	Cd	Cadmium	112,41	99	Es	Einsteinium	[254]
49	In	Indium	114,82	100	Fm	Fermium	[253]
50	Sn	Zinn	118,70	101	Md	Mendelevium	[256]
51	Sb	Antimon	121,76	102	No	Nobelium	

[1]) Siehe Erläuterungen auf S. 887.

Tabelle 6. Periodisches System der Elemente

Die Zahlen vor den Elementsymbolen sind die Ordnungszahlen, die Zahlen darunter die Atomgewichte. Bei radioaktiven Elementen, die nicht in der Natur als bestimmtes Isotopengemisch vorkommen, ist [in eckiger Klammer] jeweils die Massenzahl des Isotops mit der größten Halbwertszeit angegeben (vgl. auch Erläuterungen zu Tabelle 5).

Periode	Gruppe I	Gruppe II	Gruppe III	Gruppe IV	Gruppe V	Gruppe VI	Gruppe VII	Gruppe VIII	0
1	1 H 1,0080								2 He 4,003
2	3 Li 6,940	4 Be 9,013	5 B 10,82	6 C 12,011	7 N 14,008	8 O 16,000	9 F 19,00		10 Ne 20,183
3	11 Na 22,991	12 Mg 24,32	13 Al 26,98	14 Si 28,09	15 P 30,975	16 S 32,066	17 Cl 35,457		18 Ar 39,944
4	19 K 39,100	20 Ca 40,08	21 Sc 44,96	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,94	26 Fe 27 Co 28 Ni 55,85 58,94 58,71	
	29 Cu 63,54	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916		36 Kr 83,80
5	37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc [97]	44 Ru 45 Rh 46 Pd 101,1 102,91 106,4	
	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,82	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,91		54 Xe 131,30
6	55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57—71 Lanthaniden	72 Hf 178,50	73 Ta 180,95	74 W 183,86	75 Re 186,22	76 Os 77 Ir 78 Pt 190,2 192,2 195,09	
	79 Au 197,0	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po [209]	85 At [210]		86 Rn [222]
7	87 Fr [223]	88 Ra [226]	89—103 Actiniden						

Lanthaniden (Seltene Erden)	57 La 138,92	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 Pm [145]	62 Sm 150,35	63 Eu 152,0	64 Gd 157,26	65 Tb 158,93	66 Dy 162,51	67 Ho 164,94	68 Er 167,27	69 Tm 168,94	70 Yb 173,04	71 Lu 174,99

Actiniden	89 Ac [227]	90 Th 232,05	91 Pa [231]	92 U 238,07	93 Np [237]	94 Pu [244]	95 Am [243]	96 Cm [247]	97 Bk [247]	98 Cf [251]	99 Es [254]	100 Fm [253]	101 Md [256]	102 No	103

NAMENVERZEICHNIS

SACHVERZEICHNIS

BILDQUELLENVERZEICHNIS

W. Finkelnburg, Einführung in die Atomphysik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954: 7. — S. Gamow and Critchfield, Theory of atomic Nucleus and Nuclear Energy-Sources, Clarendon-Press, Oxford 1951: 15, 16, 75, 78, 79, 80, 82, 92. — H. A. Bethe, Physikertagung 1955, Physikverlag, Mosbach/Baden 1956: 141. — Handbuch der Physik, Bd. **39:** 231, 234, 236, 263, 264, 272, 273; Bd. **40:** 182, 183, 184, 185, 188, 243; Bd. **42:** 237, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg. — E. Feenberg, Shell Theory of Nucleus, Princeton University Press, Princeton 1955: 227: — R. G. Sachs, Nuclear Theory, Addison Wesley Publish Comp., Cambridge 1953: 235. — Research Reactors (Selected Reference Material on Atomic Energy), Mc Graw Hill, New York 1955: 308, 309. — D. J. Hughes, Pile Neutron Research, Addison Wesley Publish. Comp., Cambridge 1953: 310, 317. — S. Glasstone and M. C. Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand, New York 1952: 323. — J. M. Blatt and V. F. Weißkopf, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley and Sons, New York 1952: 9, 115, 172, 281a. — E. Segré, Experimental Nuclear Physics, Vol. II, John Wiley and Sons, New York 1953: 76, 97. — M. G. Mayer and J. H. Jensen, Elementary Theory of Shell Structure, John Wiley and Sons, New York 1955: 198, 199, 206, 226, 230, 238, 239, 242, 243, 257.

Weitere Abbildungen sind aus verschiedenen einschlägigen Zeitschriften entnommen.

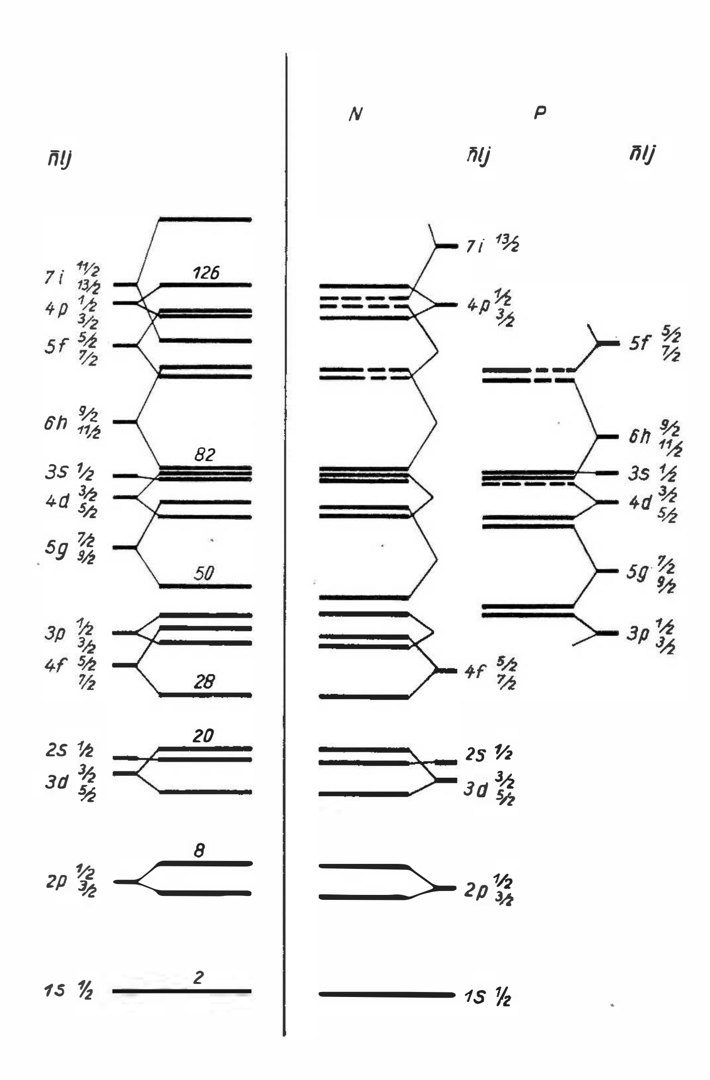
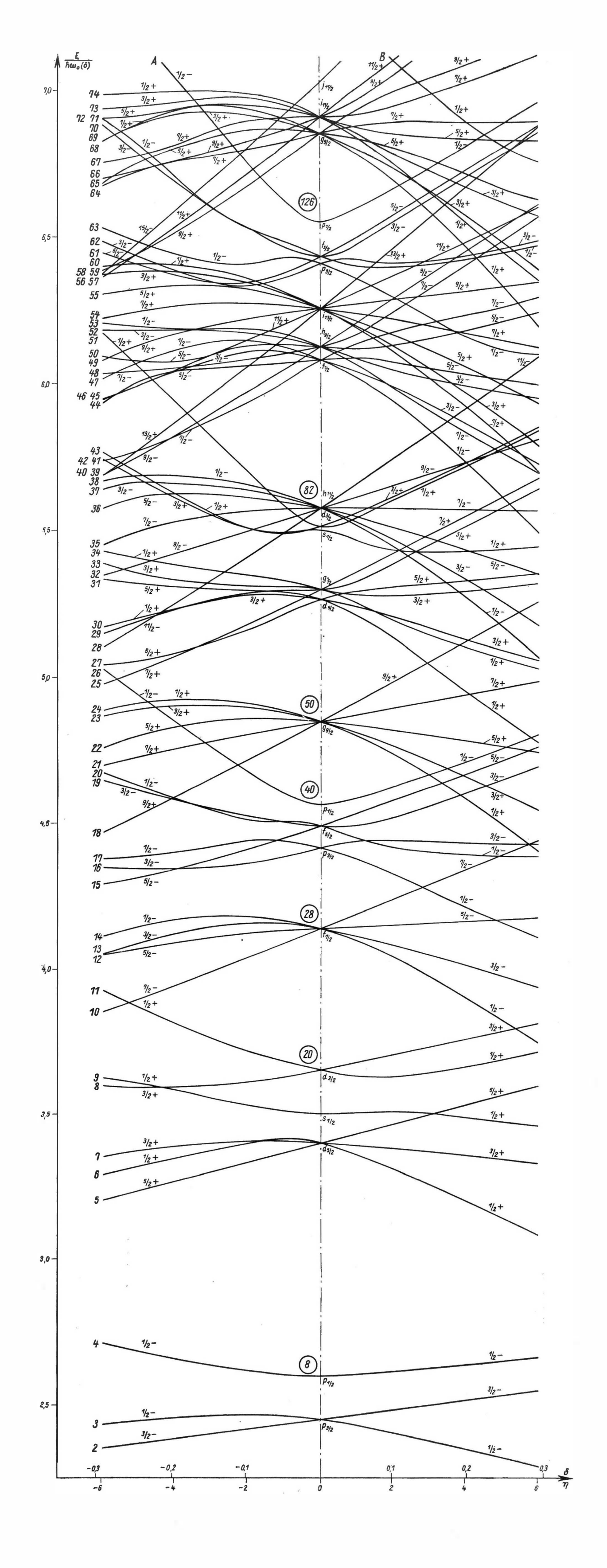


Abb. 232. Rechts empirisch geordnetes Schalenmodell-Termsystem für Neutronen (N) und Protonen (P). Das Protonentermsystem wurde nur in dem Z-Bereich ($Z > 50$) gezeichnet, in dem es vom Neutronentermsystem abweicht. Links zum Vergleich das theoretische Termsystem der Abb. 224b. Wegen der gestrichelten Terme vgl. Text. Korrektur: Im Protonentermsystem ist die richtige Termfolge vor dem Schalenabschluß 82: $h_{11/2}$ (gestrichelt), $d_{3/2}$, $s_{1/2}$, vgl. S. 553.



$\frac{E}{\hbar\omega_0(\delta)}$
A
B
$j_{15/2}$
$i_{11/2}$
$g_{9/2}$
126
$p_{1/2}$
$f_{5/2}$
$p_{3/2}$
$i_{13/2}$
$h_{9/2}$
$f_{7/2}$
82
$h_{11/2}$
$d_{3/2}$
$s_{1/2}$
$g_{7/2}$
$d_{5/2}$
50
$g_{9/2}$
40
$p_{1/2}$
$f_{5/2}$
$p_{3/2}$
28
$f_{7/2}$
20
$d_{3/2}$
$s_{1/2}$
$d_{5/2}$
8
$p_{1/2}$
$p_{3/2}$
7,0
6,5
6,0
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
-0,3
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
0,3
δ
-6
-4
-2
0
2
4
6
η

Beilage 2

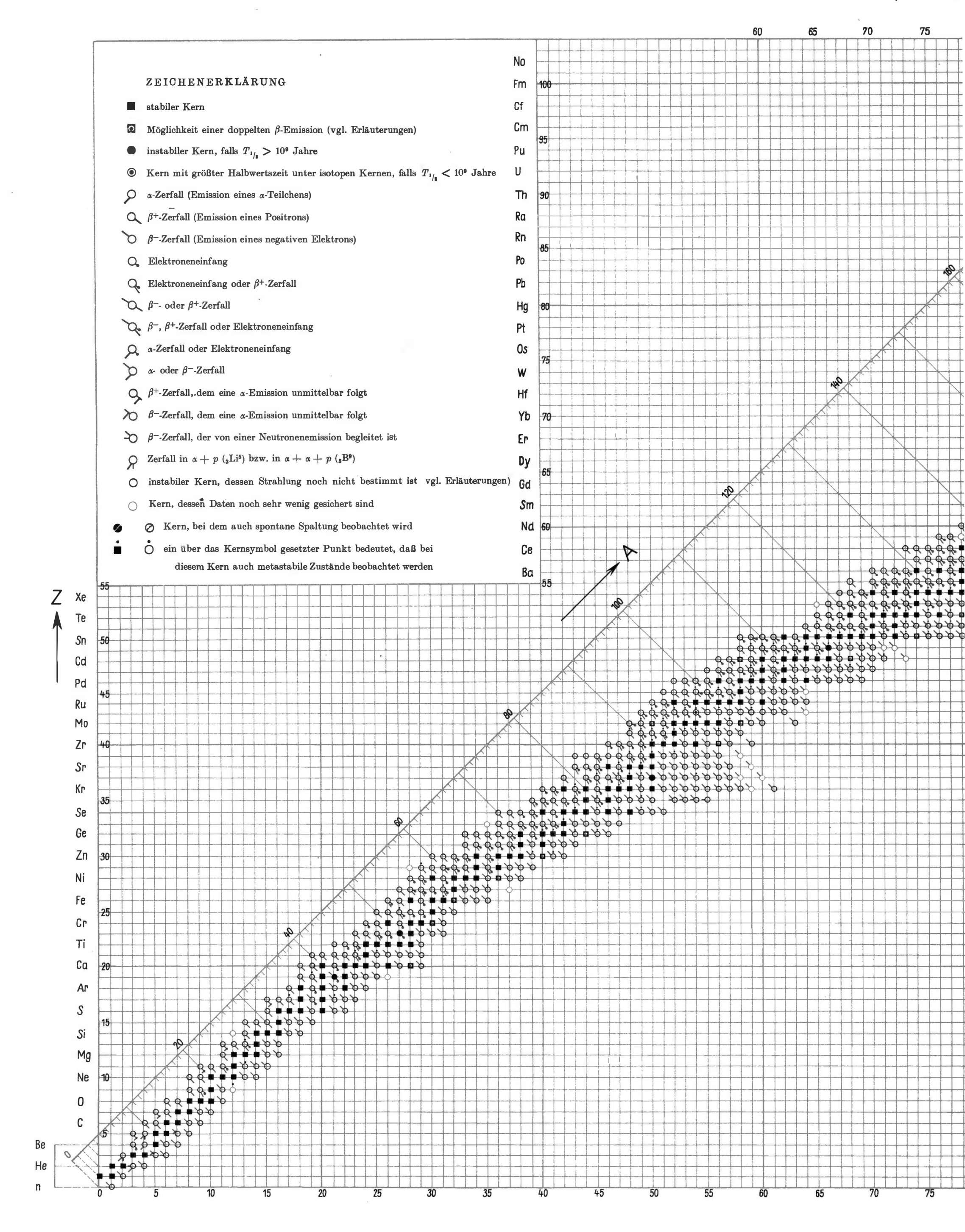
Tabelle 4

Nilssonsches Schema

(zu Kapitel IX)

TAFEL DER

(Stand vom



ATOMKERNE



rühjahr 1959)

→ N

ERLÄUTERUNGEN

Die Kerntafel enthält alle in der Natur vorhandenen und künstlich erzeugten Atomkerne, soweit sie bisher mit Sicherheit erkannt worden sind; außerdem sind einige Kerne eingetragen, bei denen die Halbwertszeit bekannt ist, die Zuordnung der Kernladungszahl oder Massenzahl jedoch nicht mit Sicherheit, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erfolgen kann. Die Lage jedes Kernes ergibt sich aus der Zahl der Protonen Z (Ordinate) und der Zahl der Neutronen $N = A - Z$ (Abszisse). An der mit dem Winkel von 45° ansteigenden Geraden kann man die Massenzahl A ablesen. Auf den Geraden parallel zur Abszisse befinden sich also die *isotopen* Kerne, parallel zur Ordinate die *isotonen* Kerne, während die *isobarcn* Kerne auf den Geraden $Z + N =$ const liegen.

Stabile Kerne sind als Quadrate gekennzeichnet, instabile Kerne als Kreise. Radioaktive Kerne, die in der Natur vorkommen, jedoch nicht Zerfallsprodukte der Ausgangskerne U^{238}, U^{235} oder Th^{232} sind, werden durch ausgefüllte Kreise dargestellt, ihre Halbwertszeiten sind $\geqq 10^9$ Jahre (mit Ausnahme des U^{235} mit $T_{1/2} \approx 0{,}7 \cdot 10^9$ a).

Die Symbole der Zerfallsarten sind so gewählt, daß man aus der angedeuteten Richtung den Tochterkern unmittelbar ablesen kann (wobei natürlich bei der α-Strahlung jeweils ein „Kern" übersprungen werden muß); γ-Strahlungen sind in der Kerntafel nicht angegeben. Kerne, bei denen metastabile Zustände vorkommen, sind durch einen über das Kernsymbol gesetzten Punkt gekennzeichnet; die angegebenen Strahlungen beziehen sich jedoch auf den Grundzustand des betreffenden Kernes. Eine gewisse Ausnahme hierzu bildet der Kern ${}_{70}Yb^{167}$, bei dem die beiden Aktivitäten β^+ und ε eingetragen sind, wobei noch nicht geklärt ist, ob die β^+-Strahlung ($T_{1/2} = 74$m) oder der Elektroneneinfang ($T_{1/2} = 18{,}5$m) vom Grundzustand ausgeht.

In den Fällen, wo bei einem als instabil gekennzeichneten Kern keine Strahlung angegeben ist, ist die Art des Zerfalls noch nicht bekannt (z. B. ${}_{39}Y^{82}$, ob ε oder β^+).

Atomkerne, bei denen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit *doppelter* β-Zerfall angenommen werden kann, sind durch ein Quadrat mit einem eingefügten roten Punkt gekennzeichnet. Diese Kerne verhalten sich in der Praxis wie stabile Kerne; ihre theoretisch berechneten Halbwertszeiten sind $> 10^{14}$ Jahre.

Aus Betrachtungen der genauen Kernmasse kann man bei einigen mittelschweren Kernen, die praktisch als stabil gelten, eine α-Strahlung mit sehr langer Lebensdauer vermuten. In einigen Fällen ist in jüngster Zeit der experimentelle Nachweis dieser α-Strahlung gelungen; diese Kerne sind durch das entsprechende Symbol als (langlebige) α-Strahler gekennzeichnet; Kerne, bei denen hingegen nur *Berechnungen* für eine Mindesthalbwertszeit vorliegen, sind als stabil eingetragen.

Strahlungen, die in Tabelle 2 (Instabile Kerne) mit Fragezeichen versehen sind, da die bisher bekannten Meßergebnisse darüber unzureichend oder sogar zweifelhaft sind, wurden in die Kerntafel nicht eingezeichnet. Ebensowenig sind jene Aktivitäten eingetragen, bei denen bei bekannter Kernladungszahl zur Zeit nur eine sehr ungenaue Zuordnung der Massenzahl möglich ist (z. B. ${}_{79}Au^{183 \cdots 187}$; $T_{1/2} = 4{,}3$ m; ε, β^+, α 5,07 MeV).

Einige Atomkerne, bei denen die Zuordnung der Kernladungszahl oder Massenzahl sowie die Meßergebnisse über ihren Zerfall noch *wenig* gesichert sind, werden durch *Graudruck* von den übrigen Kernen unterschieden (in Tabelle 2, Instabile Kerne, durch ⁝ gekennzeichnet).

Besonders erwähnt werden mögen die sehr kurzlebigen Kerne ${}_2He^5$, ${}_3Li^5$, ${}_5B^9$ und ${}_4Be^8$. Diese Kerne zerfallen praktisch im Augenblick ihrer Entstehung ($T_{1/2} \approx 10^{-21}$ s, für ${}_4Be^8 \approx 10^{-15}$s) und werden aus diesem Grund in manchen Tabellen nicht als „Kerne" aufgeführt. Schließlich ist auch das Neutron — obwohl kein Kern — in diese Tafel aufgenommen.

Beilage zu G. Hertz, Lehrbuch der Kernphysik, Band II
Bearbeitet von W. Lohmann